This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

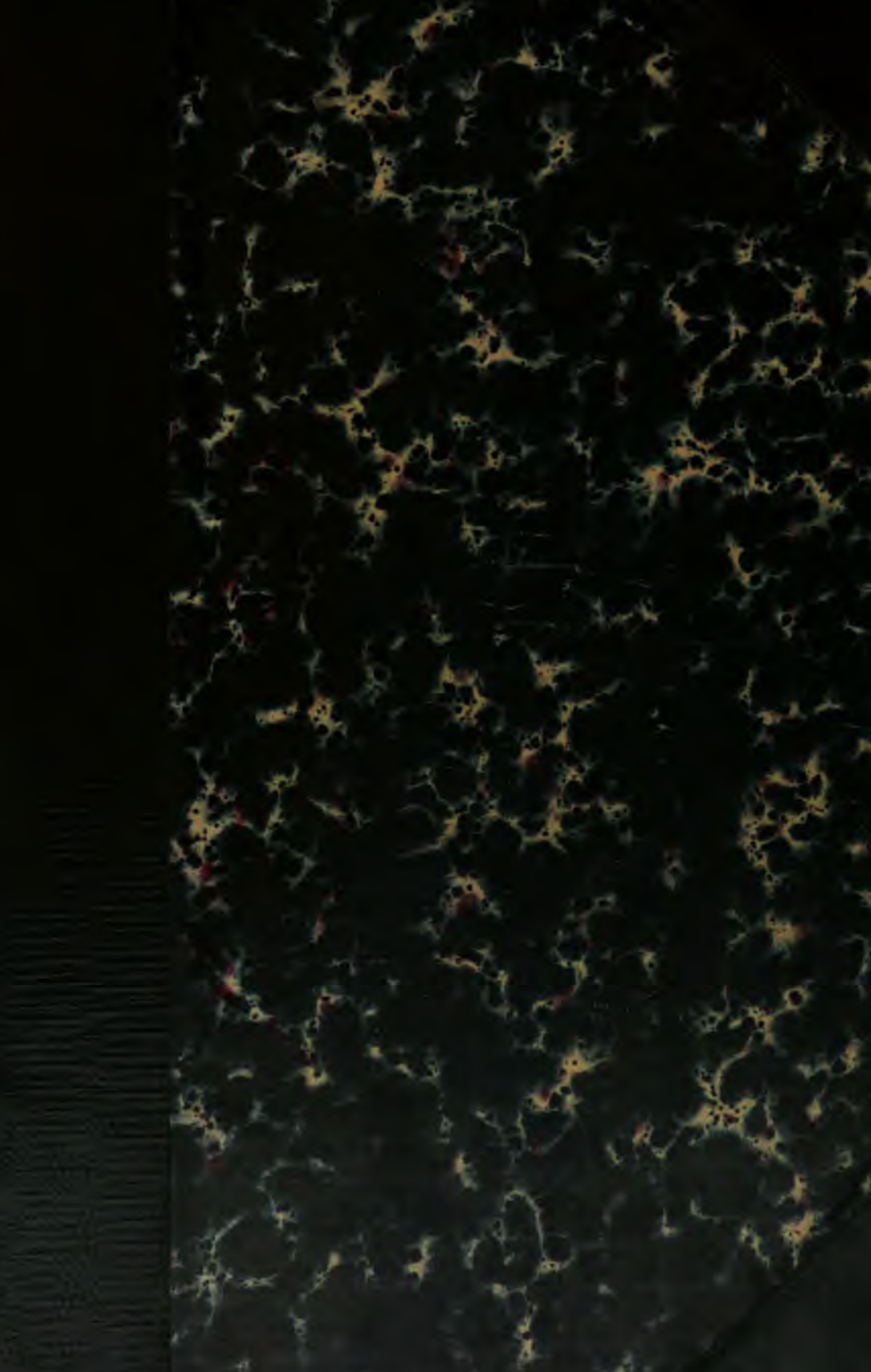
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



AKA
0427
,b

Library of the Museum

OF

COMPARATIVE ZOÖLOGY,

AT HARVARD COLLEGE, CAMBRIDGE, MASS.

The gift of the K. Akademie der Wissenschaften

No. 132
July 6, 1892 - Apr. 10, 1893

NAMEE

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

HUNDERTSTER BAND.

WIEN, 1891.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

C. BAND. ABTHEILUNG II. a.

JAHRGANG 1891. — HEFT I BIS X.

(Mit 11 Tafeln, 1 Kartenskizze und 33 Textfiguren.)

WIEN, 1891.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

Seite

I. Sitzung vom 8. Jänner 1891: Übersicht 3
II. Sitzung vom 15. Jänner 1891: Übersicht 4
III. Sitzung vom 22. Jänner 1891: Übersicht 5
IV. Sitzung vom 5. Februar 1891: Übersicht 99
V. Sitzung vom 19. Februar 1891: Übersicht 107
VI. Sitzung vom 5. März 1891: Übersicht 223
VII. Sitzung vom 12. März 1891: Übersicht 305
VIII. Sitzung vom 9. April 1891: Übersicht 349
IX. Sitzung vom 16. April 1891: Übersicht 455
X. Sitzung vom 23. April 1891: Übersicht 467
XI. Sitzung vom 8. Mai 1891: Übersicht 535
XII. Sitzung vom 14. Mai 1891: Übersicht 586
XIII. Sitzung vom 4. Juni 1891: Übersicht 743
XIV. Sitzung vom 11. Juni 1891: Übersicht 781
XV. Sitzung vom 18. Juni 1891: Übersicht 783
XVI. Sitzung vom 2. Juli 1891: Übersicht 799
XVII. Sitzung vom 9. Juli 1891: Übersicht 801
XVIII. Sitzung vom 16. Juli 1891: Übersicht 894
XIX. Sitzung vom 8. October 1891: Übersicht 923
XX. Sitzung vom 15. October 1891: Übersicht 936
XXI. Sitzung vom 22. October 1891: Übersicht 992
XXII. Sitzung vom 5. November 1891: Übersicht 1103
XXIII. Sitzung vom 12. November 1891: Übersicht 1151
XXIV. Sitzung vom 19. November 1891: Übersicht 1152
XXV. Sitzung vom 3. December 1891: Übersicht 1195
XXVI. Sitzung vom 10. December 1891: Übersicht 1244
XXVII. Sitzung vom 17. December 1891: Übersicht 1246

Adler G., Über den magnetischen Arbeitswerth von Substanzen veränderlicher Magnetisirungszahl, insbesondere von Eisen. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] . . . 469
— Über eine Bestimmungsmethode der Magnetisirungszahl fester Körper mittelst der Waage. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 897
Bidschof F., Bestimmung der Bahn des Kometen 1890 II. (Preis: 15 kr. = 30 Pfg.) 515
— Bestimmung der Bahn des Planeten (279) Thule. [Preis: 50 kr. = 1 RMk.] 937
Exner F., Elektrochemische Untersuchungen. (I. Mittheilung.) (Mit 5 Textfiguren.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 607

Seite

Gegenbauer L., Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 225

— Zur Theorie der Näherungsbrüche. [Preis: 75 kr. = 1 RMk. 50 Pfg.] 635

— Über die Ringfunctionen. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] . . 745

— Note über das Legendre-Jacobi'sche Symbol. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 855

— Über arithmetische Progressionen, in denen Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind. [Preis: 50 kr. = 1 RMk.] 1018

— Arithmetische Relationen. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] . . 1054

— Über den quadratischen Restcharakter. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 1072

Gmeiner A. J., Eine neue Darstellung des biquadratischen Charakters 1093

— Die Ergänzungssätze zum bicubischen Reciprocitätsgesetze. [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 1330

Haitinger L., Über die Emissionsspectra Neodym- und Praseodymoxydes und über neodymhaltende Leuchtsteine. (Mit 1 Textfigur.) (Vorläufige Mittheilung.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 914

Holetschek J., Über den Kometen des Jahres 1689. [Preis: 50 kr. = 1 RMk.] 1266

Hann J., Studien über die Luftdruck- und Temperaturverhältnisse auf dem Sonnblickgipfel, nebst Bemerkungen über deren Bedeutung für die Theorie der Cyclonen und Anticyclonen. [Preis: 70 kr. = 1 RMk. 40 Pfg.] 367

— Einige Resultate stündlicher meteorologischer Beobachtungen auf dem Gipfel des Fuji in Japan. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 1248

Jäger G., Über die Abhängigkeit der Capillaritätsconstanten von der Temperatur und deren Bedeutung für die Theorie der Flüssigkeiten (Mit 1 Textfigur.) Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 245

— Das Gesetz der Oberflächenspannung von Lösungen. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 493

— Über die Verdampfungswärme. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 1122

— Zur Theorie der Dissociation der Gase. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 1182

— Eine neue Methode, die Grösse der Molekeln zu finden. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 1283

Jaumann G., Notiz über eine Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit. (Mit 4 Textfiguren.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 1239

Kerner v. Marilaun F., Die Änderung der Bodentemperatur mit der Exposition. (Mit 2 Tafeln.) [Preis: 70 kr. = 1 RMk. 40 Pfg.] 704

Seite

Klemenčič I., Über die Reflexion von Strahlen elektrischer Kraft an Schwefel und Metallplatten. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 109

König R., Bestimmung der Bahn des Kometen 1857 III. [Preis: 45 kr. = 90 Pfg.] 21

Kohn G., Über einige projective Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 6

— Zur Theorie der associirten Formen. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 865

— Über die Resultante einer Covariante und einer Grundform. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 1013

Lampa A., Über die Absorption des Lichtes in trüben Medien. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 730

Liznar J., Eine Methode zur graphischen Darstellung der Richtungsänderungen der erdmagnetischen Kraft. (Mit 2 Tafeln und 1 Textfigur.) [Preis: 50 kr. = 1 RMk.] . . 1153

— Eine neue magnetische Aufnahme Österreichs. (III. Vorläufiger Bericht.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 1320

Löschardt F., Die neuesten Hypothesen über die Rotation des Planeten Venus. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 537

Luksch I., Veröffentlichungen der Commission für Erforschung des östlichen Mittelmeeres. (Vorläufiger Bericht über Lothungen und physikalische Beobachtungen im Sommer 1891.) (Mit 1 Kartenskizze.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] . . 927

Mahler E., Die Berechnung der Jahrpunkte (Thekuphenrechnung) im Kalender der Juden. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] . . . 71

Markovits St., Experimente über die Reibung zwischen Öl und Luft. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 15 kr. = 30 Pf.] 785

Mazelle E., Der tägliche Gang der Häufigkeit und Stärke der einzelnen Windrichtungen zu Triest. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 271

— Untersuchungen über den täglichen und jährlichen Gang der Windgeschwindigkeit in Triest. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 1363

Obermayer A., v., Zur Erklärung einer mit der fortführenden Entladung der Elektricität verbundenen Anziehungserscheinung. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 100

— Untersuchungen über die Entladung der Elektricität aus Spitzen, in verschiedenen Gasen, bei verschiedenen Drucken. (Mit 2 Tafeln und 5 Textfiguren.) [Preis: 60 kr. = 1 RMk. 20 Pfg.] 127

— Über das Zerstäuben von Eisendraht durch den elektrischen Entladungsschlag. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 453

Oppenheim S., Bestimmung der Bahn des Planeten (290) Bruna. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg] 306

Seite

Pfaundler L., Über eine verbesserte Methode, Wärmecapacitäten mittelst des elektrischen Stromes zu bestimmen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 352

Pick G., Über das System der covarianten Strahlencomplexe zweier Flächen zweiter Ordnung. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 561

— Über die conforme Abbildung einer Halbebene auf ein unendlich benachbartes Kreispolygon. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 1387

Pitsch H., Über Achromasie. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 1105

Puluj J., Bestimmung des Coefficienten der Selbstinduction mit Hilfe des Elektrodynamometers und eines Inductors. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 327

— Über die Wirkungen gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduction. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 767

Puschl C., Über das Verhalten gesättigter Dämpfe. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 843

— Über die inneren Kräfte von Flüssigkeiten und Gasen. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 994

Ruth F., Über einen neuen Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der klinogonalen Axonometrie. (Mit 3 Textfiguren) 1088

Stolz O., Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen. (Nachtrag.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] . . 1067

Tumlirz O., Über die Unterkühlung von Flüssigkeiten. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 1197

Vries, Jan de, Über räumliche Configurationen, welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleiten lassen. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 822

Waelsch E., Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 60 kr. = 1 RMk. 20 Pfg.] 158

— Zur Construction der Polargruppen. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 315

— Über eine geometrische Darstellung in der Theorie der binären Formen. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 574

— Über Formen fünfter Ordnung auf der cubischen Raumcurve. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 803

Weiss E., Über die Berechnung einer Kometenbahn mit Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung. [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 1132

Weyr E., Über Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlechte Eins. (II. Mittheilung.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 457

— Über Involutionen höheren Grades auf nichtrationalen Trägern. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 589

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. Band. I. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

I. SITZUNG VOM 8. JÄNNER 1891.

Der Secretär legt das erschienene IX. Heft des XI. Bandes (November 1890) der Monatshefte für Chemie vor.

Der Secretär legt ferner folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Das System der Kalkschwämme.“ (Vorläufige Mittheilung.) Von Herrn Dr. R. v. Lendenfeld, Privatdocent an der k. k. Universität in Innsbruck.
2. „Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen,“ von Herrn Emil Waelsch, Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.
3. „Die elektrischen Fluida, deren Wesen und Kraftäusserungen,“ von Herrn Franz Filipp Stögermayr, Elektrotechniker in Hietzing.

Herr August Rosiwal, Assistent an der k. k. technischen Hochschule in Wien, theilt die Ergebnisse der petrographischen Untersuchungen mit, welche er an dem Materiale der Graf Teleki — v. Höhnel'schen Expedition in Ostafrika vornahm.[1]

Weiters legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben ohne Inhaltsangabe behufs Wahrung der Priorität, von Herrn Ludwig Haitinger in Klosterneuburg vor.

Herr Dr. Eduard Mahler überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Die Berechnung der Jahrpunkte (Thekuphenrechnung) im Kalender der Juden.“

Herr Rudolf König überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Bestimmung der Bahn des Kometen 1857 III“.

[1] Siehe Anzeiger, 24. April 1890, Nr. X, S. 93.

II. SITZUNG VOM 15. JÄNNER 1891.

Der Secretär legt das erschienene VII. Heft (Juli 1890) der Abtheilung II. a., XCIX. Bd. der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer übersendet eine in seinem Laboratorium an der k. k. technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeit der Herren Prof. Rudolf Benedikt und Max Bamberger: „Über die Einwirkung von Jodwasserstoffsäure auf schwefelhaltige Substanzen".

III. SITZUNG VOM 22. JÄNNER 1891.

Der Secretär legt die Fortsetzung der von dem c. M. Herrn Geheimrath Dr. Carl Ludwig redigirten Zeitschrift: „Arbeiten aus der physiologischen Anstalt in Leipzig", Jahrgang 1890, 8°, vor.

Das c. M. Prof. Richard Maly in Prag übersendet zwei chemische Abhandlungen von Herrn Fr. Emich, Professor an der Technik in Graz, nämlich:

1. Über Biguanide;
2. Notizen über das Guanidin.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

James Lindsay, M. A., B. D., B. Sc., Notes on the Geology of Ayrshire. Glasgow, 1890; 8°.

Über einige projective Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone

von

Dr. **Gustav Kohn**,

Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. December 1890.)

Während die metrischen Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone sehr vielfach studirt worden sind, scheinen deren projective Eigenschaften die Aufmerksamkeit der Mathematiker nur in geringem Grade auf sich gelenkt zu haben; wenigstens sind bisher nur sehr wenige projective Eigenschaften dieser Polygone bekannt geworden.[1]

Die vorliegende Arbeit unternimmt es nun, auf einem äusserst einfachen Wege mehrere projective Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone abzuleiten. Unter Anderem wird gezeigt, dass mehrere Eigenschaften, welche Clebsch in seiner Abhandlung „Über das ebene Fünfeck“[2] für das Fünfeck gegeben hat, eine Ausdehnung auf Poncelet'sche Polygone von beliebiger Seitenanzahl gestatten; ferner wird für Poncelet'sche Polygone von ungerader Seitenzahl ein vollständiges Analogon des Satzes gefunden, wonach die unendlich vielen Dreiecke, die unter Umständen einem Kegelschnitt eingeschrieben und gleichzeitig einem zweiten umschrieben werden können, immer Poldreiecke für einen dritten Kegelschnitt sind.

---

[1] Herr Gino Loria hat eine Geschichte der Poncelet'schen Polygone geschrieben (I poligoni di Poncelet, Turin 1889); dort findet man genaue Angaben über die einschlägige Literatur.

[2] Math. Ann., Bd. IV, S. 476 f.

§. 1. Hilfssätze.

Die nachfolgenden Betrachtungen stützen sich auf zwei wohlbekannte und einfache Hilfssätze:

1. Ist ein symmetrisches Punktsystem 2. Grades [eine symmetrische (2, 2) Correspondenz] auf einem Kegelschnitt vorgelegt, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Curve 2. Classe.

2. Sind die Punkte eines Kegelschnittes projectiv bezogen auf die $\left\{\begin{matrix}\text{Punkte}\\\text{Tangenten}\end{matrix}\right.$ eines zweiten Kegelschnittes, so gibt es immer eine $\left\{\begin{matrix}\text{Collineation}\\\text{Correlation}\end{matrix}\right.$ der ganzen Ebenen dieser beiden Kegelschnitte, durch welche jene Beziehung vermittelt wird.

Der erste von diesen beiden Hilfssätzen ist in der Theorie der Poncelet'schen Polygone bereits verwerthet worden,[1] und zwar für eine Betrachtung, welche wir recapituliren müssen, weil auch hier von derselben Gebrauch gemacht werden soll.

Es seien zwei beliebige Kegelschnitte C und Γ in derselben Ebene vorgelegt. Man wähle auf C einen Punkt x beliebig, lege von x aus eine der beiden Tangenten an Γ und bezeichne ihren zweiten Schnittpunkt auf C mit x_1; von x_1 ziehe man wieder die Tangente, welche neben x_1x an Γ geht, und bezeichne ihren zweiten Schnittpunkt mit x_2; und fahre so fort. Die Construction des Punktes x_{n-1}, zu welchem man nach $(n-1)$-maliger Ausführung unserer Operation gelangt, ist hienach eine völlig eindeutige, sobald man von einer bestimmten unter den beiden Tangenten ausgeht, die vom Punkte x aus an den Kegelschnitt Γ gelegt werden können. Um uns bequem auszudrücken, wollen wir in der Folge den Punkt x_{n-1} als $(n-1)^{\text{ten}}$ Tangentialpunkt von x bezeichnen. Entsprechend den beiden Tangenten, welche vom Punkte x aus an Γ gehen, besitzt dieser Punkt zwei $(n-1)^{\text{te}}$ Tangentialpunkte, und da die Beziehung zwischen x und x_{n-1} offenbar eine symmetrische ist, so sagt der erste von unseren Hilfssätzen, dass, wenn der Punkt x den Kegelschnitt C durchläuft, die Verbindungslinie ξ desselben mit seinem $(n-1)^{\text{ten}}$

[1] Siehe z. B. Weyr, Beiträge zur Curvenlehre, Wien, 1880, S. 28 f.

Tangentialpunkt x_{n-1} einen Kegelschnitt einhüllen wird, der mit Γ_n bezeichnet werden mag. Die Beziehung, welche zwischen dem Punkte x und seinem $(n-1)^{\text{ten}}$ Tangentialpunkt x_{n-1} besteht, können wir dahin charakterisiren, dass vom Punkte x zum Punkt x_{n-1} eine gebrochene Linie führt, welche aus $(n-1)$ Tangenten des Kegelschnittes Γ sich zusammensetzt und ebenso wie Anfangs- und Endpunkt auch ihre $(n-2)$ Ecken auf C liegen hat. Unser Resultat lässt sich daher in Form des folgenden von Poncelet herrührenden Satzes aussprechen:

„Es gibt ein System von unendlich vielen einfachen n-Ecken P_n, welche einem Kegelschnitt C eingeschrieben sind und deren Seiten bis auf eine — ξ — einen zweiten festen Kegelschnitt Γ berühren; in jedem dieser Polygone ist dann die Seite ξ Tangente für einen und denselben dritten Kegelschnitt Γ_n."

§. 2. Die Polygone, welche einem Kegelschnitt eingeschrieben sind und deren Seiten bis auf eine einen zweiten Kegelschnitt berühren.

Es lässt sich leicht einsehen, dass eine beliebig gewählte Tangente ξ des Kegelschnittes Γ_n Seite für ein einziges Polygon P_n ist, dessen n Ecken auf dem Kegelschnitt C liegen und dessen ausser ξ noch vorhandene Seiten den Kegelschnitt Γ berühren. Denn die Annahme zweier solcher Polygone würde besagen, dass die $(n-1)^{\text{ten}}$ Tangentialpunkte des einen Schnittpunktes von ξ mit C beide in dem zweiten Schnittpunkte vereinigt liegen. Daraus würde folgen, dass die symmetrische Beziehung zwischen einem beliebigen Punkt x von C und einem $(n-1)^{\text{ten}}$ Tangentialpunkt eine ein-eindeutige ist und der von den Verbindungslinien je zweier solcher Punkte eingehüllte Kegelschnitt Γ_n würde in einen doppeltgezählten Punkt ausarten — wir hätten einen Specialfall vor uns, den wir von der Betrachtung ausschliessen.

In jedem der Polygone P_n hat, wenn n eine ungerade Zahl ist, die Seite ξ desselben, welche Γ_n berührt, eine ganz bestimmte, auf C gelegene Gegenecke, und wenn n eine gerade Zahl ist, so hat ξ eine ganz bestimmte Γ berührende Gegenseite.

Nimmt man im Falle eines ungeraden n $(n = 2k+1)$ einen beliebigen Punkt y von C als Gegenecke der Seite ξ für ein Polygon P_n an, so ist dieses Polygon eindeutig bestimmt: seine

Seite ξ ist die Verbindungslinie der beiden k^{ten} Tangentialpunkte von y, seine $2k$ übrigen Seiten sind die $2k$ bei unserer Construction dieser Tangentialpunkte zur Verwendung gelangenden Tangenten von Γ.

Nimmt man im Falle eines geraden n ($n = 2k$) eine beliebige Tangente τ von Γ als Gegenseite von ξ für ein Polygon P_n an, so ist dieses Polygon wieder eindeutig bestimmt. Seine Seite ξ wird erhalten, wenn man für jeden der beiden Schnittpunkte von τ mit C in der oben angegebenen Weise von der von τ verschiedenen Tangente von Γ ausgehend den $(k-1)^{\text{ten}}$ Tangentialpunkt construirt und die beiden so erhaltenen Punkte verbindet. Die bei dieser Construction zur Verwendung gelangenden $2(k-1)$ Tangenten von Γ sind dann die Seiten, welche das Polygon P_n ausser ξ und τ noch besitzt.

Durch die eben angestellten Überlegungen ist bewiesen, dass, wenn man im Falle eines ungeraden n in jedem unserer Polygone P_n der Seite ξ ihre Gegenecke als entsprechend zuweist, eine ein-eindeutige, daher projective Beziehung zwischen den Tangenten von Γ_n und den Punkten von C hergestellt ist (denn ein Polygon P_n erwies sich sowohl durch Annahme der Seite ξ, als auch durch Annahme ihrer Gegenecke eindeutig bestimmt), und es ist ebenso gezeigt, dass, wenn man im Falle eines geraden n in jedem unserer Polygone P_n der Seite ξ die Gegenseite zuweist, eine ein-eindeutige, also projective Beziehung zwischen den Tangenten von Γ_n und jenen von Γ entsteht.

Nach dem zweiten der vorausgeschickten Hilfssätze wird daher, wenn n eine ungerade Zahl $= 2k+1$ ist, eine Correlation der Ebene existiren, vermöge welcher jeder zum System Σ gerechneten Tangente ξ von Γ_n derjenige Punkt y von C im System S als entsprechend zugewiesen ist, welcher in demjenigen Polygon P_n, für welches ξ eine Seite ist, deren Gegenecke darstellt.

Diese Correlation (Reciprocität) ist aber ein Polarsystem, denn es entspricht der beliebig gewählten Tangente ξ von Γ_n auch dann noch derselbe Punkt y von C, wenn man sie zum System S rechnet. Von der dem Punkte y des Systems S im System Σ entsprechenden Geraden ξ haben wir nämlich oben gesehen, dass sie als Verbindungslinien der beiden k^{ten} Tangentialpunkte des Punktes y erhalten wird. Jedem dieser beiden

auf ξ gelegenen Punkte wird sonach im System Σ eine Gerade entsprechen, welche durch y hindurchgeht, da y k^{ter} Tangentialpunkt eines jeden dieser beiden Punkte ist, und hieraus folgt in der That, dass der zum System S gerechneten Geraden ξ wieder der Punkt y entspricht.

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Sind zwei beliebige Kegelschnitte C und Γ in derselben Ebene vorgelegt und man betrachtet die unendlich vielen Polygone von derselben beliebig gewählten ungeraden Seitenanzahl, deren Ecken auf dem ersten Kegelschnitt liegen und deren Seiten bis auf eine den zweiten Kegelschnitt berühren, so ist diese letzte Seite in jedem der Polygone die Polare ihrer Gegenecke in Bezug auf einen und denselben Kegelschnitt K.

Das gemeinsame Poldreieck von C und Γ ist auch Poldreieck für den Kegelschnitt K dieses Satzes. Denn durch die harmonische Centralcollineation, welche irgend einen der Eckpunkte des gemeinsamen Poldreieckes von C und Γ zum Centrum seine Gegenseite zur Axe hat, werden die Kegelschnitte C und Γ in sich transformirt, mithin auch das System der zugehörigen Polygone P_n und daher auch der durch dieses System bestimmte Kegelschnitt K.

Wenden wir uns jetzt zum Fall eines geraden n. Hier sagt der zweite der beiden vorangestellten Hilfssätze, dass es eine Collineation der Ebene gibt, vermöge welcher in jedem Polygon P_n der Γ nicht berührenden Seite ξ ihre Gegenseite zugewiesen wird.

Die Natur dieser Collineation können wir insofern präcisiren, als wir im allgemeinen Falle, wo diese drei Doppelpunkte besitzt, die Doppelpunkte angeben können: es müssen dies die Ecken des gemeinsamen Poldreieckes von C und Γ sein. Durch die drei harmonischen Centralcollineationen, deren Centra die Ecken dieses Dreieckes und deren Axen deren Gegenseiten sind, werden die Kegelschnitte C und Γ in sich transformirt, also auch das System der Polygone P_n und die Gruppe der drei Doppelpunkte unserer durch das System der Polygone bestimmten Collineation. Durch die drei Centralcollineationen wird aber ein beliebiger

Punkt in die drei Punkte transformirt, die mit ihm zusammen ein Viereck bilden, dessen Diagonaldreieck das Poldreieck ist, und die Ecken dieses Poldreieckes sind daher die einzige Gruppe von drei Punkten, welche bei Anwendung der drei Centralcollineationen in sich übergeht.

§. 3. Die Poncelet'schen Polygone.

Die eben durchgeführten Entwicklungen besitzen das meiste Interesse in dem speciellen Falle, wo der Kegelschnitt Γ_n mit dem Kegelschnitt Γ zusammenfällt; dann haben wir unendlich viele dem Kegelschnitt C eingeschriebene und gleichzeitig dem Kegelschnitt Γ umschriebene Polygone. Poncelet hat bewiesen, dass, wenn es Ein derartiges Polygon gibt, unzählig viele solche Polygone existiren. Man pflegt jetzt ein Polygon, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben und gleichzeitig einem zweiten umschrieben ist, als Poncelet'sches Polygon zu bezeichnen.

Unsere Resultate lassen sich für Poncelet'sche Polygone von ungerader Seitenanzahl folgendermassen formuliren:

Jedes Poncelet'sche Polygon von ungerader Seitenanzahl ist sich selbst polar in Bezug auf einen gewissen Kegelschnitt K, und zwar ist jede Seite die Polare ihrer Gegenecke. Dieser Kegelschnitt K ist derselbe für all die Poncelet'schen Polygone, welche denselben umschriebenen und denselben eingeschriebenen Kegelschnitt besitzen, und hat mit den beiden letztgenannten Kegelschnitten ein gemeinschaftliches Poldreieck.

Aus diesem Satze, der für den besonderen Fall des Dreieckes wohlbekannt ist, kann man sofort den folgenden ebenfalls für Dreiecke wohlbekannten Satz schliessen, welchen Herr Hurwitz in seiner schönen Abhandlung: „Über unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben, insbesondere über Schliessungsprobleme“ [1] gegeben hat.

„Gibt es Ein Polygon von ungerader Seitenzahl, das einem Kegelschnitt C eingeschrieben ist und dessen Eckpunkte die

[1] Math. Ann., Bd. XV.

Pole ihrer gegenüberliegenden Seiten sind in Bezug auf einen festen Kegelschnitt K, so gibt es unzählig viele solcher Polygone von derselben Seitenzahl und jeder Punkt von C ist Eckpunkt eines derartigen Polygons."

Nach den über das eine Polygon gemachten Voraussetzungen werden nämlich dessen Seiten denjenigen Kegelschnitt Γ berühren, welcher von den in Bezug auf K genommenen Polaren der Punkte des Kegelschnittes C eingehüllt wird. Es gibt desshalb nach dem Poncelet'schen Theorem unendlich viele dem Kegelschnitt C eingeschriebene und gleichzeitig dem Kegelschnitt Γ umschriebene Polygone und dies sind nach dem oben bewiesenen Satze die unzählig vielen Polygone des Hurwitz'schen Theorems.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Poncelet'schen Polygone mit gerader Seitenzahl über. Betrachten wir das System solcher Polygone, welche dem Kegelschnitt C eingeschrieben und gleichzeitig dem Kegelschnitt Γ umschrieben sind, so wird es nach den allgemeinen Auseinandersetzungen des §. 2 eine Collineation geben, vermöge welcher in jedem dieser Polygone jede Seite ihrer Gegenseite entspricht. Diese Collineation ist, wie ersichtlich, eine involutorische und desshalb ist sie eine harmonische Centralcollineation. Centrum und Axe dieser Collineation müssen eine Ecke des gemeinsamen Poldreieckes von C und Γ und ihre Gegenseite darstellen, denn Centrum und Axe dieser Collineation müssen durch jede der drei linearen Transformationen in sich übergehen, welche jeden der beiden Kegelschnitte C und Γ in sich überführen.

Wir erhalten das folgende im Wesentlichen bekannte Resultat:

Jedes Poncelet'sche Polygon von gerader Seitenanzahl wird durch eine harmonische Centralcollineation in sich übergeführt, und zwar erscheinen vermöge derselben die Gegenecken und Gegenseiten des Polygons einander zugewiesen. Die Collineation bleibt dieselbe für alle Polygone mit demselben umschriebenen und demselben eingeschriebenen Kegelschnitt und Centrum und Axe dieser Collineation sind Pol und Polare in Bezug auf jeden der beiden genannten Kegelschnitte.

§. 4. Die von den aufeinanderfolgenden gleichartigen Diagonalen eines Poncelet'schen Polygons gebildeten Polygone.

Jedes einfache n-Eck wird durch eine Diagonale in zwei Polygone von m und m' Seiten zerlegt, wo $m+m' = n+2$ ist. Diejenigen Diagonalen, für welche die Zahlen m und m' dieselben sind, mögen gleichartig heissen. Zwei gleichartige Diagonalen, deren Anfangs- und Endpunkte aufeinanderfolgende Eckpunkte des n-Eckes sind, bezeichnen wir als aufeinanderfolgend.

Betrachten wir jetzt ein System von Poncelet'schen Polygonen, welche denselben umschriebenen Kegelschnitt C und denselben eingeschriebenen Kegelschnitt Γ besitzen, und denken wir uns in jedem dieser Polygone die gleichartigen Diagonalen irgend einer Art gezogen. Ein beliebiges dieser Polygone mag durch irgend eine dieser Diagonalen in ein Theilpolygon P_m von m Seiten und ein zweites $P_{m'}$ von m' Seiten zerfallen. Jedes dieser beiden Theilpolygone ist so beschaffen, dass alle seine Ecken auf C liegen und alle seine Seiten bis auf eine — die Diagonale des ursprünglichen Polygons — den Kegelschnitt Γ berühren. Wenn wir nun die in §. 2 gegebenen Sätze auf das System der Theilpolygone P_m anwenden, so folgt, falls m eine ungerade Zahl ist, dass die Seite ξ eines solchen Theilpolygons (d. i. die Diagonale des ursprünglichen) ihrer Gegenecke in einem Polarsystem entspricht, für welches das gemeinsame Poldreieck der Kegelschnitte C und Γ ebenfalls ein Poldreieck darstellt. Ist m eine gerade Zahl, so folgt, dass die Diagonale ξ ihrer Gegenseite in einer Collineation entspricht, für welche die drei Ecken des gemeinschaftlichen Poldreieckes der Kegelschnitte C und Γ die Doppelpunkte sind.

Ist die Seitenanzahl der Poncelet'schen Polygone, von denen wir ausgehen, eine ungerade, so wird von den beiden Theilpolygonen P_m und $P_{m'}$, in welche irgend eines jener Polygone durch eine Diagonale zerlegt wird, das eine immer eine gerade, das andere eine ungerade Seitenanzahl besitzen. Beachtet man noch, dass aufeinanderfolgende Diagonalen aufeinanderfolgende Ecken zu Gegenecken, aufeinanderfolgende Seiten zu Gegenseiten haben, so gelangt man durch Betrachtung der beiden Systeme von Theilpolygonen zu dem Satze:

Zieht man in einem Poncelet'schen Polygon von ungerader Seitenanzahl die aufeinanderfolgenden Diagonalen irgend einer Art, so erhält man wieder ein Poncelet'sches Polygon, welches dem ersten sowohl in einem gewissen Polarsystem, als auch in einer gewissen Collineation entspricht. Das gemeinsame Poldreieck des unserem Polygon umschriebenen und des ihm eingeschriebenen Kegelschnittes ist auch ein Poldreieck für dieses Polarsystem und seine Ecken sind die Doppelpunkte für diese Collineation. Dasselbe Polarsystem und dieselbe Collineation führen auch jedes andere Poncelet'sche Polygon in sein Diagonalpolygon über, welches denselben um- und denselben eingeschriebenen Kegelschnitt besitzt wie das vorgelegte.

Ist die Seitenanzahl der betrachteten Poncelet'schen Polygone mit gemeinsamem um- und eingeschriebenen Kegelschnitt eine gerade, so haben beide Theilpolygone P_m und $P_{m'}$, in welche ein solches Polygon durch eine Diagonale zerlegt wird, entweder beide eine ungerade oder beide eine gerade Seitenanzahl und die beiden Systeme dieser Theilpolygone liefern den Satz:

Zieht man in einem Poncelet'schen Polygon von gerader Seitenanzahl die aufeinanderfolgenden Diagonalen irgendwelcher Art (die Hauptdiagonalen ausgenommen), so erhält man wieder ein Poncelet'sches Polygon. Sind die Diagonalen von der Art, dass jede derselben das Poncelet'sche Polygon in zwei Theilpolygone von ungerader Seitenzahl zerlegt, so entspricht das Diagonalpolygon dem ursprünglichen in zwei Polarsystemen; haben die beiden Theilpolygone gerade Seitenzahl, so entspricht das Diagonalpolygon dem ursprünglichen in zwei Collineationen. Diese Polarsysteme, beziehungswcise Collineationen führen auch jedes andere Poncelet'sche Polygon, welches denselben um- und denselben eingeschriebenen Kegelschnitt besitzt, in sein Diagonalpolygon über, und das gemeinsame Poldreieck dieser beiden Kegelschnitte ist für die genannten Polarsysteme Poldrei-

eck und Doppelpunktsdreieck für die genannten Collineationen.

Dass wir in diesem Satze den Fall ausschliessen mussten, wo die gezogenen Diagonalen Hauptdiagonalen (Verbindungslinien von Gegenecken) unserer Poncelet'schen Polygone sind, hat darin seinen Grund, dass die Theilpolygone P_m hier so geartet sind, dass die Sätze des §. 2 auf sie nicht Anwendung finden. Wir haben hier nämlich gerade jenen Fall vor uns, den wir bei den Betrachtungen des §. 2 gleich zu Beginn ausschliessen mussten.

§. 5. Über gewisse einfache Processe, durch welche aus einem Poncelet'schen Polygon successive unendlich viele andere abgeleitet werden können.

Wir haben im letzten Paragraph einen Process kennen gelernt, durch welchen man aus irgend einem vorgelegten Poncelet'schen Polygon P von n Seiten, ein neues P' von derselben Seitenzahl in einfacher Weise linear ableiten kann: man braucht in dem Polygon P nur die aufeinanderfolgenden Diagonalen einer beliebig gewählten Art zu ziehen. Auf das neue Polygon P' kann man wieder denselben Process anwenden und erhält ein drittes Poncelet'sches Polygon P''. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu einer unbegrenzten Folge von Poncelet'schen Polygonen $P, P', P'' \ldots$ von derselben Seitenzahl.

Nach §. 4 geht, wenn die Seitenzahl eine ungerade ist, das Polygon P in P' über durch Anwendung einer gewissen Collineation, deren Doppelpunkte die Ecken des Poldreieckes sind, welches der dem Polygon P umschriebene Kegelschnitt C mit dem diesem Polygon eingeschriebenen Kegelschnitt Γ gemein hat. Aus der Entstehung der Polygonreihe $P, P' P'' \ldots$ folgt nun, dass durch diese Collineation überhaupt jedes Polygon der Reihe in das folgende (d. i. in sein Diagonalpolygon) übergeht. Dieselbe Bemerkung gilt nach §. 4 auch noch, falls die Seitenzahl des Polygons P eine gerade ist, unter der Voraussetzung, dass das Polygon P' aus dem Polygon P durch Construction der Diagonalen einer solchen Art hervorgeht, dass durch eine von ihnen das Polygon P in zwei Theilpolygone von gerader Seitenzahl zerlegt wird.

Ist das Polygon P, von dem man ausgeht, ein convexes, so ist offenbar jedes Polygon der Reihe $P, P', P'' \ldots$ ein convexes und jedes folgende liegt ganz innerhalb des vorhergehenden: die Polygone nähern sich immer mehr einem Punkte. Wenn man i beliebig gross nimmt, so liegen diesem Punkte die Ecken der Polygone $P^{(i)}$ und $P^{(i+1)}$ beliebig nahe; der Punkt ist also im Falle der ungeraden Seitenzahl ein Doppelpunkt der Collineation, welche jedes Polygon unserer Reihe in das folgende überführt. Im Falle der geraden Seitenanzahl ist der Punkt, dem wir uns nähern, offenbar das Centrum der harmonischen Centralcollineation, welche das Polygon P, also auch jedes Polygon der Reihe $P, P', P'' \ldots$ in sich überführt; denn dieses Centrum muss ja (als Schnittpunkt der Hauptdiagonalen) im Inneren eines jeden dieser Polygone liegen.

Wir haben den Satz:

Zieht man in einem convexen Poncelet'schen Polygon P die aufeinanderfolgenden Diagonalen irgend welcher Art, so erhält man wieder ein Poncelet'sches Polygon P'. Setzt man dieses Verfahren unbegrenzt fort, so nähert man sich unbegrenzt einem Punkte, und zwar demjenigen Eckpunkte des Poldreieckes, welches der dem Polygon P umschriebene Kegelschnitt mit dem diesem Polygon eingeschriebenen Kegelschnitt gemein hat, welcher innerhalb des Polygons liegt.

Ein anderer einfacher Process, vermöge dessen man aus einem Poncelet'schen Polygon P ein zweites P_1 von derselben Seitenzahl ableiten kann, besteht darin, dass man die Punkte, in welchen der Kegelschnitt Γ die aufeinanderfolgenden Seiten des Polygons P berührt, der Reihe nach verbindet. Das entstehende Polygon P_1 entspricht dem Polygon P im Polarsystem des Kegelschnittes Γ und ist daher wieder ein Poncelet'sches.

Ist die Seitenzahl eines Poncelet'schen Polygons P eine ungerade, so ist ihm das Polygon P_1 aus den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kegelschnittes collinear verwandt, weil nicht nur das Polygon P_1 dem Polygon P in einem Polarsystem, sondern auch dieses sich selbst in einem zweiten Polarsystem entspricht (§. 3). Das Doppel-

punktsdreieck der Collineation, welche P in P_1 transformirt, ist das gemeinschaftliche Poldreieck von C und Γ, denn dasselbe ist Poldreieck für jedes der beiden Polarsysteme, durch deren successive Anwendung die Collineation erhalten wird. Denselben Process, durch welchen aus dem Polygon P das Polygon P_1 abgeleitet wird, kann man wieder auf P_1 anwenden und gelangt durch Fortsetzung des Verfahrens zu einer Reihe von Polygonen $P, P_1, P_2 \ldots$, von denen jedes durch Anwendung unserer Collineation aus dem vorhergehenden hervorgeht.

Ist hingegen die Seitenanzahl des Polygons P eine gerade, so wird durch die harmonische Centralcollineation, welche das Polygon P in sich transformirt, auch jedes Polygon der Reihe $P, P_1, P_2 \ldots$ in sich transformirt werden.

Geht man von einem convexen Polygon P aus, dessen Seitenanzahl grösser als 4 ist, so ist das Polygon P_1, welches von den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kegelschnittes Γ auf den aufeinanderfolgenden Seiten gebildet wird, ein innerhalb P gelegenes convexes Polygon (denn der Kegelschnitt Γ liegt, wie leicht zu sehen, innerhalb P). Die oben angestellte Überlegung bleibt anwendbar und wir haben den Satz:

Construirt man in einem vorgelegten convexen Poncelet'schen Polygon das Polygon der Berührungspunkte des eingeschriebenen Kegelschnittes, in dem so erhaltenen Polygon wieder das Polygon dieser Berührungspunkte u. s. f., so nähert man sich unbegrenzt einem gewissen Punkte, nämlich demjenigen Eckpunkte des Poldreieckes, welches der dem vorgelegten Polygon umschriebene Kegelschnitt mit dem diesem Polygon eingeschriebenen Kegelschnitt gemeint hat, welcher im Inneren des Polygons liegt.

Natürlich gelten unsere Betrachtungen auch für jedes Poncelet'sche Polygon, welches aus einem convexen durch Projection hervorgeht.

§. 6. Das Fünfeck.

Wir wollen jetzt unsere Sätze über Poncelet'sche Polygone für den Fall specialisiren, dass die Anzahl der Seiten $= 5$ ist.

Jedes beliebige einfache Fünfeck ist ein Poncelet'sches Polygon, da man ihm stets einen Kegelschnitt sowohl umschreiben als einschreiben kann.

Der Satz des §. 3 lautet für diesen Fall:

Ein beliebiges einfaches Fünfeck ist sich selbst conjugirt in einem gewissen Polarsystem, und zwar ist jede Seite die Polare ihrer Gegenecke. In demselben Polarsystem sind auch alle übrigen Fünfecke sich selbst conjugirt, welche denselben umschriebenen und denselben eingeschriebenen Kegelschnitt haben wie das vorgelegte, und das gemeinsame Poldreieck dieser beiden Kegelschnitte ist Poldreieck auch für das Polarsystem.

Aus fünf geraden Linien als Seiten lassen sich $\frac{1.2.3.4.5}{2.5}=12$ einfache Fünfecke bilden und die Ecken jedes dieser Fünfecke entsprechen nach dem oben aufgestellten Satze diesen fünf geraden Linien in einem Polarsystem; daraus folgt:

Unter den 10 Ecken eines vollständigen ebenen Fünfseits gibt es 12 Gruppen von je 5 untereinander collinearen Punkten; es sind dies die Ecken der 12 einfachen Fünfecke, welche in dem vollständigen Fünfseit enthalten sind.

Dass ein einfaches ebenes Fünfeck sich in einem gewissen Polarsystem selbst conjugirt ist, kann auch leicht direct, unabhängig von den Betrachtungen der vorliegenden Arbeit, eingesehen werden.

Es ist nämlich bekannt, dass die Angabe von zwei conjugirten Punkten eine lineare Bedingung für einen Kegelschnitt ist, so dass ein solcher im Allgemeinen durch Angabe von fünf Paaren conjugirter Punkte gegeben sein wird. Es wird desshalb in der Ebene eines einfachen Fünfeckes ein Kegelschnitt gegeben sein durch die Bedingung, dass die beiden Eckpunkte einer jeden der 5 Diagonalen des Fünfeckes in Bezug auf ihn conjugirt sein sollen. In Bezug auf diesen Kegelschnitt ist offenbar jede Seite die Polare der Gegenecke.

Diese Schlussweise hat den Vortheil, dass sie anwendbar bleibt für einen Raum von beliebig vielen Dimensionen. Das

einfache Sechseck im dreidimensionalen Raum hat 9 Diagonalen und eine Fläche 2. Ordnung erscheint festgelegt durch die Bedingung, dass die zwei Eckpunkte jeder von diesen Diagonalen conjugirt sein sollen in Bezug auf die Fläche.

Es folgt:

Ein beliebiges einfaches Sechseck im Raume ist in Bezug auf eine gewisse Fläche 2. Ordnung sich selbst conjugirt, und zwar ist jede Seitenfläche die Polarebene ihrer Gegenecke.

Als Corollar ergibt sich hieraus, dass unter den 20 Eckpunkten eines Sechsflachs $\frac{1.2.3.4.5.6}{2.6} = 60$ Gruppen von je 6 einander collinearen Punkten vorkommen; es sind dies die Gruppen der Eckpunkte der 60 einfachen Sechsecke, welche in dem Sechsflach enthalten sind. Denn jede Gruppe von solchen 6 Punkten ist nach unserem Satze denselben 6 Ebenen (den Ebenen des Sechsflaches) in einem Polarsystem zugewiesen.

Der grössere Theil der in den §§. 4 und 5 bewiesenen Sätze ist für den besonderen Fall des Fünfeckes von Clebsch in seiner Abhandlung: „Über das ebene Fünfeck“ (Math. Ann., Bd. IV) gegeben worden; doch erscheinen die Resultate von Clebsch in mehrfacher Hinsicht ergänzt.

Clebsch findet, dass ein Fünfeck dem Fünfeck aus seinen Diagonalen collinear verwandt ist — wir wissen, dass es ihm auch polar verwandt ist. Clebsch findet, dass, wenn man im Falle eines convexen Fünfeckes diese Collineation wiederholt anwendet, man sich einem ihrer Doppelpunkte nähert — wir wissen, dass dieser Doppelpunkt ein Eckpunkt des Poldreieckes ist, welches der dem Fünfeck umschriebene Kegelschnitt mit dem dem Fünfeck eingeschriebenen Kegelschnitt gemein hat. Demselben Punkte nähert man sich nach §. 5 auch unbegrenzt, wenn man, von einem convexen Fünfeck ausgehend, das Fünfeck der Berührungspunkte des eingeschriebenen Kegelschnittes construirt und dieses Verfahren unbegrenzt fortsetzt.

Bestimmung der Bahn des Kometen 1857 III

von

Rudolf König.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Jänner 1891.)

Der dritte Komet des Jahres 1857 wurde von Klinkerfues in Göttingen am 22. Juni, unabhängig davon am 23. Juni von Dien in Paris und am 24. Juni von Habicht in Gotha aufgefunden. Er war teleskopisch, aber recht lichtstark und stand im Perseus, unweit des Sternes ν dieser Constellation. Von hier durchzog er auf seinem weiteren Wege die Sternbilder des Fuhrmanns, des Luchsen und des grossen Löwen. Anfänglich langsam in seiner Bewegung, wendete sich der Komet gegen das Ende hin rasch nach Süden, so dass er am 20. Juli, kurze Zeit nach seiner Perihelpassage, bereits frühzeitig unterging und wegen sehr heller Dämmerung nicht mehr gesehen werden konnte, so dass sich die Beobachtungen im Ganzen nur über einen Zeitraum von 28 Tagen erstrecken.

Die theoretischen Helligkeitsverhältnisse, deren Vergleichung mit den Angaben der Beobachter möglicherweise einiges Interesse haben könnte, ergeben sich aus nachfolgendem Täfelchen:

Mittl. Berl. Zeit	J	$\log r$	$\log \rho$
1857 Juni 22·5	1·00	9·87903	0·09419
25·5	1·24	9·84306	0·07326
28·5	1·89	9·80105	0·03075
Juli 1·5	2·65	9·76198	9·99994
4·5	3·69	9·71724	9·97264
7·5	5·01	9·67118	9·95233
10·5	6·41	9·62684	9·94303
13·5	7·44	9·58990	9·94767
16·5	7·34	9·5[illegible]560	9·974[illegible]7
19·5	6·63	9·56811	9·99440

Hiebei ist, wie ersichtlich, die Lichtstärke am Tage der Entdeckung durch Klinkerfues als Einheit genommen; in den Rubriken log r und log ρ habe ich die Logarithmen der heliocentrischen, bezüglich geocentrischen Entfernungen beigefügt.

Am Tage nach seiner Auffindung war, wie aus einer Hamburger Mittheilung hervorgeht, das Aussehen des Kometen das eines kleinen runden Nebels, und liess sich der Komet selbst bis zum Überhandnehmen der Dämmerung recht gut beobachten. Am 24. Juni bemerkte d'Arrest in Leipzig gegen die Mitte starke Verdichtung ohne jede Spur von Schweif, in Bonn erschien er am 25. etwas fächerförmig ohne Kern und ebenfalls ohne Schweif; daselbst wurde sein Durchmesser von Winnecke am 25. auf ungefähr 2 Bogenminuten und den darauffolgenden Tag auf ungefähr 1·5 Bogenminuten geschätzt.

Am 28. Juni beobachtete P. Reslhuber in Kremsmünster einen kurzen, von der Sonne abgewendeten Schweif; gleichzeitig wurde dieser Schweifansatz im Positionswinkel = 285° in Bonn gesehen, erschien aber so schwach, dass die Richtung nur geschätzt werden konnte; der Komet war in der Mitte ausserordentlich verdichtet, und schon 140fache Vergrösserung löste alles in Nebel auf; sein Durchmesser betrug 2 Bogenminuten.

Am 2. Juli bedeckte der Komet den Stern 7·8. Grösse 45°1248 der Bonner Durchmusterung, welche Erscheinung auf den beiden Sternwarten zu Altona und Königsberg beobachtet wurde. Auf der ersteren war in dem benutzten Fernrohre von 34‴ (7·5 *cm*) Objectivöffnung während des Zeitraumes von etwa einer Minute der Helligkeit des bedeckten Sternes wegen nichts vom Kometen zu sehen; die Helligkeit des Sternes selbst änderte sich während der Bedeckung um keine zu bemerkende Grösse. Hingegen zeigte in Königsberg während der Bedeckung von $13^h 3^m 38^s$ bis $13^h 4^m 34^s$ mittl. Königsb. Zt. der Stern, dessen Bild vorher und nachher ruhig war, ein starkes Flimmern.

Am selben Tage fand Foerster in Berlin den Kometen im Sucher des Fernrohres fast genau gleicher Helligkeit mit dem oben erwähnten Sterne 7·8. Grösse, und war der Kern mit 214 ff. Vergrösserung noch gut zu fixiren. Hingegen schien am darauffolgenden Tage der Komet entschieden heller als der Vergleichstern, wie der vorige 7·8. Grösse. Mit 90 ff. Vergrösserung

zeigte sich die schmale Spur einer Ausströmung in einer Richtung, deren Positionswinkel zu 309° bestimmt wurde. Laut Bemerkung des Beobachters in Kremsmünster unterschied sich der Komet am 7. Juli bei Vollmond und noch heller Dämmerung von den Fixsternen nur durch sein matteres Licht und seinen Durchmesser; bei der grossen Helligkeit verschwand der die Mitte umgebende peripherische Nebel, sowie der Schweif; das Centrum schien verdichtete Masse ohne Kern. Am 8. Juli gelang es Foerster in Berlin, zwischen Wolken den Positionswinkel des Schweifes zu 341° zu ermitteln, am 10. Juli empfand derselbe Beobachter bei Bewegung des Fernrohres bis zu 8′ vom Kerne noch einen schwachen Lichteindruck vom Schweife und fand des letzteren Positionswinkel = 8°8. Die eigentliche Lichthülle des Kometen hatte (bei 90ff. Vergrösserung) einen Durchmesser von etwa 54″; der Kern lag darin excentrisch, die grosse Axe in der Richtung der Schweifspur; die Entfernung des Kernes vom nächsten Rande der Lichthülle betrug ungefähr 7″.

Gegen den 13. Juli nahm die Helligkeit derart zu, dass P. Reslhuber den Kometen über das Fernrohr hin in starker Dämmerung mit freiem Auge erkennen konnte. Am 12. Juli wurde in Berlin der Positionswinkel der Ausströmung zu 17°9, am 13. Juli zu 27°5 bestimmt, die Spur eines Lichteindruckes erstreckte sich bis zu 10′ Entfernung vom Kerne. Am selben Tage erschien Winnecke in Bonn die Helligkeit des Kometen gleich der eines Sternes 6. Grösse; hingegen betrug der Durchmesser des Kopfes nur 24″; der Schweif von etwa 30′ Länge war trotz des tiefen Standes erkennbar; um $10^h 42^m$ mittl. Bonner Zeit wurde sein Positionswinkel = 27°0, die Richtung zur Sonne = 38°1 gemessen. Am 14. Juli fand Foerster den Kometen sehr schwach, den Schweif nur mit Mühe wahrnehmbar, dessen Positionswinkel schätzte er auf 30°. Am selben Tage zeigte sich zu Bonn anfangs noch deutliche Schweifspur, deren Richtung aber nicht bestimmt werden konnte, da sie unsichtbar wurde, als der Komet sich dem Untergange näherte. Die Helligkeit des Kometen war zu dieser Zeit fast genau so gross, wie die des Vergleichsternes 6·5. Grösse, vielleicht ein Geringes schwächer; bei der 45fachen Vergrösserung unterschied er sich nur wenig von dem Sterne durch seinen Durchmesser.

Am 16. und 17. Juli zeigte sich der Komet in Kremsmünster recht schwach, bald ganz unkenntlich, da er schon sehr tief am Horizonte stand, und am 20. Juli war wegen des zu frühen Unterganges keine Beobachtung mehr möglich.

Parabolische Bahnelemente dieses Kometen wurden gerechnet von Donati, Foerster, R. Golzsch, Klinkerfues, Pape und Villarceau, von beiden letzteren je zwei. Schliesslich hat Villarceau auch ein elliptisches Elementensystem abgeleitet, das auf 66 Beobachtungen basirt und welches ich im Nachfolgenden gebe:

☄ 1857 III.

$T = 1857$ Juli $17{\cdot}987858$ mittl. Pariser Zeit
$\Omega = 23°41'28''36$ } mittl. Äquin.
$\pi = 157\ 46\ 55{\cdot}59$ } $1857{\cdot}0$
$i = 121\ 2\ 8{\cdot}87$ }
$q = 0{\cdot}36747948$
$e = 0{\cdot}9989984$

wobei der wahrscheinliche Fehler in der Excentricität auch eine hyperbolische Bahn möglich erscheinen lässt. Villarceau, der, nebenbei bemerkt, diesen Kometen auch zur Darlegung seiner Methode der Bahnbestimmung benützte, hatte vor, selbst neue Elemente zu deduciren, sobald sich die Vergleichsternpositionen durch bessere ersetzen liessen. In der That wurde auf seine Veranlassung eine Reihe dieser Sterne am Meridiankreise der Pariser Sternwarte neu bestimmt, doch kam er selbst nicht zur Ausführung der Neuberechnung.

Inzwischen wurde noch eine grössere Anzahl von Beobachtungen publicirt, die Villarceau zur Zeit seiner Arbeit noch nicht bekannt waren; anderseits gelang es mir, recht sichere Orte für die Vergleichsterne zu erhalten, da ich in der Lage war, die neueren Beobachtungen zu benützen.

Die der Ephemeride zu Grunde gelegten zweiten Elemente von Pape sind die folgenden:

$T = 1857$ Juli $18{\cdot}01175$ mittl. Berliner Zeit.
$\pi = 157°44'17''4$ } mittl. Äquin.
$\Omega = 23\ 40\ 58{\cdot}6$ } $1857{\cdot}0$
$i = 121\ 0\ 27{\cdot}8$ }
$\log q = 0{\cdot}565259$.

Bevor ich an die Herstellung der Ephemeride selbst ging, schien es nothwendig, die Sonnenorte sowie die Reductionsconstanten für die mittleren Tage neu zu berechnen. Ich habe von den ersteren nach den Hansen-Olufsen'schen „Tables du soleil", von letzteren nach den im ersten Bande von Oppolzer's „Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten" enthaltenen Tafeln X die in den folgenden Tabellen angeführten Werthe erhalten. Die Sonnenorte sind von zwei zu zwei Tagen gerechnet und dann interpolirt worden.

Sonnenephemeride.

Mittl. Berl. Zeit	Länge der ☉, bezogen auf das Äquinoctium 1857·0	Breite	Log. Rad. Vector
1857 Juni 20·5	89°28'12"5	—0"04	0·007 0991
21·5	90 25 27·4	—0·04	0·007 1222
22·5	91 22 42·0	—0·03	0·007 1425
23·5	92 19 56·2	—0·08	0·007 1601
24·5	93 17 10·0	—0·14	0·007 1752
25·5	94 14 23·5	—0·23	0·007 1878
26·5	95 11 36·5	—0·34	0·007 1979
27·5	96 8 49·1	—0·46	0·007 2057
28·5	97 6 1·3	—0·59	0·007 2112
29·5	98 3 13·0	—0·72	0·007 2146
30·5	99 0 24·5	—0·84	0·007 2160
Juli 1·5	99 57 35·6	—0·95	0·007 2156
2·5	100 54 46·5	—1·04	0·007 2134
3·5	101 51 57·2	—1·11	0·007 2095
4·5	102 49 7·8	—1·15	0·007 2041
5·5	103 46 18·3	—1·16	0·007 1972
6·5	104 43 28·9	—1·14	0·007 1888
7·5	105 40 39·6	—1·09	0·007 1799
8·5	106 37 50·6	—1·01	0·007 1677
9·5	107 35 2·0	—0·91	0·007 1550
10·5	108 32 13·7	—0·79	0·004 1407
11·5	109 29 25·9	—0·66	0·007 1248
12·5	110 26 38·6	—0·52	0·007 1071
13·5	111 23 51·8	—0·38	0·007 0876
14·5	112 21 5·8	—0·26	0·007 0661
15·5	113 18 20·4	—0·15	0·007 0425
16·5	114 15 35·8	—0·06	0·007 0167
17·5	115 12 51·9	0·00	0·006 9885
18·5	116 10 8·6	+0·03	0·006 9579
19·5	117 7 26·1	+0·02	0·006 9248
20·5	118 4 44·1	+0·01	0·006 8892
21·5	119 2 2·8	—0·06	0·006 8510

Hieraus fanden sich die nachfolgenden rechtwinkeligen Sonnencoordinaten X, Y, Z, welche sich gleichfalls auf das mittlere Äquinoctium von 1857·0 beziehen und wobei die mittlere Schiefe der Ekliptik zu 23°27'28"50 angenommen wurde.

Sonnencoordinaten, bezogen auf den mittleren Äquator und das mittlere Äquinoctium 1857·0.

Mittl. Berl. Zeit	X	Y	Z
1857 Juni 20·5	+0·009 4001	+0·932 4315	+0·404 6184
21·5	−0·007 5274	+0·932 4955	+0·404 6462
22·5	−0·024 4530	+0·932 2947	+0·404 5592
23·5	−0·041 3712	+0·931 8300	+0·404 3571
24·5	−0·058 2769	+0·931 1015	+0·404 0407
25·5	−0·075 1658	+0·930 1099	+0·403 6099
26·5	−0·092 0319	+0·928 8553	+0·403 0650
27·5	−0·108 8707	+0·927 3385	+0·402 4061
28·5	−0·125 6773	+0·925 5606	+0·401 6339
29·5	−0·142 4464	+0·923 5216	+0·400 7485
30·5	−0·159 1746	+0·921 2230	+0·399 7504
Juli 1·5	−0·175 8563	+0·918 6663	+0·398 6402
2·5	−0·192 4875	+0·915 8516	+0·397 4184
3·5	−0·209 0636	+0·912 7800	+0·396 0852
4·5	−0·225 5801	+0·909 4531	+0·394 6412
5·5	−0·242 0325	+0·905 8714	+0·393 0870
6·5	−0·258 4171	+0·902 0358	+0·391 4226
7·5	−0·274 7291	+0·897 9481	+0·389 6491
8·5	−0·290 9649	+0·893 6084	+0·387 7664
9·5	−0·307 1202	+0·889 0186	+0·385 7751
10·5	−0·323 1897	+0·884 1789	+0·383 6759
11·5	−0·339 1698	+0·879 0911	+0·381 4686
12·5	−0·355 0557	+0·873 7556	+0·379 1541
13·5	−0·370 8427	+0·868 1741	+0·376 7328
14·5	−0·386 5274	+0·862 3475	+0·374 2050
15·5	−0·402 1043	+0·856 2771	+0·371 5715
16·5	−0·417 5693	+0·849 9641	+0·368 8324
17·5	−0·432 9175	+0·843 4108	+0·365 9890
18·5	−0·448 1437	+0·836 6179	+0 363 0415
19·5	−0·463 2443	+0·829 5875	+0·359 9907
20·5	−0·478 2132	+0·822 3223	+0·356 8380
21·5	−0·493 0469	+0·814 8229	+0·353 5833
22·5	−0·507 7404	+0·807 0930	+0·350 2287

Schliesslich ergaben die Reductionselemente nach den Oppolzer'schen Tafeln, wobei die Werthe von 5 zu 5 Tagen direct berechnet und für die Zwischenzeiten interpolirt wurden, folgende:

Constanten für die mittleren Tage 1857.

Mittl. Berl. Zeit	f	log g	G	log h	H	i
1857 Juni 20·5	+21'16	1·10054	316°57'3	1·30414	180°39'0	—0'10
21·5	+21·34	1·10250	317 11·5	1·30412	179 45·6	+0·04
22·5	+21·52	1·10446	317 25·3	1·30408	178 52·2	+0·17
23·5	+21·70	1·10642	317 39·0	1·30403	177 58·7	+0·31
24·5	+21·87	1·10838	317 52·4	1·30396	177 5·3	+0·44
25·5	+22·05	1·11034	318 5·6	1·30387	176 11·9	+0·58
26·5	+22·22	1·11234	318 18·6	1·30376	175 18·5	+0·71
27·5	+22·40	1·11434	318 31·4	1·30364	174 25·1	+0·85
28·5	+22·57	1·11634	318 44·0	1·30349	173 31·6	+0·98
29·5	+22·75	1·11834	318 56·2	1·30333	172 38·2	+1·12
30·5	+22·92	1·12034	319 8·2	1·30316	171 44·6	+1·25
Juli 1·5	+23·10	1·12236	319 19·9	1·30297	170 51·1	+1·39
2·5	+23·27	1·12438	319 31·5	1·30276	169 57·5	+1·52
3·5	+23·44	1·12641	319 42·7	1·30254	169 3·8	+1·65
4·5	+23·62	1·12843	319 53·7	1·30230	168 10·0	+1·79
5·5	+23·79	1·13045	320 4·4	1·30204	167 16·2	+1·92
6·5	+23·96	1·13248	320 14·8	1·30177	166 22·3	+2·05
7·5	+24·13	1·13450	320 24·9	1·30147	165 28·4	+2·18
8·5	+24·30	1·13653	320 34·9	1·30117	164 34·3	+2·31
9·5	+24·47	1·13855	320 44·6	1·30085	163 40·1	+2·44
10·5	+24·64	1·14058	320 54·2	1·30052	162 45·9	+2·57
11·5	+24·81	1·14261	321 3 6	1·30017	161 51·6	+2·70
12·5	+24·98	1·14462	321 12·7	1·29981	160 57·1	+2·82
13·5	+25·14	1·14662	321 21·7	1·29943	160 2·6	+2·95
14·5	+25·31	1·14861	321 30·4	1·29904	159 8·0	+3·08
15·5	+25·48	1·15059	321 38·8	1·29864	158 13·3	+3·20
16·5	+25·64	1·15257	321 47·1	1·29822	157 18·5	+3·33
17·5	+25·80	1·15452	321 55·2	1·29779	156 23·6	+3 45
18·5	+25·96	1·15646	322 2·8	1·29735	155 28·5	+3·57
19·5	+26·13	1·15837	322 10·1	1·29690	154 33·3	+3·69
20·5	+26·29	1·16024	322 17·2	1·29644	153 38·0	+3·81
21·5	+26·45	1·16210	322 23·9	1·29597	152 42·6	+3·93
22·5	+26·60	1·16393	322 3·4	1·29548	151 47·0	+4·05
23·5	+26·76	1·16572	322 36·4	1·29499	150 51·3	+4·17
24·5	+26·92	1·16747	322 42·1	1·29449	149 55·3	+4·29
25·5	+27·07	1·16918	322 47·6	1·29398	148 59·2	+4·40

Auf Grund dieser Werthe, sowie der bereits oben angeführten Pape'schen Elemente gelangte ich vermittelst der folgenden Formeln für die Äquatorcoordinaten

$$x = r(9\cdot972604)\sin(v+211^\circ19'22''3)$$
$$y = r(9\cdot933086)\sin(v+288\ 35\ 48\cdot1)$$
$$z = r(9\cdot792011)\sin(v+149\ \ 0\ 50\cdot6)$$

zu der nachstehenden

Ephemeride.

Mittl. Berl. Zeit	Æ app.	δ app.	log der Entfernung des ☄ von ♁	Aberrationszeit
1857 Juni 21·00	3h 16m 49s·26	+38°43'39''7	0·10956	10m 41s·8
21·25	3 18 13 48	38 56 45·1	0·10703	
21·50	3 19 39·41	39 9 55·5	0·10448	10 34·3
21·75	3 21 7·09	39 23 10·7	0·10192	
22·00	3 22 36·56	39 36 30·7	0·09935	10 26·8
22·25	3 24 7·86	39 49 55·3	0·09678	
22·50	3 25 41·07	40 3 24·4	0·09419	10 19·4
22·75	3 27 16·23	40 16 57·8	0·09160	
23·00	3 28 53·42	40 30 35·3	0·08900	10 12·1
23·25	3 30 32·69	40 44 16·7	0 08639	
23·50	3 32 14·10	40 58 1·8	0·08378	10 4·8
23·75	3 33 57·71	41 11 50·5	0·08116	
24·00	3 35 43·60	41 25 42·3	0·07853	9 57·5
24·25	3 37 31·81	41 39 37·1	0·07590	
24·50	3 39 22·44	41 53 34·5	0·07326	9 50·3
24·75	3 41 15·54	42 7 34·0	0·07061	
25·00	3 43 11·18	42 21 35·8	0·06796	9 43·1
25·25	3 45 9·43	42 35 39·3	0·06531	
25·50	3 47 10·37	42 49 44·1	0·06265	9 36·0
25·75	3 49 14·08	43 3 49·8	0·05999	
26·00	3 51 20·64	43 17 55·9	0·05733	9 29·0
26·25	3 53 30·14	43 32 1·7	0·05467	
26·50	3 55 42·66	43 46 6·9	0·05200	9 22·1
26·75	3 57 58·28	44 0 10·9	0·04933	
27·00	4 0 17 07	44 14 13·1	0·04667	9 15·3
27·25	4 2 39·11	44 28 13·0	0·04401	
27·50	4 5 4·49	44 42 10·0	0·04135	9 8·5
27·75	4 7 33·30	44 56 3·1	0·03869	
28·00	4 10 5·62	+45 9 51·3	0·03604	9 1·8

Mittl. Berl. Zeit	α app.	δ app.	log der Entfernung des ☿ von ☉	Aberrationszeit
1857 Juni 28·00	4ʰ 10ᵐ 5ˢ·62	+45° 9′ 51″·3	0·03604	9ᵐ 1ˢ·8
28·25	4 12 41·54	45 23 34·7	0·03339	
28·50	4 15 21·16	45 37 11·5	0·03075	8 55·2
28·75	4 18 4·56	45 50 41·1	0·02811	
29·00	4 20 51·84	46 4 2·6	0·02548	8 48·8
29·25	4 23 43·06	46 17 15·0	0·02287	
29·50	4 26 38·31	46 30 17·1	0·02026	8 42·5
29·75	4 29 37·67	46 43 7·8	0·01766	
30·00	4 32 41·22	46 55 45·8	0·01508	8 36·3
30·25	4 35 49·02	47 8 10·0	0·01251	
30·50	4 39 1·14	47 20 19·0	0·00996	8 30·2
30·75	4 42 17·65	47 32 11·3	0·00743	
Juli 1·00	4 45 38·60	47 43 45·6	0·00491	8 24·3
1·25	4 49 4·05	47 55 0·2	0·00241	
1·50	4 52 34·08	48 5 53·5	9·99994	8 18·6
1·75	4 56 8·68	48 16 24·1	9·99749	
2·00	4 59 47·86	48 26 30·2	9·99506	8 13·0
2·25	5 3 31·65	48 36 10·0	9·99266	
2·50	5 7 20·08	48 45 21·8	9·99030	8 7·6
2·75	5 11 13·14	48 54 3·6	9·98796	
3·00	5 15 10·78	49 2 13·5	9·98566	8 2·4
3·25	5 19 12·96	49 9 49·5	9·98338	
3·50	5 23 19·66	49 16 49·6	9·98115	7 57·5
3·75	5 27 30·79	49 23 11·8	9·97896	
4·00	5 31 46·26	49 28 54·0	9·97681	7 52·7
4·25	5 36 5·97	49 33 54·0	9·97470	
4·50	5 40 29·81	49 38 9·9	9·97264	7 48·2
4·75	5 44 57·64	49 41 39·5	9·97063	
5·00	5 49 29·27	49 44 20·7	9·96866	7 43·9
5·25	5 54 4·50	49 46 11·6	9·96675	
5·50	5 58 43·11	49 47 10·2	9·96490	7 39·9
5·75	6 3 24·90	49 47 14·3	9·96310	
6·00	6 8 9·64	49 46 22·1	9·96136	7 36·2
6·25	6 12 57·07	49 44 31·6	9·95969	
6·50	6 17 46·90	49 41 41·1	9·95808	7 32·8
6·75	6 22 38·81	49 37 48·9	9·95653	
7·00	6 27 32·47	+49 32 53·6	9·95506	7 29·6

Mittl. Berl. Zeit	Æ app.	δ app.	log der Entfernung des ☿ von ☉	Aberrationszeit
1857 Juli 7·00	6ʰ 27ᵐ 32ˢ·47	+49° 32′ 53″·6	9·95506	7ᵐ 29ˢ·6
7·25	6 32 27·54	49 26 53·9	9·95366	
7·50	6 37 23·66	49 19 48·5	9·95233	7 26·8
7·75	6 42 20·47	49 11 36·1	9·95108	
8·00	6 47 17·61	49 2 15·7	9·94991	7 24·3
8·25	6 52 14·70	48 51 46·4	9·94883	
8·50	6 57 11·35	48 40 7·5	9·94782	7 22·2
8·75	7 2 7·19	48 27 18·8	9·94690	
9·00	7 7 1·86	48 13 20·5	9 94607	7 20·4
9·25	7 11 54·95	47 58 12·8	9·94533	
9·50	7 16 46·06	47 41 55·7	9·94468	7 19·0
9·75	7 21 34·81	47 24 29·4	9·94412	
10·00	7 26 20·87	47 5 54·3	9·94366	7 18·0
10·25	7 31 3·92	46 46 11·4	9·94330	
10·50	7 35 43·62	46 25 21·8	9·94303	7 17·4
10·75	7 40 19·65	46 3 26·7	9·94286	
11·00	7 44 51·70	45 40 27·5	9·94279	7 17·2
11·25	7 49 19·50	45 16 25·9	9·94282	
11·50	7 53 42·80	44 51 23·7	9·94295	7 17·3
11·75	7 58 1·35	44 25 22·8	9·94318	
12·00	8 2 14·95	43 58 25·5	9·94352	7 17·8
12·25	8 6 23·42	43 30 33·9	9·94396	
12·50	8 10 26·59	43 1 50·3	9·94450	7 18·8
12·75	8 14 24·29	43 32 17·1	9·94514	
13·00	8 18 16·40	42 1 57·0	9·94589	7 20·2
13·25	8 22 2·81	41 30 52·6	9·94673	
13·50	8 25 43·43	40 59 6·8	9·94767	7 22·0
13·75	8 29 18·20	40 26 42·1	9·94871	
14·00	8 32 47·08	39 53 41·4	9·94984	7 24·3
14·25	8 36 10·05	39 20 7·4	9·95107	
14·50	8 39 27·11	38 46 3·1	9·95240	7 26·9
14·75	8 42 38·24	38 11 31·3	9·95381	
15·00	8 45 43·45	37 36 35·0	9·95531	7 29·8
15·25	8 48 42·76	37 1 17·2	9·95690	
15·50	8 51 36·25	36 25 40·5	9·95858	7 33·2
15·75	8 54 23·97	35 49 47·6	9·96032	
16·00	8 57 5·97	+35 13 41·3	9·96217	7 37·1

Mittl. Berl. Zeit	$\mathfrak{R}$ app.	δ app.	log der Entfernung des ♂ von ☉	Aberrationszeit
1857 Juli 16·00	8ʰ57ᵐ 5ˢ97	+35°13′41″3	9·96217	7ᵐ37ˢ1
16·25	8 59 42·33	34 37 24·1	9·96408	
16·50	9 2 13·12	34 0 58·6	9 96605	7 41·2
16·75	9 4 38·45	33 24 27·4	9·96812	
17·00	9 6 58·44	32 47 52·8	9·97024	7 45·6
17·25	9 9 13·20	32 11 17·0	9·97241	
17·50	9 11 22·85	31 34 42·3	9·97467	7 50·3
17·75	9 13 27·49	30 58 10·9	9·97797	
18·00	9 15 27·21	30 21 44·9	9·97931	7 55·4
18·25	9 17 22·14	29 45 26·2	9·98173	
18·50	9 19 12·41	29 9 16·3	9·98418	8 0·8
18·75	9 20 58·17	28 33 17·1	9·98668	
19·00	9 22 39·55	27 57 30·3	9·98922	8 6·4
19·25	9 24 16·67	27 21 57·4	9·99179	
19·50	9 25 49·67	26 46 39·5	9·99440	8 12·2
19·75	9 27 18·70	26 11 37·9	9·99704	
20·00	9 28 43·87	25 36 54·0	9·99971	8 18·3
20·25	9 30 5·29	25 2 28·9	0·00240	
20·50	9 31 23·09	24 28 23·5	0·00512	8 24·6
20·75	9 32 37·43	+23 54 38·8	0·00785	

In dieser Ephemeride sind die zum Schlusse erhaltenen geocentrischen polaren Coordinaten des Kometen direct von Tag zu Tag berechnet und wurden dann zur Bequemlichkeit des Vergleiches für Vierteltage interpolirt.

Bevor an die Vergleichung der Beobachtungen mit dieser Ephemeride selbst geschritten werden konnte, erwies es sich als wünschenswerth, genauere Positionen der Vergleichsterne zu erlangen.

Zu diesem Zwecke habe ich alle wichtigeren, seit 1790 erschienenen Kataloge durchgesehen, überdies theilten mir die Herren Prof. J. Adams in Cambridge, Prof. van Backhuyzen in Leyden, Prof. Schönfeld in Bonn und Mr. J. Bossert in Paris bereitwilligst die neueren, an diesen Sternwarten angestellten Meridianbeobachtungen mit, so dass mir genügendes Material gut bestimmter Sternpositionen zu Gebote stand.

Die älteren Kataloge, vor Allem Baily's Lalande, gaben von den neueren Beobachtungen bei einzelnen Sternen ziemlich abweichende Positionen, so dass ich, um vielleicht eine bessere Concordanz zu erreichen, mich veranlasst sah, die Orte aus den Zonen von Lalande und Bessel neu zu reduciren, und zwar die ersteren mit den v. Asten'schen Hilfstafeln, die letzteren mit denjenigen von E. Luther, und finden sich die so erhaltenen Orte in dem nachfolgenden Sternverzeichnisse an Stelle der Positionen aus den Katalogen von Baily und Weisse.

Da speciell die Lalande'schen Beobachtungen auch dann noch eine beträchtliche Abweichung zeigten, habe ich sie bei Berechnung der Positionen ganz vernachlässigt und nur zur Bestimmung etwaiger Eigenbewegung verwendet. Im Allgemeinen wurden die angenommenen Orte dadurch erhalten, dass jeder Katalogposition ein, der Anzahl der ihr zu Grunde gelegten Beobachtungen entsprechendes Gewicht ertheilt wurde; die Zonenbeobachtungen erhielten hiebei halbes Gewicht.

Bezüglich der Anordnung des nachfolgenden Verzeichnisses wäre noch zu bemerken, dass ich unter den aus den verschiedenen Katalogen erhaltenen Positionen jedesmal die schliesslich angenommene beigesetzt habe; überdies findet sich bei jedem Sterne die nach Anbringung der Reduction auf den scheinbaren Ort des betreffenden Datums erhaltene Position. Die mit einem Sternchen bezeichneten Coordinaten wurden weggelassen.

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		Æ	δ	Rectascension	Declination
1	1800 Lalande.....6413	1	1	* 3ʰ22ᵐ 2ˢ50	*+40°16'10"0
	1810 Groombridge.. 695	5	5	* 3 22 2·05	+40 16 4·8
	1825 Bessel-Weisse . 445	1	1	3 22 2·47	+40 16 4·4
	1845 Radcliffe 992	3	3	3 22 2·49	+40 16 4·7
	1845 Paris 4130	1	1	3 22 2·44	+40 16 5·9
	1875 „ 4130	2	2	3 22 2·43	+40 16 4·3
	1875 Bonn Mer.....	3	3	3 22 2·56	+40 16 3·6
	Angenommen....	....	....	3 22 2·49	+40 16 4·6
	Sch. O. Juni 22 ..	....	....	3 22 2·69	+40 16 8·9

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		α	δ	Rect-ascension	Declination
2	1800 Lalande.....6599	1	1	* 3h 27m 52s·99	*+40° 3' 49"·9
	1825 Bessel-Weisse . 584	1	1	3 27 53·80	+40 3 43·0
	1875 Lund Mer.	2	2	3 27 53·63	+40 3 40·2
	1875 Bonn Mer.	2	2	3 27 53·45	+40 3 41·7
	Angenommen....	....	....	3 27 53·57	+40 3 41·2
	Sch. O. Juni 22...	....	....	3 27 53·76	+40 3 45·7
3	1825 Bessel-Weisse . 630	1	1	3 29 50·56	+41 12 44·7
	1875 Bonn Mer.	2	2	3 29 50·78	+41 12 52·3
	Angenommen....	....	....	3 29 50·74	+41 12 50·7
	Sch. O. Juni 23...	....	....	3 29 50·94	+41 12 55·1
4	1800 Lalande.....6714	1	1	* 3 32 5·58	*+41 0 9·9
	1825 Bessel-Weisse . 689	1	1	3 32 6·64	+41 0 7·7
	1860 Paris 4320	2	3	3 32 6·17	+41 0 8·9
	1875 Bonn Mer.	2	2	3 32 6·41	+41 0 8·1
	Angenommen....	....	....	3 32 6·33	+41 0 8·4
	Sch. O. Juni 23...	....	....	3 32 6·53	+41 0 12·9
5	1800 Lalande.....6772	1	1	* 3 33 58·64	*+42 9 29·1
	1825 Bessel-Weisse . 732	1	1	3 34 0·45	+42 9 20·8
	1845 Radcliffe.....1043	4	3	3 34 1·00	+42 9 16·8
	1860 Paris 4360	1	1	3 34 1·46	+42 9 8·8
	1865 Brüssel 1400	4	4	3 34 1·61	+42 9 9·0
	1872 Airy 9 years... 339	1	1	3 34 1·85	+42 9 8·6
	1875 Bonn Mer.	2	3	3 34 2·03	+42 9 9·5
	Angenommen....	....	....	3 34 1·28	+42 9 13·6
	Sch. O. Juni 24...	....	....	3 34 1·49	+42 9 17·9
6	ν Persei:				
	1875 Fund.Cat.d.A.G. 59	....	....	3 35 29·53	+42 7 22·4
	Sch. O. Juni 24. .	....	....	3 35 29·77	+42 7 27·0
7	1825 Bessel-Weisse . 891	1	1	3 40 28·74	+41 54 34·5
	1875 Bonn Mer.	2	2	3 40 28 74	+41 54 27·5
	Angenommen....	....	....	3 40 28·74	+41 54 28·9
	Sch. O. Juni 24...	....	....	3 40 28·95	+41 54 33·5

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		Æ	δ	Rectascension	Declination
8	1825 Bessel-Weisse . 947	1	1	3ʰ 43ᵐ 15ˢ·00	+41° 50′ 27″·6
	1875 Bonn Mer.	3	3	3 43 15·04	+41 50 26·7
	Angenommen....	....	....	3 43 15·03	+41 50 26·9
	Sch. O. Juni 24...	....	....	3 43 15·23	+41 50 31·6
9	1825 Bessel-Weisse .1017	1	1	3 46 53·54	+42 49 20·2
	1860 Paris 4579	6	2	3 46 53·54	+42 49 19·5
	1875 Bonn Mer.	2	2	3 46 53·73	+42 49 17·1
	Angenommen ...	....	....	3 46 53·59	+42 49 18·5
	Sch. O. Juni 25...	....	....	3 46 53·81	+42 49 23·1
10	1800 Lalande.....7208	1	1	* 3 47 33·92	*+42 53 53·3
	1825 Bessel-Weisse .1029	1	1	3 47 33·89	+42 53 51·2
	1860 Paris 4588	7	7	3 47 34·16	+42 53 50·1
	1875 „ 4588	2	2	3 47 34·10	+42 53 50·2
	1875 Bonn Mer.	2	2	3 47 34·29	+42 53 49·8
	Angenommen....	....	....	3 47 34·16	+42 53 50·1
	Sch. O. Juni 25...	....	....	3 47 34·36	+42 53 54·8
11	1800 Lalande 7234	1	1	* 3 48 22·94	*+42 41 2·6
	1825 Bessel-Weisse .1042	1	1	3 48 23·45	+42 41 11·4
	1860 Paris 4598	2	2	3 48 23·32	+42 41 7·6
	1875 „ 4598	3	4	3 48 23·41	+42 41 6·4
	1875 Bonn Mer.	2	2	3 48 23·40	+42 41 7·1
	Angenommen....	....	....	3 48 23·39	+42 41 7·7
	Sch. O. Juni 25...	....	....	3 48 23·61	+42 41 12·4
12	1800 Lalande.....7330	1	1	* 3 51 13·45	*+43 3 2·9
	1825 Bessel-Weisse .1105	1	1	3 51 13·18	+43 3 7·3
	1860 Paris Mer.	4	4	3 51 13·13	+43 3 11·0
	1875 Bonn Mer.	2	2	3 51 13·23	+43 3 9·1
	Angenommen....	....	....	3 51 13·16	+43 3 10·1
	Sch. O. Juni 25...	....	....	3 51 13·38	+23 3 14·8
13	1800 Lalande.....7421	1	1	* 3 54 1·41	*+43 35 12·9
	1825 Bessel-Weisse .1156	1	1	3 54 1·69	+43 35 14·5
	1875 Paris 4678	2	2	3 54 1·61	+43 35 16·4
	1875 Bonn Mer.	2	3	3 54 1·88	+43 35 15·2
	Angenommen....	....	....	3 54 1·74	+43 35 15·5
	Sch. O. Juni 26...	....	...	3 54 1·97	+43 35 20·2

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		α	δ	Rect-ascension	Declination
14	1825 Bessel-Weisse .1174	1	1	3ʰ55ᵐ 7ˢ99	+43°52'45"6
	1860 Paris 4695	2	3	3 55 8·27	+43 52 50·3
	1875 Bonn Mer.....	2	2	3 55 8·36	+43 52 50·5
	Angenommen....	....	....	3 55 8·28	+43 52 49·9
	Sch. O. Juni 26...	....	....	3 55 8·50	+43 52 54·7
15	1825 Bessel-Weisse .1184	1	1	3 55 35·64	+43 58 2·2
	1860 Paris 4702	1	2	3 55 35·72	+43 58 4·3
	1875 Bonn Mer.	2	2	3 55 35·55	+43 58 1·1
	Angenommen....	....	....	3 55 35·54	+43 58 2·6
	Sch. O. Juni 26...	....	...	3 55 35·76	+43 58 7·3
16	1860 Paris 4714	0	1	3 56 3·00	+43 49 2·1
	1875 Bonn Mer.	2	2	3 56 3·92	+43 49 9·6
	Angenommen....	....	....	3 56 3·92	+43 49 0·5
	Sch. O. Juni 26...	....	....	3 56 4·14	+43 49 5·2
17	1825 Bessel-Weisse .1295	1	1	4 0 36·04	+43 43 9·4
	1855 Bonn. B. VI, 43° 912	2	2	4 0 36·28	+43 43 5·2
	1875 Bonn Mer.	2	2	4 0 36·35	+43 43 6·0
	Angenommen....	....	....	4 0 36·29	+43 43 6·0
	Sch. O. Juni 26...	....	....	4 0 36·52	+43 43 10·7
18	1825 Bessel-Weisse .1303	1	1	4 0 59·13	+45 1 25·9
	1855 Bonn. B. VI, 45° 887	1	1	4 0 59·51	+45 1 27·7
	1875 Bonn Mer.	2	2	4 0 59·52	+45 1 25·0
	Angenommen....	....	....	4 0 59·46	+45 1 25·9
	Sch. O. Juni 27...	....	....	4 0 59·69	+45 1 30·6
19	1825 Bessel-Weisse . 49	1	1	4 4 32·52	+44 49 50·0
	1860 Paris 4871	2	0	4 4 32·54	+44 49 50·0
	1875 Bonn Mer.	2	2	4 4 32·92	+44 49 54·3
	Angenommen....	....	....	4 4 32·71	+44 49 53·4
	Sch. O. Juni 27...	....	....	4 4 32·94	+44 49 58·2

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		AR	δ	Rectascension	Declination
20	1800 Lalande 7817	1	1	* 4ʰ 5ᵐ 7ˢ·11	*+44° 24' 12"·6
	1855 Bonn. B. VI, 44° 890	2	2	4 5 7·40	+44 24 6·4
	1860 Yarnall III. Ed.....	5	3	4 5 7·47	+44 24 2·8
	1865 Berlin Mer.	3	3	4 5 7·60	*+44 23 47·6
	1875 Bonn Mer.	2	2	4 5 7·62	+44 24 5·7
	Angenommen....	....	....	4 5 7·52	+44 24 4·6
	Sch. O. Juni 27...	....	....	4 5 7·75	+44 24 9·5
21	1825 Bessel-Weisse . 78	2	2	4 5 32·44	+45 2 10·4
	1842 Argel-Oeltzen..4620	1	1	* 4 5 32·99	*+45 2 11·9
	1860 Paris 4889	2	1	4 5 32·77	+45 2 9·8
	1875 Bonn Mer.	2	2	4 5 33·01	+45 2 5·1
	Angenommen....	....	....	4 5 32·80	+45 2 7·6
	Sch. O. Juni 27...	....	....	4 5 33·02	+45 2 12·4
22	1800 Lalande.....7881	2	2	* 4 7 3·05	*+45 51 27·8
	1842 Argel.-Oeltzen .4646	1	1	4 7 3·83	+45 51 26·4
	1845 Radcliffe.....1179	4	3	4 7 3·74	+45 51 24·3
	1865 Brüssel 1614	3	3	4 7 3·75	+45 51 23·8
	1875 Paris 4928	4	3	4 7 3·75	+45 51 24·3
	1875 Bonn Mer.	3	3	4 7 3·73	+45 51 23·9
	Angenommen....	....	....	4 7 3·75	+45 51 24·2
	Sch. O. Juni 28...	....	....	4 7 3·99	+45 51 28·9
	53 Persei *d*:				
23	1800 Lalande.....8029	2	2	* 4 11 12·79	*+46 9 9·2
	1800 Piazzi ....IVʰ 33	9	6	4 11 13·00	+46 9 9·9
	1810 Groombridge .. 817	6	5	4 11 13·24	+46 9 8·7
	1835 Taylor.....1482	3	4	4 11 13·71	+46 9 8·7
	1836 Rümker.....1150	1	1	4 11 13·27	+46 9 12·6
	1840 Armagh	7	5	4 11 13·24	+46 9 10·0
	1845 Radcliffe 1202	5	4	4 11 13·39	+46 9 8·3
	1845 Airy 12 years.. 361	6	3	4 11 13·32	+46 9 9·4
	1855 Struve 632	1	1	4 11 13·39	+46 9 8·1
	1860 Paris 4998	3	4	4 11 13·28	+46 9 8·9
	1875 „ 4998	1	1	4 11 13·33	+41 9 7·6
	1875 Bonn Mer.	2	2	4 11 13·44	+46 9 8·4
	1877 Becker..... 93	4	4	4 11 13·38	+46 9 8·2
	1880 Airy 10 years C. 679	3	3	4 11 13·44	+46 9 7·9
	Angenommen....	....	....	4 11 13·34	+46 9 8·8
	Sch. O. Juni 28...	....	....	4 11 13·57	+46 9 13·6

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		Æ	δ	Rectascension	Declination
24	1800 Lalande.....8163	2	2	* 4ʰ 15ᵐ 9ˢ·53	*+45° 48' 33"·5
	1842 Argel.-Oeltzen .4780	1	1	4 15 10·39	+45 48 31·3
	1860 Paris 5069	6	5	4 15 10·17	+45 48 30·2
	1875 „ 5069	3	3	4 15 10·43	+45 48 30·2
	1875 Bonn Mer.	3	3	4 15 10·45	+45 48 28·9
	Angenommen....	....	....	4 15 10·31	+45 48 30·0
	Sch. O. Juni 28...	....	....	4 15 10·54	+45 48 35·0
25	1800 Lalande.....8177	1	1	* 4 15 29·70	*+45 54 0·1
	1842 Argel.-Oeltzen .4786	1	1	4 15 30·85	+45 53 58·6
	1860 Paris 5076	1	0	4 15 30·56	+45 53 58·0
	1875 „ 5076	4	4	4 15 30·57	+45 53 58·0
	1875 Bonn Mer.	2	2	4 15 30·72	+45 53 57·4
	Angenommen....	....	....	4 15 30·63	+45 53 57·9
	Sch. O. Juni 28...	....	....	4 15 30·86	+45 54 2·9
26	1800 Lalande.....8248	1	1	* 4 16 58·80	*+46 32 26·9
	1842 Argel.-Oeltzen .4806	2	2	4 16 59·48	+46 32 13·9
	1845 Radcliffe 1225	3	5	4 16 59·52	+46 32 10·5
	1875 Armagh II 545	1	1	4 16 59·60	+46 32 4·2
	1875 Paris 5108	1	1	4 16 59·73	+46 32 1·0
	1875 Bonn Mer.	3	3	4 16 59·86	+46 32 1·3
	1882 Albany Mer.	1	1	4 16 59·92	+56 31 59·0
	Angenommen....	....	....	4 16 59·58	+46 32 8·1
	Sch. O. Juni 29...	....	....	4 16 59·83	+46 32 13·0
27	1842 Argel.-Oeltzen .4856	1	1	4 19 48·76	+45 37 46·6
	1875 Bonn Mer.	2	2	4 19 48·73	+45 37 48·7
	Angenommen....	....	....	4 19 48·73	+45 37 48·0
	Sch. O. Juni 28...	....	....	4 19 48 96	+45 37 53·1
28	1842 Argel.-Oeltzen .4865	1	1	4 20 29·23	+45 41 7·5
	1875 Bonn Mer.	2	2	4 20 29·28	+45 41 9·6
	Angenommen....	....	....	4 20 29·26	+45 41 8·9
	Sch. O. Juni 28...	....	....	4 20 29·49	+45 41 14·1
29	1842 Argel.-Oeltzen .4979	1	1	4 27 36·59	+46 31 33·1
	1875 Bonn Mer.	2	2	4 27 36·66	+46 31 28·8
	Angenommen....	....	....	4 27 36·64	+46 31 30·2
	Sch. O. Juni 29. .	....	....	4 27 36·88	+46 31 35·4

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		Æ	δ	Rectascension	Declination
30	1842 Argel.-Oeltzen.5076	2	2	4ʰ33ᵐ39ˢ43	+46°31'40"8
	1875 Bonn Mer.	2	2	4 33 39·73	+46 31 37·9
	Angenommen....	....	....	4 33 39·63	+46 31 38·5
	Sch. O. Juni 29...	....	....	4 33 39·87	+46 31 43·8
31	1800 Lalande 8825	2	2	* 4 34 53·32	*+47 12 23·4
	1842 Argel.-Oeltzen.5097	1	1	4 34 53·04	+47 12 16·8
	1855 Bonn. B. VI, 47° 1034	2	2	4 34 53·07	+47 12 17·1
	1875 Paris 5396	2	2	4 34 53·14	+47 12 17·4
	1875 Armagh II 581	4	4	4 34 53·07	+47 12 15·9
	1875 Bonn Mer.	2	2	4 34 53·23	+47 12 18·4
	Angenommen....	....	....	4 34 53·11	+47 12 16·9
	Sch. O. Juni 30...	....	....	4 34 53·37	+47 12 22·1
32	1790 Fedorenko 737	1	1	5 7 38·48	+48 45 47·8
	1800 Lalande 9803	1	1	* 5 7 38·34	*+48 45 45·5
	1842 Argel.-Oeltzen.5702	1	1	5 7 38·96	+48 45 46·9
	1860 Paris 6051	0	1	5 7 38·00	*+48 45 51·9
	1875 „ 6051	3	3	5 7 38·91	+48 45 46·2
	1875 Bonn Mer.	2	2	5 7 38·96	+48 45 46·0
	Angenommen....	....	....	5 7 38·92	+48 45 46·3
	Sch. O. Juli 2	....	....	5 7 39·20	+48 45 52·1
33	1790 Fedorenko 758	1	1	* 5 21 22·13	*+49 16 50·5
	1810 Groombridge .. 978	5	5	5 21 20·98	+49 16 49·2
	1830 Struve P. M.... 578	1	1	5 21 21·05	+46 16 46·9
	1860 Paris 6331	6	5	5 21 20·95	+49 16 47·1
	1865 Brüssel 2137	3	1	* 5 21 21·55	*+49 16 48·1
	1875 Bonn Mer.	2	2	5 21 20·78	+49 16 45·3
	Angenommen....	....	....	5 21 20·94	+46 16 47·1
	Sch. O. Juli 3	....	....	5 21 21·25	+49 16 53·1
34	27, *o* Aurigae:				
	1875 Fund. Cat. d. A. G. 377	....	....	5 34 49·54	+49 45 28·9
	Sch. O. Juli 4	....	....	5 34 49·94	+49 45 35·5

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		$\Delta\alpha$	δ	Rectascension	Declination
35	166 Aurigae:				
	1800 Piazzi .....Vh 280	6	5	5h 51m 41s·77	+49° 53′ 55″·4
	1810 Groombridge ..1060	1	1	5 51 41·58	+49 53 55·0
	1835 Taylor.....2237	4	4	5 51 41·66	*+49 54 4·0
	1840 Armagh 1348	5	5	5 51 41·94	+49 53 52·7
	1842 Argel.-Oeltzen .6409	1	1	* 5 51 42·29	*+49 53 53·0
	1845 Radcliffe 1607	3	3	5 51 41·93	+49 53 52·4
	1855 Struve 953	1	1	5 51 41·97	+49 53 52·5
	1860 Paris 7064	5	8	5 51 42·05	+49 53 51·9
	1865 Brüssel 2407	2	2	5 51 42·09	+49 53 51·1
	1875 Bonn Mer.	2	2	5 51 42·23	+49 53 50·5
	1880 Airy 10 years..1017	3	3	5 51 42·02	+49 53 51·4
	Angenommen....	....	....	5 51 41·98	+49 53 52·8
	Sch. O. Juli 5	....	....	5 51 42·35	+49 53 59·1
36	1842 Argel.-Oeltzen .7152	1	1	6 33 4·52	+49 27 51·3
	1875 Bonn Mer.	2	2	6 33 4·55	+49 27 49·8
	Angenommen....	....	....	6 33 4·54	+49 27 50·3
	Sch. O. Juli 7	....	....	6 33 5·02	+49 27 57·2
37	1842 Argel.-Oeltzen .7168	1	1	6 33 53·40	+49 28 50·5
	1875 Bonn Mer.	2	2	6 33 53·21	+49 28 47·4
	Angenommen....	....	....	6 33 53·27	+49 28 48·4
	Sch. O. Juli 7	....	....	6 33 53·74	+49 28 55·3
	57 Aurigae ψ:				
38	1790 Fedorenko 970	1	1	* 6 36 45·45	*+48 56 3·8
	1800 Lalande.....12906	1	1	* 6 36 44·43	*+48 56 10·9
	1800 Piazzi ..... VIh 210	6	7	6 36 44·99	+48 56 6·2
	1810 Groombridge ..1220	6	6	6 36 44·91	+48 56 5·9
	1835 Taylor.....2644	3	4	6 36 45·38	+48 56 4·5
	1840 Armagh.....1536	5	5	6 36 45·08	+48 56 7·5
	1842 Argel.-Oeltzen .7218	1	1	6 36 45·20	+48 56 6·4
	1845 Radcliffe 1809	4	4	6 36 45·07	+48 56 6·7
	1845 Paris Mer.	1	1	6 36 45·07	+48 56 8·0
	1855 Struve.....1106	1	1	6 36 45·09	+48 56 6·3
	1860 Airy 7 years... 514	3	3	6 36 45·07	+48 56 6·1
	1860 Paris Mer.	2	9	6 36 45·11	+48 56 6·6
	1875 Bonn Mer.	3	3	6 36 45·24	+48 56 5·1
	1880 Airy 10 years..1167	3	3	6 36 45·16	+48 56 6·4
	Angenommen....	....	....	6 36 45·10	+48 56 6·4
	Sch. O. Juli 7	....	....	6 36 45·58	+48 56 13·3

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		Æ	δ	Rectascension	Declination
39	1800 Lalande.....13153	1	1	* 6ʰ43ᵐ52ˢ·11	*+49° 4′32″·1
	1842 Argel.-Oeltzen.7329	2	2	6 43 51·79	+49 4 34·3
	1845 Airy 12 years.. 606	2	3	6 43 52·10	+49 4 31·5
	1846 Hamburg Mer.....	1	1	6 43 51·99	+49 4 34·4
	1848 Königsberg Mer. ...	5	3	6 43 52·06	+49 4 30·9
	1850 Airy 6 years	1	0	6 43 52·04	+49 4 30·0
	1875 Bonn Mer.	3	3	6 43 52·06	+49 4 30·3
	Angenommen....	....	....	6 43 52·04	+49 4 31·5
	Sch. O. Juli 7	....	....	6 43 52·54	+49 4 38·5
40	1800 Lalande.....13868	1	1	* 7 3 5·71	*+48 43 56·7
	1830 Struve P. M.... 823	2	2	7 3 5·88	+48 44 0·8
	1842 Argel.-Oeltzen.7644	0	3	7 3 5·00	+48 44 2·2
	1855 Bonn. B. VI, 48° 1489	1	1	7 3 6·04	+48 44 2·0
	1865 Brüssel 2980	2	2	7 3 5·88	+48 43 59·6
	1875 Armagh..... 860	1	1	7 3 5·77	+48 43 59·9
	1875 Bonn Mer.	2	2	7 3 6·06	+48 44 0·0
	Angenommen....	....	....	7 3 5·94	+48 44 0·6
	Sch. O. Juli 8	....	....	7 3 6·49	+48 44 7·7
41	1842 Argel.-Oeltzen.7882	1	1	7 16 31·50	+47 55 27·7
	1875 Bonn Mer.	2	2	7 16 31·36	+47 55 26·6
	Angenommen....	....	....	7 16 31·41	+47 55 27·0
	Sch. O. Juli 9	....	....	7 16 32·01	+47 55 34·1
42	1836 Rümker.....2231	6	6	7 18 52·65	+47 34 39·9
	1842 Argel.-Oeltzen.7928	1	1	7 18 52·33	+47 34 40·5
	1860 Paris 9130	1	0	7 18 52·69	+47 34 40·0
	1875 Bonn Mer.	2	2	7 18 52·79	+47 34 36·7
	Angenommen....	....	....	7 18 52·65	+47 34 39·0
	Sch. O. Juli 9	....	....	7 18 53·26	+47 34 46·1
43	1840 Armagh 1706	0	5	7 26 8·00	+46 29 26·0
	1845 Radcliffe.....1986	3	4	7 26 8·14	+46 29 26·7
	1845 Paris 9311	3	0	7 26 8·04	—
	1850 Durham Mer.....	1	1	7 26 8·18	+46 29 27·0
	1855 Struve 1223	1	1	7 26 8·05	+46 29 26·1

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		$\Delta\alpha$	δ	Rectascension	Declination
	1855 Bonn B. VI, 46° 1286	4	4	7h 26m 8s·09	+46° 29′ 27″·2
	1860 Paris 9311	4	6	7 26 8·11	+46 29 26·3
	1865 Brüssel 3190	2	1	7 26 8·02	+46 29 26·6
	1875 Bonn Mer.	2	2	7 26 8·10	+46 29 27·3
	1880 Airy 10 years .1301	6	3	7 26 8·02	+46 29 25·2
	Angenommen....	....	....	7 26 8·07	+46 29 26·4
	Sch. O. Juli 10 ...	....	....	7 26 8·71	+46 29 33·4
44	1842 Argel.-Oeltzen.8154	1	1	7 31 37 58	+46 32 9·8
	1875 Bonn Mer.	2	2	7 31 37·48	+46 32 43·5
	Angenommen....	....	....	7 31 37·51	+46 32 43·5
	Sch. O. Juli 10 ...	....	....	7 31 38·16	+46 32 50·6
45	1800 Lalande 15449	1	1	* 7 49 9·06	*+45 13 43·7
	1875 Paris 9743	1	1	7 49 9·24	+45 13 44·9
	1875 Bonn Mer.	3	3	7 49 9·48	+45 13 46·5
	Angenommen....	....	....	7 49 9·40	+45 13 46·1
	Sch. O. Juli 11 ...	....	....	7 49 10·10	+45 13 53·1
46	1825 Bessel Weisse .1495	1	1	7 54 20·39	+45 0 6·3
	1842 Argel-Oeltzen .8547	1	1	7 54 20·29	+45 0 5·3
	1845 Radcliffe.....2075	4	4	7 54 20·57	+45 0 3·7
	1875 Bonn Mer.	3	3	7 54 20·51	+45 0 5·0
	Angenommen....	....	....	7 54 20·52	+45 0 4·5
	Sch. O. Juli 11 ...	....	....	7 54 21·23	+45 0 11·5
47	1800 Lalande 15831	1	1	* 7 59 33·06	*+42 50 42·2
	1810 Groombridge . 1411	6	6	* 7 59 32·33	+42 50 46·6
	1825 Bessel-Weisse 1634	3	3	7 59 33·27	+42 50 40·6
	1840 Armagh 1812	5	5	7 59 33·38	+42 50 42·8
	1840 Airy 12 years. 721	—	2	7 59 33·00	+42 50 44·2
	1845 „ 12 „ . 721	3	—	7 59 33·10	+42 50 44·0
	1845 Radcliffe..... 2089	3	5	7 59 33·20	+42 50 43·8
	1855 Struve..... 1305	1	1	7 59 33·15	+42 50 42·1
	1865 Brüssel..... 3417	4	4	7 59 33·07	+42 50 41·1
	1870 Grant 2060	6	6	7 59 33·20	+42 50 42·0
	1875 Bonn Mer	2	2	7 59 33·21	+43 50 40·2
	1877 Becker 222	3	3	7 59 33·17	+42 50 40·7
	Angenommen....	....	....	7 59 33·18	+42 50 42·5
	Sch. O. Juli 12 ...	....	....	7 59 33·90	+42 50 49·3

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		Æ	δ	Rectascension	Declination
48	1800 Lalande 15958	1	1	* 8h 3m16ˢ91	*+43°25'22"8
	1825 Bessel-Weisse 23	1	1	8 3 17·44	+43 25 26·0
	1875 Paris.....10006	2	2	8 3 17·33	+43 25 26·9
	1875 Bonn Mer.	2	2	8 3 17·36	+43 25 27·5
	Angenommen....	....	....	8 3 17·35	+43 25 27·1
	Sch. O. Juli 12 ...	....	....	8 3 18·09	+43 25 33·9
49	1800 Lalande 16059	1	1	* 8 4 58·18	*+43 27 53·9
	1810 Groombridge. 1421	5	5	8 4 58·08	+43 27 52·3
	1825 Bessel-Weisse 65	1	1	8 4 58·06	+43 27 49·7
	1845 Radcliffe..... 2109	3	3	8 4 58·20	+43 27 51·4
	1875 Paris.....10047	5	4	8 4 58·06	+43 27 49·1
	1875 Bonn Mer.	3	3	8 4 58·22	+43 27 49·2
	Angenommen....	....	....	8 4 58·13	+43 27 50·2
	Sch. O. Juli 12 ...	....	....	8 4 58·88	+43 27 57·0
50	1825 Bessel-Weisse. 161	1	1	8 8 46·61	+43 19 32·9
	1875 Bonn Mer.	2	2	8 8 46·71	+43 19 28·9
	Angenommen....	....	....	8 8 46·68	+43 19 30·3
	Sch. O. Juli 12 ...	....	....	8 8 47·44	+43 19 37·1
51	31 Lyncis:				
	1875 Fund.Cat.d.A.G.407	....	....	8 13 1·95	+43 38 32·4
	Sch. O. Juli 12 ...	....	....	8 13 2·63	+43 38 41·1
52	1800 Lalande 16339	1	1	* 8 14 3·07	*+41 7 39·4
	1825 Bessel-Weisse 299	3	3	8 14 3·11	+41 7 45·1
	1836 Rümker 2487	1	1	8 14 2·77	+41 7 42·4
	1875 Bonn Mer.	2	2	8 14 3·00	+41 7 42·4
	Angenommen....	....	....	8 14 3·01	+41 7 43·4
	Sch. O. Juli 13 ...	....	....	8 14 3·78	+41 7 50·0
53	1825 Bessel-Weisse. 456	1	1	8 20 12·20	+41 11 7·8
	1875 Bonn Mer.	3	3	8 20 11·74	+41 11 8·5
	Angenommen....	....	....	8 20 11·81	+41 11 8·4
	Sch. O. Juli 13 ...	....	....	8 20 12·60	+41 11 15·0

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		$\Delta\alpha$	δ	Rectascension	Declination
5 4	1800 Lalande 16804	1	1	* 8h 26m 35s·65	*+43° 4' 10"·4
	1810 Groombridge. 1454	4	4	8 26 36·10	+43 4 9·5
	1825 Bessel-Weisse 607	3	3	8 26 36·15	+43 4 7·6
	1845 Radcliffe..... 2169	3	5	8 26 36·26	+43 4 8·2
	1860 Paris.....10518	4	4	8 26 36·28	+43 4 7·1
	1865 Brüssel..... 3604	5	3	8 26 36·14	+43 4 7·8
	1875 Paris.....10518	2	2	8 26 36·08	+43 4 8·2
	1875 Bonn Mer.	2	2	8 26 36·25	+43 4 7·8
	Angenommen....	....	....	8 26 36·19	+43 4 8·0
	Sch. O. Juli 12 ...	....	....	8 26 36·96	+43 4 14·7
55	1810 Groombridge. 1448	4	4	8 21 40·54	+40 42 4·4
	1825 Bessel-Weisse 486	1	1	8 21 40·68	+40 42 4·1
	1836 Rümker 2536	1	1	8 21 40·70	+40 42 4·8
	1845 Radcliffe..... 2152	3	3	8 21 40·73	+40 42 4·7
	1875 Bonn Mer.	2	2	8 21 40·59	+40 42 2·3
	Angenommen....	....	....	8 21 40·64	+40 42 4·0
	Sch. O. Juli 13 ...	....	....	8 21 41·43	+40 42 10·5
56	1800 Lalande 16775	1	1	* 8 25 31·54	*+41 30 40·4
	1825 Bessel-Weisse 583	2	2	8 25 31·34	+41 30 36·9
	1875 Bonn Mer.	2	2	8 25 31·31	+41 30 35·6
	Angenommen....	....	....	8 25 31·32	+41 30 36·0
	Sch. O. Juli 18 ...	....	....	8 25 32·12	+41 30 42·5
57	1825 Bessel-Weisse 937	1	1	8 37 20·54	+39 0 21·6
	1855 Bonn B. VI, 39° 2152	1	1	8 37 19·90	+39 0 16·9
	1875 Lund Mer.	1	1	8 37 20·13	+39 0 15·5
	Angenommen....	....	....	8 37 20·12	+39 0 17·3
	Sch. O. Juli 14 ...	....	....	8 37 20·95	+39 0 23·5
58	129 *B* Lyncis:				
	1800 Lalande 17287	1	1	* 8 39 46·08	*+38 52 6·9
	1810 Groombridge. 1471	5	5	8 39 45·98	+38 52 5·9
	1825 Bessel-Weisse 992	1	1	8 39 46·01	*+38 52 10·7
	1830 Struve P.M... 1045	4	4	8 39 46·06	+38 52 6·8
	1845 Radcliffe..... 2206	3	5	8 39 46·06	+38 52 7·7
	1860 Paris.....10796	4	4	8 39 46·07	+38 52 6·6
	1875 „ 10796	1	1	8 39 45·97	+38 52 6·2
	1875 Lund Mer.	2	2	8 39 46·13	+38 52 6·1
	Angenommen....	....	....	8 39 46·05	+38 52 6·8
	Sch. O. Juli 14 ...	....	....	8 39 46·88	+38 52 12·9

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		AR	δ	Rect-ascension	Declination
59	1825 Bessel-Weisse 1032	1	1	8ʰ41ᵐ34ˢ15	+38°59'32"6
	1836 Rümker 2656	1	1	* 8 41 33·59	+38 59 34·3
	1875 Lund Mer.	2	2	8 41 34·10	+38 59 34·1
	Angenommen....	....	....	8 41 34·11	+38 59 33·9
	Sch. O. Juli 14 ...	....	....	8 41 34·95	+38 59 40·0
60	1800 Lalande 17344	1	1	* 8 41 35·74	*+41 28 11·9
	1825 Bessel-Weisse 1029	1	1	8 41 35·75	*+41 38 13·6
	1836 Rümker 2657	1	1	8 41 35·50	+41 28 11·0
	1875 Bonn Mer.	2	2	8 41 35·82	+41 28 10·8
	Angenommen....	....	....	8 41 35·75	+41 28 10·9
	Sch. O. Juli 13 ...	....	....	8 41 36·59	+41 28 17·3
61	1800 Lalande 17546	1	1	* 8 46 53·09	*+36 44 22·0
	1825 Bessel-Weisse 1156	1	1	8 46 53·35	+36 44 16·3
	1875 Paris 10961	3	2	8 46 53·10	+36 44 17·4
	1875 Lund Mer.	2	2	8 46 53·04	+36 44 18·8
	Angenommen....	....	....	8 46 53·10	+36 44 17·9
	Sch. O. Juli 15 ...	....	....	8 46 53·95	+36 44 23·7
62	1800 Lalande 17607	1	1	* 8 48 39·62	*+38 48 42·1
	1825 Bessel-Weisse 1199	—	1	8 48 37·00	+38 48 33·4
	1875 Armagh II 1044	5	5	8 48 37·46	+38 48 29·8
	1875 Lund Mer.	2	2	8 48 37·66	+38 48 29·0
	Angenommen....	....	....	8 48 37·53	+38 48 30·2
	Sch. O. Juli 14 ...	....	....	8 48 38·38	+38 48 36·3
63	1800 Lalande 17630	1	1	* 8 49 26·91	*+36 21 3·4
	1825 Bessel-Weisse 1218	1	1	8 49 26·91	+36 21 3·6
	1875 Lund Mer.	2	2	8 49 27·00	+36 21 3·3
	Angenommen....	....	....	8 49 26·98	+36 21 3·4
	Sch. O. Juli 15 ...	....	....	8 49 27·83	+36 21 9·0
64	1800 Lalande 17749	1	1	* 8 52 45·41	*+36 25 7·6
	1825 Bessel-Weisse 1294	1	1	8 52 45·78	+36 25 7·8
	1875 Armagh II... 1049	5	6	8 52 45·01	+36 25 2·9
	1875 Lund Mer.	4	4	8 52 45·20	+36 25 2·8
	Angenommen....	....	....	8 52 45·15	+36 25 3·2
	Sch. O. Juli 15 ...	....	....	8 52 46·01	+36 25 8·8

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		Æ	δ	Rectascension	Declination
65	1800 Lalande 17873	1	1	* 8ʰ 56ᵐ 36ˢ·18	* +36° 44′ 54″·5
	1825 Bessel-Weisse 1378	2	2	8 56 36·22	+36 44 52·6
	1875 Armagh II	5	4	8 56 35·56	+36 44 48·6
	1875 Lund Mer.	2	2	8 56 35·66	+36 44 50·1
	1875 Paris 11145	2	2	8 56 25·71	+36 44 50·0
	Angenommen....	....	....	8 56 35·66	+36 44 49·7
	Sch. O. Juli 15 ...	....	....	8 56 36·53	+36 44 55·4
66	1800 Piazzi ..VIIIʰ 254	5	6	9 0 4·21	+34 27 45·2
	1800 Gould-d'Agelet 1676	2	2	9 0 4·86	+34 27 52·5
	1800 Lalande 17982	3	3	9 0 4·90	+34 27 47·5
	1825 Bessel-Weisse 1483	1	1	9 0 4·25	+34 27 45·7
	1835 Taylor 3972	4	1	9 0 4·22	+34 27 40·4
	1836 Rümker 2754	2	2	9 0 4·05	+34 27 41·5
	1840 Armagh 2013	1	5	9 0 3·91	+34 27 40·8
	1865 Brüssel 3846	3	3	9 0 3·90	+34 27 38·3
	1870 Grant 2348	4	4	9 0 3·88	+34 27 37·0
	1875 Paris 11221	3	3	9 0 3·65	+34 27 37·0
	1875 Leyden Mer.	2	2	9 0 3·73	+34 27 36·4
	1880 Hamburg Mer.	4	4	9 0 3·51	+34 27 35·7
	1881 Leipzig Mer.	1	1	9 0 3·50	+34 27 35·9
	1881 Berlin Mer.....	3	3	9 0 3·73	+34 27 36·0
	Angenommen....	....	....	9 0 3·87	+34 27 38·6
	Sch. O. Juli 16 ...	....	....	9 0 4·74	+34 27 44·0
67	1800 Lalande 18270	2	2	* 9 8 49·59	*+31 53 37·8
	1825 Bessel-Weisse 166	1	1	9 8 49·53	+31 53 42·3
	1875 Leyden Mer.....	2	2	9 8 49·60	+31 53 44·5
	1875 Paris Mer.....	6	5	9 8 49·60	+31 53 46·1
	Angenommen....	....	....	9 8 49·59	+31 53 45·2
	Sch. O. Juli 17 ...	....	....	9 8 50·47	+31 53 50·1
68	1 x Leonis:				
	1800 Lalande 18491	2	2	* 9 16 19·07	*+26 47 47·2
	1800 Piazzi ....IXʰ 67	12	16	9 16 19·25	+26 47 46·8
	1800 Gould-d'Agelet 1744	9	9	* 9 16 19·06	*+26 47 47·6
	1825 Bessel-Weisse 330	1	1	9 16 18·89	+26 47 42·7
	1836 Rümker 2852	5	5	9 16 19·06	+26 47 43·6

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		AR	δ	Rectascension	Declination
	1845 Paris 11574	4	1	9h 16m 19s·09	+26° 47' 45"·2
	1850 Airy 6 years . 667	0	2	9 16 19·00	+26 47 42·9
	1855 Struve..... 1489	1	1	9 16 19·10	+26 47 42·8
	1858 Hamburg Mer.....	1	1	9 16 19·05	+26 47 42·0
	1860 Airy 7 years . 716	6	10	9 16 19·11	+26 47 42·5
	1860 Paris 11574	15	3	9 16 19·11	+26 47 43·6
	1872 Airy 9 years . 906	4	4	9 16 19·09	+26 47 42·9
	1875 Paris 15174	1	1	9 16 18·92	+26 47 44·3
	1875 Cambridge Mer.....	4	4	9 16 19·15	+26 47 41·7
	1880 Airy 10 years 1555	3	9	9 16 19·09	+26 47 41·5
	Angenommen....	....	....	9 16 19·12	+26 47 43·5
	Sch. O. Juli 19 ...	....	....	9 16 19·98	+26 47 47·1
69	10 Leonis minoris:				
	1875 Fund.Cat.d.A.G. 419	....	....	9 25 29·36	+37 1 46·9
	Sch. O. Juli 15 ...	....	....	9 25 30·20	+37 1 52·4
70	1800 Lalande 18845	2	2	* 9 28 13·27	*+31 48 7·6
	1800 Piazzi ....IX^h 124	5	5	9 28 13·17	+31 48 4·2
	1825 Bessel-Weisse 587	1	1	9 28 12·85	+31 47 59·6
	1835 Taylor 4223	4	4	9 28 13·18	+31 48 1·0
	1855 Struve..... 1516	1	1	9 28 13·21	+31 48 0·5
	1860 Paris 11814	1	2	9 28 13·47	+31 48 0·7
	1864 Airy second 7 years..... 1173	5	5	9 28 13·19	+31 48 0·1
	1870 Grant 2487	4	4	9 28 13·38	+31 47 58·7
	1875 Leyden Mer.....	2	2	9 28 13·16	+31 48 0·3
	Angenommen....	....	....	9 28 13·20	+31 48 0·8
	Sch. O. Juli 17 ...	....	....	9 28 14·12	+31 48 5·3
71	1800 Lalande 18987	2	2	* 9 33 6·81	*+31 55 34·6
	1800 Piazzi ....IX^h 145	7	7	9 33 6·93	+31 55 30·8
	1825 Bessel-Weisse 696	1	1	9 33 6·83	+31 55 29·3
	1835 Taylor 4266	4	4	9 33 7·04	+31 55 30·9
	1840 Armagh 2124	0	5	9 33 7·00	+31 55 31·4
	1855 Struve..... 1529	1	1	9 33 6·94	+31 55 29·8
	1875 Armagh II ... 1118	5	6	9 33 6·80	+31 55 30·9
	1875 Leyden Mer.	2	2	9 33 6·98	+31 55 29·5
	Angenommen....	....	....	9 33 6·92	+31 55 30·7
	Sch. O. Juli 17 ...	....	....	9 33 7·86	+31 55 35·1

Nr.	Katalog	Zahl der Beobachtungen in		1857·0	
		ΔR	δ	Rectascension	Declination
72	1800 Lalande 19091	1	1	* 9ʰ36ᵐ32ˢ·54	*+29°21'51"·0
	1825 Bessel-Weisse 778	1	1	9 36 33·03	+29 21 48·3
	1860 Paris 11977	0	1	9 36 33·00	+29 21 49·0
	1875 „ 11977	3	3	9 36 33·12	+29 21 45·9
	1875 Cambridge Mer.	2	2	9 36 33·21	+29 21 45·4
	Angenommen....	....	....	9 36 33·15	+29 21 46·2
	Sch. O. Juli 18 ...	....	....	9 36 34·08	+29 21 50·1

Hiebei wurden die folgenden Eigenbewegungen angenommen:

bei Stern:	in α:	in δ:
5	+0ˢ·0364	—0"·262
6	—0·0015	—0·012
26	+0·0073	—0·327
34	—0·0034	—0·027
35	+0·0058	—0·050
51	+0·0005	—0·107
66	—0·0168	—0·075
69	+0·0008	—0·010

und zwar bei Stern 6, 34, 51 und 69 nach dem Fundamentalkataloge der Astronomischen Gesellschaft, bei Stern 5 und 26 nach O. Stumpe's „Untersuchung über die Bewegung des Sonnensystems" in Nr. 2999—3000 der Astronomischen Nachrichten, während ich die Eigenbewegung bei Stern 35 und 66 unter strenger Berücksichtigung der Epochen selbst berechnete.

Zwar liesse sich bei anderen Sternen ebenfalls auf eine, wenn auch immerhin unbedeutende Eigenbewegung schliessen, wie z. B. bei Stern 68 in Declination. Doch habe ich bei den meisten, angesichts der durch die geringe Anzahl der Beobachtungen nothwendig entstehenden Unsicherheit der eigenen Bewegung, wie dem Umstande zufolge, dass das Resultat dadurch keinesfalls erheblich entstellt wird, es vorgezogen, bei Bestimmung der definitiven Sternpositionen die etwaige Bewegung durch

angemessene Vertheilung der Gewichte ganz zu eliminiren. Bei Stern 5 musste ich annehmen, dass im Pariser Katalog die Rectascension um 1ˢ zu klein angegeben ist, da sowohl Bossert wie Stumpe bei Berechnung der Eigenbewegung eine um 1ˢ grössere Rectascension verwendet haben. Schliesslich wäre noch zu erwähnen, dass die Declination des Sternes 22 im Argel.-Oeltz.-Kataloge um 1 Bogenminute, die Rectascension des Sternes 49 im Baily-Lalande um 1 Zeitminute zu gross angeführt sind.

Was nun die Beobachtungen selbst anbelangt, verdanke ich die ganze Reihe der von Klinkerfues in Göttingen angestellten der gütigen Mittheilung des Herrn Professors W. Schur in Göttingen. Von diesen Beobachtungen war der grössere Theil bis nun noch nicht publicirt, während die in den Astronomischen Nachrichten seinerzeit veröffentlichten durch die Neureduction nicht unwesentliche Correctionen erfuhren. Ebenso hatte Herr Professor C. F. W. Peters in Königsberg die Freundlichkeit, mir eine kleine Verbesserung der dortigen Beobachtungen mitzutheilen.

Bei den von d'Arrest in Leipzig und Peters in Altona angestellten Beobachtungen konnte ich bezüglich der Vergleichsternpositionen keine Verbesserung anbringen, da die Orte der benützten Sterne nicht publicirt wurden und auch trotz der Bemühungen des Herrn Professors Thiele in Kopenhagen, wo sich die d'Arrest'schen Tagebücher befinden, sowie der Herren Professoren Peters in Königsberg und Krüger in Kiel nicht aufgefunden werden konnten.

Die Anordnung der nun folgenden beiden Beobachtungstafeln bedarf keines weiteren Commentars; unter der Rubrik mit der Überschrift π gebe ich die zugehörigen Parallaxencorrectionen, und ist der der Berechnung derselben zu Grunde gelegte Parallaxenwerth der Newcomb'sche mit 8″848. Von den in der zweiten Tafel gegebenen Differenzen wurden die eingeklammerten bei Bildung der Normalorte nicht mit verwerthet.

Bei sämmtlichen Cambridger Beobachtungen ist statt der Ortszeit die mittlere Greenwicher Zeit angegeben, bei den Pariser Beobachtungen ist in der Differenz $\mathcal{H}-*$ bereits die Reduction auf den scheinbaren Ort inbegriffen.

Beobachtungstafel I.

Beobachtungs-Nr.	Datum	Mittlere Ortszeit	Beobachtungsort	Vergl.-Stern-Nr.	Rectascension ♂−✳	Rectascension π	Declination ♂−✳	Declination π
1	1857 Juni 22	13h 18m 49ˢ·2	Göttingen	2	− 1m 49ˢ·46	−0ˢ·33	+ 2′ 32″·9	+5″·8
2	22	13 18 51·6	„	1	+ 4 0·72	−0·33	− 9 30·0	+5·8
3	23	12 56 53·0	Berlin	4	+ 0 20·93	−0·32	− 0 33·3	+6·0
4	23	13 12 22·0	Hamburg	3	+ 2 46·16	−0·32	−12 13·6	+6·0
				4	+ 0 30·42		+ 0 34·6	
5	23	13 16 15·8	Göttingen	4	+ 0 31·37	−0·34	+ 0 44·3	+5·9
6	24	12 15 23·9	Leipzig[1]	—	—	−0·28	—	+6·6
7	24	12 54 20·5	Göttingen	5	+ 5 38·67	−0·34	−13 53·2	+6·1
8	24	13 18 36·0	Berlin	7, 8	− 0 45·10	−0·36	+ 1 26·7	+6·0
9	24	13 9 17·4	Göttingen	7	− 0 42·50	−0·34	+ 1 38·5	+6·1
10	24	13 15 54·0	Altona[1]	—	—	−0·34	—	—
11	24	13 21 33·0	Hamburg	6	+ 4 19·04	−0·34	−10 59·6	+6·1
12	24	13 25 57·0	Altona	—	—	—	—	+6·0
13	24	13 7 42·6	Paris	6	+ 4 24·42	−0·36	− 9 53·7	+6·1
14	24	13 48 18·1	Cambridge E.	6	+ 4 40·44	−0·37	− 7 52·7	+5·7
15	24	13 59 49·3	Paris	6	+ 4 40·77	−0·41	− 7 47·2	+5·4

[1] Bei sämmtlichen Beobachtungen von Altona und Leipzig fehlen Detailangaben.

Beobachtungs-Nr.	Datum	Mittlere Ortszeit	Beobachtungsort	Vergl.-Stern-Nr.	Rectascension		Declination	
					♅—✳	π	♅—✳	π
16	1857 Juni 25	12h 11m 40ˢ·8	Leipzig	—	—	—0ˢ·28	—	+6″·9
17	25	12 42 31·6	Göttingen	10	— 0m 7ˢ·53	—0·32	— 2 25·4	+6·6
18	25	12 59 19·0	Leipzig	—	—	—0·34	—	+6·4
19	25	13 6 31·0	Berlin	9, 10	+ 0 36·16	—0·34	+ 2 23·7	+6·3
20	25	12 24 1·0	Cambridge E.	10	— 0 0·74	—0·29	— 1 43·8	+6·8
21	25	13 12 59·6	Altona	—	—	—0·34	—	—
22	25	13 14 54·1	„	—	—	—	—	+6·2
23	25	13 5 13·1	Bonn[1]	10	+ 0 4·28	—0·36	— 0 53·6	+6·3
24	25	13 29 53·7	„	9	+ 0 52·68	—0·38	+ 4 25·0	+6·0
25	25	13 22 22·1	Paris[2]	12	— 3 22·87	—0·39	— 9 0·8	+6·1
26	25	13 22 52·8	„	10	+ 0 16·46	—0·39	+ 0 24·0	+6·0
27	25	13 45 13·8	Bonn	11	— 0 31·63	—0·40	+13 14·1	+5·8
28	25	14 6 31·1	Paris	12	— 3 7·39	—0·43	— 7 13·8	+5·5
29	26	13 3 48·0	Berlin	14	+ 0 54·49	—0·35	— 4 46·3	+6·5
30	26	12 16 28·6	Cambridge E.	13	+ 2 3·48	—0·29	+13 8·2	+7·0
31	26	13 0 17·8	Bonn[3]	14	+ 1 3·07	—0·36	— 3 49·0	+6·5
32	26	13 13 31·5	Göttingen	16	+ 0 8·58	—0·37	+ 0 0·8	+6·4
33	26	13 0 5·5	Leyden	14, 15	+ 1 6·68	—0·35	— 3 29·9	+6·6
34	26	13 25 51·5	Bonn	15	+ 0 45·53	—0·39	— 8 4·8	+6·2
35	26	13 31 57·0	Bilk	13	+ 2 21·69	—0·39	+14 57·0	+6·2
36	26	13 25 46·7	Leyden	14—16	+ 0 20·72	—0·38	+ 1 20·4	+6·3

37	26	13 17 35·5	Paris	17	− 4 11·92	−0·39	+ 7 20·1	+6·3
38	26	14 2 19·6	„	17	− 3 54·53	−0·44	+ 9 1·1	+5 7
39	27	13 0 38·0	Wien	18	+ 4 15·63	−0·39	−18 34·5	+6·7
				20	+ 0 19·17		+20 1·3	
40	27	12 56 37·0	Berlin	19	+ 0 50·92	−0·35	− 6 4·8	+6·8
41	27	12 59 53·3	Leipzig	—	—	−0·36	—	+6·7
42	27	13 25 14·8	Göttingen	19	+ 1 8·89	−0·39	− 4 31·0	+6·4
43	27	13 26 18·1	„	18	+ 4 46·95	−0·39	−15 35·4	+6·4
44	27	13 5 10·7	Leyden	19, 21	+ 1 9·46	−0·36	− 4 25·2	+7·4
45	27	13 3 44·3	Paris	21	+ 0 12·27	−0·39	−16 9·4	+6·7
46	27	14 3 54·3	„	20	+ 1 2·58	−0·45	+23 59·1	+5·8
47	28	11 43 36·9	Kremsmünster	22	+ 8 3·18	−0·26	−15 31·7	+7·7
				23	+ 3 53·85		−33 13·8	
48	28	12 11 49·7	Königsberg	24	− 0 0·34	−0·27	−12 30·9	+7·4
49	28	12 40 15·5	„	24	+ 0 11·74	−0·31	−11 25·6	+7·2
50	28	12 45 0·4	Wien	24	+ 0 21·58	−0·36	—	—
				25	+ 0 1·46			
51	28	13 8 44·0	Berlin	27, 28	− 4 0·88	−0·37	+ 1 27·6	+6·9
52	28	12 59 28·7	Bonn	24	+ 0 45·1	−0·37	− 8 39·1	+7·0

[1] In der Angabe der Differenz ☿ − ✳ sind die Zeichen verwechselt.
[2] Vergleichstern stört die Beobachtung durch seinen Glanz.
[3] Beobachtung bei heller Dämmerung und Dunst angestellt.

Beobachtungs-Nr.	Datum	Mittlere Ortszeit	Beobachtungsort	Vergl.-Stern-Nr.	Rectascension		Declination	
					♂—✳	π	♂—✳	π
53	1857 Juni 28	13h 42m 33ˢ·8	Göttingen	24	+ 1m 0ˢ·63	—0ˢ·42	— 7′25″·4	+6″·4
54	28	14 34 36·0	Florenz	24	+ 1 20·78	—0·53	— 5 51·1	+5·3
55	28	14 55 27·0	„	23	+ 5 26·59	—0·54	—26 7·0	+4·9
56	29	11 0 43·9	Wien[1]	26	+ 8 59·28	—0·15	— 4 59·4	+ 6·5
57	29	13 14 47·2	Leyden	29	— 0 7·94	—0·37	+ 2 11·5	+7·0
58	29	14 6 29·4	Padua	30	— 5 39·83	—0·51	+33 0·7	+6·1
59	30	12 38 41·5	Göttingen	31	+ 4 29·00	—0·32	—	—
60	30	12 43 2·2	„	31	—	—	+ 9 15·0	+7·6
61	1857 Juli 2	10 40 40·2	Wien[1]	32	— 1 22·36	—0·05	— 3 10·0	+8·9
62	2	12 4 18·0	Altona	—	—	—0·23	—	+8·4
63	2	12 51 16·4	Königsberg	32	— 0 10·10	—0·28	— 0 22·1	+8·0
64	2	13 27 37·0	Berlin	32	+ 0 32·13	—0·04	+ 1 17·3	+7·6
65	3	11 26 50·6	Königsberg[2]	33	+ 1 10·43	—0·03	— 1 29·8	+8·8
66	3	11 44 11·2	„ [2]	33	+ 1 22·60	—0·08	— 1 11·1	+8·8
67	3	11 32 36·0	Berlin	33	+ 1 33·70	—0·14	— 0 55·2	+8·9
68	4	11 15 30·8	Wien	34	+ 4 52·72	—0·08	—	—
69	4	11 32 56·1	Königsberg	34	+ 4 53·49	—0·11	— 8 10·4	+9·0
70	4	13 49 31·0	Florenz	34	+ 7 2·23	—0·50	— 6 48·2	+7·9
71	5	11 42 13·1	Paris	35	+ 7 15·81	—0·10	— 6 48·9	+9·4

72	7	9 15 46·0	Florenz	37	+ 1 16·07	+0·41	- 6 0·8	+ 8·9
73	7	11 36 9·8	Königsberg	38	— 0 10·99	—0·01	+24 39·3	+ 9·6
74	7	11 54 42·9	Kremsmünster	38	+ 0 25·84	—0·06	+23 57·1	+ 9·7
				39	— 6 41·02		+15 27·9	
75	7	11 22 23·7	Cambridge	38	+ 0 44·90	+0·03	+23 19·8	+ 9·7
76	7	13 42 12·0	Berlin	36, 37	+ 1 37·69	—0·33	— 5 22·1	+ 8·9
77	8	9 39 48·0	Florenz	40	— 7 49·32	+0·39	+ 0 36·7	+ 9·1
78	8	10 55 59·6	Kremsmünster	40	— 6 55·82	+0·15	— 1 44·9	+ 9·8
79	9	9 21 35·0	Florenz	41	— 1 58·41	+0·47	— 6 25·3	+ 8·7
80	9	9 32 59·7	Padua	41	— 1 46·57	+0·43	— 6 58·2	+ 8·9
81	9	12 4 41·7	Königsberg	42	— 2 32·76	—0·12	+ 8 24·0	+ 9·7
82	9	12 23 5·3	„	42	— 2 17·95	—0·04	+ 7 29·4	+ 9·8
83	9	12 5 22·4	Kremsmünster[3]	—	—	0·00	—	+10·0
84	9	11 45 24·2	Cambridge	42	— 1 42·16	+0·05	+ 5 33·3	+ 9·9
85	10	9 10 58·6	Padua	43	+ 7 22·16	+0·50	+ 5 39·5	+ 8·4
86	10	10 10 44·2	Paris	43	+ 8 39·01	+0·34	+ 0 0·5	+ 9·3
87	10	11 24 57·0	Berlin	44	+ 3 32·30	+0·14	— 5 13·0	+ 9·8
88	10	11 35 31·5	Paris	42	+ 9 44·78	+0·13	— 4 59·9	+ 9·9
89	10	11 59 21·0	„	42	+10 2·93	+0·06	— 6 25·1	+10·0
90	11	9 6 13·0	Florenz	45	+ 2 25·96	+0·54	—10 26·8	+ 8·1
91	11	11 13 21·8	Cambridge	46	— 0 38·78	+0·20	— 9 7·5	+ 8·6

[1] Vergleichstern vom Beobachter falsch identificirt.

[2] Bei den beiden Königsberger Beobachtungen vom 3. Juli sind die Zeiten verwechselt.

[3] Am Meridiankreis beobachtet.

Beobachtungs-Nr.	Datum	Mittlere Ortszeit	Beobachtungsort	Vergl.-Stern-Nr.	Rectascension •		Declination	
					♂—✳	π	♂—✳	π
92	1857 Juli 12	9h 16m 27ˢ·3	Padua	51	— 4m 28ˢ·08	+0ˢ·51	—23′ 46″·6	+8″·2
93	12	9 28 2·1	„	49	+ 3 43·58	+0·49	—14 1·3	+8·3
94	12	9 32 17·0	Florenz	48	+ 5 29·09	+0·50	—11 59·1	+8·4
95	12	9 20 39·0	Genf	49	+ 3 54·79	+0·50	—15 7·7	+8·2
96	12	9 52 26·0	„	47	+ 9 41·81	+0·44	+19 35·8	+8·7
97	12	10 32 33·2	Göttingen	51	— 3 31·67	+0·32	—30 18·3	+9·3
98	12	10 26 18·1	Paris	54	—17 48·44	+0·35	+ 2 7·6	+9·2
99	12	12 7 19·9	Königsberg	50	+ 1 19·40	+0·09	—15 43·7	+9·9
100	13	9 17 43·5	Genf	56	— 1 14·63	+0·50	—19 12·7	+8·0
101	13	10 13 34·9	Kremsmünster	55	+ 2 50·06	+0·39	+26 59·3	+8·9
				60	—17 5·08		—19 10·0	
102	13	10 6 44·0	Florenz	52	+10 29·96	+0·43	+ 0 53·0	+8·7
103	13	10 50 43·0	Berlin	53	+ 4 43·39	+0·28	— 5 30·0	+9·3
104	13	11 12 56·6	Bonn	56	— 0 8·57	+0·26	—29 1·0	+9·5
105	14	9 6 21·7	Padua	62	—10 48·36	+0·52	+13 55·9	+7·6
106	14	9 27 45·8	„	58	— 1 44·42	+0·49	+ 8 15·3	+8·0
107	14	9 6 43·5	Gent	58	— 1 42·44	+0·51	+ 8 10·1	+7·7
108	14	9 43 52·0	Florenz	57	+ 0 52·19	+0·48	— 1 46·8	+8·1
109	14	9 24 52·5	Genf	59	— 3 20·78	+0·49	— 1 1·9	+8·0
110	14	10 6 39·6	Kremsmünster	58	— 1 27·68	+0·40	+ 5 56·2	+8·6
111	14	10 31 2·0	Berlin	58	— 1 12·87	+0·33	+ 2 47·7	+9·0

112	14	9 48 38·5	Paris	58	− 1 11·14	+0·43	+ 2 46·4	+8·7
113	14	10 10 24·6	Bonn	58	− 1 10·61	+0·38	+ 2 20·5	+8·7
114	14	10 10 0·1	Leyden	58	− 1 5·15	+0·36	+ 1 27·2	+8·8
115	14	11 4 1·0	Berlin	58	− 0 55·03	+0·27	− 0 20·0	+9·3
116	15	9 14 55·0	Florenz	61	+ 3 22·80	+0·51	− 2 27·1	+7·5
117	15	9 17 47·1	Padua	65	− 6 19·84	+0·49	− 3 22·5	+7·6
118	15	9 1 2·0	Genf	64	− 2 25·64	+0·50	+16 2·3	+7·4
119	15	9 23 56·0	„	65	− 6 5·02	+0·38	− 6 4·2	+7·8
120	15	10 2 51·7	Kremsmünster	65 69	− 6 2·77 −34 58·70	+0·40	− 6 48·0 −23 42·5	+8·4
121	15	10 19 39·0	Berlin	61	+ 3 49·38	+0·34	− 8 9·5	+8·7
122	15	10 5 15·9	Leyden	63	+ 1 25·31	+0·37	—	—
123	15	10 16 53·3	„	63	—	—	+11 45·7	+8·5
124	16	9 10 9·0	Florenz	66	+ 0 57·43	+0·50	− 9 44·6	+7·2
125	16	9 2 23·0	Genf[1]	66	+ 1 3·37	+0·49	—	—
126	16	9 4 23·0	„ [1]	66	—	—	−11 19·2	+7·3
127	16	9 57 53·1	Kremsmünster[2]	66	+ 1 12·77	+0·40	−14 10·1	+8·1
128	17	9 26 41·0	Florenz	67	+ 1 37·60	+0·46	− 3 50·0	+7·3
129	17	9 40 17·2	Kremsmünster	70 71	−17 45·14 −22 39·84	+0·41	+ 1 51·9 − 5 33·9	+7·7
130	18	9 1 38·5	Genf[1]	72	−18 9·68	+0·45	+ 3 5·6	+7·0
131	19	8 59 13·0	„ [1]	68	+ 8 48·92	+0·49	+14 34·4	+6·8

[1] Himmel nicht rein, Komet schwach, Beobachtung daher ungenau.

[2] Reduction auf den scheinbaren Ort in der Differenz ♂—✳ enthalten.

Beobachtungstafel II.

Nr. der Beobachtung	Mittlere Berliner Zeit	Beobachtungsort	Geocentrischer Ort des ☿		Beob.—Rechn.	
			Æ	δ	Δα cos δ	Δδ
		I. Normalort.				
1	1857 Juni 22·55717	Göttingen	3ʰ 26ᵐ 4ˢ30	+40° 6′18″5	+1ˢ01	— 5″7
2	22·55720	„	3 26 3·41	40 6 38·9	+0·28	+14·6
3	23·53251	Berlin	3 32 27·56	40 59 44·5	—0·21	— 3·8
4	23·55277	Hamburg	3 32 39·47	41 0 45·3	+0·70	— 5·9
5	23·55556	Göttingen	3 32 37·90	41 0 57·2	+0·47	— 2·6
6	24·50665	Leipzig	3 39 26·18	41 53 44·1	+0·36	— 6·1
7	24·54050	Göttingen	3 39 40·16	41 55 24·7	—0·57	—19·6
8	24·54776	Berlin	3 39 43·47	41 56 6·8	—0·36	— 5·1
9	24·55089	Göttingen	3 39 46·45	41 56 12·0	+0·63	— 7·2
10	24·55548	Altona	3 39 47·43	—	—0·17	—
11	24·55931	Hamburg	3 39 48·79	41 56 28·3	—0·42	—20·0
12	24·56246	Altona	—	41 56 39·9	—	—18·1
13	24·57092	Paris	3 39 53·99	41 57 29·9	—0·48	+ 2·6
14	24·60560	Cambridge	3 40 10·19	41 59 35·1	—0·04	+11·1
15	24·60711	Paris	3 40 10·34	41 59 36·4	—0·50	+ 6·8
		II. Normalort.				
16	1857 Juni 25·50423	Leipzig	3 47 12·93	42 49 47·9	+0·15	— 3·6
17	25·53245	Göttingen	3 47 26·51	42 51 36·0	+0·17	+ 2·1

18	25·53732	Leipzig	3 47 28·01	42 51 50·8	−0·73	+ 6·9
19	25·53953	Berlin	3 47 29·54	42 51 48·7	−0·10	− 4·4
20	25·54723	Cambridge	3 47 33·61	42 52 14·3	−0·15	− 6·1
21	25·55362	Altona	3 47 36·18	—	−0·61	—
22	25·55495	„	—	42 52 50·3	—	+ 6·5
23	25·55613	Bonn	3 47 38·32	42 52 52·3	+0·28	+13·5
24	25·57326	„	3 47 46·20	42 53 50·6	−0·14	+ 2·1
25	25·58127	Paris	3 47 50·44	42 54 11·4	−0·28	− 3·6
26	25·58163	„	3 47 50·63	42 54 17·9	−0·16	− 0·1
27	20·58392	Bonn	3 47 51·88	42 54 34·6	0·00	+ 4·3
28	25·61193	Paris	3 48 5·92	42 55 58·4	−0·05	− 0·9
29	26·53781	Berlin	3 56 2·45	43 48 3·9	−0·27	+ 0·2
30	26·54215	Cambridge	3 56 5·37	43 48 27·8	−0·09	+ 6·1
31	26·55287	Bonn	3 56 11·02	43 49 1·5	+0·10	+ 6·6
32	26·55416	Göttingen	3 56 12·72	43 49 6·0	+0·45	+ 2·6
33	26·55999	Leyden	3 56 14·76	43 49 23·4	−0·10	+ 2·9
34	26·57062	Bonn	3 56 20·43	43 50 3·3	+0·14	+ 3·2
35	26·57576	Bilk	3 56 23·33	43 50 14·5	−0·11	+ 0·2
36	26·57783	Leyden	3 56 24·52	43 50 21·7	−0·02	+ 0·8
37	26·57811	Paris	3 56 24·76	43 50 31·9	−0·52	+ 1·6
38	26·60918	„	3 56 42·15	43 52 12·9	−0·13	− 2·9
39	27·52758	Wien	4 5 20·94	44 43 38·3	+0·06	− 1·9
40	27·53297	Berlin	4 5 23·41	44 43 50·0	+0·28	0·00
41	27·53804	Leipzig	4 5 29·14	44 44 27·4	(+1·35)	(+17·0)
42	27·56246	Göttingen	4 5 41·83	44 45 27·2	+0·07	− 5·0
43	27·56318	„	4 5 46·64	44 45 55·2	(+3·23)	(+20·7)

Nr. der Beobachtung	Mittlere Berliner Zeit	Beobachtungsort	Geocentrischer Ort des ☿		Beob.—Rechn.	
			$\mathcal{A}$	δ	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
44	1857 Juni 27·56368	Leyden	4ʰ 5ᵐ42ˢ24	+44°45'33"2	+0"07	− 3"9
45	27·56864	Paris	4 5 44·27	44 45 50·6	−0·06	+10·5
46	27·61043	„	4 6 9·95	44 48 11·6	−0·10	− 9·1
		III. Normalort.				
47	1857 Juni 28·48037	Kremsmünster	4 15 7·23	45 36 0·4	−1·22	− 1·0
48	28·48229	Königsberg	4 15 9·65	45 36 7·7	−0·02	− 1·9
49	28·50204	„	4 15 21·73	45 37 13·0	−0·34	− 1·5
50	28·51668	Wien	4 15 32·38	—	−0·15	—
51	28·54154	Berlin	4 15 48·15	45 39 20·8	−0·36	− 0·1
52	28·55261	Bonn	4 15 55·91	45 39 55·9	+0·10	+ 0·4
53	28·57463	Göttingen	4 16 11·17	45 41 9·6	+0·85	+ 2·0
54	28·60712	Florenz	4 16 30·36	45 42 46·8	+0·06	−10·1
55	28·62161	„	4 16 39·95	45 43 7·6	−0·38	(−34·8)
56	29·44461	Wien	4 26 33·80	46 31 32·8	−0·60	+ 2·0
57	29·57065	Leyden	4 27 28·87	46 33 49·9	+0·01	− 2·3
58	29·58604	Padua	4 27 39·38	46 34 46·7	−0·01	+ 6·9
59	30·52708	Göttingen	4 39 22·37	—	−0·12	—
60	30·53357	„	—	47 21 37·1	—	−10·8
		IV. Normalort.				
61	1857 Juli 2·43108	Wien	5 6 44·53	48 41 26·5	+0·12	−11·9
62	2·50693	Altona	5 7 26·24	48 45 32·0	−0·31	+ 3·7

63		2·51024	Königsberg	5 7 28·82	48 45 29·9	−0·50	− 5·8
64		2·55521	Berlin	5 8 11·87	48 47 8·9	−0·15	− 2·5
65		3·45172	Königsberg	5 22 31·71	49 15 25·4	−0·53	+ 6·4
66		3·46376	„	5 22 43·88	49 15 44·1	−0·32	+ 4·4
67		3·47545	Berlin	5 22 54·90	49 15 59·8	−0·60	0·0
68		4·45550	Wien	5 39 43·43	—	−0·43	—
69		4·45606	Königsberg	5 39 43·27	49 37 24·7	−0·27	+12·4
70		4·57658	Florenz	5 41 52·82	49 38 44·1	(+0·15)	(−23·9)
71		5·51305	Paris	5 58 57·30	49 47 11·0	−0·04	+ 1·6
			V. Normalort.				
72	1857 Juli	7·38671	Florenz	6 35 9·87	49 22 57·1	+0·39	+10·8
73		7·45855	Königsberg	6 36 34·54	49 20 57·4	−0·03	+ 7·7
74		7·48910	Kremsmünster	6 37 11·23	49 20 8·3	+0·25	+12·4
75		7·50592	Cambridge	6 37 30·77	49 19 30·8	−0·12	+ 4·8
76		7·56580	Berlin	6 38 42·24	49 17 29·8	−0·14	− 7·3
77		8·40345	Florenz	6 55 14·94	48 44 45·5	+0·55	+24·3
78		8·44837	Kremsmünster	6 56 10·52	48 42 22·3	+0·51	+ 6·5
79		9·39084	Florenz	7 14 38·61	47 49 9·5	+0·24	+23·8
80		9·39707	Padua	7 14 45·50	47 48 36·9	−0·05	+15·4
81		9·47845	Königsberg	7 16 20·16	47 43 11·5	−0·33	+ 2·6
82		9·49123	„	7 16 34·97	47 42 16·9	−0·37	− 3·5
83		9·49659	Kremsmünster	7 16 42·60	47 42 4·7	+0·35	+ 6·2
84		9·52199	Cambridge	7 17 10·76	47 40 20·9	−0·28	+ 2·8
85		10·38180	Padua	7 34 46·86	—	+0·28	+17·0
86		10·44978	Paris	7 34 46·86	46 29 26·2	+0·18	+ 0·1
87		10·47060	Berlin	7 35 10·58	46 27 2·4	+0·04	+ 2·1

Nr. der Beobachtung	Mittlere Berliner Zeit	Beobachtungsort	Geocentrischer Ort des ☿		Beob.—Rechn.	
			α	δ	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
88	1857 Juli 10·50866	Paris	7ʰ35ᵐ52ˢ63	+46°24'25"8	—0ˢ19	— 9"5
89	10·52520	„	7 36 10·78	46 23 0·6	—0·39	— 9·5
		VI. Normalort.				
90	1857 Juli 11·38019	Florenz	7 51 35·92	45 3 21 6	+0·38	+18·3
91	11·49975	Cambridge	7 53 42·21	44 51 4·8	+0·06	—12·8
92	12·38558	Padua	8 8 34·61	43 15 6·1	+0·31	+ 9·9
93	12·39363	„	8 8 42·51	43 13 53·3	+0·35	+ 6·7
94	12·39828	Florenz	8 8 47·02	43 13 31·9	+0·42	+17·8
95	12·40438	Genf	8 8 52·92	43 12 44·5	+0·34	+ 7·3
96	12·42645	„	8 9 14·92	43 10 20·8	+0·68	+15·0
97	12·44378	Göttingen	8 9 30·96	43 8 22·8	—0·18	+18·7
98	12·46057	Paris	8 9 47·65	43 6 25·4	+0·15	+ 6·1
99	12·48029	Königsberg	8 10 6·77	43 3 55·9	—0·21	— 1·0
100	13·40232	Genf	8 24 16·83	41 11 26·1	+0·49	+ 4·8
101	13·41893	Kremsmünster	8 24 31·52	41 9 9·8	+0·47	— 2·7
102	13·42217	Florenz	8 24 33·96	41 8 39·2	+0·04	— 3·9
103	13·44678	Berlin	8 24 56·39	41 5 43·9	+0·23	+ 5·3
104	13·47982	Bonn	8 25 23·72	41 1 41·6	(—1·21)	(+11 9)
105	14·37848	Padua	8 37 50·51	39 2 37·5	—0·03	+ 6·8
106	14·39335	„	8 38 2·42	39 0 31·0	+0·48	+ 4·7
107	14·39462	Genf	8 38 3·59	39 0 19·0	+0·61	+ 3·5

108	14·40623	Florenz	8 38 13·40	38 58 41·0	+0·86	− 2·5
109	14·40722	Genf	8 38 13·15	38 58 32·4	+0·40	+ 1·5
110	14·41406	Kremsmünster	8 38 19·16	38 58 12·7	(+0·67)	(+35·2)
111	14·43305	Berlin	8 38 34·02	38 54 49·4	+0·44	+ 2·0
112	14·43433	Paris	8 38 34·94	38 54 53·0	+0·44	+ 4·8
113	14·43622	Bonn	8 38 36·31	38 54 34·6	+0·28	+ 0·6
114	14·44320	Leyden	8 38 41·73	38 53 41·0	+0·21	+ 3·9
115	14·45595	Berlin	8 38 51·86	38 51 41·7	+0·12	+ 1·4
		VII. Normalort.				
116	1857 Juli 15·38606	Florenz	8 50 16·88	36 41 58·8	+0·65	+12·2
117	15·38635	Padua	8 50 17·59	36 41 38·0	+0·42	− 8·9
118	15·39060	Genf	8 50 20·14	36 41 10·7	+0·32	− 0·3
119	15·40650	„	8 50 31·18	36 38 48·8	+0·27	− 4·0
120	15·41136	Kremsmünster	8 50 34·50	36 38 12·7	(+1·07)	(+ 1·2)
121	15·42507	Berlin	8 50 43·58	36 36 12·2	+0·02	+ 4·0
122	15·43984	Leyden	8 50 53·25	—	−0·37	—
123	15·44793	„	—	36 32 57·2	—	− 0·7
124	16·38266	Florenz	9 1 2·84	34 18 7·3	+0·83	+ 3·2
125	16·39144	Genf	9 1 7·53	—	+0·64	—
126	16·39283	„	—	34 16 23·5	—	− 7·6
127	16·40781	Kremsmünster	9 1 17·78	34 13 27·4	(+0·86)	(−41·6)
128	17·39404	Florenz	9 10 28·32	31 49 59·2	+1·05	− 5·0
129	17·39549	Kremsmünster	9 10 28·72	31 49 59·9	+0·74	+ 7·1
130	18·39071	Genf	9 18 23·22	29 24 54·4	+0·25	− 7·2
131	19·38889	„	9 25 8·11	27 2 20·2	+0·53	+ 2·2

Wie aus vorstehendem Tableau ersichtlich, zeigen namentlich die an den Sternwarten von Göttingen, Florenz und Kremsmünster angestellten Beobachtungen mitunter sprunghafte Abweichungen von der Ephemeride, wesshalb ich bei der Normalortbildung die zu fehlerhaften einfach wegliess, allen anderen Beobachtungen der genannten Sternwarten aber das Gewicht $^1/_2$ ertheilte, das letztere Gewicht auch jenen Beobachtungen, bei welchen eine Vergleichsterncorrection nicht angebracht werden konnte. Die an einem Orte angestellten Beobachtungen desselben Tages habe ich zusammengezogen, sofern mir nicht, wie z. B. von Paris bekannt war, dass sie von verschiedenen Beobachtern herrührten.

Auf den Rath des Herrn Professors E. Weiss fasste ich nun die einzelnen Correctionen in sieben Gruppen zusammen, wonach sich folgende Mittel der Differenzen (B.—R.) fanden:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Zahl der Beobachtungen
I. Juni 22 — Juni 24	—1ˢ·81	—2″·30	12
II. „ 25 — „ 27	—2·08	+0·40	23
III. „ 28 — „ 30	—3·68	—0·60	11
IV. Juli 2 — Juli 5	—6·67	+0·10	9
V. „ 7 — „ 10	+0·44	+4·70	17
VI. „ 11 — „ 14	+4·47	+4·00	19
VII. „ 15 — „ 19	+6·88	—1·30	11

Hieraus folgen die

Normalorte, bezogen auf das mittlere Äquinoctium 1857·0.

Normalort		α	ρ
I.	1857 Juni 24·25	54°22′31″·6	+41°39′22″·3
II.	26·50	58 55 11·9	43 45 54·9
III.	29·00	65 12 25·7	46 3 50·0
IV.	Juli 3·50	80 49 14·7	49 16 39·5
V.	9·25	107 58 6·1	47 58 12·5
VI.	13·25	125 30 9·1	41 30 56·5
VII.	16·50	135 32 48·5	34 0 59·1

Diesen Normalorten wurde durchwegs ein und dasselbe Gewicht beigelegt, da die obige Gruppirung sie ziemlich gleichwerthig macht und wo, wie im vierten Orte, die Anzahl der

Beobachtungen eine verhältnissmässig geringe, sie durch die grössere Vertrauenswürdigkeit ausgeglichen wird.

Als zu verbesserndes System wurde das eingangs erwähnte Pape'sche angenommen, welches auf die Ebene des Äquators transformirt lautet:

Komet 1857 III.

$T = 1857$ Juli $18{\cdot}01175$ mittl. Berl. Zeit.

$\Omega' = 33°45'49''91$
$\omega' = 149\ \ 0\ 50{\cdot}68$
$i' = 141\ 43\ 24{\cdot}91$
} mittl. Äquin. $1857{\cdot}0$

$\log q = 9{\cdot}565259$

Dieses System lässt in den obigen Normalorten noch die folgenden Fehler übrig:

		$\Delta\alpha$	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
Normalort	I	$-1''4$	$-1''1$	$-1{\cdot}7$
„	II	$-2{\cdot}2$	$-1{\cdot}6$	$+0{\cdot}7$
„	III	$-3{\cdot}8$	$-2{\cdot}6$	$-0{\cdot}3$
„	IV	$-6{\cdot}0$	$-3{\cdot}9$	$+0{\cdot}8$
„	V	$+0{\cdot}8$	$+0{\cdot}5$	$+4{\cdot}3$
„	VI	$+4{\cdot}9$	$+3{\cdot}7$	$+4{\cdot}8$
„	VII	$+7{\cdot}5$	$+5{\cdot}7$	$-1{\cdot}9$

Der Unterschied dieses Fehlertableaus gegen das auf S. 62 aufgestellte erklärt sich durch die bei nur sechsstelliger Rechnung entstehende Unsicherheit der ersten Ephemeride, sowie den Gang derselben. Die Verbesserung des obigen Systems wurde mit Hilfe von Differentialquotienten vorgenommen, und zwar bediente ich mich zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen jener Formeln, die Professor E. Schönfeld im 113. Bande der Astronomischen Nachrichten entwickelt hat.

Führt man, wie diese Methode es verlangt, statt der Änderungen des Knotens, der Neigung und des Abstandes des Knotens vom Perihel neue, bequemere Differentiale ein, die mit jenen durch die nachfolgenden Formeln verbunden sind:

$$d\varkappa = d\omega + \cos i\, d\Omega$$
$$d\lambda = \sin\omega\, di - \cos\omega \sin i\, d\Omega$$
$$d\nu = \cos\omega\, di + \sin\omega \sin i\, d\Omega,$$

so werden die vierzehn Bedingungsgleichungen:

Rectascensionen:

1) $-1^{s}1 = 8_n57138\,dx + 3_n41585\,dT + 9_n06003\,dq + 7_n80868\,d\lambda + 9\cdot54569\,dv + 9_n29481\,de$

2) $-1\cdot6 = 8\cdot62395\,dx + 3_n51819\,dT + 8\cdot74733\,dq + 8_n46238\,d\lambda + 9\cdot52548\,dv + 9_n25768\,de$

3) $-2\cdot6 = 9\cdot16312\,dx + 3_n62842\,dT + 9\cdot46512\,dq + 8_n73107\,d\lambda + 9\cdot48821\,dv + 9_n20754\,de$

4) $-3\cdot9 = 9\cdot55077\,dx + 3_n80173\,dT + 9\cdot91329\,de + 8_n93413\,d\lambda + 9\cdot34615\,dv + 9_n08065\,de$

5) $+0\cdot5 = 9\cdot69301\,dx + 3_n89261\,dT + 0\cdot11791\,dq + 8_n74908\,d\lambda + 8\cdot79918\,dv + 8_n78638\,de$

6) $+3\cdot7 = 9\cdot57494\,dx + 3_n79836\,dT + 0\cdot08887\,dq + 7\cdot86576\,d\lambda + 7_n60156\,dv + 8_n40718\,de$

7) $+5\cdot7 = 9\cdot31167\,dx + 3_n59469\,dT + 0\cdot01801\,dq + 8\cdot69860\,d\lambda + 7_n91826\,dv + 7_n77578\,de$

Declinationen:

8) $-1\cdot7 = 9\cdot71790\,dx + 3_n33878\,dT + 0\cdot15769\,dq + 7_n69035\,d\lambda + 9\cdot42736\,dv + 9\cdot02782\,de$

9) $+0\cdot7 = 9\cdot71305\,dx + 3_n34388\,dT + 0\cdot17203\,dq + 8_n29879\,d\lambda + 9\cdot36189\,dv + 9\cdot01197\,de$

10) $-0\cdot3 = 9\cdot69282\,dx + 3_n31461\,dT + 0\cdot17875\,dq + 8_n50208\,d\lambda + 9\cdot25922\,dv + 8\cdot97899\,de$

11) $+0\cdot8 = 9\cdot56541\,dx + 2_n93181\,dT + 0\cdot13993\,dq + 8_n53516\,d\lambda + 8\cdot94718\,dv + 8\cdot96972\,de$

12) $+4\cdot3 = 7\cdot93154\,dx + 3\cdot52615\,dT + 9\cdot88927\,dq + 8_n44060\,d\lambda + 8\cdot49070\,dv + 8\cdot87941\,de$

13) $+4\cdot8 = 9_n35859\,dx + 3\cdot80677\,dT + 9\cdot60699\,dq + 8_n83847\,d\lambda + 8\cdot57427\,dv + 8\cdot66031\,de$

14) $-1\cdot9 = 9_n50112\,dx + 3\cdot87095\,dT + 9\cdot54242\,dq + 9_n08967\,d\lambda + 8\cdot30933\,dv + 8\cdot15080\,de$

wobei die Coefficienten rechts vom Gleichheitszeichen logarithmisch angesetzt sind.

Diese Differentialquotienten wurden durch willkürliche Variation der Ausgangselemente geprüft. Zu diesem Zwecke

habe ich mit den um nachfolgende Grössen geänderten Elementen

in	T	um	0^d005
„	Ω'	„	$10'$
„	i'	„	$10'$
„	ω'	„	$10'$
„	$\log q$	„	$0{\cdot}001$

die Darstellung der obigen Normalorte gerechnet und gebe in dem nachfolgenden Täfelchen sowohl die direct als die mit Hilfe der Differentialgleichungen gefundenen Differenzen.

	Directe Rechnung		Differentielle Rechnung		Unterschied	
	$\Delta\alpha\cos\delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha\cos\delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha\cos\delta$	$\Delta\delta$
I.	−156″1	+217·0	−155″9	+217·6	−0″2	−0·6
II.	−128·4	+227·1	−128·2	+227·5	−0·2	−0·1
III.	− 85·4	+237·3	− 85·3	+237·3	−0·1	0·0
IV.	+ 31·4	+233·5	+ 31·3	+233·9	+0·1	−0·4
V.	+198·2	+125·5	+198·0	+126·0	+0·2	−0·5
VI.	+237·3	+ 17·3	+237·2	+ 18·0	+0·1	−0·7
VII.	+222·3	− 27·7	+222·8	− 26·3	−0·5	−1·4

Die Übereinstimmung ist also in Anbetracht der Grösse der Anderungen eine recht gute und der Gang in den letzten Orten durch das Anwachsen des Einflusses der höheren Differentialquotienten leicht zu erklären.

Setzt man nun, um die Bedingungsgleichungen homogen zu machen,

$$x = 9{\cdot}71790\ d\varkappa$$
$$y = 3{\cdot}89261\ dT$$
$$z = 0{\cdot}17875\ dq$$
$$t = 9{\cdot}08967\ d\lambda$$
$$u = 9{\cdot}54569\ d\nu$$
$$w = 9{\cdot}29481\ de$$
$$\log \text{der Fehlereinheit} = 0{\cdot}75511$$

(worin wieder wie in dem folgenden Gleichungssysteme statt der numerischen Coefficienten deren Logarithmen stehen), so

verwandeln sich die ursprünglichen Bedingungsgleichungen in die folgenden:

Rectascensionen:

$$\left.\begin{array}{l} 8_n85348\,x + 9_n52324\,y + 8_n88128\,z \\ +8_n71901\,t + 0{\cdot}00000\,u + 0_n00000\,w \end{array}\right\} = 9_n27831$$

$$\left.\begin{array}{l} 8{\cdot}90605\,x + 9_n62558\,y + 8{\cdot}56858\,z \\ +9_n37271\,t + 9{\cdot}97979\,u + 9_n96287\,w \end{array}\right\} = 9_n44355$$

$$\left.\begin{array}{l} 9{\cdot}44522\,x + 9_n73581\,y + 9{\cdot}28637\,z \\ +9_n64140\,t + 9{\cdot}94252\,u + 9_n91273\,w \end{array}\right\} = 9_n66319$$

$$\left.\begin{array}{l} 9{\cdot}83287\,x + 9_n90912\,y + 9{\cdot}73454\,z \\ +9_n84446\,t + 9{\cdot}80046\,u + 9_n78584\,w \end{array}\right\} = 9_n84149$$

$$\left.\begin{array}{l} 9{\cdot}97511\,x + 0_n00000\,y + 9{\cdot}93916\,z \\ +9_n65941\,t + 9{\cdot}25349\,u + 9_n49152\,w \end{array}\right\} = 8{\cdot}94386$$

$$\left.\begin{array}{l} 9{\cdot}85704\,x + 9_n90575\,y + 9{\cdot}91012\,z \\ +8{\cdot}77609\,t + 8_n05587\,u + 9_n11237\,w \end{array}\right\} = 9{\cdot}81246$$

$$\left.\begin{array}{l} 9{\cdot}59377\,x + 9_n70208\,y + 9{\cdot}83926\,z \\ +9{\cdot}60893\,t + 8_n37257\,u + 8_n48097\,w \end{array}\right\} = 0{\cdot}00000$$

Declinationen:

$$\left.\begin{array}{l} 0{\cdot}00000\,x + 9_n44617\,y + 9{\cdot}97894\,z \\ +8_n60068\,t + 9{\cdot}88167\,u + 9{\cdot}73301\,w \end{array}\right\} = 9_n48544$$

$$\left.\begin{array}{l} 9{\cdot}99515\,x + 9_n45127\,y + 9{\cdot}99328\,z \\ +9_n20912\,t + 9{\cdot}81620\,u + 9{\cdot}71716\,w \end{array}\right\} = 9{\cdot}10821$$

$$\left.\begin{array}{l} 9{\cdot}97492\,x + 9_n42200\,y + 0{\cdot}00000\,z \\ +9_n41241\,t + 9{\cdot}71353\,u + 9{\cdot}68418\,w \end{array}\right\} = 8_n69205$$

$$\left.\begin{array}{l} 9{\cdot}84751\,x + 9_n03920\,y + 9{\cdot}96118\,z \\ +9_n44549\,t + 9{\cdot}40149\,u + 9{\cdot}67491\,w \end{array}\right\} = 9{\cdot}13138$$

$$\left.\begin{array}{l} 8_n21364\,x + 9{\cdot}63354\,y + 9{\cdot}71052\,z \\ +9_n35093\,t + 8{\cdot}94501\,u + 9{\cdot}58460\,w \end{array}\right\} = 9{\cdot}87532$$

$$\left.\begin{array}{l} 9_n64069\,x + 9{\cdot}91416\,y + 9{\cdot}42824\,z \\ +9_n74880\,t + 9{\cdot}02858\,u + 9{\cdot}36550\,w \end{array}\right\} = 9{\cdot}92704$$

$$\left.\begin{array}{l} 9_n78322\,x + 9{\cdot}97834\,y + 9{\cdot}36367\,z \\ +0_n00000\,t + 8{\cdot}76364\,u + 8{\cdot}85599\,w \end{array}\right\} = 9_n52364$$

Nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, führen diese Gleichungen zu den

Normalgleichungen:

$$\begin{array}{l} +6{\cdot}04010\,x + 4{\cdot}24967\,y + 5{\cdot}37336\,z \\ -0{\cdot}63331\,t + 2{\cdot}82555\,u + 0{\cdot}66255\,w = +0{\cdot}05018 \\ -4{\cdot}24967\,x + 5{\cdot}14857\,y - 2{\cdot}65542\,z \\ -0{\cdot}22615\,t - 2{\cdot}26539\,u + 2{\cdot}03741\,w = +0{\cdot}62422 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&+5\cdot37336\,x - 2\cdot65542\,y + 6\cdot33505\,z\\
&-1\cdot74381\,t + 2\cdot80689\,u + 1\cdot37720\,w = +1\cdot27992\\
&-0\cdot63331\,x - 0\cdot22615\,y - 1\cdot74381\,z\\
&+2\cdot65294\,t - 1\cdot67273\,u + 0\cdot52461\,w = +0\cdot82541\\
&+2\cdot82555\,x - 2\cdot26539\,y + 2\cdot80689\,z\\
&-1\cdot67273\,t + 4\cdot47256\,u - 1\cdot84686\,w = -1\cdot31510\\
&+0\cdot66255\,x + 2\cdot03741\,y + 1\cdot37720\,z\\
&+0\cdot52461\,t - 1\cdot84686\,u + 4\cdot22698\,w = +1\cdot50561
\end{aligned}
$$

und diese dann weiterhin zu den

Eliminationsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
&0\cdot78105\,x + 0_n62836\,y + 0\cdot73025\,z\\
&+9_n80162\,t + 0\cdot45110\,u + 9\cdot82122\,w = 8\cdot70053\\
&0\cdot33416\,y + 0\cdot05121\,z + 9_n82720\,t\\
&\quad + 9_n44317\,u + 0\cdot39856\,w = 9\cdot81923\\
&9\cdot98598\,z + 9_n91920\,t + 9\cdot64132\,u\\
&\quad + 9_n71368\,w = 9\cdot95012\\
&0\cdot22157\,t + 0_n03638\,u + 9\cdot96834\,w = 0\cdot25535\\
&0\cdot34385\,u + 9_n99746\,w = 9_n68272\\
&7\cdot87795\,w = 8_n01828
\end{aligned}
$$

worin wieder statt der numerischen Coefficienten deren Logarithmen stehen.

Hiebei wird die Summe der Fehlerquadrate von 121'7 auf 21'7 herabgemindert. Durch Auflösung der letzten Gleichung findet sich $de = -0\cdot0001054$, die Excentricität selbst gleich 0·9998946 und hieraus eine Umlaufszeit von ungefähr 206000 Jahren. Es zeigt sich also, dass die Bahn äusserst wenig von einer parabolischen abweicht, gleichzeitig, dass die Correction der Excentricität von der Ordnung der Fehler in den Normalorten ist. Es könnte demnach durch eine Verschiebung der Gewichte innerhalb der einzelnen Normalorte auch diese schwache Andeutung einer Ellipticität zum Verschwinden gebracht werden.

Beschränkt man sich auf die Annahme einer parabolischen Bahn, setzt daher in dem obigen Systeme der Eliminationsgleichungen $w = 0$, so fallen alle in diese Grösse multiplicirten Glieder, sowie die sechste Gleichung ganz weg, und man hat dann:

$$
\begin{aligned}
0{\cdot}78105\,x + 0_n62836\,y + 0{\cdot}73025\,z + 9_n80162\,t + 0{\cdot}45110\,u &= 8{\cdot}70053\\
0{\cdot}33416\,y + 0{\cdot}05121\,z + 9_n82720\,t + 9_n44317\,u &= 9{\cdot}81923\\
9{\cdot}58598\,z + 9_n91920\,t + 9{\cdot}64132\,u &= 9{\cdot}95012\\
0{\cdot}22157\,t + 0_n03638\,u &= 0{\cdot}25535\\
0{\cdot}34385\,u &= 9_n68272
\end{aligned}
$$

Hiebei wird die Summe der Fehlerquadrate auf 22'2 herabgedrückt, welche Summe von der unter Annahme einer elliptischen Bahn gefundenen nur ganz unmerklich abweicht.

Man wird demnach, ohne dadurch die Darstellung der Normalorte merklich anders zu gestalten, von der Bestimmung elliptischer Elemente ganz Umgang nehmen und sich auf die Parabel beschränken können. Die aus dem letzten Gleichungssysteme resultirenden Unbekannten geben unter entsprechender Berücksichtigung der Homogenitätsfactoren, wobei überdies dq noch mit sin 1″ zu multipliciren ist, die folgenden Correctionen der eklipticalen Elemente:

$$
\left.\begin{aligned} dx &= -18'33\\ d\lambda &= +43{\cdot}44\\ dy &= -\ 3{\cdot}53 \end{aligned}\right\} \quad \text{und hieraus} \quad \left\{\begin{aligned} di &+ 33'68\\ d\Omega &+ 32{\cdot}28\\ d\omega &-\ 1{\cdot}69 \end{aligned}\right.
$$

ferner

$$
\begin{aligned}
dq &= +0{\cdot}00003334\\
d\dot{T} &= -0^{d}{\cdot}00027780
\end{aligned}
$$

Diese Werthe in die ursprünglichen Bedingungsgleichungen eingesetzt, lassen als übrigbleibende Fehler in den Normalorten finden:

	$\cos\delta\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
I	−0'2	−1·5
II	+0·3	+1·0
III	+0·3	−0·2
IV	−0·3	−0·4
V	+1·0	+1·3
VI	+0·1	+2·7
VII	−1·0	−2·6

Addirt man die Quadrate dieser Fehler, so erhält man als Summe 22'2, was also vollkommen mit dem obigen Resultate übereinstimmt.

Bringt man nun die oben gefundenen Correctionen an die eklipticalen Ausgangselemente an, so erhält man als

Wahrscheinlichste Parabel:

Komet 1857 III.

$T = 1857$ Juli $18{\cdot}0114722$ mittl. Berl. Zeit

$\Omega = 23°41'30''88$
$\omega = 134\ \ 3\ 17{\cdot}11$
$i = 121\ \ 1\ \ 1{\cdot}48$
} mittl. Äquin. $1857{\cdot}0$

$q = 0{\cdot}3675347$

Rechnet man mit diesen Elementen schliesslich die Darstellung der Normalorte, so finden sich die nachfolgenden Differenzen:

	$\cos\delta\,\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
I	$-0{\cdot}2$	$-1{\cdot}5$
II	$+0{\cdot}1$	$+0{\cdot}9$
III	$+0{\cdot}3$	$-0{\cdot}2$
IV	$-0{\cdot}5$	$-0{\cdot}5$
V	$+1{\cdot}0$	$+1{\cdot}4$
VI	$0{\cdot}0$	$+2{\cdot}9$
VII	$-0{\cdot}9$	$-2{\cdot}8$

die mit den oben auf differentiellem Wege gefundenen in befriedigender Weise übereinstimmen und somit eine durchgreifende Controle für die Richtigkeit der gesammten Rechnungen bieten.

Bedenkt man das Ergebnis der obigen Untersuchung bezüglich der Excentricität, ferner, dass während der Beobachtungszeit des Kometen sich die wahre Anomalie von $-91°$ auf $+9°$ veränderte, die Beobachtungen sich also über einen grossen heliocentrischen Bogen erstrecken, demnach eine relativ sichere Bahnbestimmung zulassen, so kann man, alles zusammengefasst, behaupten, dass die Bahn von der Parabel keinesfalls merklich abweicht, die Umlaufszeit jedenfalls viele Tausende von Jahren beträgt, und das obige parabolische Elementensystem momentan als das der Wahrheit am nächsten kommende zu betrachten ist.

Eine Berücksichtigung des störenden Einflusses der Planeten stellte sich nicht als nothwendig heraus, da bei der grossen Neigung und der Lage des während der Sichtbarkeitsperiode beschriebenen Bogens der Komet sich keinem der grossen Planeten derart nähern konnte, dass obiges Resultat durch Berücksichtigung der Störungen merklich geändert werden würde.

Zu bemerken wäre noch, dass Hoek in Utrecht seinerzeit den gemeinschaftlichen Ursprung des vorliegenden mit den Kometen 1857 V und 1867 III als wahrscheinlich hinstellte. Die Schnittpunkte der Bahnen dieser Kometen mit der hier neu ermittelten Bahn des Kometen 1857 III sind nahezu dieselben, die Hoek berechnet hat.

Zum Schlusse erlaube ich mir noch, dem Director der Wiener Sternwarte, Herrn Professor E. Weiss, meinen wärmsten Dank auszusprechen für die wohlwollende Unterstützung, die er mir anlässlich der Ausführung dieser Arbeit zu Theil werden liess.

Die Berechnung der Jahrpunkte (Thekuphenrechnung) im Kalender der Juden

von

Dr. **Eduard Mahler**,

Assistent der k. k. österreichischen Gradmessungs-Commission in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Jänner 1891.)

Bekanntlich basirt der jüdische Kalender auf einem Lunisolarjahre. Das Jahr zählt 12 Monate von abwechselnd 29 und 30 Tagen, welchen zum Behufe der Ausgleichung mit dem Sonnenjahre ab und zu ein 13. Monat beigefügt wird, so zwar, dass in einem Cyclus von 19 Jahren 12 Gemeinjahre und 7 Schaltjahre sind. So wie aber sonst das Wort „Tag“ in zweifachem Sinne gebräuchlich ist, indem es einmal den 24stündigen bürgerlichen Tag von einem Auf- oder Untergange der Sonne bis zum anderen bezeichnet, ein anderesmal wieder den hellen Tagestheil von der dunklen Nacht unterscheidet, so ist auch das Wort „שנה *schanah* = Jahr“ einer zweifachen Deutung fähig. Die eigentliche Bedeutung desselben ist „Wiederholung, Periode, periodische Wiederkehr“, also das Jahr als die Dauer der periodischen Rückkehr der Jahreszeiten, d. i. das Sonnenjahr. Im jüdisch-kalendarischen Sinne aufgefasst, bezeichnet es das Lunisolarjahr, bestehend aus 12 חדשים *chadaschim* = Numenien, denen wegen der eigentlichen Bedeutung von שנה *schanah* nach festgesetzten Regeln ein dreizehnter חדש *chodesch* eingeschaltet wird. Es war daher seit dem Anfange des jüdischen Kalenderwesens von nicht geringer Bedeutung und zur Zeit, da man das Schaltwesen noch nicht cyklisch geordnet, sondern nach Bedürfniss vorgenommen hatte, sogar von grösster Wichtigkeit, die Stellung des Kalenders zum Himmel, d. i. den Stand der Sonne zur Erdbahn zu kennen und sonach auch die Jahrpunkte

Äquinoctien und Solstitien) angeben zu können. Im jüdischen Kalender heissen diese Punkte die „תקופות Thekuphoth“ und werden so definirt (siehe Maimonides' Kiddusch Hachodesch, Abschnitt IX, 3): Thekuphah Nisan ist dann, wenn die Sonne in das Sternbild des Widders tritt; Thekuphah Thamus ist dann, wenn die Sonne in das Sternbild des Krebses tritt; Thekuphah Thischri ist dann, wenn die Sonne in das Sternbild der Wage kommt; Thekuphah Tebeth ist, wenn die Sonne in das Sternbild des Steinbockes tritt.

Im heutigen jüdischen Kalender haben die Thekuphen nicht mehr die alte Bedeutung, da sich die Länge des Jahres und die Bestimmung des Moled-Thischri, sowie die des Moled-Nisan, welche für die jüdischen Fest- und Feiertage massgebend sind, in Folge der cyklischen Rechnung von selbst ergeben. Anders war dies aber noch im II. und III. Jahrhundert n. Chr., da die Rabbinen Adda bar Ahaba und Samuel lebten und wirkten. Da war die jüdische Zeitrechnung noch nicht völlig frei von jeder Willkür, und da war es von grösster Wichtigkeit, die Zeit der Thekuphen zu kennen. Aber noch heute bilden sie einen nicht unwesentlichen Bestandtheil des Kalenders der Juden und fehlen daher auch nie in denselben. Doch sind die bisher befolgten Methoden zur Berechnung der einzelnen Thekuphen solche, dass der eigentliche Zweck ihrer Angabe, die Stellung der Äquinoctial- und Solstitialpunkte im Lunisolarjahre der Juden kennen zu lernen, heute schon völlig illusorisch ist. Denn von den beiden Thekuphenrechnungen des jüdischen Kalenders nimmt die eine, deren Begründer Rabbi Samuel (gestorben 250 n. Chr.) war, das Intervall von einer Thekuphah zur anderen zu $91^d\ 7^1/_2{}^h$ an und gibt also dem Sonnenjahre ein Länge von $4(91^d + 7^1/_2{}^h) = 365{\cdot}25$ Tagen, während das tropische Jahr $365{\cdot}24220$ Tage zählt. Dies hat zur natürlichen Folge, dass die so berechneten Thekuphen heute schon um 17 Tage vom Himmel abweichen. Eine etwas bessere Thekuphenrechnung hatte Rabbi Adda bar Ahaba (wirkte in der ersten Hälfte des III. Jahrhunderts n. Chr. als Vorsteher der Akademie zu Sora) vorgeschlagen.

Er nahm das Intervall von einer Thekuphah zur anderen zu 91 Tagen, 7 Stunden, 519 Chalakim, 31 Regaim (1 Stunde =

1080 Chal.; 1 Chal. = 76 Reg.) an und gab also dem Sonnenjahre eine Länge von 365·246822 Tagen. Auch dies ist grösser als das tropische Jahr, und es weichen daher die so bestimmten Thekuphen bereits um 6 Tage vom Himmel ab. Auch ist die Samuel'sche Thekuphenrechnung, wiewohl sie minder genau ist als die des Adda, die allgemein gebräuchliche. Als Grund wird gewöhnlich der Umstand angenommen, dass ihre Berechnung höchst einfach ist und daher von den Kalendermachern mit Vorliebe gebraucht wird. Doch dürfte der wahre Grund ihrer allgemeinen Anwendung darin liegen, dass ihr ein Sonnenjahr von $365^1/_4$ Tagen, d. i. die julianische Jahrform, welche zur Zeit ihrer Einführung und noch zur Zeit des Maimonides die allgemein verbreitete Jahrform war, zur Grundlage diente. Nun hat die Differenz zwischen der Länge dieses Jahres und der des tropischen Jahres zur gregorianischen Kalenderreform geführt, während wir im jüdischen Kalender noch immer die Samuel'sche Thekuphah angewendet finden, wiewohl sie die Äquinoctial- und Solstitialpunkte, die sie anzugeben bezweckt heute schon um 17 Tage verschoben angibt.

Es dürfte daher als ganz natürlich erscheinen, wenn der Versuch gemacht wird, eine Thekuphenrechnung vorzuschlagen, welche ihrem Zwecke möglichst entsprechen soll. Nimmt man als Intervall zwischen zwei aufeinander folgenden Thekuphen $91^d\ 7^h\ 489^{Ch.}\ 35^{Rg.}$ an, so erhält man als Länge des Sonnenjahres $365^d\ 5^h\ 877^{Ch.}\ 64^{Rg.}$ = 365·2422007 Tage, d. i. das tropische Jahr. Man hat dadurch eine Thekuphenrechnung, welche nicht allein beachtenswerth ist, weil sie das gibt, was sie eigentlich geben soll, sondern auch noch einen weiteren Vortheil für das ganze jüdische Kalenderwesen hat.

Bekanntlich leistet der jüdische Kalender, indem die mittlere Dauer des jüdischen Monates auf $29^d\ 12^h\ 793^{Ch.}$ gesetzt wird, in Bezug auf die Neumonde das Möglichste, was von einer wohlgeordneten Zeitrechnung überhaupt nur verlangt werden kann; nicht so ist dies in Bezug auf die Sonne. Der 19jährige Cyklus zählt nämlich 7 Jahre zu 13 Monaten und 12 Jahre zu 12 Monaten, also 235 Monate. Nun sind 235 synodische Monate zu $29^d\ 12^h\ 793^{Ch.}$ = 6939·689622 Tage, während 19 tropische Jahre 6939·6018 Tage zählen. Diese Differenz von 0·087822 Tagen in je 19 Jahren

kann für die Dauer nicht unbemerkt bleiben, denn nach je zwölfmaligem Ablauf des 19jährigen Cyklus, d. i. in $12 \times 19 = 228$ Jahren beträgt diese Differenz 1·053864 Tage, also in 1000 Jahren mehr als 4 Tage. Man wird daher jedenfalls einmal dahin gelangen, diesen Tag, welcher sich nach Ablauf von je 12 19jährigen Cyklen in Bezug auf die Sonne als überschüssig ergibt, nach irgend einer festzusetzenden, der jüdischen Halachah aber keineswegs widersprechenden Regel auszugleichen. Dann wird man aber auch die hier gegebene Thekuphenrechnung in Betracht nehmen müssen.

Übrigens dürfte die Einführung dieser Thekuphen auch nicht auf allzu grossen Widerstand stossen, nachdem sich bereits in einigen jüdischen Kalendern die wahren Jahrpunkte als astronomische Notiz vorfinden. Ich habe es daher für nöthig erachtet, in den folgenden Blättern die genaue Angabe der Thekuphen, sowie die des Samuel und Adda für die kommenden 100 Jahre der jüdischen Zeitrechnung neben einander zu stellen.

Als Ausgangspunkt wurde Thekuphah Nisan (d. i. der Frühlingspunkt) des Jahres 5651 jüdischer Zeitrechnung = 1891 n. Chr. gewählt. Der Zeitzählung wurde natürlich der Meridian von Jerusalem zu Grunde gelegt, dessen östliche Länge von Greenwich in Zeit ausgedrückt $2^h\ 373^{Ch.}\ 61^{Rg.}$ beträgt, und als 0 Uhr wurde die 6^h nach dem mittleren jerusalemischen Mittag gelegene Zeit angenommen. Man erhält auf diese Weise als Frühlingsäquinoctium des Jahres 1891 n. Chr, = 5651 jüdischer Zeitrechnung:

Veadar 11 (März 21 gregorian.) $5^h\ 820^{Ch.}\ 15^{Rg.}$

und indem man $91^d\ 7^h\ 489^{Ch.}\ 35^{Rg.}$ weiter zählt, die weiteren Thekuphen, während man für die gleiche Thekuphah nach Samuel, beziehungsweise nach Adda, folgende Daten bekommt:

Nach Samuel:

Veadar 28 (April 7 gregorian.), $12^h\ 0^{Ch.}$

Nach Adda:

Veadar 17 (März 27 gregorian.), $13^h\ 98^{Ch.}\ 32^{Rg.}$

Thekuphah Nisan (Frühlingspunkt).

Jahre jüdischer Zeitrechnung	Nach Samuel				Nach Adda				Nach Vorschlag des Verfassers			
			St.	Ch.			St.	Ch.	Rg.		St.	Ch.	Rg.
5651	Veadar	28	12	0	Veadar	17	13	98	32	Veadar 11	5	820	15
5652	Nisan	9	18	0	Adar	27	19	16	4	Adar 21	11	618	3
5653	Nisan	21	0	0	Nisan	10	0	1013	52	Nisan 3	17	415	67
5654	Nisan	1	6	0	Veadar	19	6	931	24	Veadar 12	23	213	55
5655	Nisan	13	12	0	Nisan	2	12	848	72	Adar 25	4	10	43
5656	Nisan	23	18	0	Nisan	12	18	766	44	Nisan 6	10	889	31
5657	Nisan	5	0	0	Veadar	23	0	684	16	Veadar 17	16	687	19
5658	Nisan	15	6	0	Nisan	4	6	601	64	Adar 26	22	485	7
5659	Nisan	27	12	0	Nisan	16	12	519	36	Nisan 10	4	282	71
5660	Nisan	8	18	0	Veadar	26	18	437	8	Veadar 20	10	80	59
5661	Nisan	19	0	0	Nisan	8	0	354	56	Nisan 1	15	958	47
5662	Nisan	1	6	0	Veadar	19	6	272	28	Veadar 12	21	756	35
5663	Nisan	11	12	0	Adar	29	12	190	0	Adar 23	3	254	23
5664	Nisan	22	18	0	Nisan	11	18	107	48	Nisan 5	9	52	11
5665	Nisan	3	0	0	Veadar	21	0	25	20	Veadar 14	14	929	75
5666	Nisan	13	6	0	Nisan	2	5	1022	68	Adar 24	20	727	63

Thekuphah Nisan (Frühlingspunkt).

Jahre jüdischer Zeitrechnung	Nach Samuel			Nach Adda				Nach Vorschlag des Verfassers			
		St.	Ch.		St.	Ch.	Rg.		St.	Ch.	Rg.
5667	Nisan 24	12	0	Nisan 13	11	940	40	Nisan 7	2	525	51
5668	Nisan 6	18	0	Veadar 24	17	858	12	Veadar 18	8	323	39
5669	Nisan 17	0	0	Nisan 5	23	775	60	Adar 28	14	121	27
5670	Veadar 28	6	0	Veadar 17	5	693	32	Veadar 10	19	999	15
5671	Nisan 10	12	0	Adar 28	11	611	4	Adar 22	1	797	3
5672	Nisan 20	18	0	Nisan 9	17	528	52	Nisan 3	7	594	67
5673	Nisan 1	0	0	Veadar 18	23	446	24	Veadar 12	13	392	55
5674	Nisan 12	6	0	Nisan 1	5	363	72	Adar 23	19	190	43
5675	Nisan 24	12	0	Nisan 13	11	281	44	Nisan 7	0	1068	31
5676	Nisan 4	18	0	Veadar 22	17	199	16	Veadar 16	6	866	19
5677	Nisan 16	0	0	Nisan 4	23	116	64	Adar 27	12	664	7
5678	Nisan 26	6	0	Nisan 15	5	34	36	Nisan 8	18	461	71
5679	Nisan 8	12	0	Veadar 26	10	1032	8	Veadar 20	0	259	59
5680	Nisan 19	18	0	Nisan 8	16	949	56	Nisan 2	6	57	47
5681	Veadar 29	0	0	Veadar 17	22	867	28	Veadar 11	11	935	35
5682	Nisan 10	6	0	Adar 28	4	785	0	Adar 21	17	733	23
5683	Nisan 22	12	0	Nisan 11	10	702	48	Nisan 4	23	531	11

5684	Nisan	3	18	0	Veadar	21	16	620	20	Veadar	15	5	328	75
5685	Nisan	14	0	0	Nisan	2	22	537	68	Adar	25	11	126	63
5686	Nisan	24	6	0	Nisan	13	4	455	40	Nisan	6	16	1004	51
5687	Nisan	6	12	0	Veadar	24	10	373	12	Veadar	17	22	802	39
5688	Nisan	17	18	0	Nisan	6	16	290	60	Adar	29	4	600	27
5689	Veadar	27	0	0	Veadar	15	22	208	32	Veadar	9	10	398	15
5690	Nisan	10	6	0	Adar	28	4	126	4	Adar	21	16	196	3
5691	Nisan	21	12	0	Nisan	10	10	43	52	Nisan	3	21	1073	67
5692	Nisan	1	18	0	Veadar	19	15	1041	24	Veadar	13	3	871	55
5693	Nisan	12	0	0	Adar	29	21	958	72	Adar	23	9	669	43
5694	Nisan	23	6	0	Nisan	12	3	876	44	Nisan	5	15	467	31
5695	Nisan	5	12	0	Veadar	23	9	794	16	Veadar	16	21	265	19
5696	Nisan	15	18	0	Nisan	4	15	711	64	Adar	27	3	63	7
5697	Nisan	27	0	0	Nisan	15	21	629	36	Nisan	9	8	940	71
5698	Nisan	7	6	0	Veadar	25	3	547	8	Veadar	18	14	738	59
5699	Nisan	19	12	0	Nisan	8	9	464	56	Nisan	1	20	536	47
5700	Veadar	28	18	0	Veadar	17	15	382	28	Veadar	11	2	334	35
5701	Nisan	11	0	0	Adar	28	21	300	0	Adar	22	8	132	23
5702	Nisan	21	6	0	Nisan	10	3	217	48	Nisan	3	13	1010	11
5703	Nisan	3	12	0	Veadar	21	9	135	20	Veadar	14	19	807	75
5704	Nisan	14	18	0	Nisan	3	15	52	68	Adar	26	1	605	63

Thekuphah Nisan (Frühlingspunkt).

Jahre jüdischer Zeitrechnung	Nach Samuel			Nach Adda				Nach Vorschlag des Verfassers			
		St.	Ch.		St.	Ch.	Rg.		St.	Ch.	Rg.
5705	Nisan 25	0	0	Nisan 13	20	1050	40	Nisan 7	7	403	51
5706	Nisan 7	6	0	Veadar 25	2	968	12	Veadar 18	13	201	39
5707	Nisan 18	12	0	Nisan 7	8	885	60	Adar 29	18	1079	27
5708	Veadar 27	18	0	Veadar 16	14	803	32	Veadar 10	0	877	15
5709	Nisan 9	0	0	Adar 26	20	721	4	Adar 20	6	675	3
5710	Nisan 21	6	0	Nisan 10	2	638	52	Nisan 3	12	472	67
5711	Nisan 2	12	0	Veadar 20	8	556	24	Veadar 13	18	270	55
5712	Nisan 12	18	0	Nisan 1	14	473	72	Adar 24	0	68	43
5713	Nisan 23	0	0	Nisan 11	20	391	44	Nisan 5	5	946	31
5714	Nisan 5	6	0	Veadar 23	2	309	16	Veadar 16	11	744	19
5715	Nisan 16	12	0	Nisan 5	8	226	64	Adar 27	17	542	7
5716	Nisan 26	18	0	Nisan 15	14	144	36	Nisan 8	23	339	71
5717	Nisan 7	0	0	Veadar 24	20	62	8	Veadar 18	5	137	59
5718	Nisan 18	6	0	Nisan 7	1	1059	56	Adar 29	10	1015	47
5719	Veadar 29	12	0	Veadar 18	7	977	28	Veadar 11	16	813	35
5720	Nisan 10	18	0	Adar 28	13	895	0	Adar 21	22	611	23
5721	Nisan 22	0	0	Nisan 10	19	812	48	Nisan 4	4	409	11

5722	Nisan	4	6	0	Veadar	22	1	780	20	Veadar	15	10	206	75
5723	Nisan	14	12	0	Nisan	3	7	647	68	Adar	25	16	4	68
5724	Nisan	25	18	0	Nisan	14	13	565	40	Nisan	7	21	882	51
5725	Nisan	6	0	0	Veadar	23	19	483	12	Veadar	17	3	680	39
5726	Nisan	18	6	0	Nisan	7	1	400	60	Adar	29	9	478	27
5727	Veadar	27	12	0	Veadar	16	7	318	32	Veadar	9	15	276	15
5728	Nisan	9	18	0	Adar	27	13	236	4	Adar	20	21	74	3
5729	Nisan	20	0	0	Nisan	8	19	153	52	Nisan	2	2	951	67
5730	Nisan	2	6	0	Veadar	20	1	71	24	Veadar	13	8	749	55
5731	Nisan	13	12	0	Nisan	2	6	1068	72	Adar	24	14	547	43
5732	Nisan	23	18	0	Nisan	12	12	986	44	Nisan	5	20	345	31
5733	Nisan	6	0	0	Veadar	23	18	904	16	Veadar	17	2	143	19
5734	Nisan	16	6	0	Nisan	5	0	821	64	Adar	27	7	1021	7
5735	Nisan	27	12	0	Nisan	16	6	739	36	Nisan	9	13	818	71
5736	Nisan	7	18	0	Veadar	25	12	657	8	Veadar	18	19	616	59
5737	Nisan	20	0	0	Nisan	8	18	574	56	Nisan	2	1	414	47
5738	Nisan	1	6	0	Veadar	19	0	492	28	Veadar	12	7	212	35
5739	Nisan	11	12	0	Adar	29	6	410	0	Adar	22	13	10	23
5740	Nisan	21	18	0	Nisan	10	12	327	48	Nisan	3	18	888	11
5741	Nisan	4	0	0	Veadar	21	18	245	20	Veadar	15	0	685	75
5742	Nisan	15	6	0	Nisan	4	0	162	68	Adar	26	6	483	63

Thekuphah Nisan (Frühlingspunkt).

Jahre jüdischer Zeitrechnung	Nach Samuel				Nach Adda					Nach Vorschlag des Verfassers				
			St.	Ch.			St.	Ch.	Rg.			St.	Ch.	Rg.
5743	Nisan	25	12	0	Nisan	14	6	80	40	Nisan	7	12	281	51
5744	Nisan	5	18	0	Veadar	23	11	1078	12	Veadar	16	18	79	39
5745	Nisan	17	0	0	Nisan	5	17	995	60	Adar	27	23	957	27
5746	Veadar	28	6	0	Veadar	16	23	913	32	Veadar	10	5	755	15
5747	Nisan	9	12	0	Adar	27	5	831	4	Adar	20	11	553	3
5748	Nisan	20	18	0	Nisan	9	11	748	52	Nisan	2	17	350	67
5749	Nisan	3	0	0	Veadar	20	17	666	24	Veadar	13	23	148	55
5750	Nisan	13	6	0	Nisan	1	23	583	72	Adar	24	4	1026	43
Thekuphah Thamus (Sommeranfang).														
5651	Thamus	1	19	540	Sivan	20	20	617	63	Sivan	14	13	229	50
5652	Thamus	12	1	540	Thamus	1	2	535	35	Sivan	24	19	27	38
5653	Thamus	23	7	540	Thamus	12	8	453	7	Thamus	6	0	905	26
5654	Thamus	3	13	540	Sivan	22	14	370	55	Sivan	16	6	703	14
5655	Thamus	15	19	540	Thamus	4	20	288	27	Sivan	28	12	501	2
5656	Thamus	26	1	540	Thamus	15	2	205	75	Thamus	8	18	298	66

5657	Thamus	7	7	540	Sivan	26	8	128	47	Sivan	20	0	96	54
5658	Thamus	17	13	540	Thamus	6	14	41	19	Sivan	30	5	974	42
5659	Thamus	29	19	540	Thamus	18	19	1038	67	Thamus	12	11	772	30
5660	Thamus	11	1	540	Sivan	30	1	956	39	Sivan	23	17	570	18
5661	Thamus	21	7	540	Thamus	10	7	874	11	Thamus	3	23	368	6
5662	Thamus	3	13	540	Sivan	22	13	791	59	Sivan	16	5	165	70
5663	Thamus	13	19	540	Thamus	2	19	709	31	Sivan	26	10	743	58
5664	Thamus	25	1	540	Thamus	14	1	627	3	Thamus	7	16	541	46
5665	Thamus	5	7	540	Sivan	24	7	544	51	Sivan	17	22	339	34
5666	Thamus	15	13	540	Thamus	4	13	462	23	Sivan	28	4	137	22
5667	Thamus	26	19	540	Thamus	15	19	379	71	Thamus	9	9	1015	10
5668	Thamus	9	1	540	Sivan	28	1	297	43	Sivan	21	15	812	74
5669	Thamus	19	7	540	Thamus	8	7	215	15	Thamus	1	21	610	62
5670	Thamus	1	13	540	Sivan	20	13	132	63	Sivan	14	3	408	50
5671	Thamus	12	19	540	Thamus	1	19	50	35	Sivan	25	9	206	38
5672	Thamus	23	1	540	Thamus	12	0	1048	7	Thamus	5	15	4	26
5673	Thamus	3	7	540	Sivan	22	6	965	55	Sivan	15	20	882	14
5674	Thamus	14	13	540	Thamus	3	12	883	27	Sivan	27	2	680	2
5675	Thamus	26	19	540	Thamus	15	18	800	75	Thamus	9	8	477	66
5676	Thamus	7	1	540	Sivan	26	0	718	47	Sivan	19	14	275	54
5677	Thamus	18	7	540	Thamus	7	6	636	19	Sivan	30	20	73	42

Thekuphah Thamus (Sommeranfang).

Jahre jüdischer Zeitrechnung	Nach Samuel			Nach Adda				Nach Vorschlag des Verfassers			
		Ch.	St.		St.	Ch.	Rg.		St.	Ch.	Rg.
5678	Thamus 28	13	540	Thamus 17	12	553	67	Thamus 11	1	951	30
5679	Thamus 10	19	540	Sivan 29	18	471	39	Sivan 23	7	749	18
5680	Thamus 22	1	540	Thamus 11	0	389	11	Thamus 4	13	547	6
5681	Thamus 2	7	540	Sivan 21	6	306	59	Sivan 14	19	344	70
5682	Thamus 12	13	540	Thamus 1	12	224	31	Sivan 25	1	142	58
5683	Thamus 24	19	540	Thamus 13	18	142	3	Thamus 7	6	1020	46
5684	Thamus 6	1	540	Sivan 25	0	59	51	Sivan 18	12	818	34
5685	Thamus 16	7	540	Thamus 5	5	1057	23	Sivan 28	18	616	22
5686	Thamus 26	13	540	Thamus 15	11	974	71	Thamus 9	0	414	10
5687	Thamus 8	19	540	Sivan 27	17	892	43	Sivan 21	6	211	74
5688	Thamus 20	1	540	Thamus 8	23	810	15	Thamus 2	12	9	62
5689	Sivan 30	7	540	Sivan 19	5	727	63	Sivan 12	17	887	50
5690	Thamus 12	13	540	Thamus 1	11	645	35	Sivan 24	23	685	38
5691	Thamus 23	19	540	Thamus 12	17	563	7	Thamus 6	5	488	26
5692	Thamus 4	1	540	Sivan 22	23	480	55	Sivan 16	11	281	14
5693	Thamus 14	7	540	Thamus 3	5	398	27	Sivan 26	17	79	2
5694	Thamus 25	13	540	Thamus 14	11	315	75	Thamus 7	22	956	66

5695	Thamus	7	19	540	Sivan	26	17	283	47	Sivan	20	4	754	54
5696	Thamus	18	1	540	Thamus	6	23	151	19	Sivan	30	10	552	42
5697	Thamus	29	7	540	Thamus	18	5	68	67	Thamus	11	16	350	30
5698	Thamus	9	13	540	Sivan	28	10	1066	39	Sivan	21	22	148	18
5699	Thamus	21	19	540	Thamus	10	16	984	11	Thamus	4	3	1026	6
5700	Thamus	2	1	540	Sivan	20	22	901	59	Sivan	14	9	823	70
5701	Thamus	13	7	540	Thamus	2	4	819	31	Sivan	25	15	621	58
5702	Thamus	23	13	540	Thamus	12	10	737	3	Thamus	5	21	419	46
5703	Thamus	5	19	540	Sivan	24	16	654	51	Sivan	18	3	217	34
5704	Thamus	17	1	540	Thamus	5	22	572	23	Sivan	29	9	15	22
5705	Thamus	27	7	540	Thamus	16	4	489	71	Thamus	9	14	893	10
5706	Thamus	9	13	540	Sivan	28	10	407	43	Sivan	21	20	690	74
5707	Thamus	20	19	540	Thamus	9	16	325	15	Thamus	3	2	488	62
5708	Thamus	1	1	540	Sivan	19	22	242	63	Sivan	13	8	286	50
5709	Thamus	11	7	540	Sivan	30	4	160	35	Sivan	23	14	84	38
5710	Thamus	23	13	540	Thamus	12	10	78	7	Thamus	5	19	962	26
5711	Thamus	4	19	540	Sivan	23	15	1075	55	Sivan	17	1	760	14
5712	Thamus	15	1	540	Thamus	3	21	993	27	Sivan	27	7	558	2
5713	Thamus	25	7	540	Thamus	14	3	910	75	Thamus	7	13	355	66
5714	Thamus	7	13	540	Sivan	26	9	828	47	Sivan	19	19	153	54
5715	Thamus	18	19	540	Thamus	7	15	746	19	Thamus	1	0	1031	42

Thekuphah Thamus (Sommeranfang).

Jahre jüdischer Zeitrechnung	Nach Samuel			Nach Adda				Nach Vorschlag des Verfassers			
		St.	Ch.		St.	Ch.	Rg.		St.	Ch.	Rg.
5716	Thamus 29	1	540	Thamus 17	21	663	67	Thamus 11	6	829	30
5717	Thamus 9	7	540	Sivan 28	3	581	39	Sivan 21	12	627	18
5718	Thamus 20	13	540	Thamus 9	9	499	11	Thamus 2	18	425	6
5719	Thamus 2	19	540	Sivan 21	15	416	59	Sivan 15	0	222	70
5720	Thamus 13	1	540	Thamus 1	21	334	31	Sivan 25	6	20	58
5721	Thamus 24	7	540	Thamus 13	3	252	3	Thamus 6	11	898	46
5722	Thamus 6	13	540	Sivan 25	9	169	51	Sivan 18	17	696	34
5723	Thamus 16	19	540	Thamus 5	15	87	28	Sivan 28	23	494	22
5724	Thamus 28	1	540	Thamus 16	21	4	71	Thamus 10	5	292	10
5725	Thamus 8	7	540	Sivan 27	2	1002	43	Sivan 20	11	89	74
5726	Thamus 20	13	540	Thamus 9	8	920	15	Thamus 2	16	967	62
5727	Sivan 30	19	540	Sivan 19	14	837	68	Sivan 12	22	765	50
5728	Thamus 12	1	540	Sivan 30	20	755	35	Sivan 24	4	563	38
5729	Thamus 22	7	540	Thamus 11	2	673	7	Thamus 4	10	361	26
5730	Thamus 4	13	540	Sivan 23	8	590	55	Sivan 16	16	159	14
5731	Thamus 15	19	540	Thamus 4	14	508	27	Sivan 27	21	1037	2
5732	Thamus 26	1	540	Thamus 14	20	425	75	Thamus 8	3	884	66

5733	Thamus	8	7	540	Sivan	27	2	343	47	Sivan	20	9	632	54
5734	Thamus	18	13	540	Thamus	7	8	261	19	Sivan	30	15	430	42
5735	Thamus	29	19	540	Thamus	18	14	178	67	Thamus	11	21	228	30
5736	Thamus	10	1	540	Sivan	28	20	96	39	Sivan	22	3	26	18
5737	Thamus	22	7	540	Thamus	11	2	14	11	Thamus	4	8	904	6
5738	Thamus	3	13	540	Sivan	22	7	1011	59	Sivan	15	14	701	70
5739	Thamus	13	19	540	Thamus	2	13	929	31	Sivan	25	20	499	58
5740	Thamus	24	1	540	Thamus	12	19	847	3	Thamus	6	2	297	46
5741	Thamus	6	7	540	Sivan	25	1	764	51	Sivan	18	8	95	34
5742	Thamus	17	13	540	Thamus	6	7	682	23	Sivan	29	13	973	22
5743	Thamus	27	19	540	Thamus	16	13	599	71	Thamus	9	19	771	10
5744	Thamus	8	1	540	Sivan	26	19	517	43	Sivan	20	1	568	74
5745	Thamus	19	7	540	Thamus	8	1	435	15	Thamus	1	7	366	62
5746	Thamus	1	13	540	Sivan	20	7	352	63	Sivan	13	13	164	50
5747	Thamus	11	19	540	Sivan	30	13	270	35	Sivan	23	18	1042	38
5748	Thamus	23	1	540	Thamus	11	19	188	7	Thamus	5	0	840	26
5749	Thamus	5	7	540	Sivan	24	1	105	55	Sivan	17	6	638	14
5750	Thamus	15	13	540	Thamus	4	7	23	27	Sivan	27	12	436	2

Thekuphah Thischri (Herbstpunkt).

Jahre jüdischer Zeitrechnung	Nach Samuel		St.	Ch.	Nach Adda		St.	Ch.	Rg.	Nach Vorschlag des Verfassers		St.	Ch.	Rg.
5651	Thischri	22	21	0	Thischri	11	22	139	46	Thischri	5	14	921	21
5652	Thischri	5	3	0	Elul	23	4	57	18	Elul	16	20	719	9
5653	Thischri	15	9	0	Thischri	4	9	1054	66	Elul	27	2	516	73
5654	Thischri	26	15	0	Thischri	15	15	972	38	Thischri	9	8	314	61
5655	Thischri	6	21	0	Elul	24	21	890	10	Elul	18	14	112	49
5656	Thischri	19	3	0	Thischri	8	3	807	58	Thischri	1	19	990	37
5657	Thischri	29	9	0	Thischri	18	9	725	30	Thischri	12	1	788	25
5658	Thischri	10	15	0	Elul	28	15	643	2	Elul	22	7	586	13
5659	Thischri	20	21	0	Thischri	9	21	560	50	Thischri	3	13	384	1
5660	Cheschwan	3	3	0	Thischri	22	3	478	22	Thischri	15	19	181	65
5661	Thischri	14	9	0	Thischri	3	9	395	70	Elul	26	0	1059	53
5662	Thischri	24	15	0	Thischri	13	15	313	42	Thischri	7	6	857	41
5663	Thischri	6	21	0	Elul	24	21	231	14	Elul	18	12	355	29
5664	Thischri	17	3	0	Thischri	6	3	148	62	Elul	28	18	153	17
5665	Thischri	28	9	0	Thischri	17	9	66	34	Thischri	10	23	1031	5
5666	Thischri	8	15	0	Elul	26	14	1064	6	Elul	20	5	828	69

5667	Thischri	18	21	0	Thischri	7	20	981	54	Thischri	1	11	626	57
5668	Thischri	30	3	0	Thischri	19	2	899	26	Thischri	12	17	424	45
5669	Thischri	12	9	0	Thischri	1	8	816	74	Elul	23	23	222	33
5670	Thischri	22	15	0	Thischri	11	14	734	46	Thischri	5	5	20	21
5671	Thischri	4	21	0	Elul	22	20	652	18	Elul	16	10	898	9
5672	Thischri	16	3	0	Thischri	5	2	569	66	Elul	27	16	695	73
5673	Thischri	26	9	0	Thischri	15	8	487	38	Thischri	8	22	493	61
5674	Thischri	6	15	0	Elul	24	14	405	10	Elul	18	4	291	49
5675	Thischri	17	21	0	Thischri	6	20	322	58	Elul	29	10	89	37
5676	Thischri	30	3	0	Thischri	19	2	240	30	Thischri	12	15	967	25
5677	Thischri	10	9	0	Elul	28	8	158	2	Elul	21	21	765	13
5678	Thischri	21	15	0	Thischri	10	14	75	50	Thischri	4	3	563	1
5679	Cheschwan	1	21	0	Thischri	20	19	1073	22	Thischri	14	9	360	65
5680	Thischri	14	3	0	Thischri	8	1	990	70	Elul	25	15	158	53
5681	Thischri	25	9	0	Thischri	14	7	908	42	Thischri	7	20	1036	41
5682	Thischri	5	15	0	Elul	23	13	826	14	Elul	17	2	834	29
5683	Thischri	15	21	0	Thischri	4	19	743	62	Elul	27	8	632	17
5684	Thischri	28	3	0	Thischri	17	1	661	34	Thischri	10	14	430	5
5685	Thischri	9	9	0	Elul	27	7	579	6	Elul	20	20	227	69
5686	Thischri	19	15	0	Thischri	8	13	496	54	Thischri	2	2	25	57
5687	Thischri	29	21	0	Thischri	18	19	414	26	Thischri	12	7	903	45

Thekuphah Thischri (Herbstpunkt).

Jahre jüdischer Zeitrechnung	Nach Samuel				Nach Adda				Nach Vorschlag des Verfassers				
			St.	Ch.			St.	Ch.	Rg.			St.	Ch.	Rg.
5688	Thischri	12	3	0	Thischri	1	1	331	74	Elul	23	13	701	33
5689	Thischri	23	9	0	Thischri	12	7	249	46	Thischri	5	19	499	21
5690	Thischri	3	15	0	Elul	21	13	167	18	Elul	15	1	297	9
5691	Thischri	15	21	0	Thischri	4	19	84	66	Elul	27	7	94	73
5692	Thischri	27	3	0	Thischri	16	1	2	38	Thischri	9	12	972	61
5693	Thischri	7	9	0	Elul	25	6	1000	10	Elul	18	18	770	49
5694	Thischri	17	15	0	Thischri	6	12	917	58	Elul	29	0	568	37
5695	Thischri	28	21	0	Thischri	17	18	835	30	Thischri	11	6	366	25
5696	Thischri	11	3	0	Elul	29	0	753	2	Elul	22	12	164	13
5697	Thischri	21	9	0	Thischri	10	6	670	48	Thischri	3	17	1042	1
5698	Cheschwan	2	15	0	Thischri	21	12	588	22	Thischri	14	23	839	65
5699	Thischri	12	21	0	Thischri	1	18	505	70	Elul	24	5	637	53
5700	Thischri	25	3	0	Thischri	14	0	423	42	Thischri	7	11	435	41
5701	Thischri	5	9	0	Elul	23	6	341	14	Elul	16	17	233	29
5702	Thischri	16	15	0	Thischri	5	12	258	62	Elul	27	23	31	17
5703	Thischri	26	21	0	Thischri	15	18	176	34	Thischri	9	4	909	5
5704	Thischri	9	3	0	Elul	27	0	94	6	Elul	20	10	706	69

5705	Thischri	20	9	0	Thischri	9	6	11	54	Thischri	2	16	504	57
5706	Thischri	30	15	0	Thischri	19	11	1009	26	Thischri	12	22	302	45
5707	Thischri	12	21	0	Thischri	1	17	926	74	Elul	24	4	100	33
5708	Thischri	24	3	0	Thischri	12	23	844	46	Thischri	6	9	978	21
5709	Thischri	4	9	0	Elul	22	5	762	18	Elul	15	15	776	9
5710	Thischri	14	15	0	Thischri	3	11	679	66	Elul	25	21	573	73
5711	Thischri	26	21	0	Thischri	15	17	597	38	Thischri	9	3	371	61
5712	Thischri	8	3	0	Elul	25	23	515	10	Elul	19	9	169	49
5713	Thischri	18	9	0	Thischri	7	5	432	58	Elul	29	14	1047	37
5714	Thischri	28	15	0	Thischri	17	11	350	30	Thischri	10	20	845	25
5715	Thischri	10	21	0	Elul	28	17	268	2	Elul	22	2	643	13
5716	Thischri	22	3	0	Thischri	10	23	185	50	Thischri	4	8	441	1
5717	Cheschwan	2	9	0	Thischri	21	5	103	22	Thischri	14	14	238	65
5718	Thischri	12	15	0	Thischri	1	11	20	70	Elul	23	20	36	53
5719	Thischri	23	21	0	Thischri	12	16	1018	42	Thischri	6	1	914	41
5720	Thischri	6	3	0	Elul	23	22	936	14	Elul	17	7	712	29
5721	Thischri	16	9	0	Thischri	5	4	853	62	Elul	27	13	510	17
5722	Thischri	27	15	0	Thischri	16	10	771	34	Thischri	9	19	308	5
5723	Thischri	9	21	0	Elul	27	16	689	6	Elul	21	1	105	69
5724	Thischri	20	3	0	Thischri	8	22	606	54	Thischri	2	6	983	57
5725	Cheschwan	1	9	0	Thischri	20	4	524	26	Thischri	13	12	781	45

Thekuphah Thischri (Herbstpunkt).

Jahre jüdischer Zeitrechnung	Nach Samuel				Nach Adda					Nach Vorschlag des Verfassers				
			St.	Ch.			St.	Ch.	Rg.			St.	Ch.	Rg.
5726	Thischri	11	15	0	Elul	29	10	441	74	Elul	22	18	579	33
5727	Thischri	23	21	0	Thischri	12	16	359	46	Thischri	6	0	377	21
5728	Thischri	4	3	0	Elul	21	22	277	18	Elul	15	6	175	9
5729	Thischri	15	9	0	Thischri	4	4	194	66	Elul	26	11	1052	73
5730	Thischri	25	15	0	Thischri	14	10	112	38	Thischri	7	17	850	61
5731	Thischri	7	21	0	Elul	25	16	30	10	Elul	18	23	648	49
5732	Thischri	19	3	0	Thischri	7	21	1027	58	Thischri	1	5	446	37
5733	Thischri	29	9	0	Thischri	18	3	945	30	Thischri	11	11	244	25
5734	Thischri	11	15	0	Elul	29	9	863	2	Elul	22	17	42	13
5735	Thischri	21	21	0	Thischri	10	15	780	50	Thischri	3	22	920	1
5736	Cheschwan	3	3	0	Thischri	21	21	698	22	Thischri	15	4	717	65
5737	Thischri	13	9	0	Thischri	2	3	615	70	Elul	24	10	515	53
5738	Thischri	25	15	0	Thischri	14	9	533	42	Thischri	7	16	313	41
5739	Thischri	6	21	0	Elul	24	15	451	14	Elul	17	22	111	29
5740	Thischri	17	3	0	Thischri	5	21	368	62	Elul	28	3	989	17
5741	Thischri	27	9	0	Thischri	16	3	286	34	Thischri	9	9	787	5
5742	Thischri	9	15	0	Elul	27	9	204	6	Elul	20	15	584	69

5743	Thischri	20	21	0	Thischri	9	15	121	54	Thischri	2	21	382	57
5744	Cheschwan	1	3	0	Thischri	19	21	89	26	Thischri	13	3	180	45
5745	Thischri	11	9	0	Elul	29	2	1036	74	Elul	22	8	1058	33
5746	Thischri	22	15	0	Thischri	11	8	954	46	Thischri	4	14	856	21
5747	Thischri	4	21	0	Elul	22	14	872	18	Elul	15	20	654	9
5748	Thischri	15	3	0	Thischri	3	20	789	66	Elul	26	2	451	73
5749	Thischri	26	9	0	Thischri	15	2	707	38	Thischri	8	8	249	61
5750	Thischri	8	15	0	Elul	26	8	625	10	Elul	19	14	47	49

Thekuphah Tebeth (Winteranfang).

5651	Tebeth	26	4	540	Tebeth	15	5	659	1	Tebeth	8	22	330	56
5652	Tebeth	6	10	540	Kislev	25	11	576	49	Kislev	19	4	128	44
5653	Tebeth	17	16	540	Tebeth	6	17	494	21	Kislev	30	9	1006	32
5654	Tebeth	27	22	540	Tebeth	16	23	411	69	Tebeth	10	15	804	20
5655	Tebeth	10	4	540	Kislev	28	5	329	41	Kislev	21	21	601	8
5656	Tebeth	20	10	540	Tebeth	9	11	247	13	Tebeth	3	3	399	72
5657	Schebat	2	16	540	Tebeth	20	17	164	61	Tebeth	14	9	197	60
5658	Tebeth	11	22	540	Kislev	30	23	82	33	Kislev	24	14	1075	48
5659	Tebeth	24	4	540	Tebeth	13	5	0	5	Tebeth	6	20	873	36
5660	Schebat	6	10	540	Tebeth	24	10	997	53	Tebeth	18	2	671	24

Thekuphah Tebeth (Winteranfang).

Jahre jüdischer Zeitrechnung	Nach Samuel	St.	Ch.	Nach Adda	St.	Ch.	Rg.	Nach Vorschlag des Verfassers	St.	Ch.	Rg.
5661	Tebeth 15	16	540	Tebeth 4	16	915	25	Kislev 28	8	469	12
5662	Tebeth 27	22	540	Tebeth 16	22	832	73	Tebeth 10	14	267	0
5663	Tebeth 8	4	540	Kislev 27	4	750	45	Kislev 20	19	844	64
5664	Tebeth 19	10	540	Tebeth 8	10	668	17	Tebeth 2	1	642	52
5665	Tebeth 29	16	540	Tebeth 18	16	585	65	Tebeth 12	7	440	40
5666	Tebeth 9	22	540	Kislev 28	22	503	37	Kislev 22	13	238	28
5667	Tebeth 21	4	540	Tebeth 10	4	421	9	Tebeth 3	19	36	16
5668	Schebat 4	10	540	Tebeth 22	10	338	57	Tebeth 16	0	914	4
5669	Tebeth 13	16	540	Tebeth 2	16	256	29	Kislev 26	6	711	68
5670	Tebeth 25	22	540	Tebeth 14	22	174	1	Tebeth 8	12	509	56
5671	Tebeth 7	4	540	Kislev 26	4	91	49	Kislev 19	18	307	44
5672	Tebeth 17	10	540	Tebeth 6	10	9	21	Kislev 30	0	105	32
5673	Tebeth 27	16	540	Tebeth 16	15	1006	69	Tebeth 10	5	983	20
5674	Tebeth 8	22	540	Kislev 27	21	924	41	Kislev 21	11	781	8
5675	Teheth 21	4	540	Tebeth 10	3	842	13	Tebeth 3	17	578	72
5676	Schebat 2	10	540	Tebeth 20	9	759	61	Tebeth 13	23	376	60
5677	Tebeth 12	16	540	Tebeth 1	15	677	33	Kislev 25	5	174	48

5678	Tebeth	22	22	540	Tebeth	11	21	595	5	Tebeth	5	10	1052	36
5679	Schebat	6	4	540	Tebeth	24	3	512	53	Tebeth	17	16	850	24
5680	Tebeth	16	10	540	Tebeth	5	9	430	25	Kislev	28	22	648	12
5681	Tebeth	26	16	540	Tebeth	15	15	347	73	Tebeth	9	4	446	0
5682	Tebeth	6	22	540	Kislev	25	21	265	45	Kislev	19	10	243	64
5683	Tebeth	19	4	540	Tebeth	8	3	183	17	Tebeth	1	16	41	52
5684	Schebat	1	10	540	Tebeth	19	9	100	65	Tebeth	12	21	919	40
5685	Tebeth	10	16	540	Kislev	29	15	18	37	Kislev	23	3	717	28
5686	Tebeth	20	22	540	Tebeth	9	20	1016	9	Tebeth	3	9	515	16
5687	Schebat	4	4	540	Tebeth	22	2	933	57	Tebeth	15	15	313	4
5688	Tebeth	14	10	540	Tebeth	3	8	851	29	Kislev	26	21	110	68
5689	Tebeth	24	16	540	Tebeth	13	14	769	1	Tebeth	7	2	988	56
5690	Tebeth	6	22	540	Kislev	24	20	686	49	Kislev	18	8	786	44
5691	Tebeth	18	4	540	Tebeth	7	2	604	21	Kislev	30	14	584	32
5692	Tebeth	28	10	540	Tebeth	17	8	521	69	Tebeth	10	20	382	20
5693	Tebeth	8	16	540	Kislev	27	14	439	41	Kislev	21	2	180	8
5694	Tebeth	19	22	540	Tebeth	8	20	357	13	Tebeth	2	7	1057	72
5695	Schebat	3	4	540	Tebeth	21	2	274	61	Tebeth	14	13	855	60
5696	Tebeth	12	10	540	Tebeth	1	8	192	33	Kislev	24	19	653	48
5697	Tebeth	23	16	540	Tebeth	12	14	110	5	Tebeth	6	1	451	36
5698	Schebat	4	22	540	Tebeth	22	20	27	53	Tebeth	16	7	249	24

Thekuphah Tebeth (Winteranfang).

Jahre jüdischer Zeitrechnung	Nach Samuel			Nach Adda				Nach Vorschlag des Verfassers			
		St.	Ch.		St.	Ch.	Rg.		St.	Ch.	Rg.
5699	Tebeth 16	4	540	Tebeth 5	1	1025	25	Kislev 27	13	47	12
5700	Tebeth 26	10	540	Tebeth 15	7	942	73	Tebeth 8	18	925	0
5701	Tebeth 7	16	540	Kislev 26	13	860	45	Kislev 20	0	722	64
5702	Tebeth 17	22	540	Tebeth 6	19	778	17	Kislev 30	6	520	52
5703	Schebat 1	4	540	Tebeth 19	1	695	65	Tebeth 12	12	318	40
5704	Tebeth 11	10	540	Kislev 30	7	613	37	Kislev 23	18	116	28
5705	Tebeth 21	16	540	Tebeth 10	13	531	9	Tebeth 3	23	994	16
5706	Schebat 4	22	540	Tebeth 22	19	448	57	Tebeth 16	5	792	4
5707	Tebeth 15	4	540	Tebeth 4	1	366	29	Kislev 27	11	589	68
5708	Tebeth 25	10	540	Tebeth 14	7	284	1	Tebeth 7	17	387	56
5709	Tebeth 5	16	540	Kislev 24	13	201	49	Kislev 17	23	185	44
5710	Tebeth 17	22	540	Tebeth 6	19	119	21	Kislev 29	4	1063	32
5711	Tebeth 29	4	540	Tebeth 18	1	36	69	Tebeth 11	10	861	20
5712	Tebeth 9	10	540	Kislev 28	6	1034	41	Kislev 21	16	659	8
5713	Tebeth 19	16	540	Tebeth 8	12	952	13	Tebeth 1	22	456	72
5714	Schebat 2	22	540	Tebeth 20	18	869	61	Tebeth 14	4	254	60
5715	Tebeth 13	4	540	Tebeth 2	0	787	33	Kislev 25	10	52	48

5716	Tebeth	23	10	540	Tebeth	12	6	705	5	Tebeth	5	15	930	36
5717	Schebat	4	16	540	Tebeth	22	12	622	53	Tebeth	15	21	728	24
5718	Tebeth	14	22	540	Tebeth	3	18	540	25	Kislev	27	3	526	12
5719	Tebeth	27	4	540	Tebeth	16	0	457	73	Tebeth	9	9	324	0
5720	Tebeth	7	10	540	Kislev	26	6	375	45	Kislev	19	15	121	64
5721	Tebeth	18	16	540	Tebeth	7	12	293	17	Kislev	30	20	999	52
5722	Schebat	1	22	540	Tebeth	19	18	210	65	Tebeth	13	2	797	40
5723	Tebeth	11	4	540	Kislev	30	0	128	37	Kislev	23	8	595	28
5724	Tebeth	22	10	540	Tebeth	11	6	46	9	Tebeth	4	14	393	16
5725	Schebat	3	16	540	Tebeth	21	11	1043	57	Tebeth	14	20	191	4
5726	Tebeth	14	22	540	Tebeth	3	17	961	29	Kislev	26	1	1068	68
5727	Tebeth	25	4	540	Tebeth	13	23	879	1	Tebeth	7	7	866	56
5728	Tebeth	6	10	540	Kislev	25	5	796	49	Kislev	18	13	664	44
5729	Tebeth	16	16	540	Tebeth	5	11	714	21	Kislev	28	19	462	32
5730	Tebeth	28	22	540	Tebeth	17	17	631	69	Tebeth	11	1	260	20
5731	Tebeth	10	4	540	Kislev	28	23	549	41	Kislev	22	7	58	8
5732	Tebeth	20	10	540	Tebeth	9	5	467	13	Tebeth	2	12	935	72
5733	Schebat	3	16	540	Tebeth	21	11	384	61	Tebeth	14	18	733	60
5734	Tebeth	12	22	540	Tebeth	1	17	302	33	Kislev	25	0	531	48
5735	Tebeth	24	4	540	Tebeth	12	23	220	5	Tebeth	6	6	329	36
5736	Schebat	5	10	540	Tebeth	23	5	137	53	Tebeth	16	12	127	24

Thekuphah Tebeth (Winteranfang).

Jahre jüdischer Zeitrechnung	Nach Samuel			Nach Adda				Nach Vorschlag des Verfassers			
		St.	Ch.		St.	Ch.	Rg.		St.	Ch.	Rg.
5737	Tebeth 16	16	540	Tebeth 5	11	55	25	Kislev 27	17	1005	12
5738	Tebeth 27	22	540	Tebeth 16	16	1052	73	Tebeth 9	23	803	0
5739	Tebeth 8	4	540	Kislev 26	22	970	45	Kislev 20	5	600	64
5740	Tebeth 18	10	540	Tebeth 7	4	888	17	Kislev 30	11	398	52
5741	Schebat 1	16	540	Tebeth 19	10	805	65	Tebeth 12	17	196	40
5742	Tebeth 11	22	540	Kislev 30	16	723	37	Kislev 23	22	1074	28
5743	Tebeth 22	4	540	Tebeth 10	22	641	9	Tebeth 4	4	872	16
5744	Schebat 3	10	540	Tebeth 21	4	558	57	Tebeth 14	10	670	4
5745	Tebeth 13	16	540	Tebeth 2	10	476	29	Kislev 25	16	467	68
5746	Tebeth 25	22	540	Tebeth 14	16	394	1	Tebeth 7	22	265	56
5747	Tebeth 6	4	540	Kislev 24	22	311	49	Kislev 18	4	63	44
5748	Tebeth 17	10	540	Tebeth 6	4	229	21	Kislev 29	9	941	32
5749	Tebeth 29	16	540	Tebeth 18	10	146	69	Tebeth 11	15	739	20
5750	Tebeth 9	22	540	Kislev 28	16	64	41	Kislev 21	21	537	8

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. Band. II. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

IV. SITZUNG VOM 5. FEBRUAR 1891.

Der Secretär legt das erschienene Heft X (December 1890) des XI. Bandes der Monatshefte für Chemie vor, womit dieser Band abgeschlossen ist.

Das w. M. Herr Prof. Dr. C. Toldt überreicht eine von Dr. M. Holl, Professor an der k. k. Universität in Graz, eingesendete Abhandlung: „Über die Entwickelung der Stellung der Gliedmassen des Menschen".

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Beitrag zur Bildungstheorie des Erdöles und Erdwachses", von Herrn R. Zaloziecki, Docent an der k. k. technischen Hochschule in Lemberg.
2. „Über die fossilen wirbellosen Thiere der Steinkohlen- und Permformation Böhmens", von Herrn Prof. Johann Kušta an der Oberrealschule in Rakonitz.

Das c. M. Herr k. und k. Oberst des Armeestandes Albert v. Obermayer legt eine Abhandlung vor, betitelt: „Zur Erklärung einer, mit der fortführenden Entladung der Elektricität verbundenen Anziehungserscheinung".

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Poche, Guillaume, Origine des Forces de la Nature; nouvelle Théorie, remplaçant celle de l'attraction. Paris 8°.

Zur Erklärung einer mit der fortführenden Entladung der Elektricität verbundenen Anziehungserscheinung

von

Albert v. Obermayer,

c. M. k. Akad.

Ich habe vor Kurzem die näheren Umstände untersucht, unter denen Papier an einer Platte haftet, wenn dagegen aus einer Spitze Elektricität entladen wird.[1] Als muthmasslichen Grund dieser Erscheinung habe ich eine wechselseitige Anziehung der Halbleiter, durch welche sich die Elektricität hindurch fortpflanzt, unter sich und gegen die Kupferplatte angeführt.

In letzterer Zeit ist es mir gelungen, durch einen sehr einfachen Versuch zu zeigen, dass die Papierblätter so geladen sind, dass an den aneinanderliegenden Seiten wirklich entgegengesetzte Elektricitäten auftreten. Soll dieser Versuch gelingen, dann ist es erforderlich, dass das Papier in der Nähe eines Ofens scharf getrocknet werde. Es haften dann 10 Bogen, unter der Entladung einer Doppelinfluenzmaschine, aus vier Spitzen so stark, dass 50—60 *kg* noch nicht hinreichen, das Papier zu verschieben. Auch nach dem Aufhören der Entladung haftet das Papier noch an der Platte und die Papierbögen aneinander. Es gelingt indessen, die ganze Papiermasse abzuziehen. Sie zeigt an einem grossen Verlesungselektroskop einen nur unmerklichen Ausschlag.

Wird das oberste Blatt Papier wie das Blatt eines Buches umgeschlagen, dann zeigt es sich beiderseits stark negativ elektrisch. Das nächste Blatt ist an der oberen Seite positiv, auf

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. XCIX, S. 269.

das erste Blatt umgeschlagen, an der unteren Seite negativ elektrisch u. s. w.; das letzte Blatt ist auf beiden Seiten positiv. Folgendes Schema lässt die Art der Elektrisirung erkennen:

Negative Spitze —(1)—, +(2)—, +(3)—, +(4)...
...+(8)—, +(9)—, +(10)+ positive Platte.

Die Papierblätter sind darin durch die fortlaufenden Zahlen bezeichnet. Bei positiver Spitze und negativer Platte findet selbstverständlich die umgekehrte Anordnung statt.

Die Ausschläge, des mit negativer Elektricität geladenen Verlesungselektroskopes waren sehr beträchtliche und unzweideutige.

Ich habe auch auf das Papier und zwischen die Papierblätter Stanniolblätter eingelegt. Es ändert dies an der Erscheinung nichts. Die Papiere haften fest aneinander und an der Kupferplatte. Nur in dem Falle, als zwei aufeinanderliegende Stanniolbogen zwischen zwei Blätter Papier eingelegt werden, lassen sich die Papiere längs der Trennungsfläche der beiden Stanniolblätter verschieben. Beim Umblättern des Papieres haften die Stanniolblätter an den Papierblättern, an welchen sie anliegen.

Eine ähnliche Erscheinung wie die hier in Rede stehende ist auch in: G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektricität, II. Bd., S. 102, beschrieben. An Stelle der Papierblätter sind dort Glimmerblätter und dünne Glasplatten in Verwendung. Werden mehrere derselben aufeinandergelegt und die oberste elektrisirt, so zeigen alle unteren Glasplatten auf der oberen Fläche positive, auf der unteren Fläche negative Elektricität und haften in Folge dessen besser aneinander. Auch ist daselbst in der Anmerkung angeführt, dass Buff, Lieb. Ann., Bd. 41, S. 129, 1842, beobachtet hat, dass die Glasplatten nicht aneinanderhaften, wenn sie an den einander zugekehrten Seiten mit Stanniol belegt sind. Alle diese Erscheinungen sind der dielektrischen Erregung der Isolatoren zuzuschreiben, ganz so wie in dem von mir angeführten Versuche mit den Papierblättern. Wüllner[1] hat

[1] Wüllner, Über den elektrischen Rückstand, Pogg. Ann., Bd. 153, S. 43.

bei seinen Versuchen über den elektrischen Rückstand ein sehr unregelmässiges Verhalten der Glasplatten beobachtet. Ich habe dergleichen Versuche mit Spiegelglasplatten, die zu photographischen Zwecken gedient hatten, unter Anwendung fortführender Entladung aus einer Spitze wiederholt und dabei allerdings eine sehr heftige Elektrisirung der Glasplatten gefunden, aber eine besondere Regelmässigkeit in der Elektrisirung nicht erzielen können. Es scheint, dass beim Abheben der Platten von einander allerlei Unregelmässigkeiten unterlaufen, welche die Erscheinung verwickeln.

Es wurden auch diesmal erneuerte Bestimmungen über die Kraft P zur tangentiellen Verschiebung von zehn Bogen satinirten, gelben Packpapieres ausgeführt, statt der Waage jedoch ein Dynamometer angewendet, welches allmälig durch eine Schraube angezogen werden konnte. Zu den gleichzeitigen Bestimmungen des Potentials V wurde das absolute Elektrometer von Blondlot und Bichat verwendet.

Es ergab sich unter Anwendung einer Doppelinfluenzmaschine bei vier, die Ecken eines Quadrates von $14 \cdot 5$ *cm* Seitenlänge bildenden Spitzen in 5 *cm* Entfernung von der Kupferplatte:

Ohne Papiereinlage:

$$V = 51 \cdot 89 \text{ a. E. E.};$$

das Papier aus einem kalten Zimmer in das geheizte gebracht:

$$V = 63 \cdot 78 \text{ a. E. E. und } P = 11 \text{ bis } 13 \, kg;$$

das Papier scharf getrocknet:

$$V = \begin{matrix} 78 \cdot 26 \text{ a. E. E.} \\ 77 \cdot 82 \end{matrix} \qquad P > 50 \, kg;$$

das Papier an die feuchte Aussenluft gebracht, damit es Flüssigkeit anziehe:

$$V = 76 \cdot 75 \text{ a. E. E.} \qquad P = 46 \, kg;$$

nach einiger Zeit:

$$V = 71 \cdot 81 \qquad P = 40 \, kg;$$

das Papier nochmals der feuchten Aussenluft ausgesetzt:

$$V = 68 \cdot 79 \qquad P = 24\ kg.$$

Dies sind ungefähr dieselben Zahlen, wie sie in der ersten eingangs erwähnten Versuchsreihe angeführt wurde. Damals ergab sich:

Ohne Papier:

$$V = 53 \cdot 78;$$

nach Einlage des Papieres:

$$V = 68 \cdot 85 \qquad P = 20\ kg.$$

Das Auflegen oder Einlegen von Stanniolblättern ändert an der Erscheinung nichts Wesentliches.

So wurde gefunden:

Für ein Stanniolblatt auf das Papier aufgelegt:

$$V = 67 \cdot 02 \qquad P = 22\ kg;$$

ein zweites Stanniolblatt zwischen die Papierblätter eingelegt:

$$V = 68 \cdot 56 \qquad P = 22\ kg;$$

ein drittes Stanniolblatt eingeschoben:

$$V = 68 \cdot 24 \qquad P = 20-21\ kg.$$

Eine so mächtige elektrische Erregung des Papieres findet zwischen den Platten eines Condensators nicht statt, so lange hier keine convective Entladung eintritt. Die Papiere haften dann nur sehr schwach aneinander und an der einen Platte. Eine etwa auftretende convective Entladung, welche sich durch ein Glimmlicht verräth, hat ein sofortiges Haften der Papiere im Gefolge.

Der obige Versuch lehrt also, dass die mächtige elektrisch polare Erregung des Papieres an die convective Entladung gebunden ist. Damit ist aber auch nachgewiesen, dass in den Kundt'schen, elektrischen Staubfiguren und in dem Niederschlagen von Staub und Rauch nicht nur elektrische Kräfte während der Entladung thätig sind, sondern auch noch wirken, wenn die Entladung aufgehört hat. Die schlecht leitenden Körperchen sind eben sehr heftig polar erregt worden und diese

Erregung verliert sich erst allmälig, desto langsamer, je trockener die Theilchen sind.

Auch die scharfe Abgrenzung der Kundt'schen Staubfiguren ist jetzt erklärt. Längs jener Linien, längs welcher die convective Entladung stattfindet, findet eine heftige Erregung der Theilchen statt, längs der gewöhnlichen Kraftlinien nicht. Die Kraftlinien drängen die Strömungslinien zusammen, sie stossen dieselben gerade so ab, wie sie sich untereinander abstossen.

Man kann die Linien der heftigen elektrischen Erregung als jene Kraftlinien ansehen, welche sich von der Spitze mit einem von derselben losgetrennten materiellen Theilchen oder mit Luftmolekülen abtrennen und, indem sie sich beständig verkürzen, das Theilchen zur Platte überführen.

Von den, nach einem gewissen Gesetze angeordneten Kraftlinien werden immer nur jene zur Abtrennung gelangen, welche sich der Spitze sehr genähert haben. Das Abtrennen der Kraftlinien wird auf einer scharf begrenzten Fläche der Spitze und einen ebenso scharf begrenzten Raum der Platten beschränkt bleiben.

Die heftige elektrische Erregung von Körperchen findet gerade in diesem Raume statt und daher bleiben auch nur jene an der Platte haften, welche innerhalb dieses Raumes gerathen sind.

Die Erscheinung der elektrischen Schatten erklärt sich in ähnlicher Weise: Ist zum Beispiel ein isolirtes Metallkreuz zwischen Spitze und eine mit Seide überzogene Kugel gebracht, so gehen Kraftlinien von dem Metalle der Spitze zum Kreuze und zur Kugel. Dieselben reissen nie ab. Dagegen trennen sich Kraftlinien von der Spitze los, die neben dem Kreuze vorübergehen. Auf der Seide erscheinen die Stellen, in welche die abgetrennten Kraftlinien hinein verschwinden, leuchtend, die Stellen, wo die nicht abgetrennten Kraftlinien endigen, dunkel.

Mit der heftigen polaren Erregung hängt offenbar auch die Ozonbildung zusammen, und die Erregung von Glasröhren, wie ich sie bei einer früheren Gelegenheit beschrieben habe, gehören auch hieher.

Noch eines Versuches will ich erwähnen, welcher die Bedeutung der convectiven Entladung erkennen lässt. Hält man

vor die eine Scheibe einer angeregten Doppelinfluenzmaschine einige wohlgetrocknete Papierblätter und dahinter eine abgeleitete Metallplatte oder einen abgeleiteten Spitzenkamm, so findet eine ganz unbeträchtliche Elektrisirung der Papierblätter statt. An dem Verlesungselektroskop mit seinen 8 *cm* langen Goldpapierblättchen ist dieselbe kaum nachweisbar. Werden dagegen die Papierblätter auf eine so kurze Zeit zwischen die rotirende Glasscheibe und den einen Spitzenkamm eingeschoben, dass sich die Maschine nicht ausladet, dann erweisen sich dieselben so stark elektrisch, wie früher unter den Entladungen aus der Spitze gegen die Platte.

Es erhellt aus den vorangeführten Versuchen auch die Bedeutung der convectiven Entladung aus den Spitzenkämmen der Influenzmaschine gegen die Glasplatten oder die Ebonitscheiben.

Ausser der fortführenden Entladung, vermag nur noch die Reibung isolirende Substanzen zu Trägern hochgespannter Elektricitätsmengen zu machen.

Die convective Entladung aus den Spitzenkämmen ist zur Erregung der Influenzmaschine nothwendig. Dieselbe kann bei mancher Maschine durch Annäherung einer geriebenen Hartgummiplatte in solcher Stärke eingeleitet werden, dass die Maschine in Gang kommt, bei anderen Maschinen, zum Beispiel den von mir benützten Doppelinfluenzmaschinen, ist Mittheilung der Elektricität aus einer geladenen Leydnerflasche zur Erregung erforderlich und bei der grossen vierscheibigen Influenzmaschine mit 130 *cm* im Durchmesser haltenden Hartgummischeiben[1] ist mit einer kleinen Winter'schen Elektrisirmaschine von 30 *cm* Scheibendurchmesser eine Erregung nicht mehr zu erzielen; es ist dazu die Anwendung einer Doppelinfluenzmaschine nothwendig. Die Erregung ist dann allerdings so heftig, dass die 30—40 *cm* langen positiven Büschel ein lautes prasselndes Geräusch verursachen und die Maschine im Gange bleibt, ob die Elektroden zusammengezogen oder so weit auseinandergeschoben sind, dass zwischen denselben gar keine Entladung stattfindet.

---

[1] Hübl und Obermayer, Die photographische Fixirung einiger elektrischer Entladungserscheinungen. Diese Sitzungsber., Bd. XCVIII, S. 421.

Die convective Entladung aus den Spitzenkämmen ist also eine für den Gang der Influenzmaschine wesentliche Erscheinung, wenn nur Scheiben aus isolirendem Materiale angewendet werden. Nur diese Entladungsform kann die Isolatoren zum Fortführen grosser, hochgespannter Elektricitätsmengen zwingen.

Influenzmaschinen, welche sich selbst erregen, sind stets mit Metallbelegungen versehen, dort kommt es weniger auf eine convective Entladung an, weil die Metallbelegungen als Träger der Elektricität fungiren.

V. SITZUNG VOM 19. FEBRUAR 1891.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—IX (October-November 1890) der Abtheilung II. a., XCIX. Bd., der Sitzungsberichte vor.

Herr Prof. Dr J. Klemenčič in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Über die Reflexion von Strahlen elektrischer Kraft an Schwefel- und Metallplatten".

Herr Prof. Dr. A. Adamkiewicz in Krakau übersendet eine dritte Mittheilung unter dem Titel: „Über das Gift und die Zellen der bösartigen Geschwülste (Krebse)".

Das w. M. Herr Hofrath G. Tschermak legt den zweiten Theil seiner Arbeit: „Über die Chloritgruppe" vor.

Das w. M. Herr Prof. A. Lieben überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. Bohuslaw Brauner in Prag unter dem Titel: „Volumetrische Bestimmung des Tellurs". II. Theil.

Das C. M. Herr Oberst A. v. Obermayer des Armeestandes legt eine Abhandlung vor: „Untersuchungen über die Entladung der Elektricität aus Spitzen in verschiedenen Gasen bei verschiedenen Drucken".

Herr Prof. Guido Goldschmiedt überreicht zwei im I. Chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeiten:

1. „Über die Einwirkung von Cyankalium auf Opiansäureäthylester", von Prof. G. Goldschmiedt und L. Egger.

2. „Über die Reactionsproducte von Benzylamin und Glycolchlorhydrin“, von Prof. G. Goldschmiedt und Dr. R. Jahoda.

Herr Dr. S. Oppenheim, Privatdocent für Astronomie an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung „Bestimmung der Bahn des Planeten (290) Bruna.“

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Escherich G., v., und Weyr E., Monatshefte für Mathematik und Physik. I. Jahrgang, Wien, 1890. 8°.

Über die Reflexion von Strahlen elektrischer Kraft an Schwefel- und Metallplatten

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

(Mit 3 Textfiguren.)

Prof. Hertz hat in seinen berühmten Versuchen (Wied. Ann. Bd. 36) nachgewiesen, dass sich die Strahlen elektrischer Kraft in sehr vielen Punkten geradeso verhalten wie die Licht- oder Wärmestrahlen. Solche Strahlen werden reflectirt, gebrochen nach den gleichen Gesetzen wie die Lichtstrahlen und sie besitzen auch eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche der des Lichtes nahe gleichkommt. Die den Strahl erzeugenden elektrischen Schwingungen sind polarisirt, geschehen in der Richtung der Axe der Primärinductoren und werden durch ein der Schwingungsrichtung parallel gestelltes Drahtgitter aufgehalten. Wenn sich nun die Strahlen elektrischer Kraft von den Lichtstrahlen sonst nicht wesentlich als nur durch die Wellenlänge unterscheiden, dann muss sich die Thatsache der Polarisation auch bei der Reflexion an Dielektricis bemerkbar machen, und zwar muss entsprechend dem Verhalten optischer Strahlen die Reflexion bei einer bestimmten Schwingungsrichtung gegen die Einfallsebene ganz besonders hervortreten, bei der darauf senkrechten jedoch sehr schwach sein und bei einem bestimmten Winkel geradezu verschwinden. An Metallen soll bei beiden Schwingungsrichtungen

und unter allen Incidenzwinkeln reflectirt werden, obwohl auch da, gemäss den optischen Erfahrungen, eine verschiedene Intensität der Reflexion je nach der Schwingungsrichtung zu erwarten wäre. Die vorliegende Untersuchung hatte den Zweck, die Reflexion von Strahlen elektrischer Kraft an einem Dielektricum, dem Schwefel, und an einer Zinkplatte qualitativ und quantitativ zu erforschen und ihr Verhalten auch in dieser Beziehung mit dem der Lichtstrahlen zu vergleichen.

Die Frage der Reflexion elektrischer Schwingungen an einem Dielektricum ist bereits von zwei Seiten berührt worden. Trouton (Nature, XXXIX, p. 391 und XL, p. 398) beobachtete die Reflexion an einer gewöhnlichen, 3 Fuss dicken Gebäudemauer und dann an einer 13 *cm* dicken, 180 *cm* langen und 120 *cm* hohen Paraffinwand. Er fand an der Mauer eine Reflexion der Strahlen, wenn die Richtung der elektrischen Verschiebungen im Strahle senkrecht stand zur Einfallsebene; sonst konnte er nichts beobachten. Danach würde die Polarisationsebene mit der Ebene der magnetischen Verschiebungen zusammenfallen. Rubens und Ritter (Wied. Ann., Bd. XL, S. 55) untersuchten die Reflexion an einer Glasplatte, bekamen jedoch kein Resultat. Der Grund für diese Thatsache ist schon von Trouton angegeben worden. Hat nämlich die reflectirende Wand eine gegen die Wellenlänge sehr geringe Dicke, dann tritt bei der Reflexion der elektrischen Schwingungen die Erscheinung auf, welche beim Newton'schen Farbenglase den dunklen Fleck erzeugt.

Zur Untersuchung der Strahlen bediente ich mich der Secundärinductoren mit eingeschaltetem Thermoelement, wie ich sie bereits in einer früheren Abhandlung (diese Sitzungsberichte, Bd. XCIX, Abth. II. a., Juli 1890) beschrieben habe. Es wurden auch jetzt zwei Inductoren verwendet; der eine als Standard, der andere als eigentlicher beweglicher Secundärinductor. Diese Methode gestattet, ebenso wie die von Rubens und Ritter angewendete bolometrische Methode, eine quantitative Auswerthung der Vorgänge, während dies bei Anwendung von Resonatoren mit Funkenmikrometern weniger leicht durchgeführt werden kann. Die Reflexion wurde an einer 120 *cm* langen, 80 *cm* breiten und 7 *cm* dicken, aus zwölf Ziegeln zusammengestellten Schwefelplatte und an einer ebenso grossen, aber

natürlich weit dünneren Zinkplatte gemessen. Überdies untersuchte ich auch den von den Platten durchgelassenen Theil des Strahles. Die Versuche über die Reflexion an Metallen vervollständigte ich durch Beobachtungen an einem Drahtgitter und an einer runden Zinkscheibe. Die Dimensionen der reflectirenden Platten und der Spiegel gestatteten die Untersuchung nur bei Incidenzwinkeln zwischen 30 und 70°; aber selbst bei 70° wurde durch die Platte ein Theil der Spiegel abgeblendet.

Indem ich bezüglich der Resultate auf das weiter unten Angeführte verweise, bemerke ich nur, dass sich zwischen der Reflexion an der Zinkplatte und jener an der Schwefelplatte ein Unterschied ergeben hat, welcher der Qualität nach dem Verhalten der Lichtstrahlen entspricht. Die Intensität der Reflexion ist verschieden je nach der Schwingungsrichtung des Strahles. Bei der Schwefelplatte bekommt man unter allen Incidenzwinkeln eine kräftige Reflexion, wenn die Schwingungen zur Einfallsebene senkrecht stehen. Anders verhält sich die Platte gegen Strahlen, die der Einfallsebene parallel schwingen. Hier kann nur bei kleinen Incidenzwinkeln eine schwache Reflexion wahrgenommen werden; die Intensität derselben nimmt mit zunehmendem Einfallswinkel ab und bei 60 und 65° konnte mit den hier angewendeten Messungsmitteln eine bemerkbare Zurückwerfung nicht festgestellt werden. Diese Thatsache stimmt mit den optischen Verhältnissen sehr gut überein, insofern, als sich aus dem Brechungsexponenten des Schwefels in der That ein Polarisationswinkel zwischen 60 und 65° ergibt. Hinsichtlich der Frage nach der Schwingungsrichtung im polarisirten Lichte folgt aus diesen Versuchen dasselbe, was auch Trouton (l. c.) gefunden hat. Es wurde ferner beobachtet, dass die Intensität des von der Schwefelplatte durchgelassenen Strahles genau entgegengesetzt geht wie die Intensität der Reflexion.

Eine Anwendung der Fresnel'schen Intensitätsformeln zur Berechnung der an der Schwefelplatte erhaltenen Resultate kann, so gute Übereinstimmungen sich für einzelne Incidenzwinkel ergeben würden, im Allgemeinen doch nicht Platz greifen, da einige bemerkenswerthe, mit dem Verhalten der Lichtstrahlen nicht harmonirende Erscheinungen auftreten, die wahrscheinlich darin ihren Grund haben, dass die Dimensionen der reflectirenden

Wand im Vergleiche mit der Wellenlänge des Strahles zu klein sind.

1. Die Apparate.

Bei der Erzeugung und Untersuchung des Strahles bildeten die parabolischen Hohlspiegel einen wesentlichen Bestandtheil. Um die Handhabung derselben zu erleichtern, musste bei der Construction derselben von den Angaben Hertz's abgegangen werden; die Dimensionen wurden in allen Richtungen kleiner genommen. So betrug die Weite der Spiegel (Fig. 1) 75 *cm*, ihre

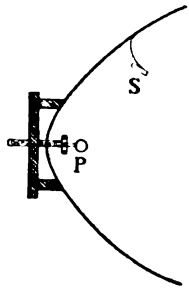


Fig. 1.

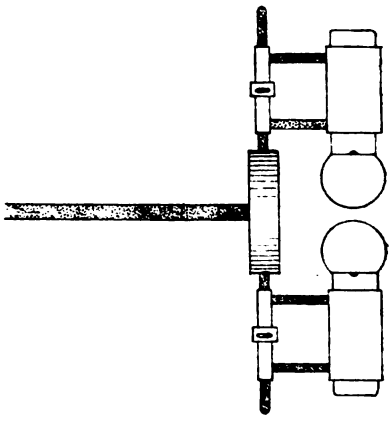


Fig. 2.

Tiefe 37 und ihre Höhe 78 *cm*. Durch eine solche Verkürzung der Dimensionen leidet die Wirksamkeit der Spiegel, und es hat Hertz in einem Briefe an Fitzgerald ausdrücklich auf die Nothwendigkeit einer grösseren Länge hingewiesen, um den Einfluss der an den Ecken auftretenden Anhäufungen der Elektricität zu vermindern. Die hier verwendeten kleinen Spiegel zeigten in der That eine viel geringere verstärkende Kraft als die grossen, nach den Angaben von Hertz verfertigten, deren ich mich in einem früheren Falle bediente. Ich schätze ihre Wirksamkeit nur auf die Hälfte (oder noch weniger) der grossen; vergleichende Versuche habe ich noch nicht gemacht. Das parabolisch gekrümmte Blech der Spiegel war in einem Holzrahmen befestigt und dieser Rahmen selbst so construirt, dass man den

Spiegel entweder vertical oder horizontal stellen konnte, wobei die Spiegelmitte immer nahezu in gleicher Höhe blieb.

Der Primärinductor war genau nach den Angaben von Hertz verfertigt, die ihm entsprechende Welle hat eine Länge von 66 *cm*. Die einander zugekehrten Theile der kugelförmigen Oberfläche waren mit dünnem Platinblech belegt. Die Befestigung des Primärinductors im Spiegel geschah in einer aus Fig. 1 und 2 ersichtlichen Weise. In diesen Figuren sind die punktirten Theile aus Glas, die schraffirten aus Holz, die übrigen aus Metall.

Die Platinbelegung an der Inductorenoberfläche ist sehr zu empfehlen, da solche Inductoren nach den hier gemachten Erfahrungen ihre Wirksamkeit viel länger beibehalten als Kupfer- oder Messingkugeln. Es wurde auch wiederholt die Beobachtung gemacht, dass die Funken plötzlich ihre Activität und das helle Geknatter verloren, dann aber bei fortgesetztem Funkenstrome wieder die frühere oder eine noch grössere Wirksamkeit erreichten und durch längere Zeit beibehielten. In solchen Fällen mussten natürlich die Messungen während der Dauer der schwachen Funken ausgesetzt werden. Wenn selbst nach einem länger anhaltenden Funkenstrome das Geknatter nicht gehörig laut wurde, dann mussten die Oberflächen geputzt werden, was stets mit Wienerkalk, Wasser und Alkohol geschah.

Als Secundärinductor benützte ich einen Inductor von der Form, die ich in einer früheren Abhandlung (l. c.) beschrieb; er besteht aus zwei dünnen, 10 *cm* breiten, zwischen Glasplatten gekitteten Messingblechen von je 30 *cm* Länge, deren zugekehrte und 3 *cm* von einander entfernte Enden durch ein Thermoelement, bestehend aus einem feinen Platin- und Patentnickeldrath, verbunden sind. Dieser Inductor war im Secundärspiegel angebracht, und zwar wurde er an einer die Spiegelwand durchsetzenden Glasstange befestigt. Im Primärspiegel war ausser dem Primärinductor auch noch ein kleiner Standardinductor an zwei an der Spiegelwand angelötheten Drähten aufgestellt (*S*, Fig. 1). Seine Entfernung vom Primärinductor *P* betrug 18 *cm*. Der Standardinductor war viel kleiner als der Secundärinductor. Die Breite der Messingstreifen war hier nur 1 *cm*, ihre Länge nur je 25 *cm*; das Thermoelement war bei beiden gleich. Die Wirksamkeit

solcher Inductoren hängt von der Breite derselben ab; für den Standardinductor, der sehr nahe dem Primärinductor ist, genügt die geringe Breite von 1 *cm*; ja, er muss sogar möglichst schmal sein, um nicht die vom Primärinductor ausgehenden Strahlen zu stören.

Die Schwefelplatte war aus 12 Ziegeln aufgebaut. Jeder Ziegel hatte eine Höhe von 20, eine Länge von 40 und eine Dicke von 7 *cm*. Das Gewicht eines Ziegels betrug 11·5 *kg*, das Gewicht der ganzen Platte 138 *kg*. Die Ziegel wurden in eine Holzform gegossen und die Formwände vor dem Gusse ein wenig eingeölt. Vor der Zusammenstellung der Platte wurden die einzelnen Ziegel vorsichtshalber an ihrer Oberfläche mit scharfkantigen Glasscherben abgeschabt.

Die Platte wurde in einem Rahmen aufgebaut und von diesem zusammengehalten. Der Rahmen selbst ruhte auf einem starken Kreuze, an dessen Enden sich Rollräder befanden. Die untere Seite des Rahmens hatte in der Mitte eine Bohrung; in diese passte ein am Boden festgemachter Zapfen, um welchen der ganze Rahmen sammt der Platte wie um eine Axe gedreht werden konnte.

Wenn sich die Strahlen elektrischer Kraft analog wie die Lichtstrahlen verhalten, dann darf man bei einer Platte, deren Dicke gegen die Wellenlänge sehr klein ist, keine bedeutende Reflexion erwarten, da die an den beiden Begrenzungsflächen reflectirten Theile eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge haben und sich bei der Interferenz schwächen. Um eine besonders kräftige Reflexion zu haben, muss die Dicke der Platte eine solche sein, dass durch den Weg des Strahles in der Platte die Phasendifferenz auf eine ganze Wellenlänge gebracht wird. Dies gibt für den Schwefel und für die vorhandene Wellenlänge eine Dicke von ungefähr 7 *cm*. Überdies ist bei der grossen Wellenlänge eine gewisse Ausdehnung der Platte in die Höhe und Länge nothwendig, daher wurden die entsprechenden Dimensionen zu 80 und 120 *cm* gewählt.

Die das Galvanometer, das Inductorium und den Interruptor betreffenden Verhältnisse sind schon in der bereits erwähnten Arbeit (l. c.) beschrieben worden und waren hier wie dort die gleichen.

2. Die Anordnung der Versuche.

Die Anordnung der Apparate ist zum Theile aus Fig. 3 ersichtlich. Die Axe der reflectirenden Platte, respective der am Boden befestigte Zapfen bildete den Mittelpunkt eines Kreises, auf dessen Peripherie die beiden Spiegel standen. Die Peripherie des Kreises war am Boden mit Kreide verzeichnet und in Grade eingetheilt. Der Primärspiegel stand bei 60°; er wurde nur hin und wieder um ein kleines Stück längs des Halbmessers, nie

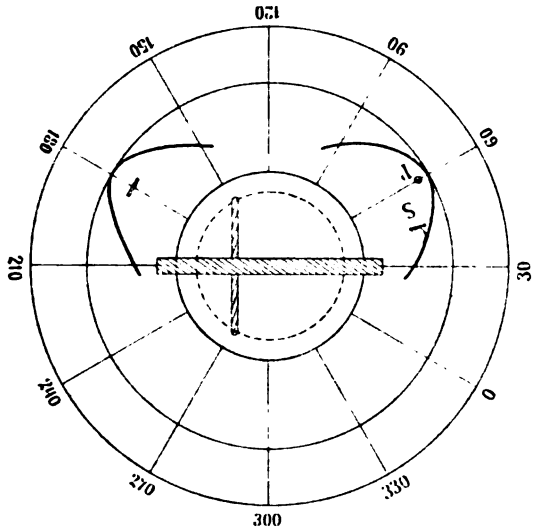


Fig. 3.

aber längs der Peripherie verschoben. Der Secundärspiegel war auf einem mit Rollrädern versehenen Stuhle aufgestellt und konnte an der Peripherie hin und her bewegt werden. Die Mitte der Platte sowie die des Primär- und Secundärspiegels waren stets in gleicher Höhe.

Vom Thermoelement des Standardinductors gingen zwei Drähte zu einem ausserhalb des Spiegels stehenden Commutator und von da führte die Leitung durchs Galvanometer zum Secundärinductor. Der Commutator wurde aus vier kleinen, mit Quecksilber gefüllten Gläsern gebildet, welche sich wieder in einem

grösseren, mit Wasser gefüllten Gefässe befanden, wodurch Temperaturunterschiede im Commutator vermieden werden sollten. Ich brauche wohl kaum hinzuzufügen, dass die Überbrückungsdrähte des Commutators dicht mit Baumwolle bewickelt waren, um beim Angreifen derselben Thermoströme zu vermeiden. Alle Zuleitungsdrähte waren so weit als möglich in Zöpfe geflochten.

Um eine möglichst kräftige Wirkung zu bekommen, musste ich mit den Spiegeln so nahe an den Mittelpunkt des Kreises rücken, als es die reflectirende Platte erlaubte. Es war daher der Durchmesser des Kreises, auf welchem die Spiegel, oder genauer gesagt, der Primär- und Secundärinductor standen, bei der zur Einfallsebene parallelen Schwingungsrichtung $= 184\ cm$ und bei der darauf senkrechten $= 170\ cm$. Der Vorgang bei der Beobachtung war nun folgender: Vom Beobachtungsfernrohre aus konnte mittelst eines elektrisch betriebenen Schlüssels der Primärstrom des Inductoriums geschlossen werden. Geschah dies, so setzte sich die Galvanometernadel in Folge der im Standard- und Secundärinductor entwickelten Energie und thermoelektromotorischen Kraft in Bewegung. Der Funkenstrom wurde stets durch 10 Secunden unterhalten. Die Notirung des Ausschlages geschah nun in der Weise, dass stets die Ruhelage vor Beginn des Funkenstromes, dann der Umkehrpunkt nach Aufhören desselben und schliesslich noch der erste Umkehrpunkt beim Zurückschwingen durch die Ruhelage aufgeschrieben wurden. Der Unterschied zwischen der zweiten Ablesung und dem Mittel der beiden anderen war je nach der Stellung des Commutators ein Maass für die Summe oder Differenz der im Secundär- und Standardinductor entwickelten Energie. In den folgenden Tabellen ist immer das Verhältniss der dem Secundärinductor entsprechenden Ausschläge zu jenen des Standard verzeichnet. Es ist selbstverständlich, dass immer eine Reihe von Bestimmungen der Summe und Differenz ausgeführt wurde.

Der dem Standardinductor entsprechende Ausschlag betrug unter normalen Verhältnissen 10 Scalentheile. Manchesmal war er etwas grösser und einigemale, als die Oberfläche der Primärinductoren besonders günstig und das Funkengeknatter besonders hell und laut war, bekam ich sogar 16 Scalentheile dafür. In solchen Fällen muss die Dämpfung der Oscillationen besonders

klein sein, während sonst vielleicht nur fünf oder sechs Schwingungen auftreten. Fiel der erwähnte Ausschlag auf 8 und blieb die geringe Wirksamkeit auch nach einem länger andauernden Funkenstrome fortbestehen, so wurde frisch geputzt.

Durch die beschriebene Aufstellung des Standardinductors ist derselbe störenden Einflüssen entzogen worden. Die entsprechenden Ausschläge variirten, wie erwähnt, je nach der Beschaffenheit der Oberfläche der Primärinductoren; es konnte jedoch in keiner Weise constatirt werden, dass die Ausschläge bei einer bestimmten Anordnung der Apparate im Allgemeinen grösser gewesen wären als bei irgend einer anderen.

3. Die Beobachtungsresultate.

A. Untersuchung des seitlichen Einflusses.

Im Nachfolgenden bedeutet das Zeichen $\perp$, dass die Schwingungsrichtung des Primärinductors senkrecht zur Einfallsebene oder vertical war; $\parallel$ bedeutet, dass sie der Einfallsebene parallel oder horizontal war.

Ferner bezeichnen:

Die griechischen Buchstaben immer das Verhältniss der dem Secundärinductor entsprechenden Ausschläge zu jenen des Standardinductors, und zwar so wie es beobachtet wurde.

Die lateinischen Buchstaben dieses Verhältniss in Theilen jenes Verhältnisses, welches bei der geraden Gegenüberstellung der Spiegel erhalten wurde; es sind also die lateinischen Buchstaben ein Maass des beobachteten Effectes, bezogen auf den Effect des einfallenden Strahles als Einheit.

Zunächst wurde die Einwirkung des Primärspiegels auf den Secundärspiegel in gerader Richtung und nach verschiedenen Seitenrichtungen untersucht. Zu diesem Zwecke wurde der Secundärspiegel an verschiedenen Stellen der Peripherie aufgestellt. Die Stelle 240° entspricht der geraden Richtung. In den Tabellen I und II sind die Resultate, wobei δ und d das Maass der beobachteten Energie sind; φ gibt die Stellung des Secundärspiegels.

Tabelle I. ⊥

φ	δ	d
240	2·32	1
220	1·92	0·83
200	1·05	0·45
180	0·48	0·21
160	0·18	0·06
140	0 19	0·06
120	0·23	0·10

Tabelle II. ||

φ	δ	d
240	2·10	1
220	1·45	0·69
200	1·02	0·49
180	0·55	0·26
160	0·26	0·12
140	0·24	0·11
120	0·21	0·10

Die Einwirkung auf den Secundärspiegel nimmt bis zur Stellung bei 180° ab; dann bleibt sie ziemlich constant. Man sieht also, dass eine ziemlich beträchtliche Seitenwirkung vorhanden ist, die sich bis zur Stellung von 180° erstreckt.

Die Werthe von d für $\varphi = 160$, 140 und 120 kann ich nicht einer directen Einwirkung des Primärinductors zuschreiben, da ich Ausschläge von dieser Grössenordnung auch dann erhielt, wenn ich die Spiegel kreuzte, ich möchte eher annehmen, dass sie einer Einwirkung auf die Zuleitungsdrähte entsprechen. Es liegt auch die Annahme nicht ferne, dass die im Standard inducirten Schwingungen längs der Zuleitungsdrähte zum Secundärinductor laufen und dort auf das Thermoelement einwirken. Dieser Theil kann nur gering sein, da vom Secundärinductor auch dann noch etwas Energie angezeigt wurde, wenn der Standardinductor bei gekreuzten Spiegeln ausgeschaltet war.

B. Die Reflexion bei || Schwingungsrichtung.

In den nachfolgenden Tabellen ist α immer das Maass für die Intensität des reflectirten Strahles; a daher die Intensität des reflectirten durch die Intensität des einfallenden.

β und b geben den Werth der vom Secundärinductor angezeigten Energie für den Fall, dass die Platte um 90° gedreht, also in die Richtung des früheren Einfallslothes gestellt wurde.

Bei dieser Stellung übt die Schwefelplatte nahezu keinen Einfluss aus, wie eine Vergleichung der Werthe von β mit den entsprechenden Werthen von δ der Tabellen I und II zeigt. Ist daher bei einem bestimmten Incidenzwinkel $\alpha = \beta$, so ist das ein sicheres Zeichen, dass nichts reflectirt wird. i bedeutet den Einfallswinkel.

Tabelle III.

Metallplatte.

i	α	β	a	b
30	2·81	0·23	1·34	0·11
40	2·09	0·25	1·00	0·12
50	2·01	0·09	0·96	0·04
60	1·82	0·08	0·87	0·04

Tabelle IV.

Schwefelplatte.

i	α	β	a	b
30	0·72	0·20	0·34	0·10
40	0·40	0·17	0·19	0·08
50	0·46	0·26	0·22	0·12
55	0·47	0·37	0·22	0·17
60	0·51	0·49	0·24	0·23
65	0·52	0·58	0·25	0·28

C. Die Reflexion bei ⊥ Schwingungsrichtung.

Tabelle V.

Metallplatte.

i	α	a
30	2·43	0·91
40	5·10	1·92
50	3·27	1·23
60	2·93	1·10
70	2·22	0·84

Tabelle VI.

Schwefelplatte.

i	δ	β	a	b
30	0·90	0·22	0·38	0·10
40	1·76	0·20	0·76	0·08
50	2·26	0·33	0·97	0·14
60	1·80	0·76	0·77	0·33
65	1·68	1·17	0·72	0·50

Hier ist sowohl bei der Metallplatte als auch bei der Schwefelplatte eine kräftige Reflexion zu bemerken.

D. Die Intensität des durchgelassenen Strahles.

Schwingungsrichtung ||.

Tabelle VII.

Metallplatte.

i	η	g
45	0·12	0·06
55	0·20	0·10
65	0·22	0·10
75	0·36	0·17
90	1·75	0·83

Tabelle VIII.

Schwefelplatte.

i	η	g
30	1·88	0·90
40	2·10	1·00
50	2·58	1·23
60	2·52	1·20
65	2·82	1·34
90	3·18	1·50

Schwingungsrichtung ⊥.

Tabelle IX.

Metallplatte.

i	η	g
0	0·15	0·05
40	0·17	0·06

Tabelle X.

Schwefelplatte.

i	η	g
30	2·06	0·89
40	1·83	0·79
50	1·20	0·52
60	0·60	0·26
65	0·49	0·21
90	5·10	2·20

Es folgt aus diesen Tabellen, dass die Metallplatte nichts durchlässt, was ja schon bekannt ist; der kleine, bei niederen Incidenzwinkeln erhaltene Ausschlag rührt von anderen bereits erwähnten Einflüssen her. Bei grösseren Einfallswinkeln deckt die Metallplatte nicht mehr den Spiegel.

Bei der Schwefelplatte geht die Intensität des durchgelassenen Strahles entgegengesetzt wie die des reflectirten. Es sei noch erwähnt, dass bei senkrechter Incidenz 0·84% bei || und 0·78% bei ⊥ Schwingungsrichtung durchgelassen wurden.

E. Die Reflexion an einem Drahtgitter.

Das Drahtgitter hatte die Dimensionen wie die untersuchte Metallplatte. Die Drähte waren in einem gegenseitigen Abstande 1·5 *cm* vertical gespannt; daher geschah die Untersuchung bei ⊥ Schwingungsrichtung. Es wurden folgende Werthe gefunden.

Tabelle XI.

i	α	β	a	b
30	1·88	0·16	0·84	0·07
40	3·60	0·12	1·60	0·05
50	4·01	—	1·77	—
60	2·69	—	1·20	—
65	2·02	0·08	0·90	0·04

Für die Intensität des einfallenden Strahles wurde diesmal der Werth 2·25 gefunden. Eine Prüfung des Gitters bezüglich seiner Durchlässigkeit für Strahlen elektrischer Kraft ergab, dass es gerade so wie die Metallplatte wirkt.

Rubens und Ritter (l c.) untersuchten ein grösseres Gitter und fanden bei einem Einfallswinkel von 30° die Intensität des reflectirten Strahles gleich 98% von der des einfallenden. Diese Versuche ergeben bei 30° 84%, bei anderen Winkeln mehr als 100%.

F. Die Reflexion an einer runden Metallplatte.

Die Platte war aus Zinkblech, hatte einen Durchmesser von 80 *cm* und ergab nachstehende Resultate.

Tabelle XII.

Schwingungsrichtung $\perp$.

i	α	a
30	1·92	0·86
40	3·08	1·37
50	3·31	1·48
60	1·63	0·72

Bei $i = 0$ wurde nichts durchgelassen.

G. Discussion der Resultate.

Aus den oben angeführten Tabellen ist nicht ohne Weiteres zu entnehmen, welcher Theil des beobachteten Werthes von einer wirklichen Reflexion herrührt und wie viel davon auf andere Erscheinungen, die ich Störungen nennen möchte, entfällt. Diese Störungen können zum Theile *a)* wirklich als solche bezeichnet werden, zum Theile aber bilden sie *b)* einen integrirenden Bestandtheil der Reflexion, wodurch eine genaue Erforschung derselben von besonderer Wichtigkeit wird.

Zu den mit *a)* bezeichneten Störungen rechne ich:

1. Den Umstand, dass der Secundärinductor stets auch bei gekreuzten Spiegeln einen kleinen Ausschlag gab, welcher wahrscheinlich in einer Induction in den Zuleitungsdrähten seinen Grund hat. Diese Störung ist in allen Beobachtungen enthalten und summirt sich zu den anderen Werthen.

2. Die directe Einwirkung des Primärspiegels auf den Secundärspiegel. Diese Störung macht sich bei Einfallswinkeln von 60° und darüber bemerkbar und kann zu der Reflexionswirkung entweder positiv oder negativ hinzutreten. Unter der Voraussetzung, dass der Strahl bei der Reflexion an der vorderen Schwefelwand keine Phasenänderung erleidet, ist bei $\perp$ Schwingungsrichtung eine Andeutung über das Zeichen durch Rechnung zu finden. Bei $\parallel$ Schwingungsrichtung liegt die Sache complicirter. Ich habe die Frage für $i = 60°$ und $\perp$ Schwingungsrichtung auch experimentell untersucht und gefunden, dass bezüg-

lich des Zeichens die Rechnung mit dem Experiment übereinstimmt.[1]

Zu den mit *b)* bezeichneten Störungen zähle ich:

3. Die Erscheinung, dass in gewissen Fällen die Intensität des reflectirten Strahles jene des einfallenden weitaus übertrifft. Diese Erscheinung tritt insbesondere bei der Reflexion an der Metallplatte auf (vide z. B. Tab. V; $i = 40$); sie spielt jedoch, wie mir scheint, auch bei der Reflexion an der Schwefelplatte eine Rolle. Diese Störung ist grösser für die $\perp$, als für die $\parallel$ Schwingungsrichtung, wodurch die Ursache derselben schon zum Theile angedeutet ist; sie liegt jedenfalls darin, dass die Dimen-

[1] Zu diesem Zwecke habe ich in der Richtung des Einfallslothes eine Metallscheibe aufgestellt und bei verschiedenen Abständen derselben von der Schwefelplatte die Reflexion untersucht. In der Tabelle XIII bedeutet d die Entfernung des einen Endes der Metallwand von der vorderen Fläche der Schwefelplatte. α und β; a und b haben dieselbe Bedeutung wie früher.

Tabelle XIII.

$i = 60°$, $\perp$ Schwingungsrichtung.

d cm	α	β	a	b
16	0·25	0·30	0·11	0·13
21	0·22	—	0·10	—
26	0·32	0·35	0·14	0·15
31	0·68	0·52	0·29	0·22
36	1·12	0·53	0·48	0·23
41	1·54	0·59	0·66	0·25
46	2·06	0·63	0·89	0·27

Bei $d = 46°$ ist α grösser als der entsprechende Werth in Tabelle VI, während β noch kleiner ist. Daraus schliesse ich, dass der Werth von α für $i = 60°$, Tabelle VI, durch die Störung 2 heruntergedrückt wird. Interessant ist auch die Thatsache, dass die Werthe von α und β für $d = 16$, 21 und 26 nahezu gleich sind, woraus folgt, dass durch die Metallplatte selbst bei der verhältnissmässig grossen Entfernung von 26 *cm* die Reflexion aufgehoben wird; es hat den Anschein, als wenn gerade die Mitte der Schwefelplatte bei der Reflexion gar nicht betheiligt wäre.

sionen der reflectirenden Platte zu klein sind; es tritt in solchen Fällen eine schon von Trouton (l. c.) beobachtete Eckenwirkung auf. Über die Grösse dieser Störung können nur weitere Versuche Aufschluss geben.

4. Schliesslich ergeben sich aus der Betrachtung der Intensitäten des reflectirten und durchgelassenen Strahles eigenthümliche Verhältnisse; die Summe der beiden ist grösser als die Intensität des einfallenden Strahles. Überraschend sind aber die hohen Werthe des durchgelassenen Strahles für $i = 0$, also für den Fall, dass die Schwefelplatte parallel steht zur Axe des Strahles; zumal wenn man bedenkt, dass die Plattendicke nur 7 *cm* beträgt.

Zur Übersicht stelle ich in der nachfolgenden Tabelle XIV die der Schwefelplatte entsprechenden Werthe zusammen.

Tabelle XIV.

Schwingungsrichtung ∥					Schwingungsrichtung ⊥			
Reflectirt				Durchgelassen	Reflectirt			Durchgelassen
i	a	b	$a-b$	g	a	b	$a-b$	g
30	0·34	0·10	**0·24**	**0·90**	0·38	0·10	**0·28**	**0·89**
40	0·19	0·08	**0·11**	**1·00**	0·76	0·08	**0·68**	**0·79**
50	0·22	0·12	**0·10**	**1·21**	0·97	0·14	**0·63**	**0·52**
55	0·22	0·17	**0·05**	—	—	—	—	—
60	0·24	0·23	**0·01**	**1·20**	0·77	0·33	—	**0·26**
65	0·25	0·28	**0·03**	**1·34**	0·72	0·50	—	**0·21**

Die Werthe $a-b$ sind ein Maass für die Intensität der Reflexion und die von g für die Intensität des durchgelassenen Strahles. Ich habe für die ⊥ Schwingungsrichtung die Werthe von $a-b$ nur für die ersten drei Einfallswinkel aufgeschrieben, bei welchen sich der sub 2 beschriebene störende Einfluss noch nicht bemerkbar macht. Bei der ∥ Schwingungsrichtung ist aus den Werthen von $a-b$ für $i = 60$ und 65° zu ersehen, dass unter diesen Winkeln beinahe gar nichts reflectirt wird. Dies

gilt ganz bestimmt für $i = 60$; für $i = 65$ könnte man aus den entsprechenden Werthen eher auf eine schwache Reflexion schliessen.

Vergleicht man die bei der Reflexion am Drahtgitter, dann an der rechteckigen und runden Metallplatte erhaltenen Werthe, so findet man nur für $i = 30$ überall nahezu denselben Werth; die anderen Einfallswinkel ergeben verschiedene Resultate, was wieder darauf hindeutet, dass die Form der reflectirenden Platte bei der Reflexion massgebend ist. Aus dem Umstande, dass die Beobachtung für $i = 30$ in allen drei Fällen nahezu das gleiche Resultat ergab, könnte man schliessen, dass der gefundene Werth wirklich das richtige Maass für die Intensität der Reflexion ist. Würde man diese Annahme auf die Schwefelplatte übertragen und aus der bei ⊥ Schwingungsrichtung für $i = 30$ festgestellten Zahl für $a-b$ nach den Fresnel'schen Intensitätsgleichungen den Werth des Brechungsexponenten für die Schwefelplatte rechnen, so würde sich in der That ein Werth nahe gleich 2 ergeben. Aber auch aus den für ∥ Schwingungen gefundenen Daten folgen Werthe für den Brechungsexponenten, welche von den optischen Bestimmungen dieser Constante nicht sehr abweichen.

Für eine genaue numerische Berechnung müssten die Werthe von $a-b$ noch eine Correctur erfahren, die bis jetzt nicht berücksichtigt wurde. Ich habe bisher als Intensität des einfallenden Strahles bei ∥ und ⊥ Schwingungsrichtung die ersten Werthe der Tabelle I und II, welche natürlich Mittel aus mehreren Beobachtungen sind, genommen. In diesen Werthen ist jedoch die sub 1 angeführte Störung enthalten, daher sind bei einer genaueren Berechnung die obigen Werthe noch mit 1·08 zu multipliciren.

Aus den angeführten Beobachtungen ergeben sich folgende Resultate:

1. Die Metallplatte reflectirt den Strahl sehr kräftig, sowohl bei ⊥ als bei ∥ Schwingungsrichtung. Die Beobachtungen ergaben für die ⊥ Schwingungen einen grösseren Werth als für die ∥. Diese Erscheinung kann jedoch zum Theile auch in der Form der Platte, nicht aber in einem dem Metalle eigenthümlichen Verhalten ihren Grund haben.

2. Die Schwefelplatte reflectirt den Strahl bei ⊥ Schwingungsrichtung kräftig; bei ∥ schwach und da nur bei Einfallswinkeln, welche unter 60° liegen. Die Intensität des reflectirten Strahles ist im letzten Falle umso grösser, je kleiner der Einfallswinkel. Bei 60 und 65° ist mit den angewendeten Beobachtungsmitteln eine Reflexion nicht mit Sicherheit nachzuweisen.

3. Die elektrischen Verschiebungen im Strahle stehen senkrecht auf der Polarisationsebene, wie dies auch Trouton (l. c.) gefunden hat. Der aus dem Brechungsexponenten des Schwefels bestimmte Polarisationswinkel (63°) stimmt auch für die Reflexion der Strahlen elektrischer Kraft.

4. Die Intensität des von der Schwefelplatte durchgelassenen Strahles geht verkehrt, wie die Intensität des reflectirten Strahles. Die Summe beider wurde grösser gefunden als die Intensität des einfallenden Strahles.

Untersuchungen über die Entladung der Elektricität aus Spitzen, in verschiedenen Gasen, bei verschiedenen Drucken

von

A. v. Obermayer,

c. M. k. Akad.

(Mit 2 Tafeln und 5 Textfiguren.)

Die disruptive Entladung der Elektricität in Form von Funken zwischen Kugeln ist insbesondere in letzter Zeit häufig Gegenstand messender Untersuchungen gewesen. Der convectiven Entladung ist dagegen weit weniger Aufmerksamkeit geschenkt worden, weil man wohl immer voraussetzte, es mit einem Vorgange zu thun zu haben, welcher sehr von der speciellen Anordnung des Apparates und der schwer controlirbaren Beschaffenheit der Spitze abhängt.

Es ist in letzterer Zeit von Jaumann[1] ein Verfahren eingeschlagen worden, um das zur Glimmlichtentladung bei gewöhnlichem Luftdruck nöthige Potentialgefälle an einer Versuchsanordnung zu messen, welche ganz bestimmte, immer wieder herstellbare Verhältnisse bietet. Es findet dabei die Entladung zwischen einem Platindrahte im Inneren einer Messingröhre gegen diese letztere hin statt.

Unter Anwendung einer Spitze lassen sich wohl am ehesten gut definirte Verhältnisse erhoffen, wenn dieselbe in ein homogenes elektrisches Feld eingeschoben wird. Die Zufälligkeiten der Versuchsanordnung werden so am besten eliminirt. Die Spitze muss zu diesem Zwecke zwischen zwei ziemlich grosse,

[1] Diese Berichte, Bd. XCVII, S. 765.

parallel gestellte Metallplatten, senkrecht zur Ebene der Platten, möglichst in der Mitte eingeschoben werden.

Mit dergleichen Versuchen habe ich mich im vorigen Winter beschäftigt und damit Messungen in der Absicht verbunden, um die, in Gemeinschaft mit Herrn v. Pichler[1] ausgeführten Messungen nach einer anderen Methode zu controliren.

Zur Bestimmung des Potentialwerthes in absolutem Maasse wurde ein absolutes Elektrometer von Bichat und Blondlot benützt.

Zu den Versuchen, welche ich unter gewöhnlichem Luftdrucke ausführte, bediente ich mich zweier Platten von 50 *cm* Durchmesser, welche einander isolirt gegenüberstanden und mit den Polen der Influenzmaschine verbunden waren. Bei verschiedenen Plattendistanzen sind die Entladungspotentiale umso weniger verschieden, je näher die durch die obere Platte hindurch herabgeschobene Spitze der unteren Platte gebracht wird. So z. B. wurde für einen Spitzenabstand von 1 *cm*, in absoluten elektrostatischen Einheiten gefunden:

Abstand der Platten	16·7	8·9	4·0 *cm*
Potentialdifferenz.....	31·9	33·0	34·9
	32·3	—	33·7.

Diese Messungen sind mit verschiedenen Spitzen zu ganz verschiedenen Zeiten ausgeführt und uncorrigirt. Sie enthalten die Fehler der Einstellung der Spitzendistanz, zeigen aber, dass mit abnehmender Plattenentfernung das Potentialgefälle eine Zunahme erfährt.

Die Durchmesser der bei dergleichen Versuchen erzeugten Kundt'schen elektrischen Staubfiguren erreichen bei einem Abstande Spitze—Platte nahe gleich ein Drittel der Plattenentfernung einen Maximalwerth. Mit dem weiteren Wachsen dieses Abstandes nehmen die Durchmesser der Figuren wieder etwas ab.

Der in Rede stehende Maximalwerth des Durchmessers der Staubfiguren ist nahe gleich dem Abstande der beiden Platten So wurde unter Anwendung einer Doppelinfluenzmaschine gefunden:

---

[1] Diese Berichte, Bd. XCIII, S. 408 und 924.

Abstand der Platten	16·7	8·9	7·0	6·0	5·0	4·0 *cm*
Maximaldurchmesser	15·6	8·8	7·0	5·9	5·1	4·1

Der Einfluss der Beschaffenheit der Spitze auf das Entladungspotentiale ist ein ziemlich unbedeutender, so dass er fast innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler fällt. Auch das Materiale der Spitzen zeigt keinen sehr ausgesprochenen Einfluss. Dagegen ist das Entladungspotential vom Luftdruck abhängig, und zwar derartig, dass die Änderungen des Barometerstandes von nicht zu vernachlässigendem Einflusse sind. Leider bin ich auf diesen Umstand zu spät aufmerksam geworden. Auch die Entladungspotentiale der Funken sind wegen des Barometerstandes zu corrigiren. Es ist dies meines Wissens bisher noch nicht geschehen.

Die Stromstärke, welche bei der Entladung stattfindet, ist selbstverständlich von hohem Einflusse auf die Grösse der Entladungspotentiale und sollte, da die Influenzmaschinen trotz gleicher Rotationsgeschwindigkeit nicht immer die gleiche Elektricitätsmenge geben, mitbeobachtet werden. Ich habe dies auch zum grössten Theile gethan, es ist aber kaum möglich gewesen, die verschiedenen Beobachtungen wegen des Einflusses der Stromstärke zu corrigiren.

Die Messungen der bei der Entladung aus Spitzen vorkommenden Grössen sind also gewiss in absolutem Maasse ausführbar und ich kann bei dem heutigen Stande der Messmethoden die Ansicht Wesendonck's[1] nicht theilen, dass absolute Messungen nicht gerade so geboten seien, wie bei den Untersuchungen über Funkenentladungen.

Ich habe die Untersuchungen auch auf die convective Entladung im luftverdünnten Raume und in Wasserstoffgas und Kohlensäuregas, bei verschiedenen Drucken ausgedehnt. Auch hier ist die Spitze in das elektrische Feld zweier Metallplatten, normal zur Plattenebene eingeschoben. Ich kann diesen Versuchen nur den Charakter von einer vorläufigen Untersuchung zusprechen und habe desshalb bloss die Mittelwerthe mitgetheilt. Sie scheinen mir indessen doch den allgemeinen Verlauf der Erscheinung zu charakterisiren.

---

[1] Wiedemann's Annalen, Bd. XXXIX, S. 583.

Im luftverdünnten Raume beginnt die Entladung aus den Spitzen von einer gewissen Verdünnung an intermittirend zu werden, wie der rotirende Spiegel deutlich erkennen lässt. Während hiebei die Stromstärke keine merkliche Änderung zeigt, sinkt das Entladungspotentiale rasch ab. Das Product aus dem Gasdrucke p in die Spitzenentfernung δ zeigt, soweit die intermittirende Entladung reicht, die von Paschen für die Funkenentladung gefundene Eigenschaft, dass gleichen Werthen dieses Productes auch gleiche Potentialwerthe entsprechen. Bei der continuirlichen Entladung nimmt dieses Product mit der Spitzenentfernung zu.

Im Wasserstoffgase sind die Werthe der Entladungspotentiale nahe 2·5mal kleiner als in atmosphärischer Luft.

Bei ziemlich beträchtlichen Verdünnungen zeigt die Entladung aus der Spitze gegen die Platte ganz auffällig Schichtungserscheinungen, die durch Einschalten grosser Capacitäten einen sehr ausgesprochenen Charakter erhalten. Besonders merkwürdig scheint mir hiebei eine im Wasserstoffgase und im Leuchtgase herzustellende Entladung, welche sich am zweckmässigsten durch die Bezeichnung eines geschichteten Funkens charakterisiren lässt. Das Einschalten einer Ruhmkorff'schen Spirale hat die Entstehung eines dunklen Raumes zwischen der negativen Elektrode und der Funkenbahn zur Folge. Die bei grossen Verdünnungen parallel zu den Platten verlaufende Schichtung, zieht sich bei geringer Verdünnung auf die oberwähnte schmale, deutlich geschichtete Funkenbahn zusammen.

Das absolute Elektrometer von Bichat und Blondlot.

Das Schutzringelektrometer von Thomson ist wegen der nothwendigen Einstellungen der beweglichen Platte in die Ebene des Schutzringes zu continuirlichen Ablesungen oder zu Wägungen nach der Schwingungsmethode nicht geeignet. Die Herren Bichat und Blondlot haben diesem Übelstande dadurch abzuhelfen gesucht, dass sie die Anziehung zweier concentrischer Cylinder zur Messung der Potentialdifferenz verwenden.[1]

---

[1] Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, 29 Mars 1886; Journal de Physique, IIe Sér., T. V, p. 325 und 457.

Ich habe nach der zum Theil schematischen Figur, welche in dem Journal de Physique veröffentlicht wurde, durch den Mechaniker F. W. Heidl der Technischen Militärakademie ein solches Instrument ausführen lassen.

Der im rechten Theile zweifach gebogene Wagebalken *W*, Fig. 1, ist aus Messingblech gefertigt und hohl. Der Querschnitt ist quadratisch; die Diagonale des Quadrates steht vertical. Ein rhombischer Querschnitt, mit der längeren Diagonale vertical, würde steifer ausgefallen sein. Überhaupt ist der Wagebalken der angestrebten Leichtigkeit zu Liebe, etwas zu schwach dimensionirt worden.

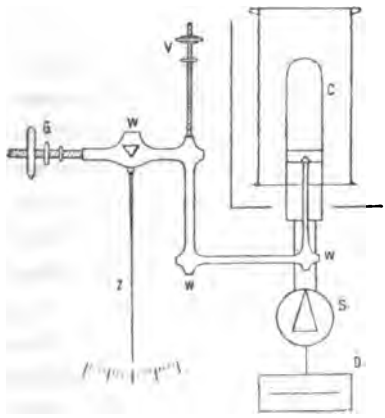


Fig. 1.

Der Wagebalken trägt rechterseits auf einer verticalstehenden Röhre die Schneide, auf welcher der bewegliche Cylinder C_1 im Durchmesser von 5·42 *cm*, mittelst eines innerhalb angebrachten harten Stahllagers von einem scharf in den Cylinder passenden Ringe getragen, aufgelegt ist. An den beweglichen Cylinder ist mittelst eines Bügels die bewegliche Wagschale *S* und ein aus zwei Papierscheiben bestehender Dämpfer *D* angehangen.

Am linken Arme des Wagebalkens lassen sich auf einem starken, mit Schraubengewinden versehenen Drahte Gewichte *G* verschrauben, welche gestatten, die Gleichgewichtslage einzustellen. Diese letztere wird mittelst eines langen, vertical herabreichenden Zeigers *Z* an einer Scala abgelesen.

Die Auflagedrehschneide des Wagebalkens und die Schneide, welche den beweglichen Cylinder trägt, liegen in einer horizontalen Ebene und sind einander parallel gestellt.

Auf einem, vom verticalen Arme des Wagebalkens nach aufwärts reichenden Drahte V lassen sich Gewichte zur Regulirung der Empfindlichkeit verschieben. Einem Übergewichte von 1 *cg* entsprachen während der Versuche über die convective Entladung zwei Theilstriche Ausschlag. Bei der Anwendung der Potentialwage zur Vergleichung von Capacitäten, war das Gewicht höher hinaufgeschraubt. Ein Theilstrich Ausschlag entsprach dann 2 *mg*.

Der Wagebalken war mit einer Arretirung versehen, welche sich für die Bequemlichkeit der Handhabung unumgänglich nothwendig erwies.

Concentrisch zum beweglichen Cylinder ist ein Messingblechcylinder ¦ von 15 *cm* innerem Durchmesser F auf drei Glasfüssen isolirt aufgestellt. Das obere Ende des Cylinders ist hiezu von einem Ringe mit drei horizontalen Lappen umgeben, die sich auf die Glasfüsse aufsetzen lassen. An einem der Lappen ist auch die Klemme zur Verbindung mit der Elektricitätsquelle.

Die Glasfüsse sind mit einer horizontalen Messingplatte P verbunden, durch deren kreisförmigen Ausschnitt der bewegliche Cylinder concentrisch hindurchragt. Die Messingplatte selbst wird von vier Messingröhren getragen, welche an der Grundplatte der Wage befestigt sind. Zwei dieser Messingröhren sind nach aufwärts verlängert und tragen ein verticales Blech, welches die Einwirkung der Elektricität des Cylinders auf den Wagebalken verhindert. Alle Metallbestandtheile der Wage sind mit Ausnahme des grossen Cylinders leitend mit einander verbunden und zur Erde abgeleitet.

Die Theorie des Instrumentes ist eine sehr einfache. Der Vollständigkeit halber setze ich dieselbe hieher. Die Arbeit der Anziehung P zwischen den beiden Cylindern ist bei einer kleinen Verschiebung dz gleich dem Energiezuwachse des Apparates, d. i. dem halben Producte aus der Vergrösserung der Ladung und dem Potentiale V in absoluten elektrostatischen Einheiten.

Es ist:

$$Pdz = \frac{1}{2} \cdot V \cdot \frac{\frac{1}{2} dz}{\log n \cdot \frac{R}{r}} \cdot V.$$

Hieraus folgt:

$$V^2 = 4P \log n. \frac{R}{r} = p.4g \log n. \frac{R}{r}.$$

Das Verhältniss der Halbmesser R/r der beiden Cylinder ist ähnlich wie bei dem Apparate von Bichat und Blondlot gleich 2·7675 gewählt. Dadurch wird:

$$V^2 = 4000\, p,$$

worin p in Grammen einzusetzen ist.

Die Wägungen wurden stets nach der Schwingungsmethode vorgenommen.

Der Apparat, in den vorbeschriebenen Dimensionen ausgeführt, gestattet Potentialdifferenzen zwischen 4 und 140 absoluten elektrostatischen Einheiten (d. i. 1200—52.000 Volt) zu messen. Die kleinen Potentialdifferenzen werden bereits erheblich unsicher. Der Fehler in Procenten des Potentiales ist gleich dem halben Fehler in Procenten der aufgelegten Gewichte. Bei 1 *g* Belastung macht ein Ablesungsfehler von einem Theilstriche (0·005 *g* entsprechend) 0·25% des gefundenen Potentialwerthes aus.

Die Prüfung des absoluten Elektrometers von Bichat und Blondlot durch Messung des Funkenpotentiales.

Zur Prüfung des Instrumentes habe ich nach dem Vorgange von Bichat und Blondlot das Funkenpotentiale zwischen Kugeln von 1 *cm* Durchmesser, bei verschiedenen Schlagweiten bestimmt.

Als Funkenmikrometer wurde ein solches von Riess verwendet, in dessen drehbaren Kugeln, wie in Fig. 2 angedeutet, Drähte eingesetzt waren, welche die Kugeln von 1 *cm* Durchmesser tragen. Da bei dieser Anordnung das Funkenpotentiale von 0·6 *cm* Schlagweite an rascher steigt als bei anderen Beobachtern, wurde das Funkenmikrometer auf eine der

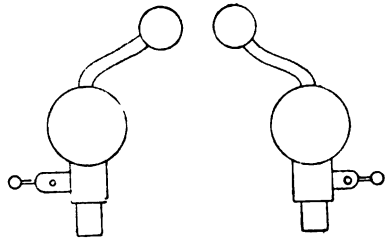


Fig. 2.

Form Fig. 3 ähnliche umgearbeitet. Die in der letzteren Figur dargestellte Anordnung, bei welcher die Glasstangen in die

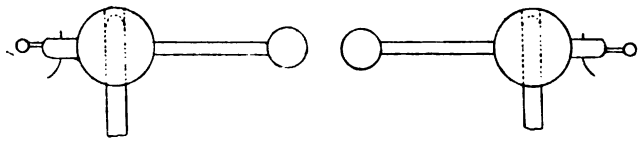


Fig. 3.

Kugeln eingeschoben und eingekittet und aussen gar keine Fassungen angewendet sind, dürfte sich am besten empfehlen.

In der nachfolgenden Tabelle führe ich die Funkenpotentiale an, wie sie von verschiedenen Beobachtern nach verschiedenen Methoden für die verschiedenen Schlagweiten δ in Centimetern gefunden wurden.[1]

						Obermayer	
δ	Bichat u. Blondlot	Baille	Czermak	Paschen	Freiberg	I.	II.
0·1	16·1	15·25	15·80	16·36	15·5	16·03	—
0·2	27 5	26·28	27·27	28·12	31·7	28·08	—
0·3	36·2	37·32	37·76	38·94	38·9	37·77	—
0·4	47·7	47·62	47·77	49·45	46·6	47·80	—
0·5	56·3	54·66	—	59·21	56·0	56·70	56·13
0·6	64·9	65·23	—	68·28	64·2	65·38	—
0·7	71·6	72·28	—	75·36	69·9	73·79	—
0·8	77·0	77·61	—	82·61	77·4	81·12	79·87
0·9	81·6	80·13	—	—	83·7	87·51	84·63
1·0	84·7	83·05	—	—	85·9	93·18	88·57
1·1	88·7	—	—	—	88·2	—	92·25

Die von mir unter I und II aufgeführten Zahlen sind mit den Mikrometeranordnungen in Fig. 2 und Fig. 3 bestimmt worden.

---

[1] Bichat und Blondlot, Journal de Physique, IIe S., T. 5, p. 462.
Baille, Ann. de Chimie et Physique, S. 5, T. 29, p. 181, 1883.
Czermak, Diese Berichte, Bd. XCVII, S. 545, 1883.
Paschen, Wiedemann's Ann., Bd. 37, S. 79. Über die zum Funkenübergange in Luft, Wasserstoff und Kohlensäure nöthige Potentialdifferenz. Es wird ein Riess'sches Funkenmikrometer verwendet, in dessen Kugeln unter 45° Drähte eingesetzt sind, an welche die Kugeln von verschiedenem Halbmesser angesteckt werden können.
Freiberg, Wiedemann's Ann., Bd. 38, S. 231.

Der Einfluss der Zuleitungsdrähte ist auch von Paschen untersucht worden. Für Funkenstrecken grösser als 0·05 *cm* werden bei Kugeln von 0·25 *cm* Halbmesser, bei dickeren, unter 45° gegen die Verticale geneigten Zuleitungsdrähten grössere Potentialwerthe, bei dünneren Zuleitungsdrähten kleinere Potentialwerthe gefunden. Es geht hieraus nur erneuert die Nothwendigkeit hervor, die Mikrometerkugeln so anzuordnen, dass sie die Zuleitungsdrähte verdecken, und dass etwaige Fassungen der isolirenden Glasfüsse ohne Einfluss bleiben.

Zu den Versuchen über das Funkenpotential habe ich eine kleine Winter'sche Elektrisirmaschine, in Verbindung mit vier als Cascade geschalteten Leydenerflaschen von 7·5 *cm* Durchmesser und 19·5 *cm* Höhe der Belegung benützt. Das nöthige Gewicht wurde jederzeit vorläufig bestimmt und aufgelegt. Durch anfänglich rascheres und später langsameres Drehen wird der Wagebalken abgehoben und sehr vorsichtig bis zum Überspringen des Funkens an der Elektrisirmaschine gedreht.

Die von mir angegebenen Zahlen sind sämmtlich Mittelwerthe aus fünf bis sechs Versuchen.

Ich habe bei dieser Gelegenheit noch versucht, einen Einfluss des Materiales der Kugeln auf das Entladungspotentiale aufzufinden und hiezu eine grosse Zahl von Versuchen an verschiedenen Tagen, mit Eisen- und Zinkkugeln von 1 *cm* Durchmesser bei 1 *cm* Schlagweite ausgeführt. Auch hier ist jede Zahl das Mittel aus fünf bis sechs Versuchen.

Eisenkugel	Zinkkugel
91·66	90·82
90·66	90·80
90·60	89·86
91·35	90·25
91·30	91·05
90·55	92·52
91·50	91·50
93·16	93·40
93·28	93·65
93·07	—
Mittel....91·70	91·54

Ein nennenswerther Einfluss des Materiales der Kugeln auf das Entladungspotentiale ist nach diesen Zahlen nicht zu erwarten.

Die grosse Verschiedenheit der einzelnen Zahlen für dieselbe Kugelgattung, an verschiedenen Beobachtungstagen, dürfte zum grössten Theile aus der Verschiedenheit des Barometerstandes zu erklären sein. Ich habe denselben leider nicht beobachtet, da ich den Einfluss desselben unterschätzte und auch gewöhnlich keine Angaben gemacht werden, welche auf eine Correction wegen des Barometerstandes hinweisen. Leider fehlen gerade für atmosphärische Luft, bei Kugeln von 1 *cm* Durchmesser und einer Schlagweite von 1 *cm*, die Angaben in den Versuchen von Paschen. Es dürfte aber nicht weit gefehlt sein, vorauszusetzen, dass die Zunahme des Barometerstandes um 1 *cm*, das Entladungspotentiale um fast $1 \cdot 4\%$ seines Werthes erhöhe. Ein im Winter nicht ausgeschlossener Unterschied in den Barometerablesungen von 3 *cm* kann eine Veränderung des Potentialwerthes um $4 \cdot 2\%$ herbeiführen, d. i. im vorliegenden Falle nahe an vier Einheiten des Potentialwerthes.

Für alle Versuche über das Entladungspotentiale im lufterfüllten Raume ist die Angabe des Barometerstandes erforderlich, um alle Angaben auf etwa 76 *cm* Barometerstand reduciren zu können.

Vergleichung der Capacitäten von Leydenerflaschen mittelst des Elektrometers von Bichat und Blondlot.

In Ermangelung eines anderen, leicht zu handhabenden, empfindlichen Elektrometers habe ich jenes von Bichat und Blondlot zur Vergleichung und absoluten Messung der Capacitäten von Leydenerflaschen verwendet, welche bei den von mir bisher beschriebenen Versuchen in Anwendung standen.[1]

Es wurden hiezu die Kugeln eines Funkenmessers durch Spitze und Hohlkugel ersetzt, zwischen diesen die Entladung einer Influenzmaschine übergehen gelassen und die so hergestellte Potentialdifferenz zum Laden der Apparate benützt.

Die Potentialwage wurde durch passendes Verschrauben des Gewichtes auf eine Empfindlichkeit von 1 Theilstrich gleich 2 *mg* eingestellt und die Entfernung zwischen Spitze und Hohlkugel so regulirt, dass etwa $0 \cdot 07 g$ erforderlich waren, um die Potential-

[1] Diese Berichte Bd. XIII, S. 408 und S. 925; Bd. XCVII, S. 247; Bd. XCVIII, S. 419 und Bd. XCIX, S. 269.

wage ins Gleichgewicht zu bringen. Es entspricht diese Belastung einer Potentialdifferenz von 17 absoluten, elektrostatischen Einheiten oder 5100 Volt.

Zur Gewinnung eines absoluten Maasses hatte ich vor vielen Jahren zwei kugelförmige Leydenerflaschen anfertigen lassen. Dieselben wurden jetzt in Gebrauch gestellt, um die Capacität in absolutem Maasse zu erhalten. Der Halbmesser der inneren Kugel betrug 6 *cm*, der innere Halbmesser der äusseren Kugel 7·1 *cm*. Durch drei kleine Hartgummicylinder von 1 *cm* Durchmesser waren die beiden Kugeln auseinander gehalten. Der Stiel der inneren Kugel ragt durch eine kreisförmige Öffnung von 2 *cm* Durchmesser aus der äusseren Öffnung heraus. Die Capacität rechnet sich nach der Formel:

$$C = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 38 \cdot 73 \; cm.$$

Nach den erforderlichen Correctionen ändert sich dieser Werth in 38·84 *cm* um.

Die Messungen wurden nach der Methode von Faraday ausgeführt. Der eine Condensator C_1 wird mit dem Elektrometer verbunden, geladen und das Potential V_1 gemessen. Sodann wird zweite Condensator C_2 zugeschaltet; ein Theil der Ladung übergeht auf denselben, das Potential sinkt auf V_2. Wenn die Capacität C_0 der Potentialwage bekannt ist, so ist es zweckmässig, noch einen Versuch auszuführen, während dessen zuerst $C_2 + C_0$ geladen, V_1' gemessen, dann C_1 zugeschaltet und V_2' gemessen werden. Es können dann die Verhältnisse C_1/C_0 und C_2/C_0 gerechnet werden. Man hat nach einigen einfachen Rechnungen:

$$\frac{C_2}{C_1 + C_0} = \frac{V_1 - V_2}{V_2} = n_1 \qquad \frac{C_1}{C_2 + C_0} = \frac{V_1' - V_2'}{V_2'} = n_2$$

und damit:

$$C_1 = \frac{n_2 (n_1 + 1)}{1 - n_1 n_2} C_0 \qquad C_2 = \frac{n_1 (n_2 + 1)}{1 - n_1 n_2} C_0.$$

Für nahe gleiche Werthe von C_1 und C_2 werden die Werthe von n in Folge der Differenz $V_1 - V_2$ zu sehr von den Beobachtungsfehlern beeinflusst. Dieses Verfahren empfiehlt sich daher nur dann, wenn C_2 ein nicht zu grosses Vielfaches von C_1 ist.

Es sind nach dieser Methode verglichen worden die beiden nebeneinander geschalteten Normalcapacitäten $2C_n$ mit der Capacität $C_1/4$ einer Cascadenbatterie von vier Flaschen von 7·5 *cm* Durchmesser und 19·5 *cm* Höhe der Belegung, und eine dieser Flaschen C_1, mit einer zweiten C_2 von 13 *cm* Durchmesser und 34 *cm* Höhe der Belegung.

Es wurde so gefunden:

$$\frac{C_1}{4} = 5{\cdot}074\ C_0 \qquad 2C_n = 2{\cdot}005\ C_0$$

$$C_1 = 16{\cdot}01\ C_0 \qquad C_2 = 41{\cdot}54\ C_0.$$

Wie man sieht, sind die Werthe von C_1 ziemlich different. Die Capacität C_0 der Potentialwage wurde direct zu bestimmen gesucht. Die Ausschläge müssen dabei natürlich sehr nahe bei der Gleichgewichtslage gehalten werden. Aus einer grösseren Zahl von Messungen, in denen die Capacitäten C_n verschieden combinirt wurden, ergab sich $C_0 = 1{\cdot}068\ C_n$. Aus den vorangeführten Resultaten folgt $C_0 = 0{\cdot}998\ C_n$. Es wurde der Mittelwerth für C_0 angenommen. Es ist sonach:

$$C_0 = 1{\cdot}033\ C_n = 40{\cdot}12\ cm.$$

Die Capacität der Leydenerflasche von 7·5 *cm* Durchmesser und 19·5 *cm* Belegungshöhe ist:

$$C_1 = 18{\cdot}235\ C_n = 705{\cdot}22\ cm.$$

Die Capacität der Leydenerflasche von 13 *cm* Durchmesser und 34 *cm* Belegungshöhe ist

$$C_2 = 42{\cdot}91\ C_n = 1666{\cdot}67\ cm.$$

Die Capacitäten der gewöhnlich[1] zur Influenzmaschine zugeschalteten Cascadenbatterien von vier oder acht Flaschen sind daher:

$$\frac{C_1}{4} = 177\ cm \qquad \frac{C_1}{8} = 89\ cm.$$

---

[1] Diese Berichte, Bd. XCIII, S. 925; Bd. XCVII, S. 249; Bd. XCIX, S. 270.

Die Capacität einer Batterie[1] von sechs Flaschen der Capacität C_2 ist zufällig nahe

$$C = 10.000\ cm,$$

d. i. gleich der Capacität einer Kugel von 100 *m* Halbmesser.

Vergleich der Entladungspotentiale aus Spitzen, bei gewöhnlichem Luftdrucke nach verschiedenen Methoden gemessen.

Derartige Bestimmungen hatte ich nach der Schwingungsmethode, in Gemeinschaft mit Herrn v. Pichler[2] in der Weise, wie es von Mascart[3] angedeutet wurde, an einer Platte[4] von 50 *cm* Durchmesser, welcher eine Spitze frei gegenüber stand, ausgeführt.

An dem schwingenden Apparate hatte ich bei einer späteren Gelegenheit[5] eine grössere Kugel angebracht und damit wesentlich kleinere Werthe erhalten. Endlich hatte ich zur selben Zeit Versuche über die Anziehung von Kugeln innerhalb eines Drahtnetzes zur Messung der fraglichen Potentialdifferenz angestellt und damit noch kleinere Werthe gefunden.

Zu den Anziehungsversuchen der Kugeln diente eine Messingkugel von 32 *cm* Durchmesser, welche auf zwei verschieden langen Glasfüssen im Inneren eines Drahtnetzes, isolirt aufgestellt und durch einen Zuleitungsdrahte vom Netze isolirt mit der Elektricitätsquelle verbunden werden konnte, und eine zweite, an einer Wage leitend aufgehangene Messingkugel von 12 *cm* Durchmesser. Diese letztere Kugel, die Wage und das Drahtnetz wurden zur Erde abgeleitet. Der Aufhängedraht läuft von der Wage durch den Deckel des cylindrischen Drahtnetzes hindurch.

Zur Berechnung der Versuche wurde vorausgesetzt, dass der Halbmesser der kleinen Kugel gegen den Abstand der Mittelpunkte beider Kugeln vernachlässigt werden könne und die auch in der Elektricitätslehre von Riess angeführte Formel angewendet:

---

[1] Diese Berichte, Bd. XCVIII, S. 422.

[2] Ebenda, Bd. XCIII, S. 92, 1886.

[3] Traité d'Electricité statique, I, p. 52; II, p. 92.

[4] Diese Berichte, Bd. XCIX, S. 272.

[5] Ebenda, Bd. XCVII, S. 256.

$$V = \frac{1 - \frac{a^2}{c^2} - \frac{ab}{c^2}}{\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{c}\left(\cdot\left(1-\frac{a^2}{c^2}\right)^2 + \frac{a^3}{c^3}\frac{b}{c}\right)}}\sqrt{P.g},$$

worin $a = 16\ cm$ der Halbmesser der festen, $b = 6\ cm$ der Halbmesser der beweglichen Kugel, c der Abstand der Mittelpunkte, P das auf die Wage gelegte Gewicht, in Grammen V die Potentialdifferenz in A. E. E. ist.

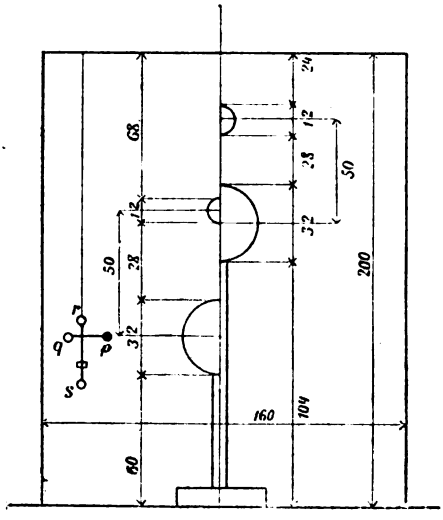


Fig. 4.
Niedere Aufstellung.

Die Fig. 4 zeigt die Aufstellung der Kugeln sammt den Dimensionen. In Fig. 4 ist auch der Schwingungsapparat eingezeichnet. Derselbe besteht aus dem Messingdrahte qp, welcher bei p die leicht vergoldete Kugel (Hollundermark oder Kork), bei q eine die ersteren abbalancirende Messingkugel trägt. Senkrecht zu pq ist ein Messingdraht rs angelöthet, welcher den Spiegel s und eine Hülse zur Befestigung eines Belastungsstabes trägt. Der Apparat ist an einem dünnen Messingdrahte aufgehangen. Für die verschiedenen Entfernungen Spitze—Platte wurden unter Anwendung einer einzigen Influenzmaschine folgende Werthe des Potentiales in A. E. E. gefunden.

Niedere Aufstellung	5	10	15	20	25	30
$c = 39{\cdot}4\ cm$	96	132	165	191	—	235
$c = 50{\cdot}0$	81	117	141	168	187	206
$c = 50{\cdot}0$	81	114	144	162	179	—
Hohe Aufstellung						
$c = 40{\cdot}0$	90	127	153	183	200	—
$c = 50{\cdot}0$	81	110	135	151	176	—
Schwingungsversuche						
$c = 53{\cdot}7,\ 2b = 3{\cdot}98$	99	143	175	215	228	245
$c = 54{\cdot}0,\ 2b = 1{\cdot}15$	120	171	211	250	274	288

Die gefundenen Potentialwerthe sind bei der hohen Aufstellung und der grösseren Entfernung am kleinsten. Die bewegliche Kugel ist dem Deckel des Drahtgehäuses näher als bei der niederen Aufstellung; es findet offenbar eine beträchtlichere Ablenkung der Kraftlinien statt. Die Schwingungsversuche geben sehr grosse Werthe.

Ein directer Vergleich mit den durch das absolute Elektrometer von Bichat und Blondlot ausgeführten Versuche ist mit den oben angeführten Zahlen nicht ausführbar. Dagegen lassen sich die Angaben derselben für 2 und 5 *cm* Spitze—Platte und zwei Maschinen mit den Werthen, welche früher nach der Schwingungsmethode gefunden wurden, vergleichen.

Es ist für die Entfernung 2 *cm* Spitze—Platte die Spitze der Platte frei gegenüberstehend:

Elektrometer B. B.	Schwingungsversuch
69·22	$D = 51·3$
70·00	$d = 1·15\ cm$
69·40	
68·25	
Mittel...69·2	83·0

Für die Entfernung Spitze—Platte gleich 5 *cm*:

119·1	144
122·2	135
119·9	
118·1	
Mittel...119·9	140

Die nach der Schwingungsmethode gefundenen Potentialwerthe sind erheblich grösser, als die mit dem Elektrometer von Bichat und Blondlot bestimmten Werthe.

Es ist gar nicht ausgeschlossen, dass die Abbildung des Drahtnetzes auf der Kugel ein Zusammendrängen der Kraftlinien in der Nähe des horizontalen Kreises bedingt, und dass dadurch die Wirkung auf die schwingende Kugel vergrössert wird, während nach dem verticalen Durchmesser hin die Wirkung abnimmt.

[1] Diese Berichte, Bd. XCIII, S. 936.

Die eben beschriebenen Versuche scheinen mir aus dem Grunde erwähnenswerth, weil sie, wenn auch nicht ganz einwurfsfrei, doch zeigen, welche Vorsicht bei der Anwendung von Metallschirmen nöthig sei, worauf übrigens Dr. Adler[1] bei seinen theoretischen Untersuchungen hingewiesen hat.

Die Resultate der Schwingungsmethode werden übrigens noch durch andere Fehlerquellen beeinflusst, so namentlich durch eine Änderung der Schwingungsdauer zu Folge der Dämpfung.

Bestimmung der Potentialdifferenz zur Entladung der Elektricität aus einer Spitze gegen eine Platte, mit dem absoluten Elektrometer von Bichat und Blondlot, bei gewöhnlichem Luftdrucke.

Versuchsanordnung.

Zu den folgenden Versuchen werden stets die beiden Doppelinfluenzmaschinen verwendet, welche im Laufe dieser Untersuchungen öfter erwähnt worden sind, wovon mir die eine Herr Regierungsrath L. Ditscheiner freundlichst überlassen hat. Die beiden Maschinen sind aneinandergekuppelt und werden von der Transmission der Gasmaschine angetrieben. Der Gang der letzteren ist bei so geringen Belastungen ein so regelmässiger, wie er durch Drehen mit der Hand kaum erreicht werden kann.

Zum Antrieb sind durchwegs Darmseiten verwendet; sie lassen nicht so leicht locker.

Zwischen die Pole der Maschine ist die schon früher erwähnte Cascadenbatterie von vier Flaschen geschaltet. Von den Endkugeln dieser Batterie führen Drähte zu einem Stromwechsler und von diesem zu den Apparaten, d. i. ein Draht zur Spitze und zum festen Cylinder des Elektrometers und ein Draht zur Platte und zur Erdleitung.

Der Stromwechsler besteht aus vier, mit Siegellack überzogenen Glasfüssen, welche in eine Holzscheibe gekittet und am oberen Ende mit röhrenförmigen, oben offenen Messingfassungen versehen sind; dann aus zwei Stäben mit Kugeln an den Enden, welche von einem Hartgummistück gehalten werden und sich

---

[1] Über die Veränderung elektrostatischer Kraftwirkung durch eine leitende Wand. Diese Berichte, Bd. XCIX, S. 61.

mit den ziemlich grossen Kugeln in die Messingröhren hineinlegen. Das Hartgummistück ist durchbohrt, um eine Säule drehbar und wird durch eine Spiralfeder abwärts gedrückt.

Die Spitze steht der Platte frei gegenüber.

Die Spitze des Apparates,[1] aus einer feinen Nadel in Messingfassung gebildet, wird mit dem festen Cylinder des Elektrometers, die 50 *cm* im Durchmesser haltende Platte mit den übrigen zur Erde abgeleiteten Theilen desselben verbunden. Die Platte steht horizontal, der Spitzenträger vertical. Zur Einstellung der richtigen Spitzenentfernung dient eine getheilte Schiene auf Stativ, auf welcher eine Hülse mit Querarm verschoben mittelst Nonius eingestellt und mittelst Schraube geklemmt werden kann.

Von den angewendeten Spitzen wurde mittelst eines Objectivmikrometers und eines Mikroskopes der Durchmesser der Endkrümmung gemessen. Die Spitzen werden während der Versuche corrodirt und zeigen sich merklich angelaufen, nachdem sie eine Weile in Verwendung gestanden sind.

Die Spitze ist in den folgenden Versuchen mit dem negativen Pol der Influenzmaschine verbunden.

Spitze II 0·024 *mm* vor, 0·04 *mm* nach den Versuchen.

Spitze—Platte in Centimeter	Potentialdifferenz I.	II.	Mittel	
1	37·03	42·15	39·59	A. E. E.
2	69·22	68·56	68·89	
3	89·44	87·40	88·42	
4	105·97	105·17	105·57	
5	119·09	118·04	118·57	
6	135·80	—	130·80	

Spitze III stumpf; 0·15—0·20 *mm* Durchmesser des Endes.

	I.	II.	Mittel	
1	42·84	42·24	42·54	A. E. E.
2	70·00	69·34	69·67	
3	91·05	89·70	90·38	
4	107·04	107·43	107·24	
5	122·34	122·08	122·21	
6	135·78	—	135·78	

[1] Diese Berichte, Bd. XCIX, S. 272.

Spitze III geschliffen; 0·04 *mm*.

	I.	II.	Mittel
1	42·15	42·10	42·13
2	69·43	69·22	69·33
3	89·66	89·86	89·76
4	106·14	105·82	105·98
5	119·94	118·48	119·16
6	134·23	—	134·21

Der Einfluss der Spitzenkrümmung erweist sich als ein wenig beträchtlicher.

Mit einer Zinkspitze wurden auch Versuche angestellt. Dieselbe bildete einen an der Basis stärkeren Conus als die angewendeten Nadeln, war dagegen sehr spitzig geschliffen. Sie hatte vor dem Versuche 0·04 *mm*, nach dem Versuche 0·08 *mm* Durchmesser am Ende. Sie wurde nach $1^3/_4$ Stunden Gebrauch merklich corrodirt.

	I.	II.	Mittel
1	39·34	41·24	40·29
2	68·27	66·78	67·83
3	88·83	87·10	87·97
4	104·62	103·56	104·09
5	118·11	{117·97 / 118·31}	118·13
6	131·17	—	131·17

Die Werthe der Potentialdifferenzen sind wenig kleiner als jene bei Stahlnadeln.

Wenngleich die Zinkspitze und die Stahlnadeln nicht genau die gleiche Gestalt haben, so ist doch der Schluss, dass die Beschaffenheit des Materiales kaum merklich zur Grösse des Entladungspotentiales beiträgt, einigermassen gerechtfertigt.

Die Spitze befindet sich zwischen zwei einander gegenüberliegenden Platten.

Der Kupferplatte des mehrerwähnten Apparates zur Entladung der Elektricität aus Spitzen wird eine kreisförmige Zinkplatte von 50 *cm* Durchmesser möglichst parallel und concentrisch gegenübergestellt. Die Zinkplatte ist in ihrem Mittelpunkte durchbohrt und mit einem angelötheten Rohre versehen, in welchem sich der dünne Messingstab verschieben lässt, welcher die Spitze

trägt. Zur Einstellung der Spitzenentfernung an der unteren Platte ist mit dem Messingstabe ein Index verbunden, welcher auf die früher erwähnte getheilte Schiene mit Stativ eingestellt werden kann.

Nebst der Bestimmung des Entladungspotentiales wurden hier auch die Durchmesser der Kundt'schen Staubfiguren mittelst eines Stangenzirkels mit langen Spitzen gemessen. Dieselben entstehen zwischen den Platten in grosser Schärfe. Bei der Entladung aus einer Spitze, welche der Platte frei gegenübersteht, scheint die Beschaffenheit der Spitze auf die Grösse der Durchmessers der Staubfigur einen beträchtlicheren Einfluss zu haben, als bei den in Rede stehenden Versuchen.

Die Spitze ist bei den folgenden Versuchen mit dem negativen Pole der Influenzmaschine verbunden.

Abstand der Platten von einander 16·7 *cm*. Eine Influenzmaschine.

Abstand Spitze—Platte	Potentialdifferenz I.	Potentialdifferenz II.	Durchmesser der Kundt'schen Figur
1·0 *cm*	31·94	32·25 A. E. E.	5·7 *cm*
2·0	52·60	52·50	9·0
3·0	68·90	68·82	11·6
4·0	84·12	84·14	13·0
5·0	97·68	98·57	14·3
6·0	—	112·80	15·2
7·0	—	126·73	15·6
8·0	—	142·05	15·6

Abstand der Platten von einander 8·85 *cm*. Eine Influenzmaschine.

0·5 *cm*	19·63 A. E. E.	2·7 *cm*
1·0	32 98	4·6
1·5	44·68	5·9
2·0	54·33	6·7
2·5	64·85	7·5
3·0	74·70	8·1
3·5	84·54	8·5
4·0	95·65	8·7
4·5	106·32	8·8
5·0	118·98	8·6

Abstand der Platten von einander 8·85 *cm*. Zwei Influenzmaschinen.

Abstand Spitze—Platte	Potentialdifferenz	Durchmesser der Kundt'schen Figur	
0·5 *cm*	25·28 A. E. E.	2·9 *cm*	—
1·0	42·05	5·0	6·5 *cm*
1·5	58·41	5·9	—
2·0	70·89	7·2	11·1
2·5	84·39	7·8	—
3·0	96·22	8·2	15·0
3·5	108·70	8·4	—
4·0	121·90	9·0	19·0
4·5	135·73	—	—
5·0	—	—	22·1

Abstand der Platten von einander 4·0 *cm*; durch zwischengelegte Siegellackstücke eingestellt. Eine Influenzmaschine.

Abstand Spitze—Platte	Potentialdifferenz		Durchmesser der Kundt'schen Figur
	I.	II.	
0·5 *cm*	20·15	20·78	2·6 *cm*
1·0	34·91	33·71	3·5
1·5	47·60	47·92	4·1
2·0	62·07	62·47	4·2
2·5	73·67	80·72	4·2

Die zweite Columne unter Durchmesser der Kundt'schen Figur bezieht sich auf die Durchmesser von Staubfiguren, welche bei der Platte frei gegenüberstehender Spitze, bei der bezüglichen Entfernung Spitze—Platte erhalten wurde.

In dem elektrischen Felde zwischen den Platten nähert sich der Durchmesser der Staubfigur einem Maximum, welches nahe erreicht wird, wenn die Spitze um etwas mehr als ein Drittel der Plattenentfernung von der unteren Platte absteht.

Dieses Maximum des Durchmessers der Staubfigur ist, wie aus den angeführten Zahlen zu ersehen ist, nahe gleich dem Abstande der beiden Platten, zwischen denen die Entladung aus der Spitze vor sich geht.

Dies findet auch durch die folgenden mit einer Influenzmaschine ausgeführten Versuche seine Bestätigung.

Spitze—Platte	Abstand der beiden Platten von einander: 7 *cm*	6 *cm*	5 *cm*	4 *cm*
	Durchmesser der Kundt'schen Figuren			
1·0 *cm*	49 *cm*	40 *cm*	39 *cm*	34 *cm*
1·5	54	50	47	39
2·0	61	53	48	41
2·5	66	56	51	40
3·0	68	57	48	36
3·5	68	59	48	—
4·0	70	55	—	—

Die Durchmesser der Figuren nehmen nach dem Überschreiten des Maximums nur um wenig ab.

Einfluss des Zeichens der Elektricität auf die Grösse des Entladungspotentiales.

Das Zeichen der Ladung der Spitze wird mittelst des früher beschriebenen Stromwechslers bald positiv, bald negativ gewählt. Es kann nur eine Influenzmaschine verwendet werden, weil bei positiver Ladung der Spitze der Strom zweier Influenzmaschinen zur Funkenentladung führt. Die angeführten Zahlen sind Mittelwerthe aus zwei bis vier Versuchen, welche sich unter einander in ziemlicher Übereinstimmung befinden. Wegen der Abnützung der Spitze vergrössert das Schlagen von Funken das Entadungspotentiale dauernd.

Abstand der Platten von einander 8·8 *cm*. Eine Influenzmaschine.

Abstand Spitze—Platte	Entladungspotentiale		Differenz in Proc., positiv weniger negativ
	—	+	
1·0	33·51	36·80	+8·94
1·5	43·54	44·39	+1·91
2·0	53·88	55·02	+2·07
2·5	63·02	63·83	+1·27
3·0	72·16	73·40	+1·83
3·5	81·49	81·42	−0·09
4·0	90·70	90·66	−0·04

Für die kleineren Distanzen ergibt sich ein fast 2% betragender grösserer Werth des Entladungspotentiales bei positiver

Spitze; bei den grösseren Distanzen hört dieser Unterschied auf. Die positive Entladung ist überhaupt unregelmässiger, mit einem Geräusche verbunden und wahrscheinlich disruptiv. Jede Änderung des Geräusches führt auch eine Änderung des Entladungspotentiales herbei.

Die Bestimmung der Potentialdifferenz zur Entladung der Elektricität aus einer Spitze gegen eine Platte, in atmosphärischer Luft, bei verschiedenen Drucken.

Zur Beobachtung der Abhängigkeit des Entladungspotentiales vom Luftdruck wurde der Apparat Fig. 5 construirt.

Eine tubulirte Glasglocke wurde mit Siegellack in eine Rinne gekittet, welche in eine dicke Messingplatte eingedreht war.

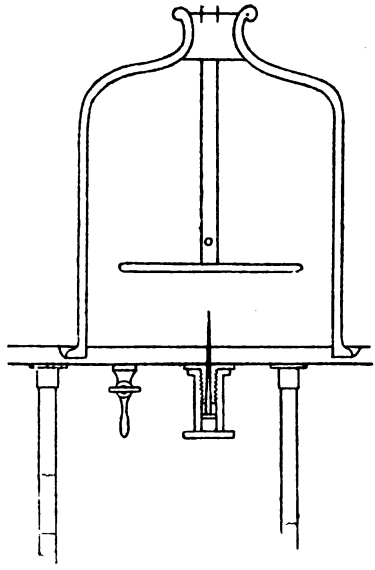


Fig. 5.

Die Messingplatte ist mit drei isolirenden Glasfüssen verbunden. Auf die Mitte derselben ist ein cylindrischer, mit Schraubengewinden versehener Ansatz gelöthet, der sammt der Scheibe durchbohrt ist. In der Durchbohrung lässt sich ein, zum Zwecke der Einstellung der Spitze getheilter Messingdraht mit der Stahlspitze verschieben. Über den Ansatz kann eine cylindrische Hülse geschraubt werden, welche luftdicht abschliesst.

In eine zweite Durchbohrung der Messingplatte ist ein Hahn zur Verbindung mit der Luftpumpe geschraubt.

In die Tubulatur der Glasglocke ist ein durchbohrter Kork gekittet, durch welchen hindurch ein Messingrohr geschoben ist, das am Ende eine Messingscheibe von 12 *cm* Durchmesser trägt und ober derselben durchbohrt ist. Die Messingscheibe steht der Messingplatte des Apparates auf 6 *cm* gegenüber.

Das aus dem Kork herausragende Ende des Messingrohres ist mit einem Quecksilbermanometer und mit einem Hahne zum Einlassen von Luft verbunden.

Gleich nach der Vollendung hielt der Apparat sehr gut dicht.

Anfänglich wurde stets der kleinste Luftdruck eingestellt und die Potentialdifferenz bei negativer Spitze gemessen. Zu den folgenden Messungen wurde jedesmal so viel Luft einströmen gelassen, dass die Quecksilbersäule des Manometers um je 5 *cm* sank, und dies so lange fortgesetzt bis im Inneren der Glocke derselbe Luftdruck wie aussen herrschte.

Bei den späteren Versuchen wurde nebst der Potentialdifferenz auch die Stromstärke mit einem sehr einfachen Galvanometer bestimmt. Dasselbe fand auch bei den Versuchen Verwendung, welche ich mit Herrn v. Pichler zusammen anstellte. Die mit 1790 Windungen paraffinirten Drahtes bewickelte Rolle war einseitig auf das Magnetgehäuse aufgeschoben und entsprach bei den zur Anwendung kommenden Potentialdifferenzen vollkommen. Für höhere Potentialdifferenzen, wie sie bei den grossen Entfernungen der Spitze und Platte vorkommen, treten Störungen auf. Das Galvanometer wurde mit einem Normal-Daniell geaicht.

Bei den allerletzten Versuchen wurde die Reihenfolge der angewendeten Luftdrucke umgekehrt, d. h. es wurde bei grossen Drucken mit den Messungen begonnen, und dann zu den aufeinander folgenden Beobachtungen die Luft ausgepumpt. Hiebei zeigen sich mehrfache Unregelmässigkeiten, welche bei dem ursprünglich eingehaltenen Vorgange nicht hervortraten. Bei den grossen Drucken sinkt nämlich das Manometer während der Entladung beständig. Es steigt wieder, wenn die Entladung unterbrochen wird. Mit einem angefügten Wassermanometer war diese Erscheinung bei Atmosphärendruck sehr auffällig zu beobachten. Bei den kleineren Drucken tritt dieselbe weniger deutlich hervor.

Diese letzterwähnten Unregelmässigkeiten sind auch die Ursachen, warum ich die Versuche nicht ausführlich mittheile, sondern bloss eine aus demselben berechnete Tabelle mittheile, deren Zahlen Mittelwerthe mehrerer Versuchsreihen für jede Spitzendistanz sind, die mitunter nicht unerheblich von einander abweichen.

Die Beobachtungsresultate wurden auf graphischem Wege auf die Drucke von 5, 10, ... 75 *cm* Quecksilbersäulenhöhe umgerechnet. In der nachfolgenden Tabelle sind die so gefundenen Werthe des Entladungspotentiales in A. E. E., für die verschiedenen Entfernungen der Spitze von der Platte eingetragen.

Druck in Centimetern Quecksilbersäule	Entfernung Spitze—Platte in Centimetern						
	1·0	1·5	2·0	2·5	3·0	3·5	4·0
5	4·0	5·0	6·8	6·3	8·8	9·8	11·4
10	5·7	9·4	12·0	13·4	20·0	21·3	25·0
15	8·9	14·2	19·2	26·0	35·5	47·6	53·0
20	12·0	20·3	28·1	37·3	46·8	58·7	67·2
25	15·1	27·1	35·4	44·8	56·0	67·9	77·7
30	19·0	31·9	41·1	51·6	63·7	76·4	87·3
35	23·8	36·5	47·5	57·5	71·0	—	96·2
40	27·8	40·4	53·0	62·9	77·2	—	105·4
45	31·4	44·0	57 6	68·5	83·0	—	—
50	34·9	47·8	61·6	73·6	88·8	—	—
55	38·1	51 5	65·8	78·5	94·4	—	—
60	41·0	54·9	69·9	83·5	100·2	—	—
65	43·7	58·2	73·6	88·0	105·5	—	—
70	46·6	61·4	77 5	92·4	110·3	—	—
75	49·3	64·6	81·2	96·6	115·1	—	—

Zum Zwecke einer rascheren Übersicht dieser Resultate sind dieselben auf Taf. I graphisch dargestellt. Als Abscissen sind die Drucke in Centimeter Quecksilbersäule; als Ordinaten die Potentialdifferenzen in A. E. E. eingetragen. Die Curven sind am rechten Ende mit *V* und sonst mit den Zahlen 1·0, 1·5, 2·0, ... 4·0, d. i. mit dem zugehörigen Abstande Spitze—Platte bezeichnet. Gegen die kleinen Potentialwerthe brechen die Curven ab; sie müssten eigentlich für sehr starke Verdünnungen wieder ansteigen.

Werden die den oben besprochenen Curven beigesetzten Zahlen als die Höhencoten derselben angesehen, so gibt die graphische Darstellung das Bild einer Fläche. Die Schnitte

dieser Fläche mit Ebenen, senkrecht zur Ebene p, V und parallel zur V-Axe sind für die Abscissen 10, 15, 25, 35, 45, 55, 65, 75 in die Zeichnungsebene umgelegt gezeichnet und mit den der Abscisse entsprechenden Zahlen 10, 15, ... 75 beschrieben. Sie geben für denselben Druck die Änderung des Potentiales mit der Spitzenentfernung. Die Curven müssen sämmtlich durch die Punkte 10, 15, ... 75 der Abscissenaxe hindurchgehen, sie sind von dort an, wo keine Beobachtungen vorliegen, punktirt gezeichnet.

Bei den grossen Verdünnungen, für welche die Potentialdifferenz unter 10 A. E. E. bleibt, scheint die Entladung continuirlich zu sein, wie die Beobachtung des blauen Glimmlichtes an der negativen Spitze mit dem rotirenden Spiegel zeigt.

Bei grösseren Luftdrucken fängt die Entladung an intermittirend zu werden. Bei den grossen Spitzenentfernungen, d. i. $3 \cdot 0, 3 \cdot 5$ und $4 \cdot 0$ *cm* tritt diese Intermittenz besonders deutlich hervor. Zwischen 10 *cm* und 15 *cm* Luftdruck sind die Messungen bei diesen grossen Distanzen sehr erschwert, weil das Entladungspotentiale continuirlich steigt. Die Stromstärke sinkt dabei, wie aus der Curve $4i$ zu ersehen ist. Die Entladung, welche unter 10 *cm* ein blaues bürstenartiges Glimmlicht an der Spitze und einen rothen Schein auf der Platte erzeugt, zieht sich bei zunehmendem Drucke sehr zusammen und bildet ein röthliches, auf der Platte aufsitzendes Büschel, dessen Intermittenz eine ganz ausgesprochene ist und zeitweilig zur Funkenbildung führt. Die Änderung des Entladungspotentiales ist hier sehr auffallend. Es spricht sich im steten Ansteigen der bezüglichen Curven aus. Bei noch grösserem Luftdrucke wird die Entladung wieder continuirlich und es bleibt bloss der blaue Lichtpunkt an der Spitze. Die Messungen gehen dann anstandslos von statten.

Die Entladungen bei positiver Spitze sind bei den in Rede stehenden Drucken deutlich intermittirend.

Die punktirte Linie PQ in der Tabelle I zeigt ungefähr die Grenze der intermittirenden und der continuirlichen Entladung; beide gehen allmählich in einander über.

Die Stromstärke ändert sich während dieser Versuche innerhalb der Grenzen $0 \cdot 000134$ und $0 \cdot 000090$ Amp. Dieselbe ist bei den niedrigen Gasdrucken am grössten und nimmt gegen die

höheren Gasdrucke hin ab. Für die grösseren Entfernungen Spitze—Platte ist diese Abnahme eine raschere.

In der Tabelle I sind mit Punktstrichlinien die Curven eingezeichnet, welche den Verlauf der Stromstärke erkennen lassen. Als Abscissen sind die den Luftdruck messenden Quecksilbersäulenhöhen, als Ordinaten die Stromstärken aufgetragen. Für diese letzteren gilt die auf der rechten Seite der Ordinatenaxe stehende Beschreibung: 090, 100, 110 ... 130, $i = 0{\cdot}000$. Die Curven sind am rechten Ende mit i und sonst mit 1 i, 2·5 (15) i 2·5 (22) i, 4 i beschrieben. Die Zahlen 1, 2·5 und 4 beziehen sich auf den Abstand Spitze—Platte. Die Zahlen (15), (22) sind die Versuchsnummern.

Für die Distanz 4 sinkt die Curve der Stromstärke in der Ordinate, welche der Abscisse 15 entspricht, rasch ab, während das Potentiale ansteigt. Es entsprechen diese Vorgänge der ausgesprochenen Intermittenz der Entladungen.

Die Curven 2·5 (15) und 2·5 (22) sind an zwei verschiedenen Versuchstagen bei 74·8 und 73·5 *cm* Barometerstand aufgenommen. Während bei (15) die Stromcurve grössere Werthe aufweist als bei (22), ist die entsprechende Potentialcurve tiefer gelegen.

Die vorangeführten Versuche geben eine Charakteristik der Erscheinungen im Grossen und Ganzen; eine genaue Wiedergabe sind sie der mannigfaltigen Fehlerquellen halber nicht.

In den Untersuchungen über das Funkenpotentiale findet Paschen, dass denselben Producten $p.\delta$ des Luftdruckes und der Schlagweiten für verschiedene Werthe der Factoren stets die gleiche Potentialdifferenz entspricht. Es trifft dies für Luft und Wasserstoff sehr scharf, für Kohlensäure sehr nahe zu.

Ich habe nun versucht, aus der Tabelle Seite 150, die den Producten $p\delta$ entsprechenden Potentialwerthe für die Entladung der Elektricität aus der Spitze gegen die Platte zu berechnen, und ich führe in der nachfolgenden Zusammenstellung die gefundenen Zahlenwerthe an. Unter $p.\delta$ sind die fraglichen Producte, unter 1·0, 1·5, ... 4·0, den Factoren δ dieses Productes, d. i. den Spitzendistanzen, die für dieselben berechneten Potentialwerthe eingetragen. So z. B. ist das Product $p.\delta = 40$ zerlegt in 40.1·0, $26^2/_3$.1·5, 20.2·0, 16.2·5... Dafür finden sich in obiger

Tabelle die Potentialwerthe 27·8 und 28·1 für die Entfernungen $\delta = 1{\cdot}0$ und $2{\cdot}0$ in den Horizontalreihen 40 und 20 unmittelbar, jene 28·7 und 28·3 für $\delta = 1{\cdot}5$ und $2{\cdot}5$ durch Interpolation.

$p.\delta$	Distanzen Spitze—Platte						
	1·0	1·5	2·0	2·5	3·0	3·5	4·0
10	5·7	5·8	6·8	—	—	—	—
15	8·9	9·4	9·4	7·7	8·8	—	—
20	12·0	12·3	12·0	10·6	12·5	11·7	11·4
25	15·1	16·2	15·6	13·4	16·2	15·6	14·9
30	19·0	20·3	19·2	20·9	20·0	19·4	18·2
35	23·8	24·8	23·7	23·5	25·2	23·3	25·2
40	27·8	28·7	28·1	28·3	30·3	30·1	25·0
45	31·4	31·9	31·7	32·8	35·5	36·2	32·0
50	34·9	34·9	35·4	37·3	39·3	44·0	39·0
55	38·1	37·8	38·2	40·3	43·0	49·2	46·0
60	41·0	40·4	41·1	43·3	46·8	52·3	53·0
65	43·7	42·8	44·3	46·2	49·9	55·6	56·6
70	46·6	45·3	47·5	48·9	52·9	58·7	60·1
75	49·3	47·8	50·2	51·6	56·6	61·3	63·7
80	52·0	50·3	53·0	53·8	58·6	64·0	67·2
85	—	52·6	55·3	56·3	61·1	66·6	69·8
90	—	54·9	57·6	58·6	63·7	69·0	72·5
95	—	57·1	59·6	60·5	66·1	71·4	75·1
100	—	59·3	61·6	62·9	68·6	73·5	77·7

Für die kleinen Luftdrucke und für die kleinen Spitzenentfernungen erweisen sich die, demselben Producte $p\delta$ entsprechenden Potentialdifferenzen in der That sehr nahe constant. Abweichungen scheinen zum Theile Versuchsfehlern zu entspringen. Für die grösseren Werthe der Producte $p\delta$ findet eine ausgesprochene Zunahme der Potentialwerthe für die grösseren Werthe von δ statt. Die Constanz des Werthes von V, für dieselben Producte $p\delta$, gilt daher insbesonders für das durch die Linie PQ, Taf. I, abgegrenzte Gebiet der intermittirenden Entladung und namentlich für die Curve 1·5, 2·0, 2·5 etwas darüber hinaus,

so dass es in der That den Anschein hat, als ob diese von Paschen gefundene Constanz für die disruptive Entladung charakteristisch wäre.

Die Bestimmung der Potentialdifferenz bei Entladung der Elektricität aus einer Spitze gegen eine Platte, in Wasserstoff, bei verschiedenen Drucken.

Der Apparat Fig. 7 wurde mit Wasserstoff gefüllt und dann noch Wasserstoff durch längere Zeit hindurchgeleitet. So umfangreiche Versuchsreihen wie mit Luft wurden nicht ausgeführt, da das Ansteigen der Potentialdifferenz während der discontinuirlichen Entladung so stark ist, dass Messungen bei diesen Drucken kaum auszuführen sind. Die Versuchsanordnung war dieselbe wie bei atmosphärischer Luft. Es wurden zwei Influenzmaschinen und vier Leydenerflaschen als Cascadenbatterie von 177 *cm* Capacität angewendet.

Versuch Nr. 25; Distanz Spitze—Platte 2·5 *cm*:

h	*V*	*i*
73·09 *cm*	38·31 A. E. E.	0·000120 Amp.
62·10	34·54	120
41·60	25·59	122
30·15	19·80	122
17·88	13·94	125
9·35	8·83	—
2·25	zu klein	125

Die diesen Beobachtungen entsprechende Curve ist in Taf. I eingetragen und mit *H* 2·5 beschrieben. Die Potentialwerthe sind im Mittel etwa 2·5mal kleiner als bei der gleichen Entfernung Spitze—Platte und atmosphärischer Luft. Bei grösseren Drucken weichen die Potentialwerthe nach abwärts, bei niedrigen Drucken nach aufwärts von der angegebenen Verhältnisszahl ab.

Versuch Nr. 26; Distanz Spitze—Platte 5 *cm*:

h	*V*	*i*
234·9	$\left\{\begin{matrix}40·99\\41·72\end{matrix}\right\}$	0·000122
141·0	24·29	125
90·3	17·14	125
50·9	10·39	131

h	V	i
109·0	19·65	0·000125
149·0	25·40	—
231·7	37·41	123
326·7	59·13	112

Die Lichterscheinungen, welche die Entladung begleiten, sind bei den geringen Drucken im Wasserstoffgase weitaus auffallendere als in atmosphärischer Luft und häufig mit sehr ausgesprochener Schichtung versehen. Durch Einschalten einer grösseren Capacität, also z. B. einer grossen Leydener Batterie, treten besonders deutliche Schichtungen auf.

Von diesen Lichterscheinungen, welche von denen, die man gewöhnlich beobachtet, sich wesentlich unterscheiden, sind einige auf Taf. II dargestellt.

Fig. 1 ist eine Entladung aus negativer Spitze, bei 5 *cm* Spitzenabstand und 1·38 *cm* Quecksilbersäulenhöhe und der Cascade von vier Leydenerflaschen $\frac{C_1}{4} = 177$ *cm*.

Fig. 2 ist eine Entladung aus negativer Spitze, in einem Gemische von atmosphärischer Luft und Äthylätherdampf, bei 2·5 *cm* Spitzenentfernung, 0·52 *cm* Druck und der Cascade von vier Flaschen. Es findet eine rasch verlaufende Intermittenz statt.

Fig. 3 ist eine Entladung aus negativer Spitze, unter denselben Umständen wie in Fig. 2 und einer Batterie von 12 grossen Leydenerflaschen, in zwei zur Cascade verbundenen Gruppen zu sechs Flaschen, d. i. von 50 *m* Capacität. Die Schichtung ist eine sehr deutlich ausgesprochene, wie es nach dem bekannten Verhalten von Ätherdämpfen gegen elektrische Entladungen zu erwarten war.

Fig. 4 ist eine Entladung aus negativer Spitze in Wasserstoff, bei einer Spitzenentfernung von 4 *cm*, 1·7 *cm* Druck und einer Batterie von 24 Flaschen, in zwei zur Cascade verbundenen Gruppen zu 12 Flaschen, von einer Capacität von 100 *m*. Das Licht ist blassviolett. Die Zacken der Figur auf der Platte unter der Spitze zeigen zeitweilig eine Rotation an. Auf der oberen Scheibe sind mehrere leuchtende und dunkle concentrische Ringe wahrzunehmen.

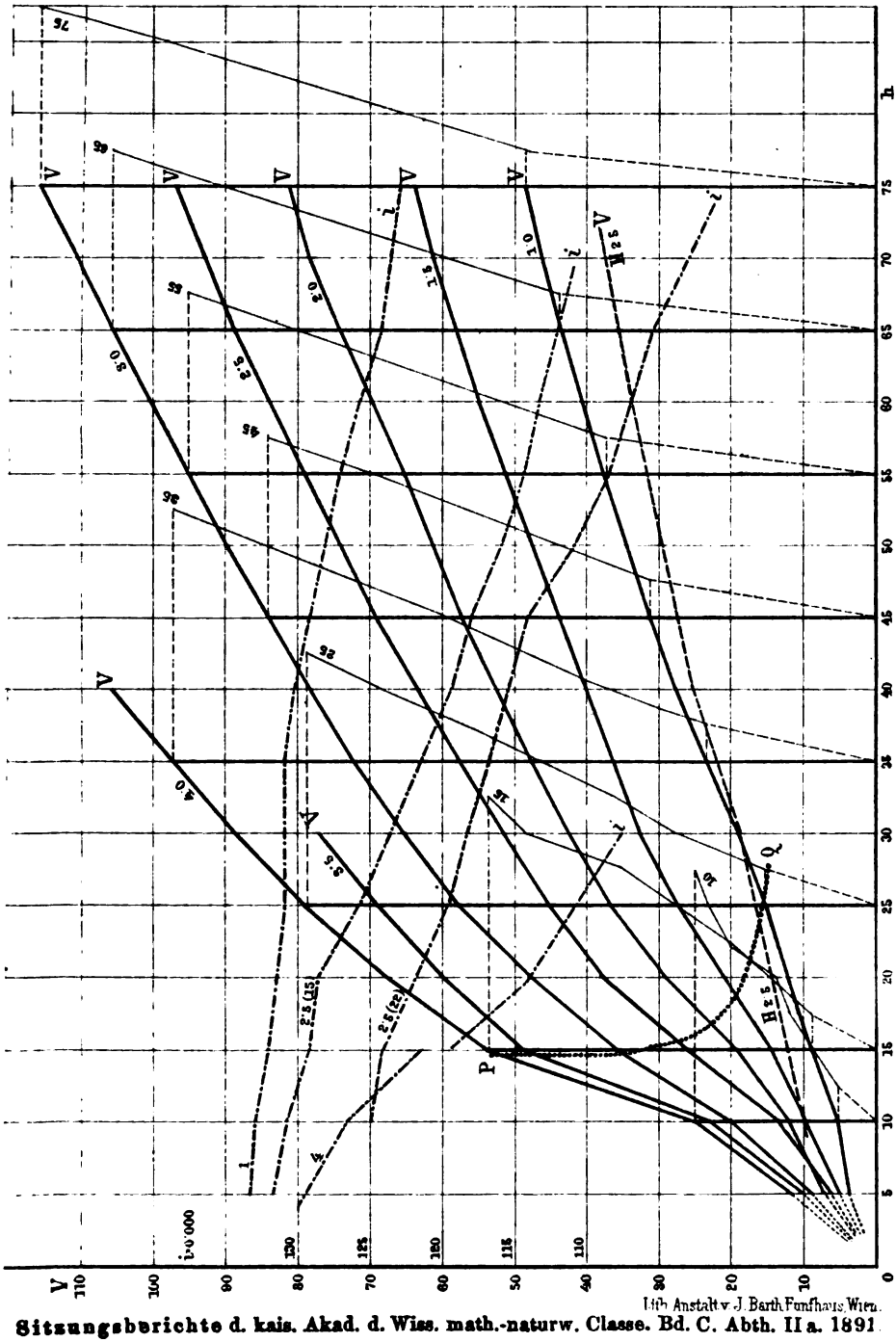
Fig. 5 ist eine Entladung unter denselben Umständen wie bei Fig. 4, aber aus positiver Spitze. Die Lichtfigur auf der oberen Platte rotirt mehr oder minder lebhaft im Sinne des Uhrzeigers. Bei einer Vergrösserung der Spitzenentfernung auf 5 *cm* treten an Stelle der gezeichneten Figur mehrere unregelmässige, nahe am Umfange befindliche, lichte Flecke auf, welche sich mehr oder weniger rasch hin und her zu bewegen scheinen. An der Spitze hört die Erscheinung nahezu auf, und von der oberen Fläche der oberen Platte tritt zeitweilig ein Lichtbündel zur unteren Platte herab.

Fig. 6 ist eine Entladung aus negativer Spitze in Wasserstoff, bei 5 *cm* Spitzenentfernung, 0·76 *cm* Druck und 24 Leydenerflasche in zwei zur Cascade verbundenen Gruppen von 12 Flaschen $C = 100\,m$. Die Spitze tritt hier durch den dunklen Raum, welcher die Schichten und das an die Spitze hinanreichende Glimmlicht trennt, hindurch, so als ob das obere Ende an der Entladung gar nicht betheiligt wäre. Die zackige Figur unter der Spitze ist in lebhafter Bewegung.

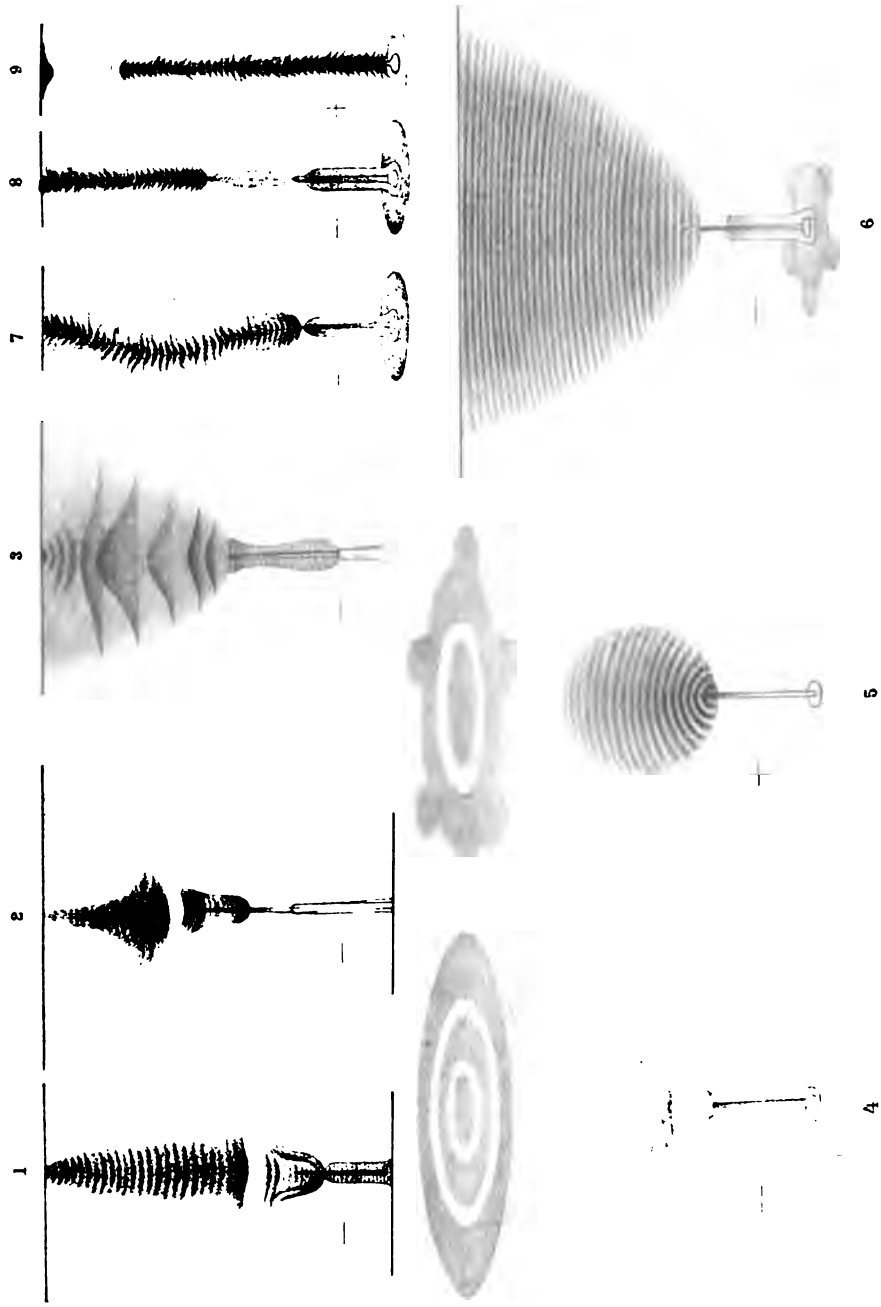
Fig. 7. Wird der Druck des Wasserstoffgases auf 1·9 bis 3·6 *cm* gesteigert, so ziehen sich die Schichten der Entladungen in der Weise zusammen, wie es in Fig. 7 dargestellt ist. Man könnte diese Erscheinung einen geschichteten Funken nennen.

Fig. 8 und 9. Durch Einschalten der Spirale eines Ruhmkorff'schen Apparates in den Gang der Entladung gelingt es, zwischen dem geschichteten Funken und der negativen Spitze, oder der negativen Platte, bei positiver Spitze einen dunklen Raum zu erzeugen. Ist eine Luftstrecke in den Schliessungskreis geschaltet, dann leuchtet diese Strecke, wie in Fig. 8 angedeutet, schwach auf. Die hier angeführten Erscheinungen sind in Wasserstoff bei 1·5 *cm* Druck unter Anwendung der grossen Batterie entstanden. In Leuchtgas gelingen diese Erscheinungen vornehmlich mit positiver Spitze. Auch in dem Gemische von Ätherdampf mit Luft habe ich bei Drucken von 1·02—1·42 *cm*, bei 2·5 *cm* Spitzenentfernung solche geschichtete Funken zu Stande gebracht.

Die Entladungen, welche die Funken erzeugen, sind intermittirend, jede Entladung für sich ist wahrscheinlich oscillirend, wie nach der grossen Capacität der Batterie und bei Anwendung



Lith. Anstalt v. J. Barth Funfhaus, Wien.


9
8
7
6
3
5
2
4
1

der Ruhmkorffspirale, der grossen Selbstinduction halber, zu erwarten ist.

Beim Anblicke dieser Entladungsform wurde ich sofort an die Blitzphotographien des Herrn H. Kayser[1] erinnert. Obgleich Kayser sagt: Der Fall, dass wir es mit Schichten zu thun haben, wie wir sie bei der Entladung im luftverdünnten Raume sehen, welche aber auch bei hohen Drucken auftreten, ist zu verwerfen, da alsdann der Blitzstrahl durch die Mitte der Schichten hindurchgehen müsste, nicht aber dieselben auf der einen Seite begrenzen", scheint es mir doch, dass eine ähnliche Schichtung aufgetreten sei. Der Blitz kann ja auch eine intermittirende Entladung sein; Blitzphotographien lassen dies ja mitunter deutlich erkennen. Die einzelnen, rasch aufeinander folgenden Entladungen schlagen nahezu dieselben Bahnen ein und eine der Entladungen kann die Schichtung zeigen; von drei Bildern der anderen Entladungen fällt dann, wie im vorliegenden Falle, eines gerade über den Rand der Abbildung des geschichteten Strahles. Auch an die „rosenkranzförmig" genannten Blitze hat mich die geschichtete Entladung erinnert.

---

[1] Wiedemann's Annalen, Bd. XXV, S. 131.

Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen

von

Emil Waelsch,

Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Jänner 1891.)

Das Gleichungspolynom eines Elementes eines linearen Raumes ist eine lineare Form; hängen die Coefficienten dieser Form von einer Anzahl willkürlich veränderlicher Parameter ab, so beschreibt das Element eine Mannigfaltigkeit. Differentiirt man die Form nach diesen Parametern, so erhält man neue lineare Formen und kann nun infinitesimale invariante Bildungen der gegebenen Mannigfaltigkeit als simultane Invarianten dieses Systems linearer Formen aufstellen.

Aber auch, wenn das lineare Polynom von dem Elemente eines quadratischen Raumes herrührt, wird man diese Methode anwenden können, wie dies in der vorliegenden Arbeit für Strahlencongruenzen, der zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit gerader Linien, geschieht. Zu einem Congruenzstrahl gesellen sich dann sofort zwei lineare Complexe als infinitesimale Covarianten, die Begleitcomplexe des Strahles genannt werden. Sie stehen in einfacher Beziehung zu den Inflexionstangenten der Brennfläche in den Brennpunkten eines Strahles; ihr Doppelverhältniss ist bei Normalencongruenzen eine Grösse dritter Ordnung, welche bei Weingarten'schen Flächen (bei welchen ein Hauptkrümmungsradius eine Function des anderen ist) den Werth 1 hat und bei Flächen zweiter Ordnung den Werth 9. Dieses Doppelverhältniss steht zudem in einfachem Zusammenhange mit den Krümmungsmassen der Centrafläche

in den beiden Hauptkrümmungscentren einer Normale, durch welche Relation ein Halphén'scher Satz über Weingarten'sche Flächen verallgemeinert wird. Auch die Flächenberührung dritter Ordnung wird hiebei in Behandlung gezogen und Herrn Hermite's Resultaten über die Berührung dritter Ordnung von Flächen zweiter Ordnung eine neue Auffassung und Erweiterung gegeben.

Zur Betrachtung der Normalensysteme der Centrafläche werden allgemeinere Congruenzen behandelt, Congruenzen von Centralstrahlen; hierbei ergeben sich unter anderem Herrn Mannheim's Beziehungen der Krümmungsgrössen der Centrafläche.

§. 1. Brennlinien und Inflexionstangenten eines Strahles.

1. Es sei

$$a \equiv \sum_{x=1}^{6} a_x x_x = (ax) = 0$$

die Gleichung einer Geraden, wobei die x_x als Klein'sche Liniencoordinaten der Relation $\Sigma(x_x)^2 = (xx) = 0$ genügen und ebenso die a_x der Relation $(aa) = 0$. Hängen die a_x von zwei willkürlich veränderlichen Parametern u, v ab, so beschreibt die Gerade eine Strahlencongruenz, und man hat in der Umgebung eines allgemeinen Strahles a die Gleichung:

$$0 = a + (b\,du + c\,dv) + \frac{1}{2}(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2) + \ldots \qquad 1)$$

Die $b, c, e, f, g \ldots$ sind Differentialquotienten von a bezüglich u, v und hängen demnach linear von den x ab; daher sind $b, c, e, f, g = 0$ Gleichungen linearer Complexe. Zwischen den Coordinaten dieser Complexe müssen, wenn 1) für alle Werthe du, dv eine Gerade und nicht einen linearen Complex vorstellen soll, die Relationen bestehen:

$$\left.\begin{array}{c} (aa), (ab), (ac) = 0 \\ (bb)+(ac), (bc)+(af), (cc)+(ag) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}, \qquad 2)$$

welche man auch durch Differentiation der Identität $(aa) = 0$ erhalten kann.

2. Wird a von der benachbarten Geraden $a' = a + da$ geschnitten, so muss[1]

$$\Sigma da_x^2 = 0$$

sein, also hier, da $da = b\,du + c\,dv$ ist, die Bedingung

$$(bb)\,du^2 + 2(bc)\,du\,dv + (cc)\,dv^2 = 0 \qquad 3)$$

erfüllt sein; es gibt daher zwei Nachbarschnittgerade a_1, a_2.

Die letzte Gleichung erhält man auch zur Bestimmung der singulären Complexe des Büschels $b\,du + c\,dv = 0$. Sind α_ν $(\nu = 1, 2)$ die Wurzeln der Gleichung

$$(bb)\alpha^2 + 2(bc)\alpha + (cc) = 0\,, \qquad 3')$$

so sind $b\alpha_\nu + c = 0$ die Gleichungen dieser beiden Complexe. Weil $(ab), (ac) = 0$ ist, schneiden die Axen A_ν dieser Complexe die Gerade a, und zwar schneide A_1 in dem Punkte 1 und sei mit a durch die Ebene I verbunden; A_2 liefere analog den Punkt 2 und die Ebene II.

Man kann speciell das Parametersystem u, v so wählen, dass man mit $u = \text{const.}$ oder $v = \text{const.}$ developpable Regelflächen der Congruenz beschreibt, dass also $du = 0$ und $dv = 0$ die schneidenden Nachbarstrahlen liefern; dann ist überall $(bb), (cc) = 0$, und die Axen A_ν sind identisch mit den Complexen b, c. Nach den Formeln 2) ist hier überall $(ae), (ag) = 0$, und man erhält ferner durch Differentiation auch $(be), (bf), (cf), (cg) = 0$.

3. Die beiden Strahlenbüschel (1, II), (2, I) enthalten die den Complexen $a, b, c = 0$ gemeinsamen Strahlen, welche demnach auch in den Complexen

$$0 = a + da = a + b\,du + c\,dv$$

liegen. Daher schneidet jeder zu a benachbarte Strahl der Congruenz alle Strahlen der beiden Büschel. Da ferner jede Gerade des Büschels, welche a und A_1 enthält, durch die Gleichung $\lambda a + \alpha_1 b + c = 0$ dargestellt ist, so liegt die Nachbarschnittgerade $a_1 \equiv a + \alpha_1 b + c = 0$ in diesem Büschel. Es folgt also, dass 1, 2 die Schnittpunkte, I, II die Verbindungsebenen von a mit den

[1] Siehe F. Klein, Differentialgleichungen in der Liniengeometrie. Math. Annal., Bd. V, S. 293.

Nachbarschnittgeraden sind: Brennpunkte und Brennebenen des Strahles a.

Die drei Complexe $a, b, c = 0$ haben demnach eine in zwei Strahlenbüschel zerfallende Regelschaar gemein, deren Strahlen die Tangenten der Brennfläche in den Brennpunkten 1 und 2, die Brennlinien, sind. Diese Brennlinien schneiden also alle Nachbarstrahlen von a, wesshalb man sagen kann, dass letztere einer unendlich dünnen Regelschaar angehören. Zu dieser Regelschaar gehören auch noch die Strahlen der Büschel (1, I) und (2, II), da diese Strahlen alle Brennlinien schneiden; diese Strahlen sollen Centralstrahlen des Strahles a genannt werden. Die Leitschaar dieser Regelschaar besteht aus allen Brennlinien und aus den unendlich nahen Geraden von a, welche alle Centralstrahlen schneiden.

Ich will nun die Gesammtheit der unendlich nahen Strahlen eines Strahles einer Congruenz als Strahlengarbe bezeichnen (eine Garbe von Halmen an zwei Stellen, den Brennpunkten, geknotet) und spreche dann von den Brennpunkten und Brennebenen dieser Garbe, ihren Brenn- und Centrallinien. Zu jeder Garbe gehört eine conjugirte Garbe; die Brennlinien der einen Garbe sind Centrallinien der anderen; zwei Strahlen conjugirter Garben schneiden einander.

Jeder lineare Complex, welcher alle Garbenstrahlen enthält, enthält auch alle Centrallinien und umgekehrt; die Brennlinien sind für ihn paarweise in Involution, und er ist ferner in Involution zu jedem Complex, welcher die Brennlinien enthält.

Die Axen $A_{\alpha} = \alpha, b + c$ sind Centrallinien, da sie alle Brennlinien schneiden müssen; für die speciellen Developpablenparameter (Art. 2) sind demnach $b, c = 0$ Centrallinien.

4. Der soeben gefundene Satz kann noch in folgender Weise erhalten werden. a schneide eine Ebene E in einem Punkte $\mathfrak{a}$, der Garbenstrahl a' in dessen Nachbarpunkt $\mathfrak{a}'$. Die Coordinaten dieser Durchstosspunkte in der Ebene E können nun als Parameter u, v gewählt werden. Wenn dann in der Gleichung $\Sigma a_x(u, v) x_x = 0$ die x_x festgehalten werden, so erhält man für a_x die Coordinaten aller Congruenzstrahlen, welche die Gerade x schneiden, und die Gleichung $(ax) = 0$ stellt dann die Curve $\mathfrak{A}$ dar,

welche der Ort des Durchstosspunktes des Congruenzstrahles mit der Ebene E ist. Diese Curve geht einfach durch den Punkt a, wenn die Gerade x den Strahl a schneidet, sie hat in a einen Doppelpunkt, wenn x auch den Complexen $(bx), (cx) = 0$ genügt. Es gibt also eine Regelschaar von Geraden, deren Curve $\mathfrak{A}$ in a einen Doppelpunkt hat. Diese Regelschaar besteht nothwendig aus den Brennlinien der Garbe; denn ist x eine Brennlinie, so wird deren Curve $\mathfrak{A}$ in a einen Doppelpunkt haben, weil x alle Garbenstrahlen schneidet, und die Curve demnach alle Nachbarpunkte von a enthält. Die Curve hat also einen Doppelpunkt, wenn die Gerade x die Brennfläche berührt und umgekehrt.

Wenn demnach die Gerade x die Brennfläche in zwei aufeinander folgenden Punkten berühren soll, so muss die Curve eine Spitze haben, d. h. es muss

$$\Gamma \equiv (fx)^2 - (ex)(gx) = 0$$

sein. Folglich: $\Gamma \equiv f^2 - e.g = 0$ ist die Gleichung eines Complexes zweiten Grades, welcher aus den Brennlinienbüscheln die Inflexionstangenten der Brennfläche ausschneidet.[1]

Die Axen A_r fallen zusammen, wenn die Discriminante der Differentialform 3) verschwindet, wenn also

$$\Delta = (bc)^2 - (bb)(cc) = 0;$$

dann fallen auch die Brennpunkte des Strahles a zusammen und die Brennebenen. Vermöge der Formeln 2) ist dann aber auch

$$(af)^2 - (ae)(ag) = 0,$$

wesshalb a dem Complexe Γ angehört, also Inflexionstangente ist. Daher ist $\Delta = 0$ die Differentialgleichung derjenigen Congruenzen, welche aus den Inflexionstangenten einer Fläche bestehen.[2]

---

[1] Auch jede Invariante der Differentialformen, welche in 1) auftreten, gibt einen infinitesimalinvarianten Complex des Strahles a; denn solch eine Invariante bleibt bei einer Veränderung der Parameter u, v und bei linearer Transformation der Strahlencoordinaten invariant.

[2] Vergl. Klein, a. a. O., S. 290.

§. 2. Projectivitäten in den Brennbüscheln.

5. Geht man von dem Strahle a zu dem benachbarten a', so schreitet der Brennpunkt 1 auf der Brennlinie t_1 nach $1'$, und die Brennebene I dreht sich hiebei um eine Brenntangente τ_2 des Punktes 2 nach I'. In analoger Weise erhält man für den Punkt 2 und die Ebene II die Brennlinien t_2, τ_1.

Die Geraden t_1, τ_2 schneiden die Gerade a, a'; sie schneiden auch, weil sie 1, $1'$ verbinden, respective in I, I' liegen, die Nachbarschnittgeraden a_1, a_1', welche a, respective a', schneiden. t_1, τ_2 sind demnach diejenigen beiden Geraden, welche a, a_1, a', a_1' schneiden, also genügen sie den Gleichungen

$$a = 0, \quad a_1 \equiv a + \alpha_1 b + c = 0, \quad a' \equiv a + b\,du + c\,dv = 0,$$

aus welchen folgt, dass sie in den Complexen $a, b, c = 0$ liegen. Hieraus kann man nebenbei schliessen, dass die Nachbarpunkte $1'$ in den Brennebenen liegen, dass also der Ort der Brennpunkte von den Brennebenen berührt wird.

Die Geraden t_1, τ_2 befriedigen aber noch die vierte Gleichung:

$$a_1' \equiv a_1 + da_1 = a + \alpha_1 b + c + b.du + c.dv + b.d\alpha_1 + \\ + \alpha_1(e.du + f.dv) + f.du + g.dv = 0,$$

demnach liegen sie in den vier Complexen $a, b, c = 0$, $(\alpha_1 e + f)du + (\alpha_1 f + g)dv = 0$. Analog liegen die Geraden t_2, τ_1 in den Complexen $a, b, c = 0$, $(\alpha_2 e + f)du + (\alpha_2 f + g)dv = 0$.

Lässt man a' in der Garbe variiren, so beschreiben t_1, t_2, τ_1, τ_2 projective Strahlenbüschel, welche auf die Garbe projectiv bezogen sind. Zwischen den vier Tangenten t_1, t_2, τ_1, τ_2 bestehen demnach sechs Projectivitäten, die wir nun analytisch ausdrücken wollen.

6. Die Projectivitäten $P \equiv (t_1) \overline{\wedge} (t_2)$ und $\Pi \equiv (\tau_1) \overline{\wedge} (\tau_2)$. Für den Strahl t_1 des Brennbüschels (1) hat man die Gleichung:

$$(\alpha_1(et_1) + (ft_1))\,du + (\alpha_2(ft_1) + (gt_1))\,dv = 0$$

und für den Strahl t_2 des Büschels 2) die Gleichung:

$$(\alpha_2(et_2) + (ft_2))\,du + (\alpha_2(ft_2) + (gt_2))\,dv = 0;$$

daher wird die Projectivität P, wenn $(et_1) = e_1 \ldots$ gesetzt wird, vermittelt durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 e_1 + f_1, & \alpha_1 f_1 + g_1 \\ \alpha_2 e_2 + f_2, & \alpha_2 f_2 + g_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Vermöge der Werthe von α_ν geht diese Gleichung über in

$$\begin{vmatrix} (bb), & (bc), & (cc) \\ e_1, & f_1, & g_1 \\ e_2, & f_2, & g_2 \end{vmatrix} + \sqrt{\Delta}(e_1 g_2 + e_2 g_1 - 2 f_1 f_2) = 0.$$

Multiplicirt man die beiden Gleichungen $(\alpha_\nu e + f)\,du + (\alpha_\nu f + g)\,dv = 0$ mit $(bb)(\alpha_1 - \alpha_2)$ und setzt

$$\left.\begin{aligned} r &= (bb)(\alpha_1\alpha_2 e + (\alpha_1 + \alpha_2) f + g) = (cc)e - 2(bc)f + (bb)g \\ s^\nu &= (bb)(\alpha_\nu^2 e + 2\alpha_\nu f + g),\ du - \alpha_1 dv = du',\ du - \alpha_2 dv = dv' \end{aligned}\right\}, \quad 4)$$

so erhält man

$$r\,du' - s^1\,dv' = 0, \quad s^2\,du' - r\,dv' = 0. \qquad 5)$$

Aus 5) folgt dann für die Projectivität P

$$r_1\,du' - s_1^1\,dv' = 0, \quad s_2^2\,du' - r_2\,dv' = 0$$

und durch Elimination von du, dv die Gleichung:

$$r_1 r_2 - s_1^1 s_2^2 = 0. \qquad 6)$$

Für die Projectivität II ergibt sich analog:

$$r_1 r_2 - s_2^1 s_1^2 = 0. \qquad 7)$$

Der Complex $r = 0$ schneidet aus den Brennbüscheln zwei Linien aus, welche Hauptbrennlinien des Strahles a genannt werden mögen. Es ist in Folge der Formeln 2):

$$(ar) = 2\Delta, \quad (as^\nu) = -[(bb)\alpha_\nu^2 + 2(bc)\alpha_\nu + (cc)] = 0. \qquad 8)$$

Demnach sind $s^\nu = 0$ die Gleichungen derjenigen Complexe der Mannigfaltigkeit $e.du^2 + 2f.du.dv + g.dv^2 = 0$, welche die Gerade a enthalten.

7. Die Projectivitäten $J_\nu \equiv (t_\nu)\overline{\wedge}(\tau_\nu)$. Für die Strahlen t_1, τ_1 gilt respective:

$(\alpha_1 e+f)du+(\alpha_1 f+g)dv=0, \quad (\alpha_2 e'+f')du+(\alpha_2 f'+g')dv=0,$

so dass man als Gleichung der Projectivitäten, wie oben, erhält:

$$\begin{vmatrix} (bb), & (bc), & (cc) \\ e, & f, & g \\ e', & f', & g' \end{vmatrix} \pm \sqrt{\Delta}(eg'+e'g-2ff')=0. \qquad 9)$$

Nun gilt die Gleichung

$$\begin{vmatrix} (bb), & (bc), & (cc) \\ e, & f, & g \\ e', & f', & g' \end{vmatrix} = 0,$$

bei festem t_1 die Gleichung eines linearen Complexes, welcher die Gerade A_1 enthält und welcher auch die Gerade a enthält; denn für $x=a$ wird vermöge der Gleichungen 2) die letzte Zeile der Determinante der ersten gleich. Daher enthält dieser lineare Complex jede Gerade des Büschels 1), und die Gleichung besteht für beliebige t_1 und x, die dem Büschel angehören. Demnach reducirt sich die Gleichung 9), wenn wir voraussetzen, dass Δ nicht verschwindet, auf:

$$eg'+e'g-2ff'=0.$$

Dies ist aber die Polarbeziehung des Complexes $\Gamma=0$, wesshalb sich ergibt, dass die Beziehung zwischen t_1, τ_1 involutorisch ist, und dass ihre Doppelstrahlen in dem Complexe $\Gamma=0$ liegen. Da die in Γ liegenden Brennlinien nach Art. 4 Inflexionstangenten der Brennfläche sind, so folgt, dass die Projectivitäten J_1 mit den Dupin'schen Tangenteninvolutionen der Brennpunkte identisch sind. Dies Ergebniss ist auch von vornherein geometrisch klar; denn t_1 ist die Verbindungslinie von 1 mit seinem Nachbarpunkte 1', während τ_1 die Schnittlinie der Ebenen II, II' ist, II' ist aber die Tangentialebene des Punktes 1'.

Die Tangente a speciell ist conjugirt der Tangente, welche dem Complexe

$$(ae)g+(ag)e-2(af)f=0$$

angehört oder vermöge der Formeln 2) dem Complexe $r=0$. Daher sind die Hauptbrennlinien des Strahles a (siehe

Art. 6) die zu a conjugirten Tangenten der Brennfläche.

Diese beiden Hauptbrennlinien fallen zusammen, wenn das Quadrat der Matrix $|a\,b\,c\,r|$, welche aus den sechs Coordinaten der vier Complexe a, b, c, r gebildet ist, verschwindet.[1] Nun ist nach den Formeln 2)

$$H = |a\,b\,c\,r|^2 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & (ar) \\ 0, & (bb), & (bc), & (br) \\ 0, & (cb), & (cc), & (cr) \\ (ra), & (rb), & (rc), & (rr) \end{vmatrix},$$

daher ist vermöge Formel 8)

$$H = 4\Delta^3. \qquad 10)$$

Durch Einführung der Complexe r, s^ν können die Gleichungen der Involutionen J_ν auch geschrieben werden:

$$rr' - s^1 s^{2'} = 0, \quad rr' - s^{1'} s^2 = 0.$$

8. Die Projectivitäten $P_1 \equiv (t_1)\,\overline{\wedge}\,(\tau_2)$ und $P_2 \equiv (t_2)\,\overline{\wedge}\,(\tau_1)$. P_ν ist gegeben durch

$$(\alpha_\nu e_1 + f_1).du + (\alpha_\nu f_1 + g_1).dv = 0$$
$$(\alpha_\nu e_2 + f_2).du + (\alpha_\nu f_2 + g_2).dv = 0$$

oder durch

$$\begin{vmatrix} \alpha_\nu^2, & -\alpha_\nu, & 1 \\ e_1, & f_1, & g_1 \\ e_2, & f_2, & g_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Da ferner die Geraden t_1, τ_2 in dem ersten der Complexe 5) liegen, die Geraden t_2, τ_1 im zweiten dieser Complexe, so sind die Projectivitäten P_ν auch dargestellt durch die Gleichungen:

$$s_1^\nu r_2 - s_2^\nu r_1 = 0.$$

Fallen für einen Strahl a die Projectivitäten P_ν zusammen, so muss $s_1^1 s_2^2 - s_1^2 s_2^1 = 0$ sein, dann ist aber auch vermöge der Gleichungen 6) und 7) $P \equiv \Pi$. Ist umgekehrt $P \equiv \Pi$, so ist auch $P_1 \equiv P_2$.

---

[1] Siehe Klein, a. a. O., S. 284.

§. 3. Die Begleitcomplexe.

9. Jeder Strahl, welcher in dem Büschel (1, I) liegt, also in dem Büschel, welches durch a und den schneidenden Nachbarstrahl a_1 bestimmt ist, wurde „Centralstrahl des Punktes 1" genannt; derselbe liegt in der Tangentialebene I des Punktes 2 der Brennfläche. Es soll nun gezeigt werden, dass die Centralstrahlen für alle Nachbarpunkte 1′ des Punktes 1 in einem linearen Complexe liegen, oder aber, dass die Ebenen I′ ihren Punkten 1′ in einem Nullsysteme entsprechen. Hiezu ist bloss nothwendig, nachzuweisen, dass die Gerade 1, $1' = t_1$ der Schnittgerade I, $I' = \tau_2$ bezüglich eines linearen Complexes conjugirt sei. Nun besteht nach dem letzten Artikel zwischen t_1 und τ_2 die Projectivität P_1. Ist t_1 mit a identisch, so auch τ_2, wie dies aus der Gleichung der Projectivität P_1 folgt (es ist nämlich dann:

$$(s^1 a)(r\tau_2) - (s^1\tau_2)(ra) = 0,$$

weil aber nach Formel 8): $(s^1 a) = 0, (ra) \neq 0$ ist, so folgt $(s^1\tau_2) = 0$ und $\tau_2 = a$), oder auch geometrisch: wenn 1 auf a weiterrückt, so dreht sich I um a.

In der Projectivität P_1 entspricht sich demnach der Strahl a selbst, wesshalb thatsächlich (nach Sylvester's Erzeugungsweise des linearen Complexes) entsprechende Strahlen conjugirte Polaren bezüglich eines linearen Complexes sind. Diesen Complex nennen wir den Begleitcomplex des Strahles a für den Punkt 1 und bezeichnen ihn mit C^1; er wird also erfüllt von den Strahlen der linearen Congruenzen, deren Leitlinien entsprechende Strahlen t_1, τ_2 sind. Ebenso ergibt sich aus der Projectivität P_2 der dem Punkte 2 zugehörige Begleitcomplex C^2.

Jeder der Begleitcomplexe enthält die Centralstrahlen der Garbe (a), er enthält daher nach Art. 3 auch alle Strahlen der Garbe (a). Der Begleitcomplex C^1 enthält ferner die Garbe $(\mathfrak{a})$ einer beliebigen, von Centralstrahlen gebildeten Congruenz $\mathfrak{C}$, daher enthält er auch nach Art. 3 die Centralstrahlen der Garbe $(\mathfrak{a})$, oder anders ausgedrückt: Die Nullebene des Complexes C^1 eines Brennpunktes eines Centralstrahles $\mathfrak{a}$ für die Congruenz $\mathfrak{C}$ berührt die Brennfläche der Congruenz $\mathfrak{C}$ im anderen Brennpunkte des Strahles $\mathfrak{a}$.

Wenn die Begleitcomplexe eines Strahles in einen zusammenfallen, so enthält dieser Complex die Nachbarschnittgeraden a'_1, a'_2 des Nachbarstrahles a', da diese Geraden Centralstrahlen der Nachbargarbe (a') sind; daher enthält dieser Complex auch alle Strahlen dieser Garbe (a'): Für Strahlen, deren Begleitcomplexe zusammenfallen, liegen die ∞^2 in zweiter Ordnung benachbarter Strahlen in diesem linearen Complexe und umgekehrt.

10. Die Gleichung des Complexes C^1 kann in folgender Weise bestimmt werden. Sind a und a' zwei sich schneidende Gerade, so ist $\lambda a + a_1 = 0$ die Gleichung einer beliebigen Geraden ihres Büschels; daher sind die Centrallinien des Punktes 1 gegeben durch die Gleichung (siehe Art. 5)

$$\lambda a + a_1 \equiv L(a, b, c) = 0,$$

die des Punktes $1'$ durch

$$\mu a' + a'_1 \equiv L'(a, b, c) + (\alpha_1 e + f)\,du + (\alpha_1 f + g)\,dv = 0,$$

wobei L, L' linear aus a, b, c abgeleitet sind. Da nun die Coordinaten jedes der fünf Complexe a, b, c, $\alpha_1 e + f$, $\alpha_1 f + g$ die Determinante sechsten Grades $C^1 \equiv (a, b, c, \alpha_1 e + f, \alpha_1 f + g, x)$ annulliren, so geschieht dies auch für jeden aus diesen fünf Complexen linear abgeleiteten Complex, also auch für die Centrallinien. Demnach sind

$$C' \equiv (a, b, c, \alpha_1 e + f, \alpha_1 f + g) = 0 \qquad 11)$$

die Gleichungen der Begleitungscomplexe.

Um die Gleichungen der Begleitcomplexe auch in anderer Weise abzuleiten, bemerken wir, dass ein Begleitcomplex in Involution liegt mit jedem Complexe, welcher ein Paar seiner conjugirten Polaren τ_1, τ_2 enthält. Diese Polaren liegen in den Complexen $a, b, c = 0$ und nach Art. 6 im Complexe $r\,du' - s^1\,dv' = 0$. Variirt $du' : dv'$, so beschreibt dieser letzte Complex ein Büschel, und man erhält alle Geradenpaare τ_1, τ_2; C^1 ist daher mit allen Complexen dieses Büschels in Involution, also auch zu den Complexen r, s^1. Man hat daher zur Bestimmung der Coordinaten des Complexes C^1 die Gleichungen:

$$(a\,C^1), (b\,C^1), (c\,C^1), (r\,C^1), (s^1\,C^1) = 0.$$

Die Gleichung des Complexes C^ν ist daher:

$$C^\nu \equiv (a, b, c, r, s^\nu, x) = 0. \qquad 12)$$

Diese Gleichungen der Begleitcomplexe besagen, dass sie beide zum Complexe r in Involution liegen; demnach sind die Hauptbrennlinien, welche der Schnitt von r mit den Complexen a, b, c sind, conjugirt bezüglich beider Complexe: Die Hauptbrennlinien sind die Leitlinien der den Begleitcomplexen gemeinsamen Strahlencongruenz, sie sind ein Paar entsprechender gemeinsamer Strahlen der beiden Projectivitäten P_ν; das andere Paar ist im Strahle a vereinigt.

Hienach ist der Begleitcomplex dadurch bestimmt, dass er die Hauptbrennlinien zu conjugirten Polaren hat, und dass er in Involution liegt zu einem der Complexe s^ν, oder wie man dies auch ausdrücken kann, dass die unendlich nahe conjugirte Polare seines Strahles a in einem der Complexe s^ν liegt.

11. Die Projectivitäten P_ν, aus welchen die Begleitcomplexe abgeleitet wurden, sind covariante Gebilde der Congruenz für den Strahl a. Die Invarianten der Begleitcomplexe werden daher infinitesimale Invarianten der Congruenz sein. Mit Hilfe der eingeführten Complexe r, s^ν gelingt es, einfache Ausdrücke für diese Invarianten aufzufinden.

Wir suchen zunächst die Bedingung dafür, dass die beiden Begleitcomplexe oder aber, dass die Projectivitäten P_ν zusammenfallen, oder, was nach Art. 8 dasselbe ist, dafür, dass die Projectivität P mit II identisch ist. Die Coordinaten dieser Complexe sind die Unterdeterminanten der Glieder der s^1-, respective s^2-Columne der Determinante

$$T = (a, b, c, r, s^1, s^2);$$

sind also die Complexe identisch, so müssen diese Unterdeterminanten einander proportional sein, wesshalb die Determinante verschwindet. Ist umgekehrt diese Determinante $= 0$, so sind die entsprechenden Unterdeterminanten einander proportional, die Complexe daher identisch. $T = 0$ ist daher die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Begleitcomplexe oder die Projectivitäten P_ν zusammenfallen. Nun ist, wenn man die Gleichungen 4) benützt:

$$T = (bb)^2(a,b,c,(cc)e-2(bc)f+(bb)g, \alpha_1^2 e+2\alpha_1 f+g, \alpha_2^2 e+2\alpha_2 f+g) =$$

$$= 2(bb)^2 \begin{vmatrix} (cc), & -(bc), & (bb) \\ \alpha_1^2, & \alpha_1, & 1 \\ \alpha_2^2, & \alpha_2, & 1 \end{vmatrix} . D,$$

wenn

$$D = (a, b, c, e, f, g)$$

gesetzt wird. Demnach ist

$$T = -8\Delta^{3/2} . D. \qquad 13)$$

Wenn also für einen Congruenzstrahl nicht $\Delta = 0$ ist, d. h. wenn seine Brennpunkte nicht zusammenfallen, so können die Begleitcomplexe noch coincidiren, wenn $(abcefg) = 0$ ist und umgekehrt. Es gibt in jeder Congruenz ∞^1 solcher Strahlen oder es haben alle Strahlen diese Eigenschaft, dann genügt die Congruenz der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $(abcefg) = 0$. Solche Strahlen mit $D = 0$ sind nach Art. 9 diejenigen, für welche die in zweiter Ordnung benachbarten Strahlen demselben linearen Complexe angehören.

12. Die Invarianten (C^1C^1), (C^1C^2), (C^2C^2) der Begleitcomplexe, deren Verschwinden anzeigt, dass sie singulär respective zu einander in Involution liegen, lassen sich als Producte von Δ und von Determinanten dritten Grades darstellen Es ist

$$(C^\nu C^\nu) = |abcrs^\nu|^2, \quad (C^1C^2) = |abcrs^1| . |abcrs^2|;$$

nun ist

$$(C^\nu C^\nu) = |abcrs^\nu|^2 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & (ar), & 0 \\ 0, & (bb), & (bc), & (br), & (bs^\nu) \\ 0, & (cb), & (cc), & (cr), & (cs^\nu) \\ (ra), & (rb), & (rc), & (rr), & (rs^\nu) \\ 0, & (s^\nu b), & (s^\nu c), & (s^\nu r), & (s^\nu s^\nu) \end{vmatrix} .$$

Vermöge Formel 8) erhält man demnach:

$$(C^\nu C^\nu) = -4\Delta^2 |bcs^\nu|^2. \qquad 14)$$

Ebenso erhält man:

$$(C^1C^2) = -4\Delta^2 |bcs^1| . |bcs^2|. \qquad 14')$$

13. Die Bedingung dafür, dass die Begleitcomplexe einander berühren, d. h. dass die Leitlinien der ihnen gemeinsamen Congruenz zusammenfallen, ist:

$$B \equiv (C^1C^2)^2 - (C^1C^1)(C^2C^2) = 0.$$

Fallen die Begleitcomplexe zusammen, so haben sie gewiss Congruenzen mit zusammenfallenden Leitlinien gemein, daher muss T Factor von B sein. Ausserdem muss der in Art. 7 gefundene Ausdruck H Factor von B sein, da sein Verschwinden anzeigt, dass die Hauptbrennlinien, die ja Leitlinien der Congruenz sind, zusammenfallen. In der That gilt,[1] da

$$T^2 = \begin{vmatrix} (aa) & \cdots & (as^2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & (s^1s^1), & (s^1s^2) \\ (s^2a) & (s^2s^1), & (s^2s^2) \end{vmatrix}$$

ist, die Gleichung:

$$T^2 \frac{\partial T^2}{\partial(s^1s^1)\partial(s^2s^2)} = \frac{\partial T^2}{\partial(s^1s^1)} \cdot \frac{\partial T^2}{\partial(s^2s^2)} - \left(\frac{\partial T}{\partial(s^1s^2)}\right)^2$$

oder

$$T^2 . |abcr|^2 = |abcrs^1|^2 . |abcrs^2|^2 - (|abcrs^1||abcrs^2|)^2,$$

demnach:

$$B = -|abcr|^2 . |abcrs^1s^2|^2 = -H . T^2 = -2^8\Delta^6 D^2. \quad 15)$$

B ist mit Δ positiv, denn von den Coordinaten der reellen Geraden a sind, als der Relation $\Sigma(a_x)^2 = 0$ genügend, z. B. entweder drei reell und die drei übrigen rein imaginär, daher hat D den Factor i^3 und D^2 den Factor -1.

Das Doppelverhältniss δ der Begleitcomplexe, welches wir als „Doppelverhältniss des Strahles a" bezeichnen wollen, ist, wenn β_ν die Wurzeln der Gleichung:

$$(C^1C^1)\beta^2 + 2(C^1C^2)\beta + (C^2C^2) = 0 \quad 16)$$

[1] Siehe Brioschi, Theorie der Determinanten, S. 9.

sind:

$$\delta = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{(C^1C^2) - \sqrt{B}}{(C^1C^2) + \sqrt{B}}.$$

Als absolute Invariante der Begleitcomplexe wählen wir:

$$J = \left(\frac{\delta - 1}{\delta + 1}\right)^2 = \frac{B}{(C^1C^2)^2} = -\frac{\Delta^2 D^2}{(|bcs^1||bcs^2|)^2}.$$

14. Wählt man das Parametersystem u, v in der in Art. 2 angegebenen speciellen Weise, dass also $\alpha_1 = \infty$, $\alpha_2 = 0$ wird, so wird nach Formel 11)

$$C^1 \equiv (abcefx), \quad C^2 \equiv (abcfgx).$$

Es ist ferner $r = -2(bc)f$, so dass der Complex f die Hauptbrennlinien enthält.

Ferner ist

$$(C^1C^1) = |abcef|^2 = (bc)^4.(ee), \quad (C^2C^2) = |abcfg|^2 = (bc)^4(gg)$$

$$(C^1C^2) = |abcef|.|abcfg| = (bc)^3[(bc)(eg) - (bg)(ec)].$$

Bei Congruenzstrahlen mit dem Doppelverhältnisse 1 wird $(abcefg) = 0$, daher sind die Determinanten der Matrix $|abcef|$ den entsprechenden Determinanten der Matricen $|abcfg|$ und $|bcefg|$ proportional. Die Begleitcomplexe fallen daher in den Complex $(bcefgx) = 0$ zusammen.

§. 4. Die Hauptbrennlinien und die Projectivitäten zwischen Nachbarstrahlen und Brennlinien.

15. Bleibt man bloss in dem Systeme der beiden Brennpunkte und Brennebenen, so ist ausser a keine weitere Brennlinie ausgezeichnet. Man muss, um das Brennbüschel durch einen Parameter darstellen zu können, noch Differentialquotienten zweiter Ordnung oder die e, f, g hinzunehmen. Dann sind es die Hauptbrennlinien, welche sich zunächst als ausgezeichnet darbieten.

Die Gleichungen dieser Hauptbrennlinien lauten, da diese Linien Leitlinien der den Begleitcomplexen gemeinsamen Congruenz sind:

$$\beta_1 C^1 + C^2 = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hat aber, wie sich zeigen wird, den Factor D, welcher jetzt ausgeschieden werden muss, um auch für Congruenzen mit $D = 0$ die Gleichungen der Hauptbrennlinien zu haben.

Es ist

$$(C^1C^1)(\beta_1 C^1 + C^2) = (C^1C^1)C^2 - (C^1C^2)C^1 \pm \sqrt{B}\,C^1,$$

da nach Formel $\sqrt{B} = 2^4 i \Delta^3 D$ ist, muss also gezeigt werden, dass auch $(C^1C^1)C^2 - (C^1C^2)C^1$ die Determinante D zum Factor hat. Es ist nun vermöge der Gleichungen 14) und 14′):

$$\begin{aligned}(C^1C^1)C^2 - (C^1C^2)C^1 &= \\ &= -4\Delta^2\{|bcs^1|^2(abcrs^2x) - |bcs^1||bcs^2|(abcrs^1x)\} = \\ &= -4\Delta^2(a, b, c, r, |bcs^1|^2 s^2 - |bcs^1||bcs^2|s^1, x) = ,\end{aligned}$$

wenn die Determinanten der Matrix $|abcrx|$ gleich z_x gesetzt werden,

$$\begin{aligned}&= -4\Delta^2|bcs^1|.(|bcs^1|(s^2z) - |bcs^2|(s^1z)) \\ &= -4\Delta^2|bcs^1|.|b, c, s^1(s^2z) - s^2(s^1z)|.\end{aligned}$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned}&(s^1y)(s^2z) - (s^1z)(s^2y) = \\ &= (bb)^2 \begin{vmatrix} \alpha_1^2, & 2\alpha_1, & 1 \\ \alpha_2^2, & 2\alpha_2, & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} (ey), (fy), (gy) \\ (ez), (fz), (gz) \end{vmatrix} = 4\Delta^{1/2} \begin{vmatrix} (bb), (bc), (cc) \\ (ey), (fy), (gy) \\ (ez), (fz), (gz) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

also ergibt sich

$$\begin{aligned}&|bcs^1|.|b, c, s^1(s^2z) - s^2(s^1z)| = \\ &= 4\Delta^{1/2}|b, c, s^1|.|b, c, \begin{vmatrix} (bb), (bc), (cc) \\ e, \quad f, \quad g \\ (ez). (fz), (gz) \end{vmatrix}|.\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck wird, wenn man die Matricen multiplicirt, mit Benutzung der Gleichungen 2) und 8):

$$= -4\Delta^{1/2} \begin{vmatrix} (bb), (bc), (bs^1), 0, 0 \\ (cb), (cc), (cs^1), 0, 0 \\ (eb), (ec), (es^1), (ea), (ez) \\ (fb), (fc), (fs^1), (fa), (fz) \\ (gb), (gc), (gs^1), (ga), (gz) \end{vmatrix} =$$

$$= -2\Delta^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} (ar), 0, 0, 0, 0, 0 \\ (br), (bb), (bc), (bs^1), 0, 0 \\ (cr), (cb), (cc), (cs^1), 0, 0 \\ (er), (eb), (ec), (es^1), (ea), (ez) \\ (fr), (fb), (fc), (fs^1), (fa), (fz) \\ (gr), (gb), (gc), (gs^1), (ga), (gz) \end{vmatrix} =$$

$$= -2\Delta^{-\frac{1}{2}} . D . (abcrs^1z).$$

Führt man nun statt der z wieder die x ein, so wird dies:

$$= -2\Delta^{-\frac{1}{2}} . D . |abcrs^1| . |abcrx| = 4\Delta^{1/2} . D . |abcs^1| . |bcrx|;$$

daher ist endlich:

$$(C^1C^1)C^2 - (C^1C^2)C^1 = -2^3\Delta^{3/2} . D . \mathfrak{C}_1 ,$$

wenn

$$\mathfrak{C}^1 = |abcs^1| . |bcrx|$$

gesetzt wird.

Schliesslich ist:

$$(C^1C^1)(\beta_\nu C^1 + C^2) = 2^3 i \Delta^{5/2} . D . H_\nu .$$

Die Gleichungen der Hauptbrennlinien sind daher:

$$H_\nu \equiv i\mathfrak{C}^1 \pm \Delta^{1/2} C^1 = 0. \qquad 18)$$

16. Dass der Complex $\mathfrak{C}^\nu$ im Büschel der Begleitcomplexe liegt, folgt sofort aus seiner Gleichung; denn es ist $(\mathfrak{C}^\nu x) = 0$ für $x = a, b, c, r$; demnach sind die Hauptbrennlinien bezüglich $\mathfrak{C}^\nu$ conjugirt. Der Complex $\mathfrak{C}^\nu$ ist geometrisch auch dadurch charakterisirt, dass er in Involution zu C^ν liegt; denn multiplicirt man in $\mathfrak{C}^\nu \equiv |abcs^\nu| . |bcrx|$ die Matricen und setzt in (ax), (bx), (cx), $(s^\nu x)$ die Coordinaten von C^ν, so folgt $(C^\nu \mathfrak{C}^\nu) = 0$.

Setzt man für x die Coordinaten von $\mathfrak{C}^\nu$, so erhält man:

$$(\mathfrak{C}^\nu\mathfrak{C}^\nu) = -2\Delta^2|abcs^\nu|.|bcrs^\nu| = -4\Delta^3|bcs^\nu|^2 = \Delta(C^\nu C^\nu).$$

Man kann nun einfacher die Gleichungen der Hauptbrennlinien finden; dieselben sind conjugirt bezüglich C^ν und $\mathfrak{C}^\nu$, daher ist ihre Gleichung

$$\lambda_\nu\mathfrak{C}^\nu + C^\nu = 0,$$

wobei

$$\lambda_\nu^2(\mathfrak{C}^\nu\mathfrak{C}^\nu) + 2\lambda_\nu(\mathfrak{C}^\nu C^\nu) + (C^\nu C^\nu) = 0$$

ist.

Da nun $(C^\nu\mathfrak{C}^\nu) = 0$ ist, folgt:

$$\lambda_\nu = i\frac{(C^\nu C^\nu)^{\frac{1}{2}}}{(\mathfrak{C}^\nu\mathfrak{C}^\nu)^{\frac{1}{2}}} = \frac{i}{\Delta^{1/2}},$$

demnach ist:

$$H_\nu \equiv i\mathfrak{C}^\nu + \Delta^{1/2}C^\nu. \qquad 18)$$

Für die Begleitcomplexe, ausgedrückt durch die Hauptbrennlinien, ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} 2\Delta^{1/2}.C^1 &\equiv H_1 - H_2 \\ 2\Delta^{1/2}C^2 &\equiv \beta_1 H_2 - \beta_2 H_1 \end{aligned}\right\}. \qquad 19)$$

17. Die Gleichung eines Strahles des Brennbüschels 1) sei nun:

$$\lambda(ax) + 4\Delta^2 H_1 = \lambda(ax) + \frac{\beta_1 C^1 + C^2}{4i\Delta^{1/2}D} = 0.$$

Die Geraden t_1, τ_2 liegen (siehe Art. 6) im Complexe $rdu' - s^1dv' = 0$, die Geraden t_2, τ_1 im Complexe $s^2du' - rdv' = 0$. Daher erhält man den Parameter $\lambda = t_1$ für die Gerade t_1 aus der Gleichung:

$$t_1(ar)du' + \frac{Tdv'}{4i\Delta^{1/2}D} = (\text{nach } 13)) = t_1(ar)du' - \frac{2\Delta}{i}dv' = 0$$

oder vermöge Formel 8):

$$t_1du' + idv' = 0. \qquad 21)$$

Analog hat man für die Parameter τ_1, t_2, τ_2 von respective τ_1, t_2, τ_2 die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 dv' - \beta_1 i du' &= 0 \\ t_2 dv' - \beta_2 i du' &= 0 \\ \tau_2 du' + i dv' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 22)$$

Durch diese Gleichungen sind die Projectivitäten, welche zwischen den Nachbarstrahlen und den zugehörigen vier Brennlinien bestehen, ausgedrückt.

Die Projectivitäten P und Π sind gegeben durch die Parameterbeziehungen:

$$t_1 t_2 = \beta_2, \qquad \tau_1 \tau_2 = \beta_1,$$

es entspricht daher in der Projectivität P der Geraden $t_1(ax) + 4\Delta^2 H_1 = 0$ die Gerade $\beta_2(ax) + 4\Delta^2 t_1 H_2 = 0$. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen den Parameter t_1, so erhält man die Gleichung des Complexes zweiten Grades, der alle linearen Congruenzen enthält, welche die Geradenpaare t_1, t_2 zu Leitlinien haben, nämlich die Gleichungen:

$$16\Delta^4 H_1 H_2 - \beta_2 (ax)^2 = 0. \quad 23)$$

Ebenso erhält man für Π den Complex zweiten Grades:

$$16\Delta^4 H_1 H_2 - \beta_1 (ax)^2 = 0. \quad 24)$$

Für die Projectivitäten P_1 und P_2 ergibt sich $t_1 = \tau_2$ und $\beta_1 t_2 = \beta_2 \tau_1$, und die Involutionen J_1 und J_2 sind gegeben durch $t_1 \tau_1 = \beta_1$ und $t_2 \tau_2 = \beta_2$.

§. 5. Die Inflexionstangenten der Brennfläche.

18. Die Parameter der Inflexionstangenten des Tangentenbüschels (ν) erhält man nach den letzten Gleichungen des Art. 17 aus der Gleichung

$$t^2 = \tau^2 = \beta_\nu; \quad 25)$$

die Gleichungen der Inflexionstangenten sind demnach

$$4\Delta^2 H_\nu \pm (\beta_\nu)^{\frac{1}{2}} (ax) = 0. \quad 26)$$

Es lässt sich für die Realität der Inflexionstangenten ein einfaches Kriterium angeben. Drei der sechs Coordinaten a_x sind rein imaginär und ebenso die $b_x, c_x, e_x, f_x, g_x, \ldots$ mit gleichem Index und auch die gleichstelligen r_x, s^1_x, s^2_x; daher sind die Bildungen $(ar), (bs^1), (cr), \ldots$ reell. Die gleichstelligen Coordinaten des Complexes $\mathfrak{C}^\nu$ sind daher auch rein imaginär, während für den Complex $C^\nu = (abcrs^\nu x)$ die anderen drei Coordinaten rein imaginär sind. $H_\nu = i\mathfrak{C}^1 \pm \Delta^{1/2} C^1 = 0$ ist daher eine reelle Gerade, weil wieder die gleichstelligen Coordinaten rein imaginär sind; aus denselben Gründen ist die durch die Gleichung 26) dargestellte Inflexionstangente reell, wenn $(\beta_\nu)^{\frac{1}{2}}$ reell ist. Ist Δ positiv, so ist nach Art. 13 auch die Discriminante B der Gleichung 16) positiv; dann sind die β reell und es folgt: Die Inflexionstangenten des Brennpunktes ν sind reell, wenn β_ν positiv ist, sonst imaginär.

Ist $\beta_\nu = 0$ oder $= \infty$, so fallen die Inflexionstangenten des Brennpunktes ν zusammen. Es ist daher $(C^\nu C^\nu) = -4\Delta^2 |bcs^\nu|^2 = 0$ oder, wenn $\Delta \neq 0$ ist, $|bcs^\nu|^2 = 0$ die Bedingung dafür, dass einer der Brennpunkte ein Rückkehr- oder parabolischer Punkt der Brennfläche sei.

19. Die Zuwüchse du', dv', welche denjenigen Nachbarstrahlen entsprechen, welchen die Inflexionstangenten zugehören, genügen den Gleichungen, welche man durch Elimination von λ aus der Gleichung 20) und der Gleichung 21): $\lambda du' + i dv' = 0$ erhält, nämlich den Gleichungen:

$$dv'^2 + \beta_\nu . du'^2 = 0 ,$$

oder für die beiden Brennpunkte gemeinsam der Gleichung:

$$dv'^4 + (\beta_1 + \beta_2) du'^2 dv'^2 + \beta_1 \beta_2 du'^4 = 0 ,$$

oder

$$(C^2 C^2) du'^4 - 2(C^1 C^2) du'^3 dv'^2 + (C^1 C^1) dv'^4 = 0; \qquad 27)$$

diese Gleichung gibt also die Zuwüchse derjenigen Nachbarstrahlen, deren Brennpunkte auf einer der vier Inflexionstangenten des Strahles a liegen.

Direct folgt diese Gleichung aus der Bemerkung, dass die Inflexionstangenten gleichzeitig in den Complexen a, b, c und den

Complexen 5) liegen müssen, dass also für diese fünf Complexe, da sie eine Gerade gemeinsam haben sollen, die Beziehung besteht:

$$|a, b, c, r\,du' - s^1\,dv',\ s^2\,du' - r\,dv'|^2 = 0,$$

welche Gleichung entwickelt die Gleichung 27) gibt.

Das Doppelverhältniss der Wurzeln dieser Gleichung oder das Doppelverhältniss der vier Nachbarstrahlen in der Garbe ist:

$$\delta' = \left(\frac{\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2}}{\sqrt{\beta_1} - \sqrt{\beta_2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\delta}+1}{\sqrt{\delta}-1}\right)^2.$$

Sei wieder als absolute Invariante

$$J' = \left(\frac{\delta'-1}{\delta'+1}\right)^2$$

gewählt, so besteht zwischen dieser und der absoluten Invariante J des Strahles (s. Art. 13) die Relation:

$$J + J' = 1. \qquad 28)$$

Fallen die Begleitcomplexe zusammen, so ist $\delta = 1$, also $\delta' = 0$, demnach entsprechen sich die Inflexionstangenten der Brennpunkte 1 und 2 in der Projectivität P, welche mit II zusammenfällt (s. Art. 8).

Für $\delta = -1$ ist $\delta' = -1$, daher entsprechen, wenn die Begleitcomplexe in Involution liegen, die Inflexionstangenten des einen Brennpunktes in den Projectivitäten P und II conjugirten Tangenten des anderen.

Congruenzen, für welche alle Strahlen dasselbe Doppelverhältniss haben, genügen der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$J = \frac{B}{(C^1C^2)^2} = \text{const.}$$

oder der Gleichung

$$k(C^1C^2)^2 - (C^1C^1)(C^2C^2) = 0. \qquad 29)$$

Ein Beispiel solcher Congruenzen sind die obigen mit $\delta = 1$, welche der linearen Differentialgleichung

$$D = (abcefg) = 0$$

genügen.[1] Zu diesen Congruenzen gehören diejenigen, welche einem linearen Complexe angehören, denn sämmtliche Garben einer solchen Congruenz liegen in dem linearen Complexe, also auch alle in zweiter Ordnung zu a benachbarten Strahlen. Desshalb fallen nach Art. 9 die Begleitcomplexe in den gegebenen Complex zusammen.

Ein weiteres Beispiel ist die desmische Congruenz sechster Ordnung zweiter Classe, die collinear zur Normalencongruenz einer Fläche zweiter Ordnung ist, denn die Strahlen dieser Normalencongruenz haben, wie sich in Art. 46 zeigen wird, das constante Doppelverhältniss $\delta = 9$; demnach hat das Doppelverhältniss δ' überall den Werth 4.

§. 6. Congruenzen von Centralstrahlen.

20. Ein Centralstrahl des Strahles a liegt in dem Büschel, welches a und die schneidende Nachbargerade a_1 enthält. Für die Developpablenparameter u, v ist $b = 0$ die Gleichung eines Centralstrahles (s. Art. 3). Daher ist

$$\mathfrak{a}_1 \equiv \lambda a + b = 0$$

die Gleichung eines beliebigen Centralstrahles des Punktes 1.

Ist λ eine Function von u, v, so beschreibt der Centralstrahl eine Congruenz, welche als „Congruenz λ" bezeichnet werden möge. Die Brennlinien des Strahles $\mathfrak{a}_1$ gehören dann den durch Differentiation erhaltenen Complexen

$$\mathfrak{b}_1 \equiv \lambda_1 a + \lambda b + e = 0, \qquad \mathfrak{c}_1 \equiv \lambda_2 a + \lambda c + f = 0$$

an.

Setzt man in die Gleichung $(abcefx) = 0$ des Begleitcomplexes $x_i = \mathfrak{a}_{1i}, \mathfrak{b}_{1i}, \mathfrak{c}_{1i}$, so wird sie erfüllt; daher liegt der Begleitcomplex zu den Complexen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ in Involution und muss demnach die Strahlen der Garbe (λ) enthalten.

Mit einer Function $\mu(u, v)$ kann man eine „Congruenz μ" von Centralstrahlen des Punktes 2 bilden, deren Gleichung ist:

$$\mathfrak{a}_2 \equiv \mu a + c = 0;$$

[1] Vergl. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces t. II, p. 345.

die Brennlinien des Strahles a_2 gehören dann den Complexen an:

$$b_2 \equiv \mu_1 a + \mu b + f = 0, \qquad c_2 \equiv \mu_2 a + \mu c + g = 0.$$

21. Die Congruenz λ mit der Gleichung $a_1 = 0$ bleibt ungeändert, wenn man a_1 mit einer willkürlichen Function $\varphi(u, v)$ multiplicirt; die Gleichung:

$$a_1' \equiv \varphi . a_1 = 0$$

stellt dieselbe Congruenz dar. Ebenso stellt

$$a_2' \equiv \psi . a_2 = 0$$

die Congruenz a_2 vor.

Man kann sich nun die Frage vorlegen: Ist es möglich, die Functionen $\lambda, \mu, \varphi, \psi$ so zu bestimmen, dass a_1', a_2' die Differentialquotienten von a nach u, respective v, sind, wobei

$$a \equiv \sum_{x=1}^{6} a_x(u, v) x_x = 0$$

die Gleichung einer 2-fach unendlichen Mannigfaltigkeit linearer Complexe ist?

Zur Erfüllung dieser Forderung ist nothwendig und hinreichend, dass

$$\frac{\partial a_1'}{\partial v} = \frac{\partial a_2'}{\partial u}$$

ist oder ausgeführt, dass die Gleichung besteht:

$$\varphi_2 . (\lambda a + b) + \varphi . (\lambda_2 a + \lambda c + f) = \psi_1 (\mu a + c) + \psi . (\mu_1 a + \mu b + f).$$

Nun besteht zwischen den vier Complexen a, b, c, f keine lineare Relation; denn wäre $f = \alpha a + \beta b + \gamma c$, so wäre auch

$$(af) = -(bc) = \alpha(aa) + \beta(ab) + \gamma(ac) = 0,$$

was wir ausschliessen, da wir Congruenzstrahlen mit $\Delta = (bc)^2 = 0$, also mit zusammenfallenden Brennpunkten, nicht in Betracht ziehen.

Da keine Relation besteht, müssen die Coefficienten von a, b, c in der letzten Identität einzeln verschwinden, es muss also

$$\varphi_2 \lambda + \varphi \lambda_2 = \psi_1 \mu + \psi \mu_1, \quad \psi \mu = \varphi_2, \quad \varphi \lambda = \psi_1, \quad \varphi = \psi$$

sein, daher folgt:

$$\lambda = \frac{\varphi_1}{\varphi}, \quad \mu = \frac{\varphi_2}{\varphi}.$$

Setzt man $\chi = \log \varphi$, so ist $\lambda = \chi_1$, $\mu = \chi_2$, und die lineare Complexmannigfaltigkeit, welche differentiirt diese beiden Congruenzen gibt, ist dann:

$$\mathfrak{a} \equiv e^{\chi} . a .$$

Solche Congruenzen, wie diese λ- und μ-Congruenzen, welche durch Differentiation einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{a}$ erhalten werden können, sollen Differentialcongruenzen genannt werden. Es ergibt sich somit:

Zwei Differentialcongruenzen, welche aus Centralstrahlen der Congruenz a bestehen, werden nur durch Differentiation der Congruenz

$$\mathfrak{a} \equiv \rho(u, v) a$$

erhalten; ihre Gleichungen sind:

$$\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}_1 \equiv \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial u} = 0, \qquad \mathfrak{c} \equiv \mathfrak{a}_2 \equiv \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial v} = 0.$$

Hätten wir nicht die Developpablenparameter u, v zu Grunde gelegt, so wären hier und in den folgenden Sätzen die Differentiationen in den Richtungen $du : dv = \alpha_\nu$ zu nehmen.

22. Die Differentialcongruenzen λ und μ sind eineindeutig aufeinander bezogen, indem die Strahlen, welche demselben u, v zugehören, einander zugeordnet sind. Die Brennlinien des Strahles $\mathfrak{a}_1 \equiv \mathfrak{b}$ liegen noch in den Complexen $\mathfrak{e}, \mathfrak{f} = 0$, die des Strahles $\mathfrak{a}_2 \equiv \mathfrak{c}$ in den Complexen $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} = 0$, wobei $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ die zweiten Differentialquotienten von $\mathfrak{a}$ nach u, v sind.

Es seien nun $o_{\nu\rho}$ die Brennpunkte des Strahles $\mathfrak{a}_\nu (\nu, \rho = 1, 2)$ und $l_{1\rho}$ seien die Brennlinien des Strahles $\mathfrak{a}_1$, welche $\mathfrak{a}_2$ schneiden. Dieselben liegen in den Complexen $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}$; in diesen Complexen liegen ebenso die zwei Brennlinien $l_{2\rho}$ des Strahles $\mathfrak{a}_2$, welche den Strahl $\mathfrak{a}_1$ schneiden. Die vier Brennlinien $l_{\nu\rho}$ liegen daher auf der Regelschaar, welche die Complexe $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}$ gemein haben; daher berühren die Ebenen, welche $\mathfrak{a}_\nu$ mit $l_{\nu\rho}$ verbinden, dieselbe

Regelschaar in den Punkten $\sigma_{\nu\varrho}$, oder: Die Brennflächen zweier Differentialcongruenzen berühren in den Brennpunkten entsprechender Strahlen dasselbe Hyperboloid.

Es lässt sich nun umgekehrt die Frage stellen: Welche Beziehung muss zwischen den Functionen λ und μ bestehen, damit die zugehörigen Centralstrahlencongruenzen die letzte Eigenschaft haben, dass nämlich die Brennflächen dieser Congruenzen in den Brennpunkten entsprechender Strahlen dasselbe Hyperboloid berühren?

Wenn die Strahlen zweier Büschel, welche einen Strahl a_1 gemein haben und zweier weiteren Büschel, die einen anderen Strahl a_2 gemein haben, sämmtlich dasselbe Hyperboloid berühren sollen, so gehören diese Strahlen demselben linearen Complexe an; denn die vier Strahlen der Büschel, welche a_1 und a_2 schneiden, gehören der einen Regelschaar des Hyperboloids an, welche in einem Netze linearer Complexe liegt. Unter diesen Complexen gibt es einen, welcher auch die Strahlen a_1, a_2 enthält und somit alle Strahlen der Büschel. Werden umgekehrt in einem linearen Complexe zwei Strahlenbüschelpaare angenommen, die je einen Strahl gemein haben, so berühren die Büschelstrahlen dasselbe Hyperboloid.

Es müssen demnach, wenn die fragliche Beziehung erfüllt sein soll, die Brennlinien des λ-Strahles und die des μ-Strahles demselben linearen Complexe angehören. Die Brennlinien des λ-Strahles liegen aber nach Obigem in den Complexen $a_1, b_1, c_1 = 0$, die des μ-Strahles in den Complexen $a_2, b_2, c_2 = 0$; da es nun einen Complex geben soll, der sich linear aus den drei ersten und auch linear aus den drei letzten dieser Complexe ableiten lässt, so muss zwischen diesen sechs Complexen eine lineare Beziehung bestehen, oder es muss ihre Determinante:

$$(\lambda a+b, \lambda_1 a+\lambda b+c, \lambda_2 a+\lambda c+f, \mu a+c, \mu_1 a+\mu b+f, \mu_2 a+\mu c+g) = \\ = (\mu_1-\lambda_2)(abcefg)$$

verschwinden; es folgt also:

Die Brennflächen einer λ- und einer μ-Congruenz berühren in den Brennpunkten entsprechender Strahlen dasselbe Hyperboloid, wenn der Strahl a das Doppelverhältniss 1 hat und sonst, wenn

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \lambda}{\partial v}$$

ist.

Liegen die Linien $l_{\nu\rho}$ hyperboloidisch, so auch die Diagonalen der beiden Vierseite $a_\nu, l_{1\rho}$ und $a_\nu, l_{2\rho}$. Diese Diagonalen sind aber Centralstrahlen der Garbe (a_ν), daher folgt: Auch die Centrallinien entsprechender Strahlen einer λ- und einer μ-Congruenz berühren dasselbe Hyperboloid, wenn der Strahl das Doppelverhältniss 1 hat oder sonst, wenn $\mu_1 = \lambda_2$ ist.

Die Linien $l_{\nu\rho}$ liegen nach Art. 9 bei $\delta = 1$ im Begleitcomplexe des Strahles a; sie liegen daher auf der Regelschaar, welche b, c mit dem Complexe $(bcefgx) = 0$ (s. Art. 14) gemein haben. Da aber für $\delta = 1$ auch $(bcefga) = 0$ ist, so enthält das Hyperboloid des letzten Satzes bei $\delta = 1$ auch den Strahl a.

23. Nach Art. 3 gehören die Centralstrahlen der Garbe (a_1) dem Begleitcomplexe C^1 an, in welchem auch a_2 liegt. Die Brennlinien $l_{1\rho}$ schneiden alle diese Centralstrahlen, daher geht die conjugirte Gerade z. B. von l_{11} bezüglich C^1 durch o_{12}, und der Nullpunkt der Ebene (a_1, l_{11}) liegt auf l_{12}, wesshalb l_{12} die conjugirte Gerade von l_{11} ist. Die Hauptbrennlinien H_ν sind auch conjugirt bezüglich C^1, daher liegen die Linien $l_{1\rho}$ mit den Hauptbrennlinien hyperboloidisch oder in einem Netze linearer Complexe.

Die Linien $l_{2\rho}$ sind bezüglich des Complexes C^2 conjugirt; es folgt also, dass bei Strahlen vom Doppelverhältnisse 1, für welche die Begleitcomplexe zusammenfallen, die vier Linien $l_{\nu\rho}$ hyperboloidisch liegen, wie sich schon oben ergab.

Es gilt ferner: Bei den Congruenzen, für welche

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\partial \lambda}{\partial v}$$

ist, und nur bei diesen, enthält das Hyperboloid, welches die Brennlinien entsprechender Congruenzstrahlen berührt, auch die Hauptbrennlinien H_ν des Strahles a.

Die Linien $l_{1\rho}$ liegen nämlich ihrer Definition nach in den ∞^3 linearen Complexen

$$\sigma a_1 + \upsilon b_1 + \tau c_1 + \omega a_2 = 0;$$

unter diesen gibt es nach Obigem ein Netz linearer Complexe, welche die Linien H_ν enthalten, die den Complexen $a, b, c, f = 0$ genügen. Es muss also in der letzten Gleichung der Factor υ von e verschwinden, weil sonst e in Folge von $a, b, c, f = 0$ verschwinden müsste; es müssten demnach die Determinanten der Matrix $|abcef|$ verschwinden, was nicht möglich ist, da der Begleitcomplex $(abcefx) = 0$ nicht identisch verschwindet. Die Complexe, welche die Linien $l_{1\rho}$ und H_ν enthalten, gehören daher dem Netze an:

$$\sigma a_1 + \tau c_1 + \omega a_2 = 0.$$

Ebenso liegen die Linien $l_{2\rho}, H_\nu$ in den Complexen des Netzes:

$$\sigma' a_1 + \tau' b_2 + \omega' a_2 = 0.$$

Sollen nun die sechs Linien $l_{\nu\rho}, H_\nu$ hyperboloidisch liegen, so müssen diese Netze identisch sein. Da aber zwischen a, b, c, f keine lineare Relation besteht, so müssen die Gleichungen gelten, die man durch Vergleichung der Coefficienten von a, b, c, f in diesen letzten Gleichungen erhält:

$$(\sigma - \sigma')\lambda + \tau\lambda_2 - \tau'\mu_1 + (\omega - \omega')\mu = 0$$
$$\sigma - \sigma' = \tau'\mu, \quad \omega' - \omega = \tau\lambda, \quad \tau = \tau'.$$

Hiezu ist aber nothwendig und hinreichend, dass $\lambda_2 = \mu_1$, womit der obige Satz bewiesen.

24. Ist für ein allgemeines Parametersystem u, v

$$a_1 \equiv \lambda(u, v) \cdot a + \alpha_1 b + c = 0$$

ein Strahl der λ-Congruenz, so liegen die Brennlinien seiner Garbe (λ) in den linearen Complexen, die man erhält, indem man die letzte Gleichung nach u und v differentiirt, also in den Complexen:

$$b_1 \equiv \lambda_1 a + \lambda b + \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} b + \alpha_1 e + f = 0,$$

$$c_1 \equiv \lambda_2 a + \lambda c + \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} b + \alpha_1 f + g = 0.$$

Die singulären Complexe π_ν des Büschels $\gamma b_1 + c_1 = 0$ haben dann die Gleichungen:

$$n_\nu \equiv \gamma_\nu b_1 + c_1 = 0,$$

wo γ_ν der Gleichung genügt:

$$(b_1 b_1)\gamma^2 + 2(b_1 c_1) + (c_1 c_1) = 0. \qquad 30)$$

Wir suchen nun die Bedingung dafür, dass die Brennebenen der Centralstrahlengarbe (λ) aus dem Brennbüschel (1) conjugirte Tangenten der Brennfläche ausschneiden.

Da die Axen n_ν der singulären Complexe n_ν in diesen Brennebenen liegen, so ist die Bedingung aufzusuchen, unter welcher diese Axen conjugirte Tangenten des Büschels (1) schneiden; es müssen die Strahlen t_ν des Büschels (1), welche den Complexen $n_\nu \equiv \gamma_\nu b_1 + c_1 = 0$ angehören, conjugirte Tangenten sein. Diese Strahlen t_ν liegen aber, da sie in den Complexen $a, b, c = 0$ liegen, auch in den Complexen, deren Gleichungen man erhält, indem man in $n_\nu = \gamma_\nu b_1 + c_1 = 0$ setzt: $a, b, c = 0$, also liegen sie in den Complexen:

$$\gamma_\nu(\alpha_1 e + f) + \alpha_1 f + g = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit $(bb)(\alpha_1 - \alpha_2)$, so übergehen dieselben unter Anwendung der Formeln 4) in:

$$\mathfrak{T}_\nu \equiv (\gamma_\nu - \alpha_1) r - (\gamma_\nu - \alpha_2) s^1 = 0;$$

die durch diese Gleichungen gegebenen Complexe müssen somit die Brennlinien t_ν enthalten.

Ein Strahl des Büschels (1) hat nun nach Art. 17 die Gleichung

$$\lambda(ax) + \frac{\beta_1 C^1 + C^2}{4i\Delta^{\frac{1}{2}} D} = 0; \qquad 31)$$

die Parameter $\lambda = t_\nu$ der Strahlen t_ν ergeben sich daher aus den Gleichungen:

$$t_\nu(a\mathfrak{T}_\nu) + \frac{\beta_1(C^1\mathfrak{T}_\nu) + (C^2\mathfrak{T}_\nu)}{4i\Delta^{\frac{1}{2}} D} = 0. \qquad 32)$$

Da aber

$$\left.\begin{aligned} (a\mathfrak{T}_\nu) &= (\gamma_\nu - \alpha_1)(ar) = 2(\gamma_\nu - \alpha_1)\Delta \\ (C^1\mathfrak{T}_\nu) &= (\gamma_\nu - \alpha_1)(C^1 r) - (\gamma_\nu - \alpha_2)(C^1 s^1) \\ (C^2\mathfrak{T}_\nu) &= (\gamma_\nu - \alpha_1)(C^2 r) - (\gamma_\nu - \alpha_2)(C^2 s^1) \end{aligned}\right\} \qquad 33)$$

ist und sich nach Formel 12) und 14) ergibt, dass

$$(C^{\nu} r) = 0, \quad (C^1 s^1) = 0, \quad (C^2 s^1) = -T = 8\Delta^{3/2} D,$$

so folgt:

$$(C^1 \mathfrak{T}_{\nu}) = 0, \quad (C^2 \mathfrak{T}_{\nu}) = -8(\gamma_{\nu} - \alpha_2)\Delta^{3/2} D. \qquad 34)$$

Setzt man 33), 34) in 32) ein, so ergeben sich für die Parameter t_{ν} die Gleichungen:

$$t_{\nu}(\gamma_{\nu} - \alpha_1) + i(\gamma_{\nu} - \alpha_2).$$

Wenn nun die Tangenten t_{ν} conjugirt sein sollen, so müssen die zugehörigen Parameter t_{ν} der Gleichung:

$$t_1 t_2 = \beta_1$$

genügen (s. Art. 17), daher ist die gesuchte Beziehung:

$$\frac{\gamma_1 - \alpha_2}{\gamma_1 - \alpha_1} \cdot \frac{\gamma_2 - \alpha_2}{\gamma_2 - \alpha_1} = -\beta_1,$$

oder, wenn für die symmetrischen Verbindungen von γ_1, γ_2 die Werthe aus Gleichung 30) eingesetzt werden:

$$(\mathfrak{b}_1 \alpha_2 + \mathfrak{c}_1, \mathfrak{b}_1 \alpha_2 + \mathfrak{c}_1) + \beta_1 (\mathfrak{b}_1 \alpha_1 + \mathfrak{c}_1, \mathfrak{b}_1 \alpha_1 + \mathfrak{c}_1) = 0.$$

Sind u, v Developpablenparameter, so ergibt sich die Beziehung

$$\gamma_1 \gamma_2 = -\beta_1 \quad \text{oder} \quad (\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_1)\beta_1 + (\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_1) = 0.$$

Aus den in Art. 20 angegebenen Gleichungen der Complexe $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ ergibt sich dann $(\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_1) = (ee)$, $(\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_1) = -\lambda_2 (bc) + (ff)$, daher übergeht die obige Beziehung in:

$$(ee)\beta_1 + (ff) = \lambda_2 (bc).$$

Für die Congruenz, welche bei diesen Parametern der Strahl $b = 0$ beschreibt, ist $\mathfrak{b}_1 = e$, $\mathfrak{c}_1 = f$, daher muss, wenn für die Garbe die obige Eigenschaft erfüllt sein soll, die Gleichung bestehen:

$$(ee)\beta_1 + (ff) = 0; \qquad 35)$$

soll auch die Garbe der Congruenz $c = 0$ die Eigenschaft bestehen, so muss

$$(ff)\beta_2 + (gg) = 0 \qquad 36)$$

sein.

Ist die Bedingung zu finden, unter welcher die Brennpunkte der λ-Garbe auf conjugirten Tangenten des Brennbüschels (2) liegen, so hätte man nur in der Gleichung 30) β_2 für β_1 zu schreiben, und es ergibt sich die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\gamma_1 - \alpha_2}{\gamma_1 - \alpha_1} \cdot \frac{\gamma_2 - \alpha_2}{\gamma_2 - \alpha_1} = -\beta_2 .$$

Wenn also bei einem Strahl vom Doppelverhältnisse 1, für welchen $\beta_1 = \beta_2$ ist, die Brennebenen einer Centralstrahlengarbe conjugirte Tangenten des einen Brennpunktes von a enthalten, so liegen die Brennpunkte der Garbe auf conjugirten Tangenten des anderen Brennpunktes.

25. Es wären eine λ- und eine μ-Congruenz gegeben, welche aber Diffentialcongruenzen seien; es wären also nach Art. 21

$$b = 0, \qquad c = 0$$

die Gleichungen dieser Congruenzen. Dann gilt nach Art. 22 und 23, dass die Brennlinien der Garben dieser Congruenzen dasselbe Hyperboloid berühren, welches auch die Hauptbrennlinien H, des Strahles a enthält.

Wir nehmen ferner an, dass die Beziehung des letzten Artikels erfüllt sei, dass also die Brennebenen des λ-Strahles conjugirte Tangenten t_1 des Büschels (1) und die Brennebenen des μ-Strahles conjugirte Tangenten des Büschels (2) enthalten.

Bestimmt man jetzt zu einer Geraden g des Hyperboloids, welche zu der Schaar (H) gehört, welche die Hauptbrennlinien enthält, die conjugirte Polare bezüglich des Begleitcomplexes C^1, so erhält man eine Gerade g', welche in derselben Schaar liegt, da die andere Schaar des Hyperboloids dem Begleitcomplexe angehört. Die Geradenpaare g, g' bilden auf dem Hyperboloid eine quadratische Involution, welche aus dem Strahle b des Hyperboloids durch eine Ebeneninvolution projicirt wird, welch' letztere Involution wieder das Strahlenbüschel (1) nach einer Strahleninvolution schneidet. Diese Strahleninvolution ist mit der Dupin'schen Involution conjugirter Tangenten identisch; denn das Ebenenpaar, welches die Brennlinien $l_{1\rho}$,

die nach Art. 23 bezüglich C^1 polar sind, projicirt, enthält nach Annahme das Paar t_ν, und das Ebenenpaar, welches die Hauptbrennlinien projicirt, schneidet die Geraden a und H_1 aus dem Büschel (1) aus. Da aber durch die zwei Paare conjugirter Tangenten t_ν und a, H_1 die Dupin'sche Involution bestimmt ist, folgt:

Conjugirte Polaren des Complexes C^ν, welche sich auf der Schaar (H) befinden, schneiden conjugirte Tangenten des Punktes ν.

Die Regelschaar (H) enthält auch zwei Strahlen des Complexes C^1, welche die Doppelstrahlen der Involution conjugirter Polaren g, g' ist; diese Complexstrahlen schneiden daher die Inflexionstangenten des Punktes 1.

Nimmt man eine beliebige Gerade g, welche b schneidet, so schneidet sie noch eine Erzeugende γ der Schaar (H), welche nicht durch den Schnittpunkt von b mit g geht. Die conjugirten Polaren g' und γ' von g und γ bezüglich C^1 schneiden sich, weil sich g und γ schneiden, und sie schneiden auch b, weil b dem Complexe C^1 angehört; daher:

Zwei beliebige conjugirte Polaren des Complexes C^1, welche den Strahl b schneiden, schneiden conjugirte Tangenten des Punktes 1.

Schneidet die Gerade g der Schaar (H) die Tangente t_1 des Büschels (1), so wird die conjugirte Polare g' bezüglich des Complexes C^1 von der conjugirten Tangente τ_1 dieses Büschels geschnitten. Da g, t_1 sich schneiden, so schneiden sich auch ihre bezüglich C^1 genommenen conjugirten Polaren g', τ_2; τ_2 ist hiebei die der Geraden t_1 in der Projectivität P_1 entsprechende Gerade (s. Art. 8). Es ergibt sich hienach, dass die Gerade g' die Geraden τ_1, τ_2 schneidet, also entsprechende Strahlen der Projectivität II; daher:

Die Erzeugenden der Schaar (H) des Hyperboloids schneiden Strahlen der Büschel (1) und (2), die einander in der Projectivität II entsprechen.

§. 7. Normalencongruenzen.

26. Wir wenden nun die Resultate der vorigen Paragraphen auf Normalencongruenzen an.

Es sei zunächst noch a der Strahl einer allgemeinen Congruenz, und es seien diejenigen Centrallinien zu bestimmen, welche auf a senkrecht stehen. Sind p_{ik}, q_{ik} die Plücker'schen Coordinaten zweier Geraden, so ist die Bedingung dafür, dass dieselben aufeinander senkrecht stehen:

$$[p, q] \equiv p_{14}q_{14}+p_{24}q_{24}+p_{34}q_{34} = 0.$$

Wenn also der Centralstrahl $\lambda a+b = 0$ auf a senkrecht sein soll, so muss

$$[\lambda a+b, a] = \lambda[a, a]+[a, b] = 0$$

sein. Daher sind die Gleichungen der zu a senkrechten Centralstrahlen:

$$-\frac{[a, b]}{[a, a]}a+b = 0, \qquad -\frac{[a, c]}{[a, a]}a+c = 0.$$

Setzt man $\chi = \log[a, a]^{1/2}$, so ist:

$$-\frac{[a, b]}{[a, a]} = \frac{\partial\chi}{\partial u}, \qquad -\frac{[a, c]}{[a, a]} = \frac{\partial\chi}{\partial v};$$

die Congruenzen der zu a senkrechten Centralstrahlen sind daher Differentialcongruenzen und können durch Differentiation der Congruenz

$$\frac{a}{[a,a]^{1/2}} = 0$$

erhalten werden.

Sind die Coordinaten a_{14}, a_{24}, a_{34} des Strahles a die Richtungscosinus desselben, so ist:

$$[a, a] = 1, \quad [a, b] = 0, \quad [a, c] = 0;$$

daher sind $b = 0$, $c = 0$ die Gleichungen der senkrechten Centralstrahlen.

Soll nun die Congruenz des Strahles a eine Normalencongruenz sein, so müssen bekanntlich die Brennebenen desselben aufeinander senkrecht stehen und umgekehrt; es müssen demnach die zu a senkrechten Centralstrahlen aufeinander senkrecht sein, oder es muss, wenn die Annahme $[a, a] = 1$ gemacht wird,

$[b, c] = 0$ sein. Wir können demnach den Satz aussprechen: Die Normalencongruenzen sind Differentialcongruenzen, oder:

Ist $a(u, v) = 0$ die Gleichung einer Normalencongruenz und sind die Coordinaten a_{14}, a_{24}, a_{34} des Strahles a die Richtungscosinus desselben, so sind

$$b \equiv \frac{\partial a}{\partial u} = 0, \qquad c \equiv \frac{\partial a}{\partial v} = 0$$

die Gleichungen der Normalen der Centrafläche in den Hauptkrümmungscentren der Normale a.

Wären nicht die Parameter u, v der Krümmungslinien zu Grunde gelegt, sondern wäre für diese Linien $du : dv = \alpha_\nu$, so wären auch die Differentiationen in diesen Richtungen $du : dv = \alpha_\nu$ zu nehmen, um aus der Gleichung der Normale die Normalen der Centrafläche zu erhalten.

27. Es sei m ein beliebiger Punkt der gegebenen Fläche m' ein beliebiger Nachbarpunkt der Fläche, a, a' ihre Flächennormalen, (a) die Garbe der unendlich nahen Normalen von a. Die Brennpunkte 1, 2 der Normale in ihrer Congruenz sind die Hauptkrümmungsmittelpunkte, oder kürzer gesagt, die „Hauptpunkte" des Punktes m; die Brennebenen I, II sind die Hauptkrümmungsebenen oder „Hauptebenen" dieses Punktes. Die Hauptebenen I, II berühren die Centrafläche in den Punkten 2, 1.

$1'$, $2'$ seien ferner die Hauptpunkte des Punktes m', also auf a' und der Centrafläche in der Nähe von 1, respective 2, gelegen. Mit $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ seien die Normalen der Centrafläche in den Punkten 1, 2, mit $(\mathfrak{a}_\nu)$ die zugehörigen Garben bezeichnet. $\mathfrak{o}_{\nu\rho}$ seien die Hauptpunkte der Centrafläche für den Punkt ν, die Hauptebenen $\mathfrak{O}_{\nu\rho}$ berühren die Centrafläche der Centrafläche in den Punkten $\mathfrak{o}_{\nu\rho}$ $(\nu, \rho = 1, 2)$. Endlich seien $\mathfrak{a}_{\nu\rho}$ die Normalen dieser Flächen und $l_{\nu\rho}$ die Brennlinien der Normale $\mathfrak{a}_\nu$, welche die andere Normale $\mathfrak{a}_\nu$ schneiden.

Die Hauptbrennlinien H_ν der Normale a sind als Schnittlinien aufeinander folgender Hauptebenen der Punkte einer Krümmungslinie die Krümmungsaxen dieser Curven für den Punkt m.

Unter Begleitcomplexen, Doppelverhältniss, absoluter Invariante .... des Punktes m werden die unter diesen Namen in

den vorhergehenden Paragraphen definirten Gebilde seiner Normale in ihrer Congruenz verstanden.

Liegt ein Hauptpunkt der Nachbarnormale a' auf einer Inflexionstangente der Centrafläche, die im Hauptpunkte 1 oder 2 diese Fläche berührt, so soll die Tangente mm' des Punktes m eine Inflexionstangente zweiter Stufe der gegebenen Fläche genannt werden. Es gibt vier Inflexionstangenten zweiter Stufe in m, ihr Doppelverhältniss δ' ist an das Doppelverhältniss δ der Begleitcomplexe durch Formel 28) gebunden.

Da wir im letzten Artikel erkannt haben, dass die Normalencongruenzen der Centrafläche Differentialcongruenzen sind, so sind Eigenschaften dieser Congruenzen im letzten Paragraphen enthalten, wir wollen aber einige derselben nochmals direct ableiten.

28. Die Brennlinien der Normale $a_1 \equiv b = 0$ liegen in den Complexen $b, e, f = 0$, die der Normale $a_2 \equiv c = 0$ in den Complexen $c, f, g = 0$, so dass die Ebenen $\mathfrak{D}_{\nu\varrho}$ ein Hyperboloid in den Punkten $o_{\nu\varrho}$ berühren, das Hyperboloid nämlich, welches die Regelschaar (H) enthält, die den drei Complexen $b, c, f = 0$ gemeinsam ist. In dieser Regelschaar liegen die Hauptbrennlinien, denn diese sind die den Complexen $a, b, c, f = 0$ gemeinsamen Strahlen, und da

$$[b, c] = -[a, f] = 0$$

ist, liegt auch die unendlich ferne Gerade der zu a senkrechten Ebene auf dieser Regelschaar. Das Hyperboloid ist also ein hyperbolisches Paraboloid, dessen eine Directionsebene senkrecht zu a ist. Wir erhalten daher den Mannheim'schen Satz über das Paraboloid der acht Geraden:[1]

Die Centraflächen der Centrafläche berühren in den Hauptpunkten der Hauptpunkte das Paraboloid, welches die Hauptbrennlinien enthält und die senkrechte Ebene zur Normale a zur Directionsebene hat; die acht Geraden desselben sind die Normalen a_ν, die Hauptbrennlinien H_ν und die vier Brennlinien $l_{\nu\varrho}$. Nach Art. 23 sind die Geraden $l_{\nu\varrho}$ bezüglich des Complexes C^ν conjugirt.

[1] Siehe Mannheim, Détermination de la liaison géom. etc., Comptes rend., t. 74, p. 458.

Die Normalen $a_{\nu\varrho}$ berühren nach dem letzten Satze des Art. 22 ein Hyperboloid, welches die Normalen a_ν enthält und bei Normalen vom Doppelverhältnisse 1 die Normale a.

Da die Brennebenen der Garbe (a_ν) die Tangenten der Krümmungslinien der Centrafläche im Hauptpunkte ν ausschneiden, so gehören die Normalencongruenzen zu den in Art. 25 betrachteten Congruenzen. Es folgt demnach, dass für die Normalencongruenz a die Relationen bestehen müssen:

$$(ee)\beta_1 + (ff) = 0, \qquad (ff)\beta_2 + (gg) = 0,$$

so dass das Doppelverhältniss der Normale a den Werth hat:

$$\delta = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{(ff)^2}{(ee).(gg)},$$

und dass für den Strahl vom Doppelverhältnisse 1 die Beziehung gilt:

$$(ff)^2 - (ee).(gg) = 0.$$

29. Nach Art. 25 ergibt sich, dass die orthogonalen Projectionen jeder Erzeugenden der Regelschaar (H) des Mannheim'schen Paraboloids auf die Hauptebenen von m zwei Brennlinien sind, welche sich in der Projectivität II entsprechen. Zwei bezüglich des Begleitcomplexes C' conjugirte Erzeugende von (H) oder zwei beliebige conjugirte Polaren desselben, welche die Normale a_ν schneiden, projiciren sich auf die Hauptebene, welche im Punkte ν die Centrafläche berührt, als conjugirte Tangenten der Centrafläche; die Strahlen des Complexes C', welche der Schaar angehören, projiciren sich in die Inflexionstangenten des Punktes ν. Für Normalen vom Doppelverhältnisse 1 liegen auch die Hauptpunkte der Normale a_ν auf conjugirten Tangenten des anderen Hauptpunktes ν'.

Zu den Erzeugenden der Schaar (H) gehört auch die unendlich ferne Gerade der zu a senkrechten Ebene; projicirt man diese auf die Hauptebene, so erhält man die Brennlinien, welche auf a senkrecht stehen, es entsprechen sich daher in der Projectivität II die zur Normale a senkrechten Brennlinien.

Nehmen wir nun an, dass für die Zuwüchse $du : dv$ der Normale a' der Hauptpunkt $1'$ auf der zu a senkrechten Brennlinie t_1 liege, so muss für den Hauptkrümmungsradius r_1 die Relation gelten:

$$dr_1 = \frac{\partial r_1}{\partial u} du + \frac{\partial r_1}{\partial v} dv = 0;$$

nehmen wir ferner an, dass auch der zweite Hauptpunkt $2'$ der Normale a' auf der zu a senkrechten Brennlinie t_2 liege, so muss auch für dasselbe $du : dv$ die Beziehung:

$$dr_2 = \frac{\partial r_2}{\partial u} du + \frac{\partial r_2}{\partial v} dv = 0$$

bestehen. Daher muss, wenn sich die zu a senkrechten Brennlinien in der Projectivität P entsprechen sollen, die Relation:

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} \frac{\partial r_2}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial v} \frac{\partial r_2}{\partial u} = 0;$$

stattfinden; geschieht letzteres, so muss sich umgekehrt eine Normale a' finden lassen, deren entsprechende Tangenten t_1, t_2 auf a senkrecht stehen.

Diese Relation sagt aber aus, dass ein Hauptkrümmungsradius eine Function des anderen, dass die Fläche eine Weingarten'sche Fläche sei. Nun entsprechen sich in den Projectivitäten P und Π im allgemeinen Falle die Geraden a, H_1; H_2, a; da bei Weingarten'schen Flächen diese Projectivitäten, wie soeben gezeigt wurde, noch ein drittes Paar entsprechender Strahlen gemein haben, so sind bei diesen Flächen die Projectivitäten P und Π identisch. Es folgt demnach:

Die Weingarten'schen Flächen sind diejenigen, bei welchen die Projectivitäten P und Π einer Normale zusammenfallen, für welche demnach das Doppelverhältniss aller Punkte den Werth 1 hat.

Dieser Satz folgt auch aus dem Satze des Herrn Ribaucour,[1] welcher aussagt, dass sich bei Weingarten'schen Flächen die Inflexionstangenten der Hauptpunkte in der Projectivität P ent-

[1] Siehe Ribaucour, Note sur les développées des surfaces, Compt. rend. t. 74, p. 1399.

sprechen, was nach Art. 19 nur für Strahlen vom Doppelverhältnisse 1 der Fall sein kann und ist.

30. Man kann nun auch nach Art. 9 sagen:

Die Weingarten'schen Flächen sind diejenigen, für welche die ∞^2 in zweiter Ordnung zu einer Normale benachbarten Normalen in demselben linearen Complexe liegen, welcher mit den zusammenfallenden Begleitcomplexen identisch ist.

Da die Normalen a_ν der Centrafläche Centrallinien der Normale a_ν sind, gilt ferner nach Art. 9 für die Congruenzen der a_ν der Satz:

Die Normalengarben (a) und (a_1) liegen im Begleitcomplexe C^1, die Garben (a) und (a_2) im Begleitcomplexe C^2. Bei Weingarten'schen Flächen, und nur bei diesen, liegen die drei Garben (a), (a_1), (a_2) in demselben linearen Complexe.

Die Hauptebenen $\mathfrak{D}_{\nu\rho}$ enthalten die Centrallinien der Garbe (a_ν), diese Linien liegen auch in dem Complexe C^ν, und zu ihnen gehören auch die Normalen $a_{\nu\rho}$; es folgt:

In dem Begleitcomplexe C^ν liegen die fünf Normalen a, a_ν, $a_{\nu\rho}$; bei Weingarten'schen Flächen, und nur bei diesen, liegen die sieben Normalen a, a_ν, $a_{\nu\rho}$ in demselben linearen Complexe.

Es gibt nach Herrn Mannheim ∞^2 lineare Complexe, für welche die unendlich kleine Schraubenbewegung, welche jeder von ihnen definirt, jeden Nachbarflächenpunkt m' des Punktes m wieder in einen Punkt der Fläche überführt. Es sind dies diejenigen Complexe, welche die Normalengarbe (a) enthalten. Es steht nämlich der Translationsstrahl des Punktes m' für die durch einen solchen Complex definirte Schraubenbewegung senkrecht auf der Normale m' von a', wesshalb m' auf der Fläche weiterrückt. Da nun der Begleitcomplex C^ν die Garben (a) und (a_ν) enthält, so ergibt sich die folgende kinematische Definition der Begleitcomplexe:

Es gibt nur eine unendlich kleine Schraubenbewegung, bei welcher gleichzeitig die Nachbarpunkte des Punktes m der Urfläche auf dieser und die Nachbarpunkte eines seiner Hauptpunkte auf der Centra-

fläche bleiben; nur bei Weingarten'schen Flächen gibt es eine Schraubenbewegung, bei welcher gleichzeitig die Nachbarpunkte von m und beider Hauptpunkte auf ihren Flächen fortschreiten. Diese Schraubenbewegungen sind diejenigen, welche den Begleitcomplexen zugehören. Die Leitlinien der den beiden Complexen gemeinsamen Congruenz sind die Krümmungsaxen der Krümmungslinien des Punktes m.

31. Man kann auf einer Fläche die Curve von Punkten constanten Doppelverhältnisses betrachten; für die Parameter u, v der Curvenpunkte gilt dann die Gleichung 29), in welche die Coordinaten der Normale eingeführt sind, nämlich die Gleichung:

$$\frac{(C^1C^1)(C^2C^2)}{(C^1C^2)^2} = \frac{|bcs^1|^2 . |bcs^2|^2}{(|bcs^1||bcs^2|)^2} = k.$$

Alle diese Curven gehen durch eine Anzahl fester Punkte, welche die Schnittpunkte der Curve $|bcs^1||bcs^2| = 0$, d. i. der Curve vom Doppelverhältnisse -1 mit den Curven $|bcs^\nu|^2 = 0$, also der harmonischen Curve mit dem Orte des Punktes, dessen ein Hauptpunkt ein parabolischer oder Rückkehrpunkt der Centrafläche ist (vergl. Art. 18). Diese festen Punkte sind demnach diejenigen, deren beide Hauptpunkte den letzteren Curven angehören.

Es gibt auch Flächen, deren sämmtliche Punkte dasselbe Doppelverhältniss haben, dieselben genügen der partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung (vergl. Art. 19)

$$|bcs^1|^2|bcs^2|^2 - k(|bcs^1||bcs^2|)^2 = 0.$$

Besonders hervorzuheben sind unter diesen Flächen diejenigen, für welche $k = 1$ ist, welche also der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$D = (abcefg) = 0$$

genügen. Diese Flächen haben in allen Punkten das Doppelverhältniss 1, sie sind, wie im Art. 29 erkannt wurde, Weingarten'sche Flächen.[1]

[1] Vergl. Darboux, a. a. O.

Auch die Flächen zweiten Grades gehören zu den Flächen constanten Doppelverhältnisses, da sich in Art. 46 zeigen wird, dass das Doppelverhältniss ihrer Punkte überall den Werth 9 hat.

Setzt man die Parameter u, v speciell als Krümmungslinienparameter voraus, so ergibt sich nach Art. 29 als Differentialgleichung der Flächen constanten Doppelverhältnisses die Gleichung:

$$(ff)^2 - k(ee)(gg) = 0,$$

und für die Weingarten'schen Flächen die Differentialgleichung:

$$(ff)^2 - (ee)(gg) = 0.$$

§. 8. Beziehungen in der Tangentialebene.

32. Es sei eine Fläche unter der Gleichungsform

$$z = f(x, y)$$

gegeben und es seien dann in bekannter Weise p, q; r, s, t die ersten und zweiten Differentialquotienten von z nach x und y, und die dritten Differentialquotienten seien:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = r_1, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} = r_2 = s_1, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial y} = t_1 = s_2, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = t_2. \tag{37}$$

Die Gleichung der Normale der Fläche ist:

$$a \equiv (y+qz)p_{14} - (x+pz)p_{24} + (py-qx)p_{34} + pp_{23} + qp_{31} - p_{12} = 0. \tag{38}$$

Wir nehmen nun an, dass das Coordinatensystem so gewählt sei, dass die xy-Ebene die Fläche im Anfangspunkte berührt, und dass die beiden anderen Coordinatenebenen Hauptebenen seien. Dann ist $x = y = z = 0$, $p = q = s = 0$. Setzt man diese Werthe in die Differentialquotienten nach x und y der Gleichung 38) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} a \equiv p_{12}, \quad b \equiv -p_{24} + rp_{23}, \quad c \equiv p_{14} + tp_{31} \\ e \equiv r_1 p_{23} + r_2 p_{31}, \; f \equiv (r-t)p_{34} + s_1 p_{21} + s_2 p_{31}, \; g \equiv t_1 p_{23} + t_2 p_{31} \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Da hier $\alpha_1 = \infty$, $\alpha_2 = 0$ ist, so ergeben sich nach Art. 14 die Gleichungen der Begleitcomplexe als:

$$C^1 \equiv (abcefx) = 0, \qquad C^2 \equiv (abcfgx) = 0,$$

wobei aber für $a_x, b_x, c_x, e_x, f_x, g_x, x_x$ die Plücker'schen Coordinaten zu setzen sind. Diese Gleichungen geben demnach entwickelt:

$$\left.\begin{aligned} C^1 \equiv\ & t(r-t)r_1 p_{23} + r(r-t)r_2 p_{31} + (r_1 s_2 - r_2 s_1)p_{12} + \\ & + (r-t)(r_2 p_{14} - r_1 p_{24}) = 0 \\ C^2 \equiv\ & t(r-t)\,t_1 p_{23} + r(r-t)\,t_2 p_{31} + (t_1 s_2 - t_2 s_1)p_{12} + \\ & + (r-t)\,(t_2 p_{14} - t_1 p_{24}) = 0 \end{aligned}\right\} \quad 40)$$

Das Doppelverhältniss der beiden Begleitcomplexe berechnet sich als:

$$\delta = \frac{r_1 t_2}{r_2 t_1}.$$

33. Der Verbindungslinie t des Punktes m mit seinem Nachbarpunkte m' entsprechen die vier Tangenten t_ν, τ_ν, welche der Normale a' von m' zugehören; zwischen t und diesen vier Tangenten bestehen vier Projectivitäten, welche wir jetzt ausdrücken wollen.

Setzen wir die Fläche in derselben speciellen Lage zum Coordinatensysteme wie im vorigen Artikel voraus, so ist in der Gleichung 3') des Art. 2, welche die schneidenden Nachbarnormalen gibt, $\alpha_1 = \infty$, $\alpha_2 = 0$, und der Complex, welcher nach Art. 5 die Geraden t_1, τ_2 enthält, hat die Gleichung $edx + fdy = 0$, derjenige, welcher t_2, τ_1 enthält, die Gleichung $fdx + gdy = 0$, wenn noch $x = u$, $y = v$ gesetzt wird.

Nach den Formeln 39) übergehen diese Gleichungen respective in

$$\begin{aligned} &(r_1 p_{23} + r_2 p_{31})dx + ((r-t)p_{34} + s_1 p_{23} + s_2 p_{31})dy = 0 \\ &((r-t)p_{34} + s_1 p_{23} + s_2 p_{31})dx + (t_1 p_{23} + t_2 p_{31})dy = 0. \end{aligned}$$

Schneiden die Geraden t_1, τ_1 auf der y-Axe die Stücke t_1, τ_1 ab, dann ist für diese Geraden

$$p_{34} = -1,\ p_{31} = 0 \quad \text{und} \quad p_{23} = t_1, \text{ respective } p_{23} = \tau_1;$$

werden diese Werthe in die letzten Gleichungen eingesetzt, so folgen, wenn $\frac{dy}{dx} = t$ gesetzt wird, die Gleichungen, welche die Projectivitäten ausdrücken:

für die Projectivität (t, t_1): $r_1 t_1 + (t - r + r_2 t_1)t = 0$

„ „ „ (t, τ_1): $t - r + r_2 \tau_1 + t_1 \tau_1 t = 0.$

Sind analog t_2, τ_2 die respectiven Abschnitte der Tangenten t_2, τ_2 auf der x-Axe, so ist für diese Geraden

$$p_{34} = 1, \quad p_{23} = 0 \quad \text{und} \quad p_{31} = t_2, \text{ respective } p_{31} = \tau_2,$$

und es ergibt sich:

für die Projectivität (t, t_2): $r - t + t_1 t_2 + t_2 t_2 t = 0$

„ „ „ (t, τ_2): $r_2 \tau_2 + (r - t + t_1 \tau_2)t = 0.$

34. Wir bezeichnen nun auch die Durchstosspunkte der Geraden t_ν, τ_ν mit der Tangentialebene mit t_ν, τ_ν und suchen die constructive Beziehung dieser Punkte zu einander auf.

Durch Elimination von t aus den Gleichungen der Projectivitäten (t, τ_ν) erhält man die Gleichung

$$r_2 \tau_1 - t_1 \tau_2 = r - t.$$

Construirt man den Punkt w, dessen Coordinaten sind: $x = \tau_2$, $y = \tau_1$, so erhält man daher als dessen Ort eine gerade Linie W. Dieselbe geht durch die Durchstosspunkte der Hauptbrennlinien mit der Tangentialebene; sie liegt demnach auf dem Mannheim'schen Paraboloid.

Da die Punkte t_1, τ_2 auf den Geraden t_1, τ_2, also auf conjugirten Polaren des Begleitcomplexes C^1 liegen, so ist ihre Verbindungslinie ein Complexstrahl, der durch den Nullpunkt der Tangentialebene bezüglich C^1 geht. Die Hauptbrennlinien sind auch conjugirte Polaren des Complexes, daher liegt dieser Nullpunkt auf der Geraden W. Sind w_ν die Nullpunkte der Tangentialebene bezüglich der Begleitcomplexe C^ν, so besteht demnach zwischen den Punkten t_ν, τ_ν die Beziehung, wie sie durch Fig. 1 veranschaulicht wird. Diese Beziehung folgt übrigens auch aus den zu Anfang des Art. 29 angegebenen Eigenschaften der Erzeugenden der Schaar (H) des Mannheim'schen Paraboloids.

Aus der zuletzt abgeleiteten Gleichung und aus der Gleichung der Projectivität (t, τ_2) folgt:

$$t = -\frac{\tau_2}{\tau_1},$$

daher steht die Tangente t der Fläche, welcher die Brennlinien t_1, τ_1 entsprechen, senkrecht auf der Geraden mw.

Die Durchstosspunkte i_1 der Inflexionstangenten des Hauptpunktes 1 mit der Tangentialebene sind die Doppelpunkte der Involution, deren Paare die Punkte t_1, τ_1 sind. Diese Involution ist aber bestimmt durch das Paar m, H_1 und durch ihren Mittelpunkt w_1, weshalb diese Durchstosspunkte nach Fig. 2 construirt werden können, indem man die Involution auf W, welche H_1, H_2 als Paar und w_1 als Mittelpunkt hat, zu Hilfe nimmt. Die Linien i_1 sind die Inflexionstangenten zweiter Stufe (s. Art. 27) des Punktes m.

Der Punkt auf t, dessen Ordinate t_1 ist, beschreibt bei variablem t eine Gerade W_1, welche durch H_1 geht und auf der Geraden W_1 senkrecht steht. Daher besteht zwischen den Punkten t_1, τ_1 auch die Beziehung, welche in Fig. 3 angegeben ist. Um nun die Punkte i_1 zu finden, für welche t_1, τ_1 zusammenfallen, hat man ein rechtwinkeliges Dreieck zu finden mit dem Scheitel m, dessen andere Ecken auf W_1 und W liegen und dessen Hypothenuse auf der y-Axe senkrecht steht. Zu dem Ende verfahre man folgendermassen (s. Fig. 4): Ist l_2 der Schnittpunkt von W_1 mit der x-Axe, so beschreibe man über $l_2 H_2$ als Durchmesser den Kreis, dieser schneide die y-Axe in zwei Punkten s; die Inflexionstangenten zweiter Stufe sind dann parallel zu $l_2 s$ und die Punkte i_1 liegen auch auf den durch w_1 zu $H_2 s$ gezogenen Parallelen.

Liegt der Nullpunkt w_1 ausserhalb der Strecke H_1, H_2, so ist die Centrafläche im Hauptpunkte 1 hyperbolisch gekrümmt. Das Doppelverhältniss der Begleitcomplexe ist das der Punkte w_1 gegen die Punkte H_1. Man ersieht, dass bei positivem Doppelverhältnisse beide Schalen der Centrafläche gleich gekrümmt sind, bei negativem entgegengesetzt gekrümmt.

Bei Weingarten'schen Flächen fallen die Punkte w_1 zusammen, daher bestehen die Beziehungen, wie sie in Fig. 5 dargestellt sind; es gibt zwei Tangenten t, zu welchen dieselben Punkte t_1 gehören, sie trennen die Linien i harmonisch. Es ist

auch die Beziehung, welche zwischen einer Tangente t und ihren entsprechenden Punkten t_ν, τ_ν besteht, eingezeichnet.

§. 9. Die Krümmungsgrössen der Centrafläche.

35. Die conjugirten Polaren der unendlich fernen Geraden u der Tangentialebene des Punktes m bezüglich der Complexe des Büschels, das durch die Begleitcomplexe bestimmt ist, erfüllen die Regelschaar (H) des Mannheim'schen Paraboloids. Denn diese Schaar enthält u und ferner die Hauptbrennlinien, da diese die singulären Complexe des Büschels sind. Auf dem Mannheim'schen Paraboloid liegen demnach die Geraden G_ν, welche die conjugirten Polaren von u bezüglich der Begleitcomplexe C^ν sind; sie mögen „die Begleitgeraden des Punktes m" genannt werden. Sie enthalten die Nullpunkte der zu a senkrechten Ebenen, also auch die obigen Punkte w_ν; sie sind Durchmesser der Complexe oder parallel zu den Axen derselben.

Nach Art. 29 bestimmen die Hauptbrennlinien als Paar und die Geraden G_1, u als zweites Paar eine Involution auf dem Mannheim'schen Paraboloid, deren Doppelstrahlen, auf die Tangentialebene des Punktes 1 projicirt, die Inflexionstangenten dieses Punktes geben. Daher sind die Hauptebenen $\mathfrak{O}_{1\rho}$ des Punktes 1 das Rechtwinkelpaar der Ebeneninvolution, welche aus der Normale a_1 diese Strahleninvolution des Paraboloids projicirt. Die Punkte, in welchen die Ebenen dieses Rechtwinkelpaares das Mannheim'sche Paraboloid berühren, sind dann nach Art. 28 die Hauptpunkte $o_{1\rho}$ des Punktes 1.

Sind also die Normalen a_1 und die Begleitgeraden G_ν des Punktes m gegeben, so können die Hauptpunkte und die Hauptebenen der Centrafläche in den Punkten ν construirt werden. Die Geraden G_ν sind aber, da sie die Normalen a_ν schneiden, durch ihre Richtungen Γ_ν bestimmt. Man kann daher alle Grössen zweiter Ordnung, die Projectivitäten zwischen den Brennlinien der Normale a, die Hauptpunkte und Hauptebenen der Centrafläche construiren, wenn die Richtungen Γ_ν der Axen der Begleitcomplexe gegeben sind.

Es seien die Geraden G_ν gegeben, sie schnitten die Normale a_ν im Punkte m_ν und die andere Normale $a_{\nu'}$ im Punkte μ_ν; m_ν, μ_ν seien auch gleichzeitig die Abstände dieser Punkte von dem Fuss-

punkte der Normale a_ν, auf welcher sie liegen. Es sei ferner η_ν der Schnittpunkt der Hauptbrennlinie H_ν mit der Normale $a_{\nu'}$ und η_ν sein Abstand vom Punkte ν'.

Nun bestimmt die Schaar (H) auf den Normalen a_ν projectivähnliche Punktreihen, in welchen den Punkten η_1, 2, μ_1, m_2 die Punkte 1, η_2, m_1, μ_2 entsprechen. Wählt man, wie dies in Fig. 6 geschehen ist, die Ebene $a\,a_2$ als Aufrissebene, $a\,a_1$ als Kreuzrissebene, so laufen daher die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt. Sind x_ν die Abstände entsprechender Punkte von den Punkten ν, so besteht die Relation:

$$\frac{x_1}{\eta_2} + \frac{x_2}{\eta_1} = 1. \qquad 41)$$

Die Haupttangenten $H_{1\rho}$ des Punktes 1 sind aber nach dem eben Gesagten das Rechtwinkelpaar der Strahleninvolution J_2, welche durch die Paare a, H_1 und a_1, G_1' bestimmt ist; denn a_1, G_1' sind die Aufrissprojectionen der Geraden u, G_1, welche bezüglich des Complexes C^1 conjugirt sind. Daher können diese Haupttangenten u. A. so construirt werden, wie in Fig. 6 angegeben ist: Man beschreibe den Kreis über 1 2 als Durchmesser und fälle von 2 auf H_1 die Senkrechte; verbindet man den Schnittpunkt q von G_1' mit dieser Senkrechten mit dem Mittelpunkte des Kreises, so schneidet diese Verbindungslinie den Kreis in Punkten der Haupttangenten des Punktes 1. Die Schnittpunkte $w_{1\rho}$ dieser Haupttangenten haben dann als entsprechende in der projectivähnlichen Punktreihe auf a_1 die Hauptpunkte $o_{1\rho}$.

36. Ist φ der Winkel, den eine beliebige Brennlinie des Punktes 1 mit a einschliesst, so ist für die Linien a, H_1; a_1, g_1'

$$\operatorname{tg}\varphi = 0, \quad \frac{\eta_1}{d}; \quad \infty, \frac{\mu_1}{d},$$

wobei d der Abstand der beiden Hauptpunkte 1, 2 von einander ist. Daher gilt für ein beliebiges Paar der Involution J_2 die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi\left(\operatorname{tg}\varphi - \frac{\alpha_1}{d}\right) + \lambda\left(\operatorname{tg}\varphi - \frac{\mu_1}{d}\right) = 0;$$

für das Rechtwinkelpaar der Involution ergibt sich $\lambda = \frac{d}{\mu_1}$, so dass für dasselbe die Gleichung gilt:

$$\operatorname{tg}^2\varphi - \left(\frac{\eta_1}{d} - \frac{d}{\mu_1}\right)\operatorname{tg}\varphi - 1 = 0.$$

Setzt man $\operatorname{tg}\varphi = \frac{x_2}{d}$, so geht diese Gleichung über in:

$$x_2^2 - \left(\frac{\eta_1}{d} - \frac{d}{\mu_1}\right) d \cdot x_2 - d^2 = 0$$

und ihre Wurzeln sind die Abscissen der Punkte $w_{1\rho}$. Wendet man daher die Substitution 41) an, so erhält man die Gleichung:

$$x_1^2 - x_1 \frac{\eta_2}{\eta_1}\left(\eta_1 + \frac{d^2}{\mu_1}\right) + d^2 \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2} \frac{\eta_1 - \mu_1}{\mu_1} = 0,$$

deren Wurzeln die Abscissen der Punkte $v_{1\rho}$ sind, welche den Punkten $w_{1\rho}$ entsprechen, oder die Hauptkrümmungsradien r_ρ^1 des Punktes 1 sind.

Beachtet man noch, dass $\eta_1 m_1 = (\eta_1 - \mu_1)\eta_2$ ist, weil m_1, μ_2 entsprechende Punkte der projectivähnlichen Punktreihen sind, so folgt für diese Krümmungsradien die Gleichung:

$$r^2 - r\frac{\eta_2}{\eta_1} d\left(\frac{\eta_1}{d} + \frac{d}{\mu_1}\right) + \frac{\eta_2}{\eta_1} \cdot \frac{m_1}{\mu_1} d^2 = 0.$$

Man hat daher die Gleichungen:

$$r_1^1 + r_2^1 = \frac{\eta_2}{\eta_1}\left(\frac{\eta_1}{d} + \frac{d}{\mu_1}\right) d; \quad r_1^1 r_2^1 = \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{m_2}{\mu_1} d^2; \qquad 41)$$

ebenso erhält man für die Hauptkrümmungsradien des Hauptpunktes 2 die Gleichungen:

$$r_1^2 + r_2^2 = \frac{\eta_1}{\eta_2}\left(\frac{\eta_2}{d} + \frac{d}{\mu_2}\right) d; \quad r_1^2 r_2^2 = \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{m_2}{\mu_1} d^2. \qquad 42)$$

37. Aus diesen Gleichungen ergibt sich die Relation, welche zwischen den Krümmungsradien r_ρ^ν und dem Doppelverhältnisse δ der Normale a besteht.

Die Punkte m_1, μ_2 sind die Nullpunkte der durch a_1 gehenden, zu a senkrechten Ebene bezüglich der Begleitcomplexe, da sie auf den Begleitgeraden liegen, und $1, \eta_2$ sind die Schnittpunkte mit den Hauptbrennlinien, welche die Leitlinien der den Complexen gemeinsamen Congruenz sind; daher ist das Doppel-

verhältniss der Begleitcomplexe gleich dem Doppelverhältnisse dieser Punkte, also:

$$\delta = \frac{m_1(\mu_2 - \nu_2)}{\mu_2(m_1 - \nu_2)}.$$

Nun ist wegen der projectivähnlichen Punktreihen

$$\frac{\mu_2 - \nu_2}{m_1 - \nu_2} = \frac{m_2}{\mu_1};$$

daher ist

$$\delta = \frac{m_1 m_2}{\mu_1 \mu_2};$$

aus den Gleichungen 41) und 42) ergibt sich demnach:

$$\delta = \frac{r_1^1 r_2^1 r_1^2 r_2^2}{d^4}$$

oder anders ausgedrückt:

Das Product der Krümmungsmasse der Centrafläche in den beiden Hauptpunkten eines Flächenpunktes multiplicirt mit dem Doppelverhältnisse dieses Punktes und der vierten Potenz des Abstandes dieser Hauptpunkte von einander ist gleich 1:

$$\delta K_1 K_2 d^4 = 1.$$

Es ist dieser Satz eine Verallgemeinerung eines Halphen'schen Satzes. Für Weingarten'sche Flächen gilt nämlich nach Halphen[1] die Gleichung

$$K_1 K_2 = \frac{1}{d^4},$$

welche aus der obigen folgt, da nach Art. 29 für diese Flächen $\delta = 1$ ist.

38. Die Strecke $r_1^1 + r_2^1$ lässt sich leicht construiren. Wenn x_1 der Schnittpunkt von a_2 mit der Brennlinie γ_1' ist, welche auf g_1' in 1 senkrecht steht, so ist die Strecke

$$\overline{\nu_1 x_1} = \nu_1 + \frac{d^2}{\mu_1}.$$

[1] Siehe Halphen, Théorème concernant les surfaces dont les rayons etc. Bull. de la soc. math., t. IV, p. 94.

Daher ist

$$r_1^1 + r_2^1 = \frac{\eta_2}{\eta_1}\left(\eta_1 + \frac{d^2}{\mu_1}\right) = \frac{\eta_2}{\eta_1} \cdot \overline{\eta_1 \varkappa_1},$$

also ist $r_1^1 + r_2^1$ gleich der Strecke $\overline{1k}$, wenn k_1 dem Punkte $\varkappa_1$ in den projectivähnlichen Punktreihen entspricht.

Bestimmt man in der Schaar (H) diejenige Gerade γ_1, deren Aufrissprojection γ_1' ist, so ist ihre Kreuzrissprojection identisch mit der Geraden $2k_1$, daher:

Die Erzeugende der Regelschaar (H), welche vom Hauptpunkte ν aus unter rechtem Winkel gegen die Begleitgerade G_ν gesehen wird, schneidet die Normale a_ν in einem Punkte, welcher von dem Hauptpunkte ν die Entfernung $r_1^\nu + r_2^\nu$ hat.

Ist $r_1^1 + r_2^1 = 0$, ist also die Centrafläche im Hauptpunkte 1 eine Minimalfläche, so muss die Gerade γ_1 mit der Hauptbrennlinie H_1 identisch sein, und umgekehrt: Ist γ_1 senkrecht zu H_1, so ist $r_1^1 + r_2^1 = 0$. Nun ist G^1 parallel zur Axe des Complexes C^1; wenn diese Axe senkrecht zu H_1 ist, muss sie die Gerade H_2 schneiden, weil diese H_1 conjugirt ist; es folgt demnach der Satz:

Die Centrafläche ist dann und nur dann in einem Punkte eine Minimalfläche, wenn die Axe des Begleitcomplexes dieses Punktes senkrecht steht zur Hauptbrennlinie desselben, oder anders ausgedrückt: wenn diese Axe die Hauptbrennlinie des anderen Hauptpunktes, der mit dem ersten auf derselben Flächennormale liegt, schneidet.

§. 10. In zweiter Ordnung berührende Congruenzen.

39. Wir kehren nun noch einmal zu einer allgemeinen Congruenz zurück und sagen, dass sich zwei Congruenzen in einem gemeinsamen Strahle berühren, wenn er für beide dieselben Brennpunkte und Brennebenen hat, dass sie sich in zweiter Ordnung berühren, wenn die sechs Projectivitäten P, II, P_ν, J_ν für beide Congruenzen übereinstimmen.

Die den Grössen a, b, c, e, f, g entsprechenden Grössen für die zweite Congruenz seien a', b', c', e', f', g'. Sollen sich beide Congruenzen berühren, so müssen die Complexe a', b', c' die aus den Brennlinien bestehende Regelschaar, welche den Complexen

a, b, c angehört, gemein haben; es müssen daher die a', b', c' aus den a, b, c linear abgeleitet sein. Sind dann ferner zwei von einander verschiedene der sechs Projectivitäten für beide Congruenzen dieselben, so haben sie dieselben Hauptbrennlinien, wobei also der Fall, dass die Projectivitäten P_ν zusammenfallen, vorderhand ausgeschlossen sein mag.

Diese Behauptung erweist sich sofort daraus, dass die Hauptbrennlinien in den Projectivitäten P, Π, J_ν dem Strahle a und in den Projectivitäten P_ν einander zugehören. Nur der Fall, dass z. B. $J_1' \equiv J_1$ und $P' \equiv P$ wäre, ist noch näher zu betrachten. Es ist hier zunächst $H_1' \equiv H_1$, dass aber auch $H_2' \equiv H_2$ ist, folgt daraus, dass in der Projectivität P den Doppelstrahlen von J_1 Brennlinien von (2) entsprechen, die durch a und H_2 harmonisch getrennt sind; in der That ist für diese Doppelstrahlen, die Inflexionstangenten, nach Formel 25): $t_1 = \pm\sqrt{\beta_1}$, daher ist für die entsprechenden Strahlen von (2) nach Art. 17: $t_2 = \pm\frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1}}$; diese Strahlen haben also die Gleichung:

$$\pm\frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1}}(ax) + 4\Delta^2 H_2 = 0$$

und trennen folglich a und H_2 harmonisch.

4. Es gilt ferner: Sind drei der sechs Projectivitäten P, Π, P_ν, J_ν für einen Strahl, in dem sich zwei Congruenzen berühren, für beide Congruenzen dieselben, so coincidiren auch die übrigen, und die Congruenzen berühren sich in zweiter Ordnung.

Setzen wir zunächst voraus, dass die Projectivitäten P_ν von einander verschieden seien.

Die Involutionen J_2 sind nach Gleichung 26) bestimmt durch die Gleichung des Complexes zweiten Grades:

$$16\Delta^4 H_\nu^2 - \beta_\nu (ax)^2 = 0;$$

die Projectivitäten P und Π nach Formel 23) und 24) durch die Gleichung des Complexes zweiten Grades:

$$16\Delta^4 H_1 H_2 - \beta_\nu (ax)^2 = 0;$$

die Projectivitäten P_ν sind durch die Begleitcomplexe gegeben, deren Gleichungen nach Formel 19) sind:

$$H_1 - H_2 = 0, \quad \beta_1 H_2 - \beta_2 H_1 = 0.$$

Damit nun die sechs Projectivitäten der ersten Congruenz mit denen der zweiten Congruenz übereinstimmen, müssen die Identitäten bestehen:

$$\begin{aligned} H_\nu'^2 - \gamma_\nu'(a'x)^2 &= \mu_\nu(H_\nu^2 - \gamma_\nu(ax)^2) \\ H_1' H_2' - \gamma_\nu'(a'x)^2 &= \xi_\nu(H_1 H_2 - \gamma_\nu(ax)^2) \\ H_1' - H_2' &= \chi_1(H_1 - H_2) \\ \gamma_1' H_2' - \gamma_2' H_1' &= \chi_2(\gamma_1 H_2 - \gamma_2 H_1). \end{aligned}$$

Nun ist $(a'x) = \sigma(ax)$, und ferner sind nach Obigem, da drei der Projectivitäten übereinstimmen, die Hauptbrennlinien identisch, so dass $H_\nu' = \rho_\nu H_\nu$ ist, daher ergeben sich die Identitäten:

$$\rho_\nu^2 H_\nu^2 - \varepsilon_\nu'(ax)^2 = \mu_\nu(H_\nu^2 - \varepsilon_\nu(ax)^2)$$

und vier weitere Identitäten.

Es müsste also eine Identität von der Form:

$$H_\nu^2 = k(ax)^2$$

bestehen; da dies nicht der Fall, so muss

$$\rho_\nu^2 = \mu_\nu \qquad \text{und} \qquad \varepsilon' = \mu_\nu \varepsilon_\nu$$

sein, oder

$$\rho_\nu^2 \varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu'. \tag{43}$$

Aus den weiteren Identitäten ergeben sich ferner die Gleichungen:

$$\rho_1 \rho_2 \varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu', \quad \rho_1 = \rho_2, \quad \rho_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2' = \rho_2 \varepsilon_1' \varepsilon_2. \tag{43}$$

Diese Gleichungen müssen erfüllt sein, wenn die sechs Projectivitäten beider Congruenzen übereinstimmen sollen; dies ist aber der Fall, wenn bloss drei dieser Gleichungen bestehen, womit unsere Behauptung erwiesen.

41. Fallen die Projectivitäten P_ν einer Congruenz zusammen welchen Fall wir oben ausgeschlossen haben, so sind die Geraden jedes Paares t_1, τ_2 Leitlinien einer den Begleitcomplexen gemeinsamen Congruenz und können als Hauptbrennlinienpaar für eine berührende Congruenz genommen werden, so dass in diesem Falle, wenn für beide Congruenzen die Projectivitäten P_ν in eine

zusammenfallen, die Hauptbrennlinien noch von einander verschieden sein können.

Ist $\beta_1 = \beta_2$, fallen also die Projectivitäten P_ν zusammen und wäre die zweite Congruenz so gewählt, dass sie dieselben Hauptbrennlinien hätte, wie die gegebene, dass also $H'_\nu = \rho_\nu H_\nu$ wäre, so gehen die Relationen 43), da vermöge $\beta_1 = \beta_2$ auch $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ und $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 = \varepsilon'$ wird, über in:

$$\rho_\nu^2 \varepsilon = \varepsilon', \qquad \rho_1 \rho_2 \varepsilon = \varepsilon', \qquad \rho_1 = \rho_2.$$

Ist für die zweite Congruenz der Begleitcomplex derselbe, ist somit:

$$H'_1 - H'_2 = \chi(H_1 - H_2),$$

so ist $\rho_1 = \rho_2$, und die letzten Relationen fallen in die eine

$$\rho_1^2 \varepsilon = \varepsilon'$$

zusammen. Wenn demnach hier die Begleitcomplexe der beiden Congruenzen und die Hauptbrennlinien übereinstimmen, und wenn die letzte Relation erfüllt ist, d. h. wenn eine der vier übrigen Projectivitäten für beide Congruenzen dieselbe ist, so fallen auch die letzten drei Projectivitäten zusammen.

Daher fallen diese Projectivitäten auch zusammen, wenn wir nur annehmen, dass die Begleitcomplexe zusammenfallen und auch eine der Projectivitäten $P(\equiv \Pi)$, J_ν; denn unter dieser Voraussetzung coincidiren, wie man leicht sieht, die Hauptbrennlinien. Es gilt demnach der im vorigen Artikel ausgesprochene Satz auch für Congruenzstrahlen mit zusammenfallenden Begleitcomplexen.

§. 11. Flächenberührung dritter Ordnung.

42. Setzen wir wie im Art. 32 eine Fläche unter der Gleichungsform $z = f(xy)$ und unter der speciellen Lage zum Coordinatensysteme voraus, so ist die Bedingung dafür, dass eine zweite Fläche $z = f'(xy)$ dieselbe im Anfangspunkte in dritter Ordnung berührt, die, dass für ihre Differentialquotienten neben $p' = q' = s' = 0$ die Relationen bestehen:

$$r' = r, \quad t' = t, \quad r'_\nu = r_\nu, \quad t'_\nu = t_\nu.$$

Bestehen diese Beziehungen, so ist aus den Gleichungen 40) der Begleitcomplexe der ersten Fläche ersichtlich, dass sie auch die Begleitcomplexe der zweiten Fläche sind; aber auch umgekehrt gilt: **Fallen die Begleitcomplexe des Punktes m der gegebenen Fläche nicht zusammen, so berührt in m eine zweite Fläche in dritter Ordnung, wenn sie für die Hauptpunkte von m dieselben Begleitcomplexe hat, wie die gegebene;** denn ist dies der Fall, so bestehen die Proportionen:

$$\left.\begin{aligned} r_1' s_2' - r_2' s_1' : r_1' : r_2' &= r_1 s_2 - r_2 s_1 : r_1 : r_2 \\ t_1' s_2' - t_2' s_1' : t_1' : t_2' &= t_1 s_2 - t_2 s_1 : t_1 : t_2 \end{aligned}\right\}. \qquad 44)$$

Aus diesen Proportionen folgt:

$$\begin{aligned} (s_2' - s_2)\, r_1 - (s_1' - s_1)\, r_2 &= 0 \\ (s_2' - s_2)\, t_1 - (s_1' - s_1)\, t_2 &= 0\,; \end{aligned}$$

da nun nach Voraussetzung die gegebene Fläche von einander verschiedene Begleitcomplexe hat, so dass das Doppelverhältniss dieser Complexe von 1 verschieden ist, so ist auch $r_1 t_2 - r_2 t_1 \neq 0$, es muss also $s_\nu' = s_\nu$ sein. Desshalb sind auch die übrigen Differentialquotienten einander gleich, und die Flächen berühren einander in dritter Ordnung.

Man kann daher auch sagen: Wenn die Flächen sich in dritter Ordnung berühren, so sind die Projectivitäten P_ν' identisch mit den Projectivitäten P_ν und umgekehrt. Nun entsprechen in der Projectivität Π der Normale a die Hauptbrennlinien H_ν, also die Strahlen a, H_1 den Strahlen H_2, a, und speciell bei Normalencongruenzen (nach Art. 29) entsprechen sich noch die zur Normale senkrechten Brennlinien. Ist somit $P_\nu' = P_\nu$, worauf dann $H_\nu' = H_\nu$ wird, so ist auch $\Pi' = \Pi$: Wenn also die Begleitcomplexe beider Flächen übereinstimmen, so ist auch $\Pi' = \Pi$. Nach dem Satze des Art. 40 stimmen dann auch die weiteren drei Projectivitäten J_ν, P beider Flächen überein, und es folgt demnach:

Berühren sich zwei Flächen in einem Punkte in dritter Ordnung, so berühren sich ihre Normalencongruenzen in der gemeinsamen Normale in zweiter Ordnung und umgekehrt.

Wenn allgemeiner zwei beliebige der fünf Projectivitäten P, P_ν, J, übereinstimmen, so ist nach Art. 39 $H_\nu' = H_\nu$; es folgt, wie oben, da sich die zu a senkrechten Brennlinien in der Projectivität II entsprechen, dass $\Pi' = \Pi$ ist, wesshalb nach Art. 40 auch die übrigen Projectivitäten übereinstimmen:

Sind zwei der fünf Projectivitäten P, P_ν, J, für beide Flächen dieselben, so berühren sich die Flächen in dritter Ordnung. Hierin ist Herrn Mannheim's Satz[1] enthalten: Zwei Flächen berühren einander in dritter Ordnung, wenn sich ihre Centraflächen in beiden Schalen osculiren.

Zu bemerken ist, dass sich die Parallelflächen gleichen Abstandes zweier Flächen, welche sich in dritter Ordnung berühren, auch in dritter Ordnung berühren, da die Normalensysteme für Parallelflächen dieselben sind.

43. Ist in den obigen Entwickelungen $r_1 t_2 - r_2 t_1 = 0$, fallen mithin die Begleitcomplexe der gegebenen Fläche zusammen, so fallen auch die Proportionen 44), welche aussagen, dass der Begleitcomplex der zweiten Fläche mit dem der gegebenen identisch ist, in die erste Proportion zusammen, aus welcher sich wieder die Gleichung:

$$(s_2' - s_2)\, r_1 - (s_1' - s_1)\, r_2 = 0$$

ergibt, so dass die Gleichungen bestehen:

$$\frac{t_1' - t_1}{r_2' - r_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{r_2'}{r_1'} = \frac{t_2'}{t_1'}. \qquad 45)$$

Wird also r_1' angenommen, so können hieraus die r_2', t_1' berechnet werden, ohne dass die zweite Fläche die gegebene in dritter Ordnung berührt. Aus Fig. 1 ist hiezu ersichtlich: Sind die Begleitcomplexe von einander getrennt, so sind es auch die Nullpunkte w_ν der Tangentialebene, ihre Verbindunglinie W schneidet die Hauptbrennlinien und bestimmt sie hienach, wodurch dann ferner die Projectivität II gegeben ist; fallen aber die Punkte w_ν zusammen, so kann jede Gerade durch den Nullpunkt als Gerade W angenommen werden, es kann für die Fläche ein jedes Paar von Brennlinien, welches bezüglich des Begleitcomplexes

[1] Siehe Mannheim, Recherches géom. sur le contact de 3ième ordre. Compt. rend., t. 74, p. 929.

conjugirt ist, als Hauptbrennlinienpaar genommen werden. Haben aber beide Flächen dasselbe Hauptbrennlinienpaar, so folgt nach Art. 41, dass sich dann die Normalencongruenzen in zweiter Ordnung berühren. Dann berühren sich die Flächen in dritter Ordnung; denn nach Formel 41) schneiden die Hauptbrennlinien auf den Haupttangenten des Punktes m die Stücke: $\frac{r-t}{s_1}$, $\frac{t+r}{s_2}$ ab. Sollen demnach die Hauptbrennlinien für beide Flächen übereinstimmen, so muss $s'_\nu = s_\nu$ sein, woraus nach den Formeln 45) folgt, dass auch $r'_1 = r_1$, $t'_2 = t_2$ ist: Zwei Weingarten'sche Flächen berühren einander demnach in einem Punkte in dritter Ordnung, wenn sie in ihm denselben Begleitcomplex haben und für einen Hauptpunkt dieselbe Hauptbrennlinie.

Die Function, welche die Abhängigkeit der Hauptkrümmungsradien bei einer Weingarten'schen Fläche angibt, legt ferner die Projectivität P, also die Hauptbrennlinien fest, wesshalb auch folgt: Zwei Weingarten'sche Flächen, deren zugehörige Functionen dieselben sind, berühren einander in einem Punkte in dritter Ordnung, wenn sie in ihm denselben Begleitcomplex haben.

Soll in einem Punkte einer gegebenen Fläche eine andere in dritter Ordnung berühren, so muss das Doppelverhältniss der beiden Flächenpunkte übereinstimmen, daher: Die Punkte, in denen eine Fläche von Weingarten'schen Flächen in dritter Ordnung berührt wird, liegen auf der Curve vom Doppelverhältnisse 1; um dann die Punkte zu finden, in welchen eine bestimmte Weingarten'sche Fläche mit gegebener Function in dritter Ordnung berührt, hat man diese Curve zu schneiden mit derjenigen, welche Ort der Punktes ist, für den ein Hauptkrümmungsradius in dieser Function von dem anderen abhängt, z. B. für Minimalflächen mit der Curve von Punkten mit aufeinander senkrechten Inflexionstangenten.

44. Sind die Nullpunkte w_ν der Tangentialebene des Punktes m bezüglich der Begleitcomplexe für beide Flächen dieselben, so stimmen die Begleitcomplexe der Flächen überein; dies ist auch der Fall, wenn die Nullpunkte der unendlich fernen Ebene bezüglich der Begleitcomplexe, die Begleitrichtungen Γ_ν (s. Art. 35)

für beide Flächen dieselben sind; dann berühren sich die Flächen in dritter Ordnung. Es ist demnach die nicht invariante Form der 4fachen Bedingung der Flächenberührung dritter Ordnung, welche durch die Gleichheit der dritten Differentialquotienten ausgedrückt ist, durch die invariante 4fache Bedingung der Übereinstimmung der Begleitrichtungen ersetzt.

Diese invariante Beziehung lässt sich aber auch, wie folgt, analytisch formuliren. Die Complexe a, b, c, r der ersten Normalencongruenz haben die Hauptbrennlinien H, gemein; bei Berührung dritter Ordnung der zweiten Fläche muss auch der Complex r' der zweiten Congruenz diese Linien H, enthalten. Der Complex r' muss daher aus den Complexen a, b, c, r linear abgeleitet sein, wesshalb die Determinanten der Matrix $|abcrr'|$ verschwinden müssen.

Ferner müssen, wenn Berührung dritter Ordnung stattfinden soll, die Begleitcomplexe übereinstimmen, es müssen die Identitäten:

$$(a'b'c'r's^{\nu'}x) \equiv \rho(abcrs^{\nu}x)$$

bestehen. Da aber a', b', c', r' sich linear aus den a, b, c, r ableiten, so folgt:

$$(abcrs^{\nu'}x) \equiv \sigma(abcrs^{\nu}x);$$

zur Erfüllung dieser Beziehung ist aber nothwendig und hinreichend, dass

$$(abcrs^{\nu}s^{\nu'}) = 0$$

sei. Es folgt demnach:

Sollen sich zwei Flächen in einem Punkte, in welchem sie schon Hauptpunkte und Hauptebenen gemein haben, in dritter Ordnung berühren, so ist hiezu nothwendig und hinreichend, dass die 2fache invariante Bedingung erfüllt sei, nämlich dass die Determinanten der Matrix $|abcrr'|$ verschwinden und dass die beiden invarianten Gleichungen $(abcrs^{\nu}s^{\nu'}) = 0$ bestehen. Quadrirt man die letzte Gleichung, so übergeht sie wegen der Formeln 2) und 8) auch in $|bcs^{\nu}s^{\nu'}|^2 = 0$.

Ist das Doppelverhältniss des Punktes m gleich 1, so bestehen die Relationen $(abcrs^1s^2) = 0$ und $(abcrs^{1'}s^{2'}) = 0$, wesshalb sich s^2 linear aus a, b, c, r, s^1 und $s^{2'}$ linear aus $a, b, c, r, s^{1'}$

ableitet; daher ist die Gleichung $(abcrs^2s^{2\prime}) = 0$ eine Folge der Gleichung $(abcrs^1s^{1\prime}) = 0$, wesshalb sich die obigen Bedingungen auf das Verschwinden der Determinanten der Matrix $|abcrr'|$ und die Gleichung $|bcs^1s^{1\prime}|^2 = 0$ reduciren.

45. Es ist hier vielleicht am Platze, einer Fläche zu gedenken, welche bezüglich ihrer Grössen dritter Ordnung in einem einfachen Zusammenhange mit der gegebenen Fläche steht. Zwei Flächen, welche in einem gemeinsamen Punkte dieselben Hauptpunkte und Hauptebenen haben, können nämlich auch in der Beziehung zu einander stehen, dass sie für die gemeinsame Normale zwar dieselben Begleitcomplexe haben, dass aber demselben Hauptpunkte für verschiedene Flächen auch von einander verschiedene Begleitcomplexe zugeordnet sind. Hiezu müssen analog den Proportionen 44) die Proportionen bestehen:

$$r'_1 s'_2 - r'_2 s'_1 : r'_1 : r'_2 = t_1 s_2 - t_2 s_1 : t_1 : t_2,$$
$$t'_1 s'_2 - t'_2 s'_1 : t'_1 : t'_2 = r_1 s_2 - r_2 s_1 : r_1 : r_2;$$

aus ihnen folgt $s'_\nu = s_\nu$; aber ferner:

$$r'_1 = \frac{r_1 t_2}{t_2}, \quad t'_2 = \frac{r_1 t_2}{t_1}.$$

Ist die eine Fläche gegeben, so kann demnach die andere mit verkehrten Begleitcomplexen bestimmt werden. Das Doppelverhältniss der neuen Fläche ist das reciproke des Doppelverhältnisses der gegebenen

$$\overline{\delta} = \frac{r_2 t_1}{r_1 t_2},$$

und für die Krümmungsmasse in ihren Hauptpunkten gilt nach Art. 37 der Satz:

$$d^4 K_1 . K_2 = \delta.$$

Das Product der 8 Hauptkrümmungsradien der Centraflächen zweier zu einander in dieser Beziehung stehenden Flächen ist demnach gleich der achten Potenz des Abstandes der Hauptpunkte von einander.

§. 12. Flächen zweiten Grades.

46. Ist die Gleichung einer allgemeinen Fläche in der Form $F(xyz) = 0$ vorgelegt und sind F_i, F_{ik}, F_{ikl} die ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten von F nach xy, so ist:

$$\left.\begin{array}{ll} F_{11}+rF_2=0, & F_{22}+tF_3=0, \\ F_{111}+3F_{13}r+F_3r_1=0, & F_{222}+3F_{23}t+F_3t_2=0, \\ F_{112}+F_{23}r+F_3r_2=0, & F_{221}+F_{13}t+F_3t_1=0. \end{array}\right\} \quad 46)$$

Für eine Fläche zweiten Grades F^2 ist nun $F_{ikl}=0$, daher ergibt sich:

$$3F_{13}r+F_3r_1=0, \quad 3F_{23}t+F_1t_2=0, \quad F_{23}r+F_3r_2=0,$$
$$F_{13}t+F_3t_1=0;$$

führt man die hieraus folgenden Werthe von r_ν, t_ν in den Werth des Doppelverhältnisses δ, wie er sich in Art. 32 als $\delta=\frac{r_1t_2}{r_2t_1}$ ergab, so folgt:

Das Doppelverhältniss eines Punktes einer Fläche zweiten Grades oder einer ihrer Parallelflächen ist 9.

Um das Product der Krümmungsmasse der Centrafläche in den beiden Hauptpunkten eines Flächenpunktes zu bestimmen, müssen wir den Werth des Doppelverhältnisses $\delta=\frac{m_1m_2}{\mu_1\mu_2}$, der in Art. 37 gefunden wurde, bestimmen, d. h. entscheiden, ob der Ausdruck $\frac{m_1m_2}{\mu_1\mu_2}$ den Werth 9 oder $\frac{1}{9}$ hat. Da m_1 die Abscisse des Punktes von a_1 ist, dessen Nullebene bezüglich des Complexes C^1 (s. Formel 40) senkrecht zu a ist, so genügt m_1 der Gleichung

$$-t(r-t)r_1+(r_1s_2-r_2s_1)rm_1+r(r-t)r_1=0;$$

analoge Gleichungen erhält man für m_2, μ_1, μ_2, so dass sich ergibt:

$$m_1=\frac{(r-t)^2}{r_1s_2-r_2s_1}r_1, \quad \mu_1=\frac{(r-t)^2}{s_1t_2-s_2t_1}r_2,$$
$$m_2=\frac{(r-t)^2}{s_1t_2-s_2t_1}t_2, \quad \mu_2=\frac{(r-t)^2}{r_1s_2-r_2s_1}t_1,$$

und schliesslich:

$$\frac{m_1m_2}{\mu_1\mu_2}=\frac{r_1t_2}{r_2t_1}=\delta=9.$$

Demnach gilt nach Art. 37:

Für die Krümmungsmasse der Centrafläche in den beiden Hauptpunkten einer Normale einer F^2 besteht die Relation

$$9d^4K_1K_2 = 1,$$

ein Resultat, welches sich auch schon bei Halphen, l. c. S. 96 vorfindet.

47. Wir wollen den Satz, dass das Doppelverhältniss der F_2 den Werth 9 hat, noch in anderer Weise ableiten, wobei sich auch andere Sätze ergeben werden.

Es sei die Gleichung der F_2 in der Form vorgelegt:

$$F(xyz) \equiv k^2x^2 - y^2 + 2z(a_1x + a_2y + a_3z + a_4) = 0;$$

fällt die Tangente t der F_2 mit der Erzeugenden e_1 des Punktes m, deren Gleichung $y - kx = 0$ ist, zusammen, so entspricht ihr eine Tangente τ_1 der Centrafläche, welche mit ε_1 bezeichnet werden möge. Der Abschnitt ε_1 von ε_1 auf der y-Axe ergibt sich nach der Formel des Art. 33 aus der Gleichung:

$$t - r + r_2\varepsilon_1 + t_1\varepsilon_1 k = 0,$$

mit Hilfe der Formeln des vorigen Artikels als

$$\varepsilon_1 = \frac{r-t}{r_2 + kt_1} = \frac{F_3(F_{11} - F_{22})}{F_{23}F_{11} + kF_{13}F_{22}} = -\frac{a_4(1+k^2)}{(a_1 - a_2k)k}.$$

Dieser Werth von ε_1 hat aber auch noch eine andere Bedeutung. Bestimmt man nämlich die Normale des Punktes, dessen Coordinaten

$$x = \frac{a_4}{a_1 - a_2k}, \quad y = \frac{-ka_4}{a_1 - a_2k}, \quad z = 0$$

sind, welcher auf der anderen Erzeugenden e_2 des Punktes m liegt, so fällt diese in die xy-Ebene und schneidet auf der y-Axe das Stück ε_1 ab, so dass sie die obige Gerade ε_1 schneidet: die Gerade ε_1, welche der Erzeugenden e_1 als τ_1 entspricht, ist demnach diejenige Brennlinie, welche auf dem Normalenparaboloid der anderen Erzeugenden ε_2 liegt oder wegen der Bedeutung der Linie τ_1 als Schnittlinie aufeinander folgender Hauptebenen: Die Hauptebenen eines Punktes der F^2 werden von den Hauptebenen des auf einer Erzeugenden liegenden Nachbarpunktes in Erzeugenden des Normalenparaboloids der anderen Erzeugenden geschnitten.

In der Projectivität (t, τ_1) entsprechen demnach den beiden Erzeugenden e_1, e_2 der Fläche die beiden Brennlinien ε_2, ε_1, welche

Erzeugende der Normalenparaboloide für e_2, e_1 sind; ferner entspricht der einen Haupttangente h_1 von F_2 die Normale a. Folglich entsprechen sich auch die Hesse'schen Covarianten der Tripel $a, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ und h_1, e_2, e_1. Nun sind[1] die Inflexionstangenten der Centrafläche der F^2 die Hesse'sche Covariante der drei Strahlen $a, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, daher sind die Geraden t, welche diesen Inflexionstangenten in der vorliegenden Projectivität entsprechen, die Hesse'sche Covariante des Tripels e_1, e_2, h_1.

Erinnern wir uns der Definition der Inflexionstangenten zweiter Stufe eines Flächenpunktes im Art. 25, so ergibt sich eben Gesagten:

Die Inflexionstangenten zweiter Stufe eines Punktes einer Fläche zweiten Grades sind die Hesse'schen Covarianten der beiden Tripel, welche aus dem Erzeugendenpaar und aus einer Haupttangente des Punktes bestehen.

Zwei solche Paare, wie diese Hesse'schen Covarianten der beiden Tripel e_1, e_2, h_1 und e_1, e_2, h_2, bei welchen h_1, h_2 von e_1, e_2 harmonisch getrennt ist, sind aber, wie man leicht zeigt, vier Strahlen vom Doppelverhältnisse 4; daher ergibt sich für das Doppelverhältniss δ' der Inflexionstangenten zweiter Stufe oder der Nachbarnormalen, die einen Hauptpunkt auf einer Inflexionstangente der Centrafläche haben, der Werth $\delta' = 4$. Es folgt also nach Formel 28) für das Doppelverhältniss des Punktes F^2 der Werth $\delta = 9$.

48. Soll in einem Punkte einer beliebigen Fläche eine F^2 in dritter Ordnung berühren, so muss sein Doppelverhältniss zunächst 9 sein (s. Art. 43); dann berührt dort jedenfalls

[1] Siehe meine Inauguraldissertation: Über die Centraf. algebr. Flächen etc. Nova Acta der k. Leop. Carol. Akademie der Naturforscher, Bd. LII, Nr. 6, oder auch: Über das Normalensystem und die Centraflächen der F^2, II. Mitth., diese Sitzungsber., Bd. 97, S. 583, 1888; dort wurde auch gezeigt, dass die Tangentialebene eines Punktes der Centrafläche die Complexkegel desselben bezüglich zweier Complexe zweiten Grades in den Inflexionstangenten berührt, so dass die Centrafläche oder die desmische Fläche vierter Ordnung zwölfter Classe, als Integralfläche zweier Complexe zweiten Grades angesehen werden kann; es wird dies in Verbindung mit der Bestimmung der Inflexionstangentencurven der desmischen Fläche noch näher zu betrachten sein.

eine Parallelfläche einer F^2 in dritter Ordnung, da ja das Doppelverhältniss einer solchen Fläche auch 9 ist. Da es eine Bedingung für eine solche Fläche ist, selbst eine F^2 zu sein, so gibt es auf der Curve vom Doppelverhältnisse 9 eine discrete Anzahl von Punkten, in denen eine F^2 in dritter Ordnung berührt.[1]

Es gibt ein Büschel (F^2) von F^2, welche mit der gegebenen F^2 dieselben Erzeugenden e_1, e_2 und die zu ihnen benachbarten Erzeugenden e_1', e_2' gemein haben, welche also das windschiefe Vierseit e_1, e_2, e_1', e_2' enthalten oder die gegebene F^2 längs der beiden Erzeugenden e_1, e_2 berühren. Diese Flächen haben für e_1, e_2 dieselben Normalenparaboloide, welche sich in den Hauptpunkten von F^2 berühren. Daher sind für diese Flächen die Brennlinienpaare ε_1, ε_2, welche diesen Paraboloiden angehören, identisch, wesshalb auch die Hesse'schen Covarianten der Tripel a, ε_1, ε_2 oder die Inflexionstangenten der Centrafläche übereinstimmen. Da sich demnach die Centraflächen osculiren, so berühren sich nach Art. 42 die F^2 in dritter Ordnung. Wir können also sagen:

Es gibt eine discrete Anzahl von Punkten auf einer Fläche, welche auf der Curve vom Doppelverhältnisse 9 liegen, in denen die Flächen eines Büschels zweiter Ordnung in dritter Ordnung berühren; die Flächen dieses Büschels berühren sich längs der Erzeugenden des Punktes. In einem beliebigen Punkte der Curve vom Doppelverhältnisse 9 berühren Parallelflächen der Flächen eines solchen Büschels in dritter Ordnung.

49. Die Bestimmung der asymptotischen Curven der Centrafläche einer F^2 führt bei centrischen Flächen zur Multiplication elliptischer Functionen mit einer complexen sechsten Einheitswurzel; denn die Integration der Differentialgleichung der Inflexionstangenten zweiter Stufe der gegebenen F^2 erscheint durch diese complexe Multiplication gelöst. Sind nämlich λ, μ Parameter, welche auf je einer der

---

[1] Herr Hermite hat zuerst gezeigt (Cours d'analyse, p. 149), dass letztere Punkte nicht eine Curve erfüllen, wie man aus der Anzahl 10 der für die F^2 zu erfüllenden Bedingungen vielleicht erwarten könnte, sondern in discreter Anzahl vorhanden sind, wobei aber in jedem der Punkte $\infty^1 F^2$ in dritter Ordnung berühren; vergl. auch Halphen, Sur le contact des surfaces, Bull. de la soc. math., t. III, p. 28.

Regelschaaren der F^2 ausgebreitet sind, so ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{L}} = \pm \frac{d\mu}{\sqrt{M}},$$

wobei L und M dasselbe Polynom vierten Grades in λ, respective μ, vorstellen. Die Verzweigungserzeugenden, welche den Wurzeln der Gleichungen $L = 0$, $M = 0$ entsprechen, sind die acht Erzeugenden der Fläche, welche die Krümmungslinien berühren, also die Umbilicalerzeugenden der Fläche, welche den unendlich fernen imaginären Kugelkreis schneiden und je drei Kreispunkte der F^2 enthalten.

Ein Paar der Inflexionstangenten zweiter Stufe ist nun nach Art. 47 durch die Hesse'sche Covariante des Tripels, welches aus den beiden Erzeugenden, deren Differentialform:

$$d\lambda\, d\mu$$

ist und aus einer der Haupttangenten mit der Differentialform:

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{L}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt{M}}$$

besteht. Die Hesse'sche Covariante des Productes dieser Formen ist:

$$\frac{d\lambda^2}{L} + \frac{d\mu^2}{M} \pm \frac{d\lambda . d\mu}{\sqrt{L}\sqrt{M}},$$

die Differentialform der Inflexionstangenten zweiter Stufe. Aus dieser ergibt sich als Differentialgleichung der Curven, welche von den Inflexionstangenten der zweiten Stufe berührt werden:

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{L}} + \varepsilon \frac{d\mu}{\sqrt{M}} = 0, \qquad 47)$$

wobei ε eine der complexen sechsten Einheitswurzeln ist, womit die obige Behauptung erwiesen.

Diese Differentialgleichung gibt nur dann ein algebraisches Integral, wenn die quadratische Invariante g_2 der Verzweigungsform L verschwindet, wenn also das Doppelverhältniss der vier Umbilicalerzeugenden einer Regelschaar der F^2 äquianharmonisch ist. Es ist dies das Doppelverhältniss der vier unendlich fernen

Punkte dieser Erzeugenden auf dem unendlich fernen Kegelschnitte der Fläche oder das Doppelverhältniss des Axencomplexes der F_2; es kann „Doppelverhältniss der F^2" genannt werden.[1]

Wenn $g_2 = 0$ ist, das Doppelverhältniss der F^2 demnach eine complexe dritte Einheitswurzel ist, so sind die Integralcurven der Differentialgleichung 47) algebraisch; allerdings ist dann die F^2 und ihre Centrafläche imaginär, aber man kann leicht eine reelle Fläche vierter Classe construiren, welche reelle algebraische asymptotische Curven hat. Zwei Punkte eines Kreises, deren Abstand gleich dem Radius des Kreises ist, sind nämlich auf dem Kreise zu den unendlich fernen Kreispunkten äquianharmonisch; legt man daher durch den Kreis eine F^2 mit imaginären Erzeugenden und nimmt in der Ebene des gegebenen Kreises einen Kreis, welcher die beiden Punkte enthält, als Masskegelschnitt an, so hat die F^2 in dieser Massbestimmung eine Centrafläche mit reellen algebraischen asymptotischen Curven.

50. Ist $g_2 = 0$, so lässt sich die Differentialgleichung 47) schreiben:

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^3-1}} = \varepsilon \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^3-1}} = \pm \frac{d\mu'}{\sqrt{\mu'^3-1}},$$

so dass sich ergibt, dass die Integralcurven Curven vierter Ordnung sind, welche dieselben Erzeugenden wie die Krümmungslinien berühren. Wir werden demnach zu untersuchen haben, wieso es möglich ist, dass hier acht Erzeugende der Fläche von mehr als einer Schaar von C^4 berührt werden.

Sind 4 λ-Erzeugende projectiv 4 μ-Erzeugenden, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Erzeugenden in einer Ebene; die 4 λ-Erzeugenden können aber bei allgemeinem Doppelverhältnisse noch in drei anderen Weisen projectiv den 4 μ-Erzeugenden zugeordnet werden, und jede dieser Projectivitäten gibt wieder 4 Schnittpunkte der Erzeugenden, welche in einer Ebene liegen. Für einen Kegelschnitt, der durch die 4 Schnittpunkte der Erzeugenden, die in einer der vier so entstehenden Ebenen

[1] Vergl. meine Arbeit: Über das Normalensyst. und die Centrafl. der F^2. I. Mitth., diese Sitzungsber., Bd. 95, S. 549.

liegen, geht, als Masskegelschnitt, hat die F^2 Krümmungslinien, welche die 8 Erzeugenden berühren; das Tetraeder der 4 Ebenen ist das gemeinsame Polartetraeder von F^2 und diesem Kegelschnitte.

Wenn nun die 4 λ-Erzeugenden äquianharmonisch sind, so lassen sie sich in 12 verschiedenen Weisen auf die projectiven μ-Erzeugenden beziehen, so dass sich 12 Ebenen von 3 Polartetraedern ergeben; die Ebenen jedes Tetraeders enthalten die 16 Schnittpunkte der 8 Erzeugenden. Bei einer äquianharmonischen F^2 ergeben sich demnach in drei verschiedenen Massbestimmungen drei von einander verschiedene Schaaren von Krümmungslinien, welche die 8 Umbilicalerzeugenden berühren. Man kann daher sagen: Die C^4, welche bei der äquianharmonischen F^2 von den Inflexionstangenten zweiter Stufe berührt werden, sind Schaaren von Krümmungslinien für zwei gewisse Massbestimmungen.

Sind die 4 λ-Erzeugenden harmonisch, so kann man sie in 8facher Weise auf die projectiven μ-Erzeugenden beziehen, so dass sich zwei Polartetraeder ergeben und zwei Schaaren von C^4, welche alle 8 Erzeugenden berühren. Bei einer harmonischen F^2 liegt der Kreispunkt eines bestimmten Hauptschnittes auf einer axialen Kreisebene, welche zu dem Hauptschnitte senkrecht ist; die 8 Kreispunkte, welche ausserhalb dieses Hauptschnittes liegen, befinden sich in zwei Ebenen, welche zu diesem Hauptschnitte parallel sind. Von den hier auftretenden Schaaren von C^4, welche die Umbilicarerzeugenden berühren, wird die eine Schaar von den Krümmungslinien gebildet, die andere enthält die Integralcurven der Differentialgleichung:

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{L}} \pm i\frac{d\mu}{\sqrt{M}} = 0;$$

eine Curve dieser Schaar hat in einem Punkte der F^2 eine Tangente, welche dem Paare angehört, das gleichzeitig das Erzeugendenpaar und das Haupttangentenpaar dieses Punktes harmonisch trennt.

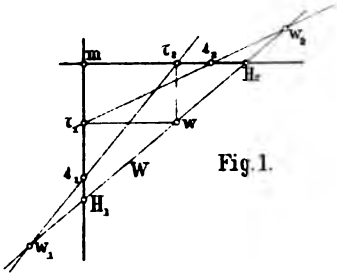


Fig. 1.

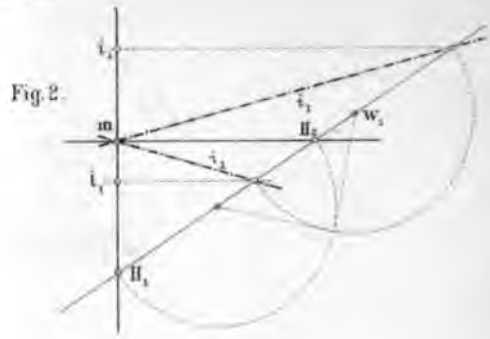


Fig. 2.

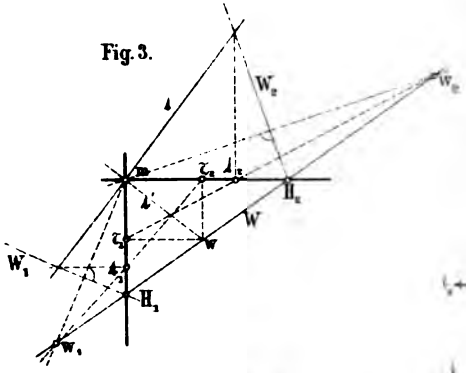


Fig. 3.

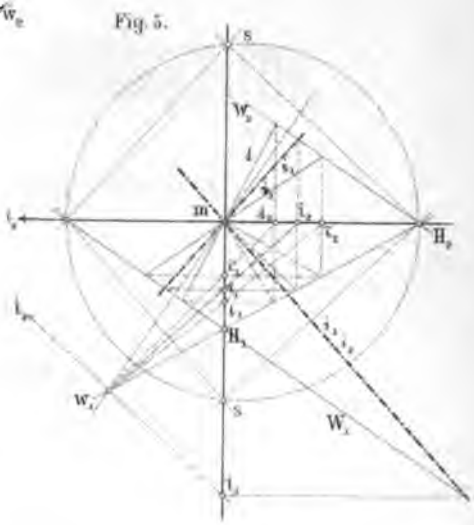
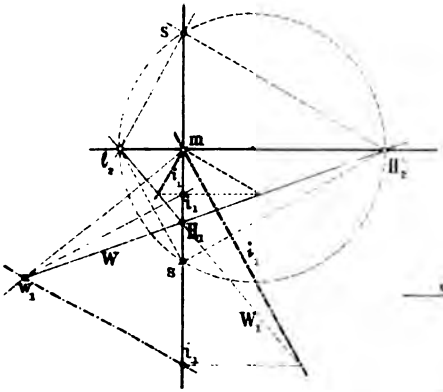


Fig. 5.

Fig. 4



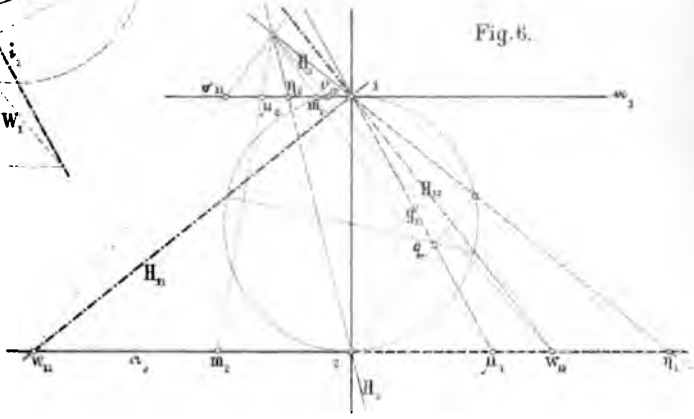


Fig. 6.

Lith. Anstalt v. J. Barth, Rinnhaus Wien

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. Band. III. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

VI. SITZUNG VOM 5. MÄRZ 1891.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October-December 1890) der Abtheilung II. b., XCIX. Bd., der Sitzungsberichte vor.

Herr Prof. Dr. Anton Fritsch in Prag übermittelt Band III, Heft 1, seines mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie herausgegebenen Werkes: „Fauna der Gaskohle und der Kalksteine der Permformation Böhmens", enthaltend die Ordnung Selachii *(Pleuracanthus, Xenacanthus)*. (Mit 11 Tafeln.) Prag 1890, Folio.

Das c. M. Herr Prof. Dr. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: „Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe".

Das c. M. Herr Prof. Dr. R. Maly übersendet eine in dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag von Herrn Franz v. Hemmelmayr ausgeführte Arbeit: „Über die Methylenderivate des Harnstoffes und Thioharnstoffes".

Herr Prof. Dr. J. Puluj in Prag übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Bestimmung des Coefficienten der Selbstinduction mit Hilfe des Elektrodynamometers und eines Inductors".

Der Secretär legt eine von Herrn Emil Waelsch, Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag, ausgeführte Arbeit vor, betitelt: „Zur Construction der Polargruppen".

Herr Dr. Josef Maria Eder, Director des photo-chemischen Laboratoriums der k. k. Versuchsanstalt für Photographie in Wien, übermittelt eine vorläufige Mittheilung unter dem Titel: „Neue Banden und Linien im Emissionsspectrum der Ammoniak-Oxygen-Flamme".

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität von den Herren Hugo und Josef Hradil in Wien mit der Aufschrift vor: „Reblausangelegenheiten".

Das w. M. Herr Hofrath Director J. Hann überreicht eine Abhandlung des Herrn Eduard Mazelle, Adjunct des k. k. astronomisch-meteorologischen Observatoriums der nautischen Akademie in Triest unter dem Titel: „Der tägliche Gang der Häufigkeit und Stärke der einzelnen Windrichtungen in Triest".

Der Vicepräsident Herr Hofrath Dr. J. Stefan überreicht eine im physikalischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Untersuchung von Herrn Dr. Gustav Jäger: „Über die Abhängigkeit der Capillaritätsconstanten von der Temperatur und deren Bedeutung für die Theorie der Flüssigkeiten".

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Wendt, G., Die Entwicklung der Elemente. Entwurf zu einer biogenetischen Grundlage für Chemie und Physik. Berlin 1891, 8°.

Chadt, J., Lesni Pudoznalstvi. Pisek 1887, 8°.

— Vliv Hornin na vzrust lesnich dřevin. Pisek 1889, 8°.

— Zalesňováni Holin. Pisek 1890, 8°.

Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Seit dem Beginne des Jahres 1885 ist eine Reihe von interessanten Untersuchungen erschienen, welche sich theils auf die Wurzeln der allgemeinen hypergeometrischen Reihe, theils auf diejenigen der im Endlichen abbrechenden und einiger zu derselben in naher Beziehung stehenden ganzen Functionen beziehen. So wurde von Herrn Stieltjes die Discriminante der Hermite'schen Function n^{ten} Grades $U_n(x)$ und von demselben und Herrn Posse die symmetrische Function $|s_{i+\varkappa}|_{(i,\varkappa=0,1,2,\ldots,r)}$, wo $s_\varkappa$ die Summe der $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln des Jacobi'schen Polynomes n^{ten} Grades $T_{n,\alpha,\beta}(x)$ vorstellt und speciell die Discriminante desselben bestimmt, sowie eine Reihe von Sätzen über die Maxima gewisser Functionen von n reellen Veränderlichen ermittelt, in denen die Wurzeln der angeführten ganzen Functionen eine Rolle spielen. Die Discriminante der hypergeometrischen Reihe mit endlicher Gliederzahl hat auf einem anderen Wege, als die eben angeführten Mathematiker, auch Herr David Hilbert abgeleitet und ebenso wie Herr Stieltjes einige Sätze über die Natur und Vertheilung der Wurzeln dieser ganzen Function erschlossen. Analoge Sätze über eine in der Theorie der Bessel'schen Functionen auftretende ganze Function n^{ten} Grades $A_n(x)$ hat Herr Halphen veröffentlicht.

Das weitaus wichtigste von allen hieher gehörigen Resultaten ist aber das von Herrn Felix Klein am 27. August 1890 in der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften und am 16. September der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Bremen

mitgetheilte Theorem, dass die hypergeometrische Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, wo α, β, γ reelle Grössen sind, $\alpha \geqq \beta$ ist und γ selbstverständlich weder Null noch eine ganze negative Zahl sein kann, in dem Intervalle 0...1

$$A = \left\{\frac{\alpha-\beta+|1-\gamma|-|\gamma-\alpha-\beta|+1}{2}\right\}+\varepsilon$$

Wurzeln besitzt, wo $\{a\}$ die grösste ganze Zahl vorstellt, welche von α überschritten wird, ε für $\gamma<1$, $\gamma-\alpha-\beta\leqq 0$ und weder $\gamma-\alpha$ noch $\gamma-\beta$ Null oder negativ ganzzahlig denjenigen der zwei Werthe 0, 1 vorstellt, für welchen

$$A \equiv \frac{1-\operatorname{sign}\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{2} \pmod 2$$

wird, für $\gamma<1$, $\gamma-\alpha-\beta\geqq 0$ und weder α noch β Null oder negativ ganzzahlig diejenige der zwei Zahlen 0, 1, welche

$$A \equiv \frac{1-\operatorname{sign}\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}{2} \pmod 2$$

macht und endlich in allen anderen Fällen gleich 0 ist. Diesen Satz hat Herr Felix Klein[1] in dem vor Kurzem ausgegebenen vierten Hefte des 37. Bandes der „Mathematischen Annalen" mittelst einer eigenthümlichen, höchst bemerkenswerthen Methode, von welcher er mit Recht erwartet, dass sie bei der Untersuchung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung noch wesentliche Dienste leisten wird, bewiesen.

Die auf die Discriminante der erwähnten und einiger anderen ganzen Functionen bezüglichen Sätze sollen nun im ersten Paragraphen der vorliegenden Mittheilung in neuer Weise abgeleitet werden, während der zweite einen höchst einfachen Beweis des eleganten Klein'schen Theorems enthält.

§. 1. Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)y''(x)-\left\{\frac{p}{a}+\frac{q}{b}-\frac{r}{ab}x\right\}y'(x)-$$

$$-\frac{n}{ab}\{r+n-1\}y(x)=0\,,\quad (a,\,b\gtrless 0) \qquad 1)$$

[1] „Über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe", a. a. O.

wo a, b, p, q, r reelle Zahlen sind, hat, wie man leicht findet, bei endlichen Werthen von a und b stets eine ganze Function n^{ten} Grades als particuläres Integral, ist aber wenigstens eine der Grössen a, b unendlich, so ist dies nur der Fall, wenn

$$\left|\frac{r}{ab}\right| > 0$$

ist. Differentiirt man dieselbe $\varkappa$-mal nach x, so erhält man die allgemeinere Beziehung

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)y^{(\varkappa+2)}(x)-\left\{\frac{p+\varkappa}{a}+\frac{q+\varkappa}{b}-\frac{r+2\varkappa}{ab}x\right\}y^{(\varkappa+1)}(x)-$$

$$-\frac{n-\varkappa}{ab}\{r+\varkappa+n-1\}y^{(\varkappa)}(x)=0\,, \qquad 2)$$

welche u. A. zeigt, dass $y(x)$ keine anderen mehrfachen Wurzeln besitzen kann, als a und b, und dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine dieser Grössen eine $\varkappa$-fache Wurzel ist, darin besteht, dass die lineare Function von x

$$\frac{p+\varkappa-1}{a}+\frac{q+\varkappa-1}{b}-\frac{r+2\varkappa-2}{ab}x$$

für dieselbe verschwindet.

Aus der Gleichung 2) folgt sofort die Relation

$$\prod_{1}^{n-\varkappa-1}\left(1-\frac{x_\lambda^{(\varkappa+1)}}{a}\right)\left(1-\frac{x_\lambda^{(\varkappa+1)}}{b}\right)y^{(\varkappa+2)}(x_\lambda^{(\varkappa+1)})=$$

$$=\left\{\frac{(n-\varkappa)(r+\varkappa+n-1)}{ab}\right\}^{n-\varkappa-1}\prod_{1}^{n-\varkappa-1}y^{(\varkappa)}(x_\lambda^{(\varkappa+1)})\,, \qquad 3)$$

wo die Grössen $x_\lambda^{(\varkappa+1)}$ $(\lambda=1,2,\ldots,n-\varkappa-1)$ die Wurzeln der Gleichung $y^{(\varkappa+1)}(x)=0$ vorstellen. Nimmt man den Coëfficienten der höchsten Potenz von x in $y(x)$ gleich 1, so ist

$$\prod_{1}^{n-\varkappa-1}\left(1-\frac{x_\lambda^{(\varkappa+1)}}{a}\right)\left(1-\frac{x_\lambda^{(\varkappa+1)}}{b}\right)=\frac{y^{(\varkappa+1)}(a)\,y^{(\varkappa+1)}(b)}{(ab)^{n-\varkappa-1}\,[n(n-1)\ldots(n-\varkappa)]^2}.$$

Schreibt man nun in der Gleichung 2) für $\varkappa$: $\varkappa+1$ und setzt $x=a$, beziehungsweise $=b$, so entstehen die Gleichungen

$$y^{(x+1)}(a) = \frac{ab\left\{\frac{p+x+1}{a} + \frac{q-r-x-1}{b}\right\}}{(n-x-1)(r+x+n)} y^{(x+2)}(a)$$

$$y^{(x+1)}(b) = \frac{ab\left\{\frac{q+x+1}{b} + \frac{p-r-x-1}{a}\right\}}{(n-x-1)(r+x+n)} y^{(x+2)}(b)$$

aus welchen wegen

$$y^{(n)}(a) = y^{(n)}(b) = n!$$

folgt

$$y^{(x+1)}(a) = (ab)^{n-x-1} \prod_{1}^{n-x-1} \frac{\frac{p+x+\lambda}{a} + \frac{q-r-x-\lambda}{b}}{r+x+\lambda+n-1} n(n-1) \dots (n-x)$$

$$y^{(x+1)}(b) = (ab)^{n-x-1} \prod_{1}^{n-x-1} \frac{\frac{q+x+\lambda}{b} + \frac{p-r-x-\lambda}{a}}{r+x+\lambda+n-1} n(n-1) \dots (n-x)$$

und demnach ist

$$\prod_{1}^{n-x-1} \left(1-\frac{x_\lambda^{(x+1)}}{a}\right)\left(1-\frac{x_\lambda^{(x+1)}}{b}\right) = \prod_{1}^{n-x-1} \frac{\left\{\frac{p+x+\lambda}{a} + \frac{q-r-x-\lambda}{b}\right\}\left\{\frac{q+x+\lambda}{b} + \frac{p-r-x-\lambda}{a}\right\}}{(r+x+\lambda+n-1)^2} (ab)^{n-x-1}.$$

Beachtet man ferner, dass die Discriminante

$$D_f = \prod_{1}^{n}{}_{x,\lambda} (x_x - x_\lambda)^2 \quad (x > \lambda)$$

der Gleichung

$$f'(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = 0 \qquad (f'(x_\lambda) = 0)$$

durch die Relation

$$D_f = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{c_n^n} \prod_{1}^{n}{}_{\lambda} f'(x_\lambda)$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n}{c_n^{n-1}} \prod_{1}^{n-1}{}_{\lambda} f(x'_\lambda) \qquad (f'(x'_\lambda) = 0)$$

gegeben ist, so kann man die Formel 3) auch in folgender Weise schreiben:

$$D_{y^{(x)}} = (ab)^{2(n-x-1)} \prod_{1}^{n-x-1}{}_{\lambda} \frac{\left\{\frac{p+x+\lambda}{a} + \frac{q-r-x-\lambda}{b}\right\}\left\{\frac{r+x+\lambda-p}{a} - \frac{q+x+\lambda}{b}\right\}(n-x)^{n-x}}{(r+x+\lambda+n-1)^2 (r+x+n-1)^{n-x-1}}.$$

Schreibt man in dieser Formel für x der Reihe nach $0, 1, 2, \ldots, n-2$, multiplicirt die so entstehenden Gleichungen mit einander und bedenkt, dass $D_{y^{(n-1)}} = 1$ ist, so erhält man schliesslich die Relation

$$D_y = \frac{2^2 . 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} n^n (ab)^{n(n-1)} \left(\frac{p+1}{a} + \frac{q-r-1}{b}\right)\left(\frac{p+2}{a} + \frac{q-r-2}{b}\right)^2 \ldots \left(\frac{p+n-1}{a} + \frac{q-r-n+1}{b}\right)^{n-1}}{(r+n-1)^{n-1} (r+n)^n \ldots (r+2n-3)^{2n-3} (r+2n-2)^{2n-2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{r+1-p}{a} - \frac{q+1}{b}\right)\left(\frac{r+2-p}{a} - \frac{q+2}{b}\right)^2 \ldots \left(\frac{r+n-p-1}{a} - \frac{q+n-1}{b}\right)^{n-1} .$$

In dieser allgemeinen Relation sind alle in der Einleitung erwähnten und eine Reihe von anderen bemerkenswerthen Discriminanten als specielle Fälle enthalten.

Setzt man nämlich zunächst

$$a = -b = 1 , \qquad q - p = \alpha - \beta , \qquad r = \alpha + \beta ,$$

so verwandelt sich die Differentialgleichung 1) in

$$(1-x^2) y''(x) + (\alpha - \beta - (\alpha+\beta) x) y'(x) + n(\alpha+\beta+n-1) y(x) = 0 ,$$

so dass in diesem Falle $y(x) = T_{n,\alpha,\beta}(x)$ wird. Die Gleichung 4) liefert daher die von Herrn Stieltjes[1] angegebene und von den Herren Posse[2] und Hilbert[3] bewiesene Relation

$$D_{T_{n,\alpha,\beta}} = \frac{2^{n(n-1)} 2^2 . 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} n^n (\alpha+1)(\alpha+2)^2 \ldots (\alpha+n-1)^{n-1} (\beta+1)(\beta+2)^2 \ldots (\beta+n-1)^{n-1}}{(\alpha+\beta+n-1)^{n-1} (\alpha+\beta+n)^n \ldots (\alpha+\beta+2n-2)^{2n-2}} .$$

Wird ferner

$$a = -b = \infty , \qquad \frac{r}{ab} = -2 , \qquad p = q ,$$

so geht die Gleichung 1) in

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2ny(x) = 0$$

über und demnach ist in diesem Falle $y(x) = U_n(x)$. Aus 4) folgt also die Stieltjes'sche Relation[4]

$$D_{U_n} = 2^2 . 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} n^n .$$

Setzt man ferner

$$a = 1, \qquad b = \infty, \qquad \frac{q}{b} = \frac{r}{b} = 1,$$

so erhält man aus 1) die Differentialgleichung

$$(1-x)y''(x) + (x-p-1)y'(x) - ny(x) = 0 ,$$

von welcher, wie ich gezeigt habe,[5] die ganze Function n^{ten} Grades $T_n^{p-1}(x-1)$ ein particuläres Integral ist. Aus 4) ergibt sich daher die Formel

---

[1] „Sur les polynômes de Legendre." Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences. Paris, t. 100, p. 620—622.

[2] „Über die Functionen, welche den Legendre'schen ähnlich sind." Sammlung der Mittheilungen und Protokolle der mathematischen Gesellschaft in Charkow. Jahrgang 1885, II, S. 155—169. Der Inhalt dieser in russischer Sprache erschienenen Abhandlung ist mir nur durch das Referat in dem „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" bekannt. — „Sur quelques applications des fractions continues algébriques." St. Pètersbourg 1886.

[3] „Über die Discriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe." Journal f. d. reine und angewandte Mathematik von Kronecker und Weierstrass, Bd. 103, S. 337—345.

[4] „Sur quelques théorèmes d'algèbre." Comptes rendus, t. 100, S. 439—440.

[5] „Über die Functionen $T_n^m(x)$." Diese Sitzungsberichte, Bd. 95, Abth. II, S. 274—290.

$$D_{T_n^p} = 2^2 . 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} n^n (p+2)(p+3)^2 \ldots (p+n)^{n-1} .$$

Ist

$$a = 1, \quad b = \infty, \quad \frac{r}{b} = -2, \quad \frac{p}{a} + \frac{q}{b} = -2n-2,$$

so entsteht aus 1) die Differentialgleichung

$$(1-x)y''(x) - 2\{x-n-1\}y'(x) + 2ny(x) = 0,$$

von welcher die ganze Function $A_n(x-1)$ ein particuläres Integral ist. Die Formel 4) liefert daher den von Halphen[1] aufgestellten Ausdruck für die Discriminante dieser Function

$$D_{A_n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (2n-1)(2n-3)^3(2n-5)^5 \ldots 7^{2n-7} . 5^{2n-5} . 3^{2n-3}.$$

Setzt man endlich

$$a = b = 1, \qquad r = 1-\gamma, \qquad p+q = 2-\gamma \qquad (\gamma \geqq 2n \text{ oder nicht ganzzahlig})$$

und schreibt für $x : x+1$, so ergibt sich aus 1) die specielle Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) + \{(1-\gamma)x+1\}y'(x) - n(n-\gamma)\,y(x) = 0. \qquad 4a)$$

Ein particuläres Integral derselben ist, wie man leicht findet, die ganze Function

---

[1] „Correspondance. Extrait d'une lettre de M. Halphen à M. Rouché". Nouvelles Annales de mathématiques par M. Ch. Brisse et M. E. Rouché. Troisième série, tome septième, p. 204.

$$\psi_{n,\gamma}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(-x)^\lambda}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n-\lambda)\,\Pi(\gamma-n-\lambda)}, \qquad 5)$$

deren Discriminante demnach nach 4) folgenden Werth hat

$$D_{\psi_{n,\gamma}} = \frac{2^2 . 3^3 \ldots (n-1)^{n-1} n^n}{(\gamma-n)^{n-1}(\gamma-n-1)^n \ldots (\gamma-2n+1)^{2n-2}}.$$

Die in den obigen Zeilen ermittelten speciellen Determinanten hätten auch durch ein anderes Verfahren abgeleitet werden können. Alle bisher behandelten speciellen Functionen haben nämlich einerseits die Eigenschaft, dass zwischen drei dem Grade nach unmittelbar auf einander folgenden von ihnen eine lineare Relation besteht und sind anderseits so beschaffen, dass ihre Ableitung eine Function derselben Art ist, deren wesentliche Constanten sich von denen der vorliegenden nur um eine oder zwei Einheiten unterscheiden. Diese zwei Eigenschaften bewirken, dass die Discriminante einer solchen Function sich auf die Resultante von zwei unmittelbar aufeinander folgenden zurückführen lässt, welche mit Hilfe der ersten von ihnen auf die Resultante der zwei ersten Functionen reducirt werden kann. Es mag dieses Verfahren an den Functionen $\psi_{n,\gamma}(x)$ auseinandergesetzt werden. Zu dem Behufe sollen einige Eigenschaften dieser interessanten, bisher noch wenig beachteten Functionen abgeleitet werden. Differentiirt man die Gleichung 5) nach x, so erhält man die Formel

$$\frac{d\psi_{n,\gamma}(x)}{dx} = -\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(-x)^\lambda}{\Pi(\lambda)\,\Pi(n-\lambda-1)\,\Pi(\gamma-n-\lambda-1)}$$

$$= -\psi_{n-1,\gamma-2}(x)$$

und demnach ist allgemein

$$\frac{d^r \psi_{n,\gamma}(x)}{dx^r} = (-1)^r \psi_{n-r,\gamma-2r}(x) \quad (n \geqq r \geqq 0)$$

Nach 5) ist ferner, wie man leicht zeigt:

$$\psi_{n,\gamma}(x) + \frac{\gamma-2n+2}{n}\left\{(\gamma-2n+1)x - \frac{\gamma+1}{\gamma-2n+3}\right\}\psi_{n-1,\gamma}(x) = \frac{\{3n\gamma-n^2+5n-(\gamma+1)(\gamma+2)\}\psi_{n-2,\gamma}(x)}{n(\gamma-2n+3)} \qquad 6)$$

und demnach sind diese Functionen die Näherungsnenner einer regulären Kettenbruchentwicklung. Verbindet man die durch Differentiation von 6) sich ergebende Relation

$$\psi_{n-1,\gamma-2}(x) + \frac{\gamma-2n+2}{n}\left\{(\gamma-2n+1)x - \frac{\gamma+1}{\gamma-2n+3}\right\}\psi_{n-2,\gamma-2}(x) - \frac{3n\gamma-n^2+5n-(\gamma+1)(\gamma+2)}{n(\gamma-2n+3)}\psi_{n-3,\gamma-2}(x) =$$
$$= \frac{(\gamma-2n+1)(\gamma-2n+2)}{n}\psi_{n-1,\gamma}(x)$$

mit derjenigen, welche entsteht, wenn in Gleichung 6) für $n : n-1$ und für $\gamma : \gamma-2$ geschrieben wird, so erhält man die Gleichung

$$(n-1)\psi_{n-1,\gamma}(x) = -\left\{x - \frac{1}{\gamma-2n+3}\right\}\psi_{n-2,\gamma-2}(x) + \frac{1}{\gamma-2n+3}\psi_{n-3,\gamma-2}(x) \qquad 7)$$

oder

$$\left(x-\frac{1}{\gamma-2n+3}\right)\frac{d\psi_{n-1,\gamma}(x)}{dx}=\frac{1}{\gamma-2n+3}\,\frac{d\psi_{n-2,\gamma}(x)}{dx}+(n-1)\,\psi_{n-1,\gamma}(x)\,, \qquad 8)$$

welche Gleichung ebenso, wie die früher aufgestellte Discriminante lehrt, dass die Gleichung $\psi_{n,\gamma}(x)=0$ nur verschiedene Wurzeln besitzt.

Besässe nämlich diese Gleichung eine mehrfache Wurzel, so müsste für dieselbe auch $\frac{d\psi_{n,\gamma}(x)}{dx}$, also $\psi_{n-1,\gamma-2}(x)$, verschwinden, was nach 7) auch das Nullwerden von $\psi_{n-2,\gamma-2}(x)$ zur Folge hätte. Ein gleichzeitiges Verschwinden von $\psi_{n-1,\gamma-2}(x)$ und $\psi_{n-2,\gamma-2}(x)$ würde aber nach 6) bewirken, dass für denselben Werth von x sämmtliche Functionen $\psi_{n,\gamma-2}(x)$, $\psi_{n-1,\gamma-2}(x)$, …, $\psi_{1,\gamma-2}(x)$, $\psi_{0,\gamma}(x)$ gleich Null werden, was unmöglich ist, da die letzte von ihnen eine von Null verschiedene Constante ist.

Schreibt man in der Gleichung 8) für $n:n+1$, und ersetzt x der Reihe nach durch die verschiedenen Wurzeln x'_λ ($\lambda=1,2,\ldots,n-1$) der Gleichung $\psi_{n-1,\gamma-2}(x)=0$, so erhält man durch Multiplication der so entstehenden Gleichungen die Relation

$$D_{\psi_{n,\gamma}}=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,[\Pi(n)\,\Pi(\gamma-2n)]^{n-1}}{n^{2n-1}\,[(\gamma-2n+1)\,\Pi(n-2)\,\Pi(\gamma-2n+2)]^{n-1}}\,R\{\psi_{n-1,\gamma-2}(x),\,\psi_{n-2,\gamma-2}(x)\}\,, \qquad 9)$$

wo

$$R\{\psi_{n-1,\gamma-2}(x),\,\psi_{n-2,\gamma-2}(x)\}=\prod_{\varkappa,\lambda}(x'_\lambda-x''_\varkappa) \qquad \{\psi_{n-2,\gamma-2}(x''_\varkappa)=0;\ \varkappa=1,2,\ldots,n-2;\ \lambda=1,2,\ldots,n-1\}$$

ist. Schreibt man ferner in 6) für $n:n-1$, für $\gamma:\gamma-2$ und setzt sodann $x=x''_\varkappa$ ($\varkappa=1,2,\ldots,n-2$), so liefert die Multiplication der dadurch sich ergebenden Relationen die Formel

$$R\{\psi_{n-1,\gamma-2}(x),\ \psi_{n-2,\gamma-2}(x)\} = \left[\frac{\{3(n-1)(\gamma-2)-(n-1)^2+5(n-1)-\gamma(\gamma-1)\}}{(n-1)(\gamma-2n+3)}\right]^{n-2} R\{\psi_{n-2,\gamma-2}(x),\ \psi_{n-3,\gamma-2}(x)\}$$

welche im Vereine mit 9) zur Bestimmung von $D_{\psi_{n,\gamma}}$ ausreicht.

Ich will nur noch darauf hinweisen, dass man die Differentialgleichung $4a$) in der Form

$$\left[e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma+1}\psi_{n-1,\gamma-2}(x)\right]' = n(\gamma-n)\, e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma-1}\psi_{n,\gamma}(x)$$

schreiben kann, aus welcher man unmittelbar das Bestehen der allgemeineren Relation

$$\left[e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma+2r-1}\psi_{n-r,\gamma-2r}(x)\right]^{(r)} = \frac{\Pi(n)\,\Pi(\gamma-n)}{\Pi(n-r)\,\Pi(\gamma-n-r)}\, e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma-1}\psi_{n,\gamma}(x)$$

erschliesst, die wegen der Gleichung

$$\psi_{0,\gamma-2n}(x) = \frac{1}{\Pi(\gamma-2n)}$$

zu der folgenden Darstellung der Function $\psi_{n,\gamma}(x)$ führt:

$$\psi_{n,\gamma}(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} x^{\gamma+1}}{\Pi(n)\,\Pi(\gamma-n)}\left[e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma+2n-1}\right]^{(n)}.$$

Dieselbe zeigt, dass für jede, eine n-malige Differentiation zulassende Function $\varphi(x)$, welche den Bedingungen

$$\lim_{x=0} e^{-\frac{1}{x}} x^{n-\gamma-1}\varphi(x) = 0;\quad \lim_{x=\infty} \varphi(x) x^{n-\gamma-1} = 0$$

genügt, die Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma-1}\varphi(x)\psi_{n,\gamma}(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{\Pi(n)\Pi(\gamma-n)}\int_0^\infty \varphi^{(n)}(x)\,e^{-\frac{1}{x}} x^{2n-\gamma-1}\,dx$$

besteht, von deren speciellen Fällen die folgenden hier Erwähnung finden mögen

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{x}} x^{m-\gamma-1}\psi_{n,\gamma}(x)\,dx = \frac{(-1)^n\Pi(m)\Pi(\gamma-m-n-1)}{\Pi(n)\Pi(m-n)\Pi(\gamma-n)} \quad (\gamma>m+n;\ m\geqq n)$$

$$\int_0^\infty e^{\left(\frac{1}{x}+\alpha^2 x\right)}\psi_{n,2n-\frac{3}{2}}(x)\frac{dx}{x^{2n-\frac{1}{2}}} = \frac{(1+2\alpha)\alpha^{2n}e^{-2\alpha}\sqrt{\pi}}{2\Pi(n)\Pi\left(n-\frac{3}{2}\right)}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}-rx\cos\varphi}\cos(rx\sin\varphi)\psi_{n,2n-\frac{1}{2}}(x)\,dx}{x^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{r^{n-\frac{1}{2}}e^{-2\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\pi}}{\Pi(n)\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\sin\left\{\frac{\varphi}{2}-n\varphi+2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right\} \quad \left(\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}-rx\cos\varphi}\sin(rx\sin\varphi)\psi_{n,2n-\frac{1}{2}}(x)\,dx}{x^{2n+\frac{1}{2}}} = \frac{r^{n-\frac{1}{2}}e^{-2\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\pi}}{\Pi(n)\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}\cos\left\{\frac{\varphi}{2}-n\varphi+2\sqrt{r}\sin\frac{\varphi}{2}\right\} \quad \left(\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma-1} \psi_{n,\gamma}(x)\psi_{m,\gamma}(x)\,dx = 0 \qquad (m \gtrless n;\ \gamma > m+n)$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{x}} x^{-\gamma-1} (\psi_{n,\gamma}(x))^2\,dx = \frac{1}{(\gamma-2n)\,\Pi(n)\,\Pi(\gamma-n)} \qquad (\gamma > 2n),$$

deren letzte zwei vor Kurzem Herr J. Rajewski[1] in den Schriften der Krakauer Akademie der Wissenschaften aufgestellt hat.

Zum Schlusse dieses Paragraphes will ich noch den folgenden allgemeinen Satz angeben, in welchem die in der Einleitung erwähnten Theoreme der Herren Stieltjes und Posse über die Extreme gewisser Functionen von n reellen Veränderlichen als specielle Fälle enthalten sind, und welcher eine interessante Eigenschaft der Näherungsnenner von gewissen Kettenbruchentwicklungen ausspricht.

Ist $f(x)$ eine ganze Function m^{ten} Grades von x mit den verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $g(x)$ eine ganze Function vom Grade $m-1$, und lassen sich m Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ so bestimmen, dass in der Kettenbruchentwicklung der Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m-1} \alpha_\lambda \int_{x_\lambda}^{x_{\lambda+1}} \frac{(z-x_1)^{\frac{g(x_1)}{f'(x_1)}} (z-x_2)^{\frac{g(x_2)}{f'(x_2)}} \ldots (z-x_m)^{\frac{g(x_m)}{f'(x_m)}}\,dz}{(x-z)f(z)}$$

[1] „O pewnych całkach określonych.“ Der Inhalt dieser Arbeit ist mir nur durch den kurzen Auszug im „Anzeiger der k. Akademie der Wissenschaften in Krakau“ (Februar 1890) bekannt.

die n ersten Theilnenner linear mit positivem Coëfficienten von x, der $(n+1)^{\text{te}}$ aber vom Grade $m-1$ wird und dass der n^{te} Näherungsnenner $\psi_n(x)$ dieser Kettenbruchentwicklung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, so wird die Function

$$\chi(x_1')\chi(x_2')\dots\chi(x_n')\prod_{\varkappa,\lambda}(x_\lambda'-x_\varkappa')^2 \quad (\lambda>\varkappa)$$

der reellen Veränderlichen $x_1', x_2', \dots, x_n'$, wo

$$\chi(x)=e^{\int\frac{g(x)}{f(x)}dx}$$

ist, ein Extremum, wenn für $x_1', x_2', \dots, x_n'$ die Wurzeln der Gleichung $\psi_n(x)=0$ gesetzt werden.

Von den bisher nicht veröffentlichten speciellen Fällen dieses Satzes mögen die folgenden drei hervorgehoben werden.

Ist c eine von den Wurzeln des n^{ten} Näherungsnenners der Kettenbruchentwicklung des Integrals

$$\int_0^x\frac{dz}{(x-z)\sqrt{z(z-\alpha)(z-\beta)}} \quad (0<\alpha<\beta)$$

verschiedene reelle Constante, so wird die Function der n reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\frac{\sqrt{x_1(x_1-\alpha)(x_1-\beta)x_2(x_2-\alpha)(x_2-\beta)\dots x_n(x_n-\alpha)(x_n-\beta)}}{(x_1-c)(x_2-c)\dots(x_n-c)}\prod_{\lambda,\varkappa}(x_\lambda-x_\varkappa)^2 \qquad (\lambda<\varkappa)$$

ein Maximum, wenn für $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Wurzeln dieses Näherungsnenners gesetzt werden.

Die Function

$$e^{-(x_1+x_2+\ldots+x_n)}(x_1x_2\ldots x_n)^{m+1}\prod_{\lambda,\varkappa}(x_\lambda-x_\varkappa)^2 \qquad (\lambda>\varkappa)$$

der n reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wird ein Maximum, wenn für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $T_n^m(x)=0$ gesetzt werden.

Den speciellen Fall $m=0$ dieses Satzes hat Herr Posse in den „Charkower Mittheilungen" als Grenzfall eines Satzes des Herrn Stieltjes abgeleitet.

Die Function

$$e^{-\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)}(x_1x_2\ldots x_n)^{1-\gamma}\prod_{\varkappa,\lambda}(x_\lambda-x_\varkappa)^2 \qquad (\lambda>\varkappa;\ \gamma\geqq 2n)$$

der n reellen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wird ein Maximum, wenn für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung $\psi_{n,\gamma}(x)=0$ gesetzt werden.

§. 2. Es soll nun eine einfache Ableitung des im Anfange erwähnten Klein'schen Satzes angegeben werden. Da

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x) \qquad 1)$$

ist und aus der Relation

$$\gamma-\alpha-\beta\gtrless 0$$

die Beziehung

$$\gamma-(\gamma-\alpha)-(\gamma-\beta)\lessgtr 0$$

folgt, so lässt sich jeder der beiden Fälle $\gamma-\alpha-\beta\geqq 0$, $\gamma-\alpha-\beta\leqq 0$ auf den anderen zurückführen, und es genügt demnach, nur einen von ihnen zu betrachten.

Ist

$$\gamma\geqq 1, \quad \gamma-\alpha-\beta<0,$$

so muss mindestens eine der zwei Zahlen α, β, von denen α nicht kleiner als β sein soll, positiv sein; es können aber auch, falls $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ in dem Intervalle $0\ldots 1$ eine Wurzel besitzt, nicht beide positiv sein, weil sonst die eben genannte hypergeometrische

Reihe für keinen positiven Werth von x verschwinden könnte. Man hat demnach in diesem Falle die Gleichung

$$\text{sign.}(\alpha\beta) = -1.$$

Ist $F(x)$ eine innerhalb der Grenzen x_1, x_2 eindeutige, endliche, differentiirbare Function der reellen Veränderlichen x, deren erste Ableitung in dem genannten Intervalle an den Nullstellen von $F(x)$ nicht verschwindet, so ist bekanntlich

$$\sum_{x_1}^{x_2}{}_{\xi} \text{sign.}(F'(\xi)) = -\frac{1}{2}\text{sign.}(F(x_1)) + \frac{1}{2}\text{sign.}(F(x_2)),$$

wo die Summation über alle dem genannten Intervalle angehörigen Nullstellen von $F(x)$ zu erstrecken ist. Aus diesem Satze folgt bekanntlich, wenn $F_1(x)$ eine zweimalige Differentiation zulässt und weder $F_1(x)$ noch $F_1'(x)$ in dem genannten Intervalle eine mehrfache Wurzel besitzt, die Gleichung

$$\overset{x_2}{A}_{x_1}(F_1(x)) = -\sum_{x_1}^{x_2}{}_{\xi'} \text{sign.}\{F_1(\xi')F_1''(\xi')\} -$$

$$-\frac{1}{2}\text{sign}\{F_1(x_1)F_1'(x_1)\} + \frac{1}{2}\text{sign}\{F_1(x_2)F_1'(x_2)\}, \qquad 2)$$

wo die Summation sich auf alle im Intervalle $x_1 \ldots x_2$ liegenden Wurzeln von $F_1'(x)$ bezieht und $\overset{x_2}{A}_{x_1}\{F_1(x)\}$ die Anzahl der in demselben befindlichen Wurzeln von $F_1(x)$ vorstellt.

Nimmt man nun

$$F_1(x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

wo α, β, γ die eben ausgesprochenen Bedingungen erfüllen mögen, so folgt aus der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe

$$x(1-x)y''(x) + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}y'(x) - \alpha\beta y(x) = 0 \qquad 3)$$

zunächst, dass weder $F_1(x)$ noch eine seiner Ableitungen zwischen 0 und 1 eine mehrfache Wurzel besitzen kann, und man hat ferner

$$\text{sign}.\{F_1(0)F_1'(0)\} = \text{sign}.(\alpha\beta\gamma) = -1$$
$$\text{sign}.\{F_1(1)F_1'(1)\} = +1.$$

Beachtet man noch, dass

$$\frac{dF(\alpha,\beta,\gamma,x)}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)$$

ist, so erhält man aus 2) die specielle Relation

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha,\beta,\gamma,x)\} = \overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)\}+1,$$

aus der sofort folgt

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha,\beta,\gamma,x)\} = \overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha+\rho,\beta+\rho,\gamma+\rho,x)\}+\rho \quad (\beta+\rho\leqq 0).$$

Es ist demnach

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha,\beta,\gamma,x)\}+\beta-1<0, \quad \overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha,\beta,\gamma,x)\}+\beta\geqq 0$$

oder also

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha,\beta,\gamma,x)\} = \{1-\beta\} \qquad (\gamma\geqq 1,\ \gamma-\alpha-\beta\leqq 0)$$

aus welcher Relation nach 1) die weitere folgt

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha,\beta,\gamma,x)\} = \{\alpha-\gamma+1\} \qquad (\gamma\geqq 1,\ \gamma-\alpha-\beta\geqq 0).$$

Hiebei ist die in der Einleitung angegebene Bedeutung von $\{a\}$ dahin zu ergänzen, dass diese Grösse für ein negatives a den Werth Null haben soll.

Für den Fall $\gamma<1$ soll das zweite particuläre Integral der hypergeometrischen Differentialgleichung 3)

$$F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x) =$$
$$= x^{1-\gamma}F(\beta+1-\gamma,\alpha+1-\gamma,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)$$

der Betrachtung zu Grunde gelegt werden. Da diese Function in diesem Falle für $x=0$ verschwindet, so ist nach dem Sturm'schen Satze über die Anzahl der einem bestimmten Intervalle angehörigen Nullstellen eines particulären Integrales einer linearen

Differentialgleichung zweiter Ordnung die Anzahl ihrer Wurzeln innerhalb der Grenzen 0...1 entweder gleich der Anzahl der innerhalb derselben Grenzen befindlichen Nullstellen von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ oder um eine Einheit kleiner.

Ist nun $\gamma-\alpha-\beta<0$ und demnach $\alpha+\beta+1-\gamma>0$, so muss wieder $\alpha>0$ und $\beta<0$ sein; denn positiv können beide Zahlen nicht sein, wenn $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$ im Intervalle 0...1 verschwinden soll, wären aber beide negativ, so hätte man

$$\alpha+1-\gamma>0, \qquad \beta+1-\gamma>0$$

was nach 4) ebenfalls das Nichtverschwinden der eben genannten Reihe innerhalb der erwähnten Grenzen zur Folge hätte.

Aus der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x(1-x)y''(x)+\{\alpha+\beta+1-\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y'(x)-\alpha\beta y(x)=0,$$

welcher $F_1(x)=F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma, x)$ genügt, folgt nun unter den gemachten Voraussetzungen

$$\text{sign}.\{F_1(0)F_1'(0)\}=\text{sign}.\{\alpha\beta(\alpha+\beta+1-\gamma)\}=-1$$
$$\text{sign}.\{F_1(1)F_1'(1)\}=\text{sign}.\{-\alpha\beta\gamma\}=\text{sign}.(\gamma)$$

und demnach hat man nach 2) die Relation

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\}=$$
$$=\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha+1,\beta+1,\alpha+\beta+2-\gamma,1-x)\}+\frac{1}{2}\{1+\text{sign}.(\gamma)\}.$$

Ist also σ die kleinste ganze Zahl, für welche

$$\text{sign}.(\gamma+\sigma)=+1 \qquad 5)$$

ist, so hat man die Beziehung

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\}=$$
$$=\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha+\tau,\beta+\tau,\alpha+\beta+\tau+1-\gamma,1-x)\}+\tau-\sigma+1$$
$$(\tau\geqq\sigma,\ \beta+\tau\leqq 0)$$

und daher besteht die Ungleichung

$$\sigma-\beta<\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\}\leqq 1-\sigma-\beta$$

welche in Verbindung mit 5) die Gleichung

$$\overset{1}{\underset{0}{A}}\{F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\}=\{\gamma-\beta\}\quad(\gamma<1;\gamma-\alpha-\beta<0)$$

liefert, aus der nach 4) die weitere Formel

$$\overset{1}{\underset{1}{A}}\{F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x)\}=\{\alpha\}\quad(\gamma<1;\gamma-\alpha-\beta>0)$$

folgt.

Hiermit ist das Klein'sche Theorem vollständig bewiesen, wenn man noch berücksichtigt, dass die Anzahl der Wurzeln der Function $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ zwischen 0 und 1 ungerade oder gerade ist, je nachdem sign. $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ den Werth -1 oder $+1$ hat.

Mit Hilfe des eben benützten Verfahrens kann man auch für jede der im vorigen Paragraphe behandelten speciellen ganzen Functionen leicht die Anzahl und Vertheilung der reellen Wurzeln bestimmen. Es mag hier nur auf die auf diesem Wege sich ergebenden Gleichungen

$$\overset{\infty}{\underset{0}{A}}\{\psi_{n,\gamma}(x)\}+\text{sign.}(n-\gamma)\overset{\infty}{\underset{0}{A}}\{\psi_{n-1,\gamma-2}(x)\}=-\left\{\frac{1}{2}+\frac{\text{sign.}(n-\gamma)}{2}\right\};$$

$$\overset{0}{\underset{-\infty}{A}}\{\psi_{n,\gamma}(x)\}+\text{sign.}(n-\gamma)\overset{0}{\underset{-\infty}{A}}\{\psi_{n-1,\gamma-2}(x)\}=\frac{1}{2}-\frac{\text{sign.}(n-\gamma)}{2}$$

$$\overset{\infty}{\underset{0}{A}}\{A_n(x)\}+\overset{\infty}{\underset{0}{A}}\{A_n'(x)\}=1;\quad\overset{0}{\underset{-\infty}{A}}\{A_n(x)\}=\overset{0}{\underset{-\infty}{A}}\{A_n'(x)\}$$

hingewiesen werden, welche folgende Theoreme liefern:

Die ganze Function $\psi_{n,\gamma}(x)$ hat für $\gamma>n$ n reelle ungleiche negative Wurzeln, während sie für $\gamma<n$ keine negative und $\frac{1-(-1)^n}{2}$ positive Wurzeln besitzt.

Die ganze Function $A_n(x)$ hat $\frac{1-(-1)^n}{2}$ positive und keine negative Wurzel.

Die Natur der Wurzeln der zuletzt genannten Function hat schon Herr Halphen a. a. O. angegeben.

Über die Abhängigkeit der Capillaritätsconstanten von der Temperatur und deren Bedeutung für die Theorie der Flüssigkeiten

von

Dr. **Gustav Jäger.**

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

In den drei Abhandlungen:[1]

1. Zur Theorie der Dampfspannung,
2. die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln,
3. über die Abhängigkeit des specifischen Volumens gesättigter Dämpfe vom specifischen Volumen der zugehörigen Flüssigkeiten und der Temperatur

habe ich gezeigt, in welch' vielfacher Beziehung die Capillarität der Flüssigkeiten zu den übrigen Eigenschaften derselben steht. Ich habe mich damals begnügt, die aufgefundenen Resultate nur am Wasser und nur die Beziehung zwischen dem specifischen Volumen der Flüssigkeit und jener des gesättigten Dampfes auch am Äther zu verificiren, hauptsächlich desshalb, weil mir bei anderen Flüssigkeiten das nöthige Beobachtungsmaterial über die Änderung der Capillaritätsconstanten mit der Temperatur nicht in dem Masse zu Gebote stand, wie ich es für meine Zwecke für erwünscht hielt. Es musste mir daher vorerst von grossem Interesse sein, theils zur Controle des bereits vorhandenen Materials, theils zur Erlangung neuer Resultate für eine Reihe von Flüssigkeiten die Änderung der Cohäsion mit der Temperatur

[1] Diese Sitzungsber., Bd. XCIX, S. 679 ff., S. 860 ff., S. 1028 ff.

in systematischer Weise festzustellen. Zu dem Zwecke prüfte ich nun eine Reihe von Methoden, welche man zur Bestimmung der Capillaritätsconstanten hat, kam aber dabei zur Überzeugung, dass keine die gewünschte Eignung besass. Entweder war von vorneherein an eine genaue Bestimmung der Temperatur der Flüssigkeit gerade an jenen Stellen, welche für die Messung ausschlaggebend sind, nicht zu denken, oder es waren die Untersuchungen derart langwierig, dass es kaum für möglich anzusehen war, eine Messung in genau derselben Weise mehrmals zu wiederholen.

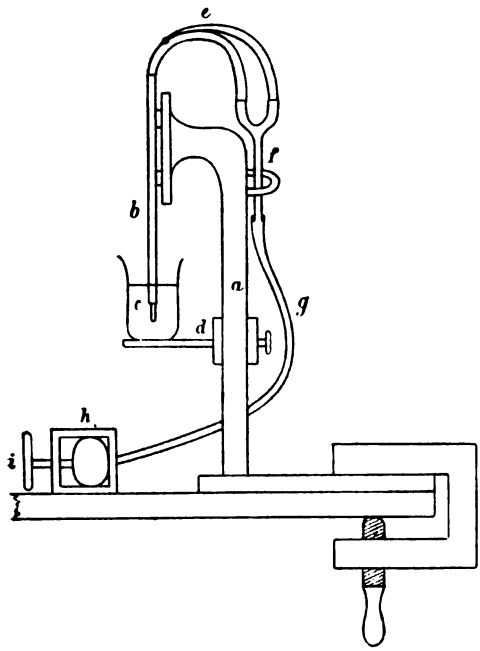


Fig. 1.

Durch die von mir angewandte Methode werden die genannten Mängel vollständig umgangen. Mein Apparat war folgendermassen zusammengestellt. Das galgenförmige Stativ *a* trägt an seiner Vorderseite zwei Capillarröhren verschiedenen Calibers *b*. Von denselben sitzt die eine auf einem Schlitten, so dass mit Hilfe einer Schraube der Verticalabstand der unteren Röhrenenden, welche in die Flüssigkeit des Gefässes *c* tauchen, in beliebiger Weise geändert werden kann.

Wie aus dem Späteren ersichtlich werden wird, ist es von grosser Wichtigkeit, dass diese Endflächen der Capillarröhren vollständig eben und glatt sind und genau senkrecht zur Röhrenachse stehen. Um dies zu erreichen, brach ich von einer längeren Glasröhre so lange kleinere Stücke ab, bis der Zufall schliesslich eine Bruchfläche von der gewünschten Art ergab. Der äussere Rand des Rohrendes wurde sodann noch etwas conisch zugeschliffen. Das blosse Abbrechen der Röhre hat den Vortheil, dass der innere

Rand der Bruchfläche haarscharf ist, was durch Abschleifen nicht so gut zu erreichen gewesen wäre.

Das Gefäss *c* lässt sich mittelst der Schiebevorrichtung *d* heben und senken. Die oberen Enden der Capillarröhren sind mit luftdicht schliessenden Kautschukschläuchen *e* versehen, welche durch das Gabelrohr *f* in einen einzigen Schlauch *g* vereinigt werden. Dieser steht mit einem Kautschukballe, welcher sich in einem Gehäuse *h* befindet, in Verbindung. Eine Schraube *i* ermöglicht es, den Ball und damit die in ihm befindliche Luft sehr langsam und stetig zusammenzudrücken. Die Flüssigkeit im Gefässe *c* lässt sich entweder durch eine direct untergehaltene Flamme oder durch ein Sand- oder Wasserbad leicht bis in die Nähe des Siedepunktes auf beliebige Temperaturen erwärmen oder durch eine Kältemischung unter die Temperatur der Umgebung abkühlen. Ein Thermometer, welches an einem besonderen Stativ befestigt ist, gestattet, die jeweilige Temperatur der Flüssigkeit abzulesen.

Wurde mit leicht verdampfenden Flüssigkeiten, wie Äther, Schwefelkohlenstoff etc. gearbeitet, so erhielt das Gefäss *c* einen Papierdeckel, welcher zum Durchlass der Röhren und des Thermometers mit entsprechenden Löchern versehen war. Was die Dimensionen des Apparates anbelangt, so war die Höhe des Stativs *a* etwa 40 *cm*. Alle übrigen Grössen lassen sich darnach leicht aus der Zeichnung beurtheilen.

Durch Compression der Luft im Balle *h* wird erreicht, dass aus dem unteren Ende der einen oder anderen Capillarröhre eine Luftblase austritt. Die hauptsächlichste Anforderung, welche ich an den Apparat stellte, war nun die, dass sich ein genauer Höhenunterschied der Röhrenenden herstellen lasse, bei welchem gleichzeitig aus beiden Röhren Blasen austreten. Obwohl dieses gleichzeitige Austreten nur in den seltensten Fällen, und da gewöhnlich unbeabsichtigt, gelang, so war dadurch obige Anforderung eigentlich nur umso besser erfüllt. Es war nämlich leicht möglich, den Höhenunterschied der beiden Röhren mit Hilfe der Schraube um nicht mehr als 0·01 *mm* zu ändern, und eine derartige Änderung genügte schon vollständig, um die Luftblasen nach Belieben bei der einen oder anderen Röhre austreten zu lassen. Dasselbe konnte man bei empfindlicher Einstellung

durch die geringste Temperaturänderung erreichen. Dabei ist natürlich immer vorausgesetzt, dass die Luft nicht ruckweise, sondern vollkommen continuirlich comprimirt werde. Es war daher auch nothwendig, jener Schraube, mit Hilfe deren der Ball zusammengedrückt wurde, einen sehr grossen Kopf zu geben, um sie leicht und sicher handhaben zu können. Durch stossweises Comprimiren der Luft ist es natürlich ein Leichtes, es zu erreichen, dass gleichzeitig von beiden Röhren Blasen aufsteigen. Ein derartiges Vorgehen wäre jedoch gänzlich verfehlt, indem dadurch die Genauigkeit der Einstellung beträchtlich verringert würde.

Ein Hauptvortheil unserer Methode ist der einer leichten und genauen Temperaturbestimmung jener Stelle der Flüssigkeit, welche für die Messung ausschlaggebend ist. Während sich nämlich bei vielen Methoden der Meniscus der Flüssigkeit an einer sehr exponirten Stelle befindet, wohin man ein Thermometer nicht bringen kann, liegt er hier mitten in der Flüssigkeit selbst und muss daher, zumal wenn man durch Umrühren nachhilft, genau die Temperatur annehmen, welche die übrigen Stellen der Flüssigkeit besitzen, da ja auch die Luft erst dann mit dem Meniscus in Berührung kommt, nachdem sie in Folge Passirens der Capillarröhre die entsprechende Temperatur angenommen hat.

Bevor ich nun dazu schreite, die Art und Weise des Verlaufes einer jeden Messung und die Verwendung derselben zur Bestimmung der Capillaritätsconstanten auseinanderzusetzen, will ich erst einigen Einwürfen begegnen, die man meiner Methode machen könnte. Es hat nämlich bereits M. Simon in seiner Abhandlung: „Recherches sur la capillarité“ [1] ein Verfahren beschrieben, welches im Principe von dem meinigen wenig verschieden ist. Derselbe bestimmt nämlich den Druck, welcher nothwendig ist, um eine Blase aus dem unteren Ende einer in die Flüssigkeit getauchten Capillarröhre austreten zu lassen, und behauptet nun, dass derselbe gleich ist der Summe aus dem hydrostatischen Drucke, welchen die Flüssigkeit in der Tiefe des Rohrendes ausübt, und einem Drucke, welcher der Steighöhe der Flüssigkeit im Rohre entspricht. Dies wäre nur dann strenge

[1] Ann. de chim. et de phys., s. III, t. 32.

richtig, wenn der Druck bei einer Form der Blase gemessen würde, welche mit jener der Meniscusfläche im Capillarrohre identisch wäre. Insofern dies beim Simon'schen Verfahren nicht verwirklicht ist, sind dessen Resultate durchaus nicht einwurfsfrei. Unrichtig begründet jedoch sind die Bedenken, welche C. Wolf in seiner Abhandlung: „Vom Einfluss der Temperatur auf die Erscheinungen in Haarröhrchen“ [1] gegenüber dieser Methode hat. Derselbe behauptet nämlich: „Es setzt die Theorie bei Aufstellung der Gleichgewichtsgleichung der Flüssigkeit immer voraus, dass der Winkel, unter welchem die Oberfläche der Flüssigkeit und die der Röhre zusammenstossen, constant sei, und diese Bedingung ist neben einer scharfen Kante nicht mehr erfüllt. Wenn bei der Simon'schen Beobachtungsweise der Meniscus unten an der Röhre angelangt ist, verändert die flüssige Oberfläche fortschreitend ihre Gestalt, bis die Luftblase entweichen kann. Es ist klar, dass auch der Druck sich fortschreitend ändern muss, ohne dass man bestimmen kann, welcher Werth anzunehmen sei. Ich habe diese Formveränderung des Meniscus direct studirt bei einer Röhre von etwa 1 *mm* Durchmesser und sehr dicken Wänden. Man sah bei zunehmendem Luftdrucke die Flüssigkeit sich immer mehr aushöhlen und endlich die Gestalt einer abgeplatteten Kugel annehmen, deren horizontaler Radius fast dem äusseren Radius der Röhre gleich war. Dann erst entwich die Blase, und die Flüssigkeit stieg schnell in der Röhre bis zu einer veränderlichen Höhe, die indess zuweilen 3 *mm* erreichte. Für eine solche Röhre kann daher das Verfahren nichts angeben, weil es während der Depression eine Unendlichkeit von Gleichgewichtslagen gibt, und der Meniscus, nachdem die Luftblase entwichen ist, sich nicht mehr am unteren Ende befindet.“

Indem ich den erwähnten Versuch selbst wiederholte, gelangte ich zur Überzeugung, dass die Beschreibung des Verlaufes, wie sie Wolf gibt, nicht der Wirklichkeit entspricht. Ich stellte nämlich den bereits oben erwähnten Kautschukball durch ein T-förmiges Röhrenstück und Kautschukschläuche einerseits mit einem Capillarrohr, anderseits mit einem Wassermanometer in

[1] Pogg. Ann., CI, S. 567 ff.

Verbindung, dessen einer Schenkel horizontal war, während der andere eine Neigung von etwa 15° gegen den Horizont hatte. Indem nun die Luft im Kautschukball sehr langsam zusammengepresst wurde, konnte man das Wasser im Manometer langsam ansteigen sehen, bis es ein gewisses Maximum erreicht hatte. Das geschieht aber nicht, wie Wolf meint, in dem Zeitpunkte, da die Blase das Rohrende verlässt, sondern bereits viel früher, so lange die Blase noch ihren kleinsten Durchmesser hat und etwa halbkugelförmig aus dem unteren Theile der Röhre hervorschaut. Die Blase befindet sich hier in einer labilen Gleichgewichtslage. Lässt der Druck nach, so tritt die Flüssigkeit wieder in die Röhre zurück, wird er hingegen nur um das Geringste vermehrt, so entsteht eine immer grösser werdende Blase, die sich schliesslich von der Röhre ablöst. Bis aber dies geschieht, wird der Druck mit wachsender Blase im Manometer immer kleiner, so dass nach dem Losreissen der Blase die Flüssigkeit oft um mehrere Millimeter im Rohre zu steigen vermag. Man kann also durchaus nicht behaupten, dass bei diesem Verfahren keine genau definirte Grösse vorkäme, welche man der Messung unterziehen könnte; denn das Maximum des Druckes, welches unmittelbar vor dem Austreten der Blase sich herstellt, lässt sich mit dem Manometer sehr scharf bestimmen und zeigt bei wiederholten Versuchen unter gleichen Bedingungen immer dieselbe Grösse. Experimentelle Bedenken trägt also diese Methode durchaus nicht an sich, sondern die Hauptschwierigkeit dürfte darin liegen, einen genauen mathematischen Ausdruck für die Gestalt der Flüssigkeitsoberfläche in dem bewussten Momente zu finden, woraus man weiter auf die Cohäsion der Flüssigkeit schliessen könnte. Bei Anwendung von zwei Capillarröhren, wie es bei meinem Apparate geschieht, widerlegen sich Wolf's Behauptungen auf's Allerbeste, indem es sonst ganz unmöglich wäre, bis auf 0·01 *mm* scharfe Einstellungen zu machen.

Indem ich von vorneherein darauf verzichtete, absolute Messungen zu machen, sondern mich lediglich nur die relativen Werthe interessirten, da es mir ja hauptsächlich um den Temperaturcoefficienten der Capillaritätsconstanten zu thun war, so war es auch nicht schwierig, aus den gemachten Messungen die Capillaritätsconstante zu berechnen. Unter der Capillaritätsconstanten

sei dabei immer die Arbeit verstanden, welche nothwendig ist, um die freie Oberfläche der Flüssigkeit um die Flächeneinheit zu vergrössern.

Das Maximum des Druckes, welches beim Austritte einer Blase erreicht wird, ist abhängig von der Capillaritätsconstanten, der Dichte der Flüssigkeit, ferner von der Tiefe des Röhrenendes unter dem Niveau der Flüssigkeit und von der Weite der Röhre, wobei deren Querschnitt immer als Kreis gedacht wird. Ich untersuchte nun, ob sich dieser Druck durch eine Gleichung von der Form

$$p = \alpha f(r) F(s) + Hs$$

darstellen lasse, wobei α die Capillaritätsconstante, s das specifische Gewicht der Flüssigkeit, r der Radius der Röhre und H der Verticalabstand des unteren Röhrenendes vom Niveau der Flüssigkeit ist. Das erste Glied der Summe rührt vom capillaren, das zweite vom hydrostatischen Drucke her. Für eine zweite Röhre vom Radius r' gilt unter sonst gleichen Bedingungen

$$p' = \alpha f(r') F(s) + H's.$$

Bei meinem Apparate wurden die Röhren nun so eingestellt, dass $p = p'$ also

$$\alpha f(r) F(s) + Hs = \alpha f(r') F(s) + H's,$$

oder

$$\alpha F(s) \varphi(r, r') = hs, \qquad 1)$$

wenn wir $f(r) - f(r') = \varphi(r, r')$ und $H' - H = h$ setzen. h ist also der Höhenunterschied der beiden Röhrenenden. Für zwei andere Röhren vom Radius r_1 und r_1' erhalten wir

$$\alpha F(s) \varphi(r_1, r_1') = h_1 s. \qquad 2)$$

Dividiren wir die Gleichung 1) durch 2), so

$$\frac{\varphi(r, r')}{\varphi(r_1, r_1')} = \frac{h}{h_1}.$$

Wenden wir diese Gleichung auf eine zweite Flüssigkeit an, so erhalten wir ganz analog

$$\frac{\varphi(r, r')}{\varphi(r_1, r_1')} = \frac{h'}{h_1'}.$$

Mithin muss

$$\frac{h}{h_1} = \frac{h'}{h'_1} \qquad 3)$$

sein.

Ich prüfte diese Gleichung in mehrfacher Weise, indem ich aus einer Reihe von Capillarröhren von etwa 0·3 bis 1·5 *mm* Durchmesser verschiedene Paare auswählte und sowohl für Wasser, als Flüssigkeit von verhältnissmässig grossem α und s, als für Äther, welcher das kleinste α und s von allen untersuchten Flüssigkeiten besass, die Werthe der h bestimmte. Dabei war der Verlauf einer jeden Untersuchung etwa folgender. Das Stativ mit den beiden Capillarröhren (siehe die Figur) wurde vertical aufgestellt und an der Tischplatte festgeschraubt; das Gefäss mit der Flüssigkeit so hoch gehoben, dass beide Röhrenenden eintauchten, sodann wurde das gabelförmige Röhrenstück f mit dem Kautschukschlauch g in Verbindung gebracht und die Luft im Balle h langsam zusammengedrückt. Je nachdem nun aus dem tiefer oder aus dem höher gelegenen Röhrenende die Blasen austraten, hatte man den Höhenunterschied h zu klein oder zu gross gewählt. Dadurch war es möglich, durch Verschieben der Röhren in dem entsprechenden Sinne sehr rasch das richtige h zu erreichen. War dies geschehen, so wurde das Gefäss mit der Flüssigkeit und der Schlauch g wieder fortgenommen, das Stativ abgeschraubt und direct unter einen Comparator mit Mikroskopablesung gebracht. Derselbe gestattete noch Bruchtheile von 0·01 *mm* abzulesen. Auf diese Weise konnte h mit grosser Genauigkeit und Leichtigkeit bestimmt werden. Eine jede Messung wurde stets dreimal wiederholt und sodann das Mittel in Rechnung gezogen. Besser als ich von vorneherein erwartet hatte, hat sich dabei die Gleichung 3) als richtig bewährt. In keinem Falle überstiegen die Abweichungen der verschiedenen Resultate untereinander 0·5% ihres Werthes, ein Ergebniss, mit dem ich mich vollständig zufrieden gab. Eine Probe will ich als Beleg des Gesagten anführen. Drei Röhren von den ungefähren Durchmessern von 1·5, 1 und 0·5 *mm*, die ich kurz mit 1, 2 und 3 bezeichnen will, gaben folgende Zahlen. Für Wasser von der Temperatur 15·0° erhielt ich

Röhren				Mittel
1 und 3	48·85	48·77	48·81	48·81
1 und 2	19·85	19·84	19·90	90·86,

für Äther von 16·4°

Röhren				Mittel
1 und 3	16·56	16·34	16·28	16·39
1 und 2	6·59	6·66	6·70	6·65.

Es ergibt sich weiter

$$\frac{h}{h_1} = \frac{48{\cdot}81}{19{\cdot}86} = 2{\cdot}458, \quad \frac{h'}{h_1'} = \frac{16{\cdot}39}{6{\cdot}65} = 2{\cdot}465.$$

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung eine sehr gute zu nennen. Die Abweichungen, welche die einzelnen Werthe vom Mittelwerth in dem vorgeführten Beispiele zeigen, sind sehr beträchtlich im Vergleich zu den später zur directen Bestimmung der Capillaritätsconstanten gemachten Messungen, welche in Folge der bereits erlangten Übung viel günstiger ausfielen. Bei diesen späteren Untersuchungen wichen die gefundenen Werthe selten um mehr als 0·3% von einander ab. Die Zahlen sind hier nach einem willkürlichen Massstabe angegeben, dessen Einheit um etwa 15% kleiner als 1 *mm* ist.

Wie sich unsere Annahme für die Formulirung des Einflusses, welchen die Röhrenweite auf den bewussten capillaren Druck hat, als richtig erwies, so zeigt sich, wie wir später sehen werden, auch weiters, dass es vollständig genügt, wenn wir

$$\alpha F(s) = \alpha(1+\beta s)$$

setzen, wobei β eine Constante bedeutet, die sich ebenfalls leicht ermitteln lässt, wenn zwei Flüssigkeiten, deren α und s bekannt sind, zu Gebote stehen. Verwenden wir nämlich zu unseren Messungen stets dieselben beiden Capillarröhren, so wird für die eine Flüssigkeit die Gleichung 1)

$$\alpha(1+\beta s)\varphi(r, r') = hs,$$

für die zweite

$$\alpha'(1+\beta s')\varphi(r, r') = h's',$$

somit

$$\frac{\alpha(1+\beta s)}{\alpha'(1+\beta s')} = \frac{hs}{h's'}. \qquad 4)$$

Aus dieser Gleichung kann der Werth von β ermittelt werden, da alle übrigen in ihr vorkommenden Grössen bekannt sind.

Zur Berechnung des β benützte ich die Messungen von Brunner,[1] die mir ungemein vertrauenswürdig erscheinen, zumal C. Wolf,[2] welcher bedeutend später dieselben Untersuchungen an Wasser wiederholte, Werthe erhielt, die mit den Brunner'schen Messungen ausserordentlich gut übereinstimmen. Jener findet für die Steighöhe in einer Röhre von 1 *mm* Radius

Wasser..... $15\cdot33215 - 0\cdot0286396\,u$
Äther..... $5\cdot3536 - 0\cdot028102\,u$,

worin u die Temperatur in Celsiusgraden bedeutet. Dabei wurde Wasser von 0° bis 82°, Äther von 0° bis 35° untersucht.

Nehmen wir an, die Steighöhe η sei durch die Gleichung

$$\eta + \frac{r}{3} = \frac{2\alpha}{sgr}$$

bestimmt, wenn g die Beschleunigung der Schwere bedeutet, so erhalten wir für Wasser bei +20°

$$\eta = 1\cdot476,\ s = 0\cdot9983,\ g = 981,\ \alpha = 73\cdot9,$$

wenn wir alles in (c. g. s.)-Einheiten ausdrücken. Gleicherweise ist für Äther bei derselben Temperatur

$$\eta' = 0\cdot4792,\ s' = 0\cdot7143,\ \alpha' = 17\cdot96.$$

Die Messungen, welche nach der erwähnten Methode mit unserem Apparate vorgenommen wurden, ergaben für Wasser $h = 49\cdot48$, für Äther $h' = 16\cdot05$ in den bereits erwähnten willkürlichen Längeneinheiten. Setzen wir die erlangten Zahlen in die Gleichung 4) ein, so finden wir

$$\beta = 0\cdot1882.$$

---

[1] Pogg. Ann., Bd. 70, S. 515.
[2] Ebenda, S. 575 ff.

Die Gleichung 4) lässt sich auch schreiben

$$\alpha = \frac{\alpha' hs(1+\beta s')}{h's'(1+\beta s)} = c\frac{hs}{1+\beta s},$$

worin wir $\frac{\alpha'(1+\beta s')}{h's'} = c$, einer Constanten, setzen. Führen wir für das specifische Gewicht s das specifische Volumen v ein, so ist $s = \frac{1}{v}$ und

$$\alpha = c\frac{h}{v+\beta}. \qquad 5)$$

Für das erwähnte Röhrenpaar, mit welchem die eben angeführten und alle folgenden Messungen ausgeführt wurden, ergab sich $c = 1 \cdot 777$.

Die Änderungen der Röhrenweite mit der Temperatur wurden nicht in Rechnung gezogen, theils weil dieselben thatsächlich sehr gering sind, hauptsächlich aber desshalb, weil sie bei beiden Röhren im selben Sinne auftreten, mithin sich fast vollständig in ihren Wirkungen aufheben.

Nach diesen Voruntersuchungen konnte ich schliesslich darangehen, die Capillaritätsconstanten verschiedener Flüssigkeiten bei verschiedenen Temperaturen zu bestimmen, was nun eine sehr leichte und schnell zu erledigende Aufgabe war. Meine Untersuchungen erstreckten sich auf Wasser, Äther, Äthylalkohol, Methylalkohol, Schwefelkohlenstoff, Chloroform und Aceton. Die Resultate sind in folgenden Tabellen zusammengestellt. In denselben bedeutet t die Temperatur, v das specifische Volumen, h ist der aus drei Messungen gefundene Mittelwerth, welcher dann zur Berechnung der Capillaritätsconstanten α nach Gleichung 5) benützt wurde.

Wasser.

t	v	h	α
10·0°	1·000	50·49	75·50
20·0	1·002	49·48	73·90
30·0	1·004	48·30	71·98
40·0	1·008	47·10	69·99
50·0	1·012	46·15	68·33
60·0	1·017	45·28	66·77
70·0	1·023	44·27	64·98
81·0	1·030	42·88	62·58
89·0	1·035	41·52	60·32

Äther.

t	v	h	α
—23·0°	1·303	19·48	23·22*
10·0	1·327	18·47	21·67*
+ 1·0	1·349	18·14	20·97
10·5	1·368	17·37	19·84
20·0	1·388	16·05	18·10
30·0	1·411	15·25	16·95

Äthylalkohol.

t	v	h	α
—19·0°	1·210	21·06	26·77*
11·0	1·220	20·39	25·74*
+ 1.0	1·235	19·78	24·70
10·5	1·247	19·29	23·89
20·0	1·260	18·82	23·10
30·0	1·273	18·26	22·21
39·5	1·287	17·89	21·55
50·0	1·303	17·15	20·44
60·0	1·319	16·51	19·47
70·0	1·335	16·03	18·70

Methylalkohol.

t	v	h	α
—10·0°	1·217	20·79	26·30
+ 0·9	1·232	20·36	25·48
9·8	1·244	19·83	24·61
20·3	1·260	19·17	23·53
30·0	1·274	18·64	22·66
40·0	1·290	18·08	21·74
50·0	1·306	17·43	20·73
60·0	1·323	16·93	19·91

Schwefelkohlenstoff.

t	v	h	α
—10·0°	0·7614	18·83	35·24*
+ 0·9	0·7710	18·20	33·72
10·7	0·7795	17·63	32·38
20·5	0·7887	17·08	31·07
30·0	0·7977	16·53	29·80
40·0	0·8078	16·00	28·55

Chloroform.

t	v	h	α
— 9·0°	0·6507	13·53	28·66
+ 0·5	0·6574	13·19	27·72
10·0	0·6647	12·77	26·61
30·0	0·6818	11·81	24·12
40·0	0·6917	11·32	22·86
50·0	0·7024	10·81	21·57

Aceton.

t	v	h	α
0·0°	1·206	21·44	27·33
12·5	1·226	20·74	26·07
21·0	1·242	20·04	24·90
30·0	1·258	19·39	23·83
40·0	1·277	18·51	22·45
50·0	1·296	17·69	21·18

Die mit einem * versehenen Angaben sind nicht Mittelwerthe aus drei vollständig analogen Messungen, sondern sie wurden bei drei einander ziemlich nahe liegenden Temperaturen erlangt, indem sie mit Hilfe des Temperaturcoefficienten auf die gemeinsame Mitteltemperatur reducirt wurden.

Eine graphische Darstellung der Änderung der Capillaritätsconstanten mit der Temperatur zeigt einen fast vollständig linearen Verlauf der Curven, so dass sich innerhalb jener Temperaturen, bei welchen ich meine Messungen ausführte, die Capillaritätsconstanten vollständig genügend durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha = \alpha_0(1 - \varepsilon t), \qquad 6)$$

wenn ε der Temperaturcoefficient ist, darstellen lassen. Ich will jedoch nicht zu erwähnen unterlassen, dass die geringen Abweichungen der Gleichung 6) bei allen Flüssigkeiten fast immer im selben Sinne vorkommen, so dass man sie nicht etwa als blosse Beobachtungsfehler auffassen darf. Betrachtet man die Temperaturen als Abscissen, die Capillaritätsconstanten als Ordinaten, so erweisen sich sämmtliche Curven mit Ausnahme derjenigen des Chloroforms und Acetons als ganz schwach convex gegen die Abscissenaxe. Ich erwähne dies nur desshalb, weil es

nicht selten vorkommt, dass man mit Gleichungen, die nur für ein bestimmtes Intervall als giltig nachgewiesen sind, ganz ungerechtfertigte Extrapolationen vornimmt. So könnte man z. B. leicht versucht sein, aus Gleichung 6) die kritische Temperatur ermitteln zu wollen, indem man $\alpha = 0$ setzt, was aber sicherlich zu unrichtigen Resultaten führen würde.

Die Constanten α_0 und ε der Gleichung 6) ergaben sich wie folgt:

	α_0	ε
Wasser	77·09	0·00232
Äther	20·65	0·00607
Äthylalkohol	24·79	0·00351
Methylalkohol	25·39	0·00360
Schwefelkohlenstoff	33·84	0·00391
Chloroform	27·58	0·00436
Aceton	27·33	0·00450

Die folgenden Tabellen, in denen ich eine Zusammenstellung der Capillaritätsconstanten anführe, wie sie direct aus den Messungen folgen, und wie sie sich aus Gleichung 6) ergeben, dürften am besten zeigen, inwieweit Messung und Rechnung mit einander übereinstimmen.

Wasser.

t	α gemessen	α berechnet	t	α gemessen	α berechnet
10°	75·50	75·30	55°	67·55	67·25
15	74·40	74·41	60	66·77	66·36
20	73·90	37·51	65	65·88	65·47
25	72·94	72·62	70	64·98	64·57
30	71·98	71·73	75	63·89	63·68
35	70·99	70·83	80	62·80	62·78
40	69·99	69·94	85	61·45	61·89
45	69·16	69·04	90	60·04	60·99
50	68·33	68·15			

Äther.

t	α gemessen	α berechnet	t	α gemessen	α berechnet
−25°	23·46	23·79	+ 5°	20·49	20·02
20	22·86	23·16	10	19·90	19·40
15	22·27	22·53	15	19·02	18·77
10	21·67	21·90	20	18·10	18·14
5	21·35	21·28	25	17·53	17·52
0	21·03	20·65	30	16·95	16·89

Äthylalkohol.

t	α gemessen	α berechnet	t	α gemessen	α berechnet
—20°	26·96	26·52	30	22·21	22·18
15	26·26	26·09	35	21·86	21·75
10	25·65	25·65	40	21·50	21·31
5	25·22	25·22	45	20·97	20·88
0	24·79	24·79	50	20·44	20·44
+ 5	24·36	24·36	55	19·96	20·00
10	23·98	23·92	60	19·47	19·57
15	23·52	23·49	65	19·09	19·14
20	23·10	23·05	70	18·70	18·70
25	22·66	22·62			

Methylalkohol.

t	α gemessen	α berechnet	t	α gemessen	α berechnet
—10°	26·30	26·30	30°	22·66	22·65
5	25·92	25·84	35	22·20	22·19
0	25·41	25·39	40	21·74	21·73
+ 5	25·08	24·93	45	21·24	21·28
10	24·59	24·48	50	20·73	20·82
15	24·07	24·02	55	20·32	20·36
20	23·56	23·56	60	19·91	19·91
25	23·11	23·10			

Schwefelkohlenstoff.

t	α gemessen	α berechnet	t	α gemessen	α berechnet
—10°	35·24	35·15	20°	31·14	31·19
5	34·54	34·50	25	30·47	30·53
0	33·85	33·84	30	29·80	29·87
+ 5	33·16	33·18	35	29·18	29·21
10	32·48	32·52	40	28·55	28·55
15	31·81	31·86			

Chloroform.

t	α gemessen	α berechnet	t	α gemessen	α berechnet
—10°	28·76	28·77	25°	24·75	24·57
5	28·26	28·18	30	24·12	23·97
0	27·77	27·58	35	23·49	23·37
+ 5	27·19	26·98	40	22·86	22·77
10	26·61	26·38	45	22·22	22·17
15	25·99	25·78	50	21·57	21·57
20	25·37	25·18			

Aceton.

t	α gemessen	α berechnet	t	α gemessen	α berechnet
0°	27·33	27·33	30	23·83	23·64
5	26·83	26·72	35	23·14	23·03
10	26·32	26·10	40	22·45	22·41
15	25·73	25·49	45	21·82	21·80
20	25·04	24·87	50	21·18	21·18
25	24·42	24·26			

Vergleichen wir unsere Resultate mit jenen anderer Physiker, so gelangen wir zu sehr befriedigenden Übereinstimmungen. So gibt Ostwald[1] als Mittelwerth der Messungen verschiedener Autoren für Wasser $\varepsilon = 0{\cdot}00230$ an. Mit diesem Werthe deckt sich der unserige beinahe vollständig. In neuerer Zeit hat Timberg eingehendere „Untersuchungen über den Einfluss der Temperatur auf die Capillaritätsconstanten einiger Flüssigkeiten“[2] gemacht. Derselbe wendet drei Methoden an, und zwar 1. die Bestimmung der Form flacher Luftblasen in einer Flüssigkeit unter einem horizontalen Deckel, 2. die Messung der Tragkraft flüssiger Lamellen und 3. die Wägung abfallender Tropfen. Auch er gelangte zu dem Resultate, dass sich die Beziehung zwischen Cohäsion und Temperatur durch die Gleichung 6) ausdrücken lässt, und gibt für die entsprechenden Constanten folgende Werthe an:

	Methode	spec. Gew.	α_0	$\varepsilon.10^6$
Alkohol.....	1	0·8166	24·28	3642
„	2	0·8166	26·45	3212
Äther.....	1	0·7592	19·34	5944
Wasser	1	0·9998	80·48	2208
„	2	0·9998	80·80	2732
„	3	0·9998	—	2586

Auch diese Ergebnisse stehen mit den unserigen in guter Übereinstimmung.

Ich unterlasse es, weitere Beispiele anzuführen, da sie alle in derselben Weise zeigen, dass unsere Methode vollständig geeignet ist, richtige Resultate zu ergeben. Fasst man noch die

[1] Allg. Chemie, I, S. 486.

[2] Wied. Ann., XXX, S. 545 ff.

leichte, sichere und wenig Zeit beanspruchende Handhabung, welche unser Apparat erfordert, ins Auge, so wird man wohl leicht zur Überzeugung gelangen, dass unter den gegenwärtigen Methoden für den praktischen Gebrauch kaum eine bessere zu finden sein dürfte.

Im Folgenden will ich nun zeigen, dass sich die bereits eingangs erwähnten Beziehungen, welche ich zwischen der Capillaritätsconstanten und den übrigen Eigenschaften der Flüssigkeiten aufstellte, in allen Fällen als richtig erweisen.

Für die Dampfspannung ergab sich die Formel

$$d = C(1+\gamma t \int_{k\sqrt{\frac{1-\alpha t}{1+\alpha t}}}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$ [1]

Hier ist $k = \sqrt{\frac{3a_0}{mc_0^2}}$, wenn a_0 die Arbeit bedeutet, welche eine Molekel von der Masse m und der mittleren Geschwindigkeit c_0, bei der Temperatur 0°, beim Übergang aus der flüssigen in die Dampfform zur Überwindung der Capillarkräfte leisten muss. C ist eine Constante, und durch γ soll der Einfluss, welchen die Wärmeausdehnung der Flüssigkeit, als auch die Geschwindigkeitsänderung der Molekeln mit der Temperatur bewirkt, in Rechnung gezogen werden. ε ist der Temperaturcoefficient der Capillaritätsconstanten, α der Ausdehnungscoefficient der Gase. Zur Berechnung der Integrals wurde die Formel

$$\int_x^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{e^{-x^2}}{2x}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1)(x^2+2)} - \ldots\right]$$

benützt, und zwar mit Beschränkung auf die beiden ersten Glieder der unendlichen Reihe.

Die folgende Tabelle enthält die Constanten für die verschiedenen Flüssigkeiten, wie ich sie erhielt, wenn ich sie aus den Dampfspannungen bei den drei Temperaturen, welche in der letzten Spalte angeführt sind, berechnete. Dabei sind wie

---

[1] Diese Sitzungsber., XCIX, S. 681.

auch in allen folgenden Rechnungen die Dampfspannungen den Angaben Regnault's entnommen:[1]

	C	γ	k^2	t		
Wasser	6874000	—0·00385	12·24	0°,	50°,	100°
Äther	101250	—0·00410	4·750	—20	10	30
Äthylalkohol	820100	—0·00216	9·212	0	40	70
Methylalkohol	1929200	—0·00600	9·334	—10	30	60
Schwefelkohlenstoff	355300	—0·00497	6·232	—10	20	40
Chloroform	207430	—0·00370	6·425	20	40	60
Aceton	594900	—0·00778	7·375	20	40	50

Nachstehende Zusammenstellung zeigt, wie weit Messung und Rechnung übereinstimmen. Es ergibt sich daraus die Berechtigung unserer Formel aufs deutlichste.

Äther.

t	d gemessen	d berechnet	t	d gemessen	d berechnet
—20°	67·49	67·51	15°	353·62	353·5
10	113·35	113·5	20	433·26	433·1
0	183·34	183·5	25	526·93	526·8
+ 5	230·11	230·3	30	636·33	636·5
10	286·40	286·4			

Äthylalkohol.

t	d gemessen	d berechnet	t	d gemessen	d berechnet
—20°	3·34	3·014	35°	102·87	103·1
10	6·58	6·392	40	133·64	133·6
0	12·83	12·83	45	172·14	171·9
+ 5	17·73	17·84	50	219·88	219·2
10	24·30	24·52	55	278·61	277·8
15	33·02	33·35	60	350·26	349·3
20	44·48	44·84	65	436·99	436·5
25	59·35	59·73	70	541·21	541·4
30	78·49	78·80			

Methylalkohol.

t	d gemessen	d berechnet	t	d gemessen	d berechnet
—20°	6·27	7·162	30°	149·99	150·0
10	13·47	13·48	35	192·01	192·6
0	26·82	26·55	40	243·51	244·7

[1] Pogg. Ann., CXI, S. 407 ff.

t	d gemessen	d berechnet	t	d gemessen	d berechnet
+ 5°	36·89	36·52	45°	306·13	307·9
10	50·13	49·59	50	381·68	383·8
15	67·11	66·53	55	472·20	474·0
20	88·67	88·20	60	579·93	580·0
25	115·99	115·6			

Schwefelkohlenstoff.

t	d gemessen	d berechnet	t	d gemessen	d berechnet
−10°	81·01	81·03	20°	301·78	301·7
0	131·98	130·2	25	364·24	364·7
+ 5	164·53	162·8	30	436·97	437·7
10	203·00	201·6	35	521·36	521·5
15	248·40	247·7	40	616·99	617·0

Chloroform.

t	d gemessen	d berechnet	t	d gemessen	d berechnet
20°	160·47	160·5	45°	442·37	442·3
25	199·40	199·5	50	530·96	530·8
30	245·91	246·0	55	633·36	633·2
35	301·13	301·2	60	751·01	751·0
40	366·20	366·2			

Aceton.

t	d gemessen	d berechnet	t	d gemessen	d berechnet
20°	179·89	179·9	40°	420·15	420·1
25	226·27	226·0	45	507·52	505·9
30	281·00	280·8	50	602·86	602·9
35	345·15	345·3			

In der Abhandlung: „Über die Abhängigkeit des specifischen Volumens gesättigter Dämpfe vom specifischen Volumen der zugehörigen Flüssigkeiten und der Temperatur“ [1] wies ich das Vorhandensein folgender Gleichung nach:

$$\frac{\gamma}{v_2-b}+\frac{\gamma}{b}\,l\frac{v_2}{v_2-b}+l\frac{v_1}{v_2}=\delta\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}.$$

b, γ und δ sind Constanten, v_1 ist das specifische Volumen des Dampfes, v_2 jenes der Flüssigkeit; die übrigen Buchstaben

[1] Diese Sitzungsber., XCIX, S. 1031.

haben die bekannte Bedeutung. Der Ausdruck $\frac{\gamma}{v_2-b}+\frac{\gamma}{b}l\frac{v_2}{v_2-b}$ ändert sich wegen der geringen Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten mit der Temperatur wenig und kann daher durch $\eta+\zeta t$ ersetzt werden, wenn η und ζ zwei neue Constanten sind. Dadurch erhält unsere Gleichung die Form

$$\eta+\zeta t+l\frac{v_1}{v_2}=\delta\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}. \qquad 7)$$

Diese Gleichung, deren Richtigkeit ich bereits an Wasser und Äther nachgewiesen habe, verificirte ich nun auch noch an Schwefelkohlenstoff, Chloroform und Aceton. Zur Berechnung der v_2 wurde eine Gleichung von der Form

$$v_t=v_0(1+at+bt^2+ct^3)$$

benützt; und zwar sind die Constanten[1] für

	a	b	c
Schwefelkohlenstoff	0·00114	0·00000137	0·0000000191
Chloroform	0·00111	0·00000466	0·0000000174
Aceton	0·00135	0·00000261	0·0000000116

Für die auf 0° und den Druck einer Atmosphäre reducirte Dampfdichte gesättigter Dämpfe bei verschiedenen Temperaturen findet Winkelmann:[2]

Schwefelkohlenstoff		Chloroform		Aceton	
t	d_n	t	d_n	t	d_n
— 6·37°	2·631	23·79°	4·138	21·17°	2·008
+ 8·90	2·631	40·67	4·138	37·32	2·0465
26·38	2·6424	60·18	4·1460	56·32	2·0542
46·25	2·7045			78·03	2·0923
69·25	2·7821				

Daraus lassen sich durch lineare Interpolation die Dampfdichten für beliebige Temperaturen finden und sich sodann mit Zuhilfenahme der Dampfspannungen nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze die entsprechenden specifischen Volumina der Dämpfe berechnen.

---

[1] Wüllner, Experimentalphysik, III. (1885), S. 83 u. f.

[2] Wied. Ann., IX, S. 366, 369, 374.

Die folgenden Tabellen enthalten die Resultate, welche ich für die Constanten der Gleichung 7) erhielt. Dabei benützte ich zur Rechnung die specifischen Volumina jener Temperaturen, welche in der letzten Spalte angeführt sind.

	δ	ζ	η	t
Schwefelkohlenstoff ...	5·083	0·00329	—2·614	0°, 20°, 40°
Chloroform	6·474	—0·00281	—1·691	20 40 60
Aceton	8·868	—0·0172	0·611	20 40 60

Dass sich auch hier unsere Gleichung aufs Beste bewährt, zeigen die folgenden Zusammenstellungen, in welchen d_n die Dampfdichte, lg v_1(I) den Logarithmus des specifischen Dampfvolumens, wie es sich direct aus der Dampfdichte berechnet, während lg v_1(II) der nach unserer Gleichung gefundene Werth ist.

Schwefelkohlenstoff.

t	v_2	d_n	lg v_1 (I)	lg v_1 (II)
0°	0·7709	2·631	3·229	3·229
5	0·7746	2·631	3·141	3·142
10	0·7794	2·632	3·057	3·059
15	0·7835	2·635	2·976	2·977
20	0·7887	2·638	2·899	2·899
25	0·7932	2·642	2·824	2·823
30	0·7977	2·653	2·750	2·750
35	0·8027	2·669	2·678	2·679
40	0·8078	2·685	2·609	2·609

Chloroform.

t	v_2	d_n	lg v_1 (I)	lg v_1 (II)
20°	0·6732	4·138	2·978	2·977
25	0·6774	4·138	2·891	2·890
30	0·6816	4·138	2·807	2·807
35	0·6866	4·138	2·726	2·725
40	0·6917	4·138	2·648	2·647
45	0·6969	4·140	2·573	2·572
50	0·7024	4·142	2·500	2·501
55	0·7079	4·144	2·430	2·431
60	0·7134	4·146	2·362	2·363

Aceton.

t	v_2	d_n	lg v_1 (I)	lg v_1 (II)
20°	1·240	2·008	3·242	3·242
25	1·249	2·019	3·147	3·149
30	1·258	2·030	3·058	3·060
35	1·267	2·041	2·974	2·975
40	1·277	2·048	2·894	2·894
45	1·286	2·050	2·818	2·816
50	1·296	2·052	2·750	2·744
55	1·306	2·054	2·675	2·674
60	1·316	2·060	2·607	2·607

Wie man sieht, decken sich hier Messung und Rechnung vollständig. Ja, es ist die Übereinstimmung so gut, dass sich dadurch sogar ein Fehler in den Werthen für die Dampfspannung, wie sie Regnault angibt, finden liess. Es ist dies die Dampfspannung des Acetons bei 50°. Für diese Temperatur weichen nämlich die lg v_1 in der letzten Stelle um sechs Einheiten von einander ab, während die übrigen vorkommenden Abweichungen höchstens 2 Einheiten betragen. Man kann sich leicht überzeugen, dass dies nur von der fehlerhaften Angabe der Dampfspannung herrührt. Wenn man nämlich die Differenzen der Dampfspannungen von 5 zu 5° bildet, so erhält man eine steigende Reihe, die jedoch an der bewussten Stelle eine auffallende Unstetigkeit zeigt, was bei einer anderen Flüssigkeit nicht vorkommt.

Ich halte es nicht für unwichtig, dass der Verlauf des specifischen Volumens gesättigter Dämpfe mit der Temperatur wesentlich durch das Glied $e^{\delta \frac{1-\alpha t}{1+\alpha t}}$ charakterisirt wird. Das hat natürlich zur Folge, dass auch bei der Beziehung zwischen Dampfspannung und Temperatur dieses Glied die Hauptrolle spielen muss, nur ist dann δ negativ zu nehmen, da ja nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze Druck und Volumen im Verhältnisse der Reciprocität stehen. Es ist dies ein Ergebniss, welches wir aus den Principien der Hydrostatik, wie sie die Auffassung der Materie als Continuum ergibt, erhalten haben. In gleicher Weise erhielten wir jedoch auch aus den Anschauungen der kinetischen Theorie der Gase und Flüssigkeiten, welche die Materie aus discreten

Molekeln bestehend auffasst, eine Formel für die Dampfspannung, in welcher der wesentlichste Bestandtheil ein Glied von der Form $e^{-k^2\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}}$ ist. Nun haben aber δ und k^2 genau dieselbe Bedeutung, so dass wir hier auf gänzlich verschiedenen Wegen zu demselben Resultate gelangt sind. Allerdings vollständig einwurfsfrei sind unsere Formeln nicht. So ist es z. B. sicherlich nicht der Fall, dass sich die Arbeit, welche eine Molekel beim Übergang aus der Flüssigkeit in den Dampf zur Überwindung der Capillarkräfte leisten muss, mit der Temperatur ebenso ändert wie die Capillaritätsconstante; denn es müsste dann bei allen Temperaturen die Zahl der Molekeln in der Oberflächeneinheit der Flüssigkeit dieselbe sein. Bedenken wir jedoch, dass der Ausdehnungs- und der Compressionscoefficient der Flüssigkeiten sehr kleine Grössen sind, so ergibt sich sofort, dass durch derartige Vernachlässigungen keine erheblichen Nachtheile entstehen können.

Wie ich in der Abhandlung: „Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln“ [1] gezeigt habe, ist die eigentliche Formel für die Dampfspannung

$$d = {}^2/_3\rho_0(1-\beta t)c_0c_0'(1+\alpha t)\int_{k\sqrt{\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}}}^{\infty}\sqrt{x^2-k^2\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}}\,e^{-x^2}dx.$$

Hier ist ρ_0 die Dichte der Flüssigkeit, c_0 die mittlere Geschwindigkeit der Molekeln in der Flüssigkeit, c_0' dieselbe im Dampfe, alles bei der Temperatur 0°. β ist der Ausdehnungscoefficient der Flüssigkeit, α jener der Gase. $k = \sqrt{\frac{3a^0}{mc_0^2}}$ in der bereits früher auseinandergesetzten Bedeutung.

In roher Annäherung lässt sich nun

$$\sqrt{x^2-k^2\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}} = x\sqrt{1-\frac{k^2}{x^2}\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}} =$$

$$= x\left[\alpha+\beta\frac{x^2}{k^2\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}}+\gamma\frac{x^4}{k^4\left(\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}\right)^2}+\delta\frac{x^6}{k^6\left(\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}\right)^3}\right]$$

[1] Diese Sitzungsber., XCIX, S. 862.

setzen, wenn $\alpha = -5{\cdot}08$, $\beta = 8{\cdot}52$, $\gamma = -4{\cdot}07$, $\delta = 0{\cdot}628$ ist. Führen wir diese Grösse ein, so wird

$$\int_{k\sqrt{\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}}}^{\infty} \sqrt{x^2 - k^2\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}}\, e^{-x^2} dx =$$

$$= \left[\frac{1{\cdot}13}{k^2\dfrac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}} - \frac{2{\cdot}19}{k^4\left(\dfrac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}\right)^2} + \frac{1{\cdot}88}{k^6\left(\dfrac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}\right)^3}\right] e^{-k^2\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}},$$

und für die Dampfspannung ergibt sich

$$d = C(1-\beta t)(1+\alpha t)\left[\frac{1{\cdot}13}{k^2\dfrac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}} - \frac{2{\cdot}19}{k^4\left(\dfrac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}\right)^2} + \frac{1{\cdot}88}{k^6\left(\dfrac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}\right)^3}\right] e^{-k^2\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}}, \quad 8)$$

wenn wir $\frac{2}{3}\rho_0 c_0 c_0' = C$, einer neuen Constanten, setzen. C und k lassen sich nun aus bekannten Dampfspannungen berechnen, dessgleichen können wir c_0' aus der Formel für den Dampfdruck, welche die kinetische Theorie liefert,

$$d = \frac{Nmc'^2}{3},$$

finden. Indem so alle Grössen der Gleichung 8) bekannt sind, können wir sie zur Berechnung von c_0, d. i. der mittleren Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln benützen. In der folgenden Tabelle habe ich die auf diese Weise gefundenen Zahlen zusammengestellt. Dabei sind für C jene Werthe angegeben, welche man erhält, wenn man den Dampfdruck in Millimetern Quecksilbersäule angibt, während alles Übrige in (c. g. s.)-Einheiten ausgedrückt ist.

	k^2	C	ρ_0	c_0'	c_0
Äther	4·5	98000	0·736	30300	8750
Äthylalkohol	8·2	430000	0·810	38200	27600
Methylalkohol	7·5	430000	0·814	45800	23100
Schwefelkohlenstoff	4·9	112000	1·293	29800	5810
Chloroform	5·6	109100	1·525	23600	6060
Aceton	5·4	102500	0·814	34400	7330

In allen Fällen zeigt sich, dass c_0 kleiner als c_0', dass mithin die Wärmebewegung im Flüssigkeitszustande eine andere als im gasförmigen sein muss. Doch dürften die Werthe, welche wir für c_0 erhielten, wenn wir von den Alkoholen absehen, wohl zu klein ausgefallen sein. Dies kommt eben daher, weil die Art unserer Integration nur eine rohe Annäherung an die Wirklichkeit bietet. So können wir die Werthe für C und k^2 beträchtlich ändern, ohne dass wir im Gange der Dampfspannung mit der Temperatur zwischen Rechnung und Messung grössere Abweichungen erhielten als bei den in der vorstehenden Tabelle angegebenen Werthen. In Folge dessen lassen auch die Angaben für c_0 einen grossen Spielraum zu.

Wie ich in der bereits erwähnten Abhandlung: „Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln", weiter zeigte, ist es uns auch möglich, aus $k^2 = \frac{3a_0}{mc_0^2}$ und c_0 die Grösse $\frac{a_0}{m}$ zu finden, d. i. die Arbeit, welche beim Transport der Masseneinheit Flüssigkeit aus dem flüssigen in den dampfförmigen Zustand zur Überwindung der Cohäsion geleistet werden muss. Weiters ergibt sich dann, wenn wir Alles auf die Temperatur 0° beziehen, für den inneren Druck der Flüssigkeit $A = \frac{a_0\rho_0}{2m}$ und für den Durchmesser einer Molekel $\delta = \frac{3m\alpha_0}{a_0\rho_0}$, wobei α_0 die Capillaritätsconstante ist. Wegen der grossen Unsicherheit der Werthe, welche wir für c_0 fanden, halte ich es für werthlos, die daraus berechneten Zahlen für A und δ anzuführen, sondern es dünkt mir ein viel sichereres Verfahren zu sein, den umgekehrten Weg einzuschlagen. Indem uns nämlich die kinetische Gastheorie mit ziemlicher Sicherheit die Grösse δ bestimmen lehrt, so können wir diesen Werth benützen, um $\frac{a_0}{m} = \frac{3\alpha_0}{\rho_0\delta}$ und $c_0 = \sqrt{\frac{3a_0}{mk^2}}$ zu finden.

Nach O. E. Meyer[1] ist für Wasser $\delta = 44 \cdot 10^{-9}\,cm$. Setzen wir das specifische Gewicht des Wassers gleich 1, das Moleculargewicht gleich 18, so ergibt sich für die übrigen Flüssigkeiten $\delta = 44 \cdot 10^{-9} \sqrt[3]{\frac{\mu}{18s}}$, wenn μ das Moleculargewicht, s das speci-

[1] Theorie der Gase, S. 231.

fische Gewicht der betreffenden Flüssigkeit ist. In folgender Tabelle sind die auf diese Weise gefundenen Zahlen zusammengestellt. In derselben ist unter A(c. g. s.) der innere Druck in absolutem Masse, unter A(Atm.) derselbe in Atmosphären angeführt. Zur Berechnung von c_0 wurden jene Werthe von k^2 benützt, welche wir aus der zuerst angegebenen Gleichung für die Dampfspannung fanden.

	$\delta.10^9$	$\frac{a_0\rho_0}{m}.10^{-7}$	A(c.g.s).10^{-7}	A(Atm.)	c_0
Wasser	44	525	263	2600	35900
Äther	78	79	40	395	26000
Äthylalkohol	65	114	57	563	21400
Methylalkohol	57	134	67	661	23100
Schwefelkohlenstoff	65	156	78	770	24100
Chloroform	72	115	58	573	18800
Aceton	70	117	59	582	24200

Auch auf diesem Wege ergibt sich c_0 in allen Fällen kleiner als c_0'.

In seiner Abhandlung: „Über den Druck im Innern der Flüssigkeiten“[1] versucht Fick einen Ausdruck für den inneren Druck der Flüssigkeiten dadurch zu gewinnen, dass er die Gesetze des osmotischen Druckes auch auf das Lösungsmittel anwendet. Das heisst aber nichts Anderes, als das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz $pv = RT$ auch für den flüssigen Zustand gebrauchen, nur mit dem Unterschiede, dass man für R nicht jenen Werth, welcher den Gasen zukommt, sondern den etwa um $^1/_2\,^0/_0$ kleineren des osmotischen Druckes einsetzt. Dass dieses Vorgehen nicht gerechtfertigt ist, erhellt einerseits daraus, dass das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz nicht einmal mehr von Gasen unter hohem Drucke, geschweige denn von Flüssigkeiten befolgt wird, anderseits daraus, dass auch die Gesetze des osmotischen Druckes nur für verdünnte Lösungen Geltung haben. Ich habe es daher unterlassen, den inneren Druck der Flüssigkeiten nach dieser Methode zu berechnen, da ja hier doch keine Vergleichspunkte mit den durch mein Verfahren gewonnenen Zahlen vorhanden wären.

[1] Zeitschr. f. phys. Chem., V, S. 526 u. f.

Der tägliche Gang der Häufigkeit und Stärke der einzelnen Windrichtungen zu Triest

von

Eduard Mazelle,

Adjunct am k. k. astronomisch-meteorologischen Observatorium und Docent für Meteorologie an der k. k. nautischen Akademie in Triest.

Das k. k. astronomisch-meteorologische Observatorium in Triest besitzt seit Jahren an zwei verschiedenen Orten selbstregistrirende Anemometer. Das eine befindet sich auf der Terrasse des meteorologischen Observatoriums im Akademiegebäude, das zweite in einem Aufbaue auf der Plattform eines kleinen Gebäudes am Ende des Molo Sartorio, woselbst sich auch im Parterreraume der Fluthmesser befindet.

Da die Lage des zweiten Anemographen, System Casella, eine bedeutend günstigere ist und ausserdem derselbe schon seit einer längeren Reihe von Jahren in regelmässiger Thätigkeit sich befindet, so will ich die Aufzeichnungen dieses Instrumentes verwenden, um einige Untersuchungen über die Windverhältnisse in Triest anzustellen.

Das Schalenkreuz und die Windfahne des Anemographen Casella befinden sich $10 \cdot 9\,m$ über dem mittleren Meeresniveau und sind im südwestlichen Theile des Triester Hafens gelegen.

In den Beobachtungsbögen wurden bei den stündlichen Aufzeichnungen acht Windrichtungen unterschieden.

In vorliegender Abhandlung will ich den täglichen Gang der Häufigkeit, der Stärke und der mittleren Geschwindigkeit des Windes für die einzelnen Richtungen bestimmen. Zu diesem Zwecke musste ich zuerst die Aufzeichnungen nach Richtungen,

Monaten und Stunden trennen, ich habe diese Arbeit für die fünf Beobachtungsjahre 1883—1887 durchgeführt.

Da die Wiedergabe sämmtlicher Monatstabellen zu viel Raum einnehmen würde, so habe ich aus diesen die Summen für die vier Jahreszeiten gebildet. Die Tabellen 1—5 stellen dar, wie oft der Wind in den einzelnen Tagesstunden in einer der acht Richtungen zu verzeichnen war, und die Tabellen 6—10 bringen die Kilometeranzahl, welche die Luftbewegung in diesen Zeiträumen in den einzelnen Richtungen zurückgelegt hat.

Häufigkeit. Aus den Häufigkeitstabellen, 1—4, ersieht man durch alle vier Jahreszeiten eine deutliche Drehung des Windes mit der Sonne, und zwar überwiegen des Morgens östliche Winde, Vormittags südliche, in den ersten Nachmittagsstunden westliche und Abends nördliche Winde. Besonders bemerkenswerth ist, dass gerade im Winter, wo das Auftreten der westlichen Seebrisen und der östlichen Landwinde einen bedeutend geringeren Einfluss als im Sommer haben können, die Drehung der Frequenzmaxima äusserst deutlich hervortritt.

Aus der Jahrestabelle 5 entnehme ich, dass in den ersten Morgenstunden zwischen 2—3^h das Frequenzmaximum des E-Windes fällt, zwischen 3—4^h Morgens dasselbe für den SE, von 8—9^h Vormittags für den S, von 1—2^h *p.* für den SW. und W, 2—3^h *p.* NW, 4—5^h Nachmittags für den N und zwischen 9—10^h Abends für den NE. Das Eintreffen des Maximums der einzelnen Windrichtungen erscheint im Mittel um 4·7 Stunden oder 70° verfrüht im Vergleiche zur mittleren Lage der Sonne. In einer Abhandlung: „Die tägliche Periode des Windes", diese Sitzungsberichte, 1879, führt Hofrath Hann auf S. 60 an, dass in Wien und Madrid die Luftströmung die Sonne immer zur Linken lässt. Auf S. 50 derselben Abhandlung citirt Prof. Hann die Resultate Quetelet's über die Windverhältnisse Brüssels, welche sagen, dass die Luftströmung dortselbst um beiläufig 90° der Sonne vorläuft. Unser obiges Resultat für Triest würde daher mit den Brüsseler Angaben übereinstimmen, da auch hier die Sonne stets zur Rechten bleibt. In allen diesen Stationen und mehreren anderen, welche in obgenannter Abhandlung hervorgehoben werden, sowie auch in Lesina (Dr. Hann, Windgeschwindigkeit

Tabelle I.

Häufigkeit der Windrichtungen in den fünf Jahren 1883—1887.

Winter.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mittern.—1h *a.*	5	141	116	67	9	13	5	10
1—2	2	148	128	57	11	8	4	8
2—3	6	153	111	74	10	11	7	5
3—4	5	143	107	86	8	13	9	4
4—5	3	142	116	86	10	10	9	7
5—6	2	145	121	78	9	11	10	8
6—7	5	141	121	95	7	10	8	8
7—8	4	148	123	85	9	12	8	10
8—9	5	144	124	95	15	16	6	7
9—10	4	143	124	78	15	21	9	15
10—11	7	167	92	70	14	32	16	22
11—Mittag	8	164	84	51	13	43	22	33
Mittag—1h *p.*	8	157	84	44	8	41	35	45
1—2	9	168	66	38	14	41	42	47
2—3	8	155	81	34	6	40	38	51
3—4	5	156	74	41	5	36	39	46
4—5	14	151	82	31	7	32	33	36
5—6	7	161	79	44	10	22	24	29
6—7	10	144	99	48	11	21	16	27
7—8	8	150	107	51	11	15	16	19
8—9	6	154	108	55	8	14	15	15
9—10	7	164	91	67	10	12	10	16
10—11	10	159	117	53	11	10	5	11
11—Mittern.	10	147	118	61	8	12	8	10
Mittel	6·6	151·9	103·0	62·0	10·0	20·7	16·4	20·4

Tabelle II.

Häufigkeit der Windrichtungen in den fünf Jahren 1883—1887.

Frühling.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mittern.–1h *a.*	3	113	101	71	12	14	7	9
1—2	3	111	108	82	10	10	7	4
2—3	2	109	114	86	6	16	5	2
3–4	7	113	**111**	95	5	12	10	2
4—5	6	111	121	**93**	9	7	10	5
5—6	5	123	118	94	8	10	7	3
6—7	5	130	113	88	13	15	5	5
7—8	5	**133**	92	88	19	25	4	11
8—9	12	118	75	60	**26**	45	28	40
9—10	8	120	53	35	17	60	64	66
10—11	19	109	42	27	10	66	69	92
11—Mittag	21	98	40	19	7	80	76	102
Mittag—1h *p.*	21	102	37	18	6	90	80	92
1—2	26	97	35	12	10	**95**	**79**	**93**
2—3	18	104	24	17	9	89	83	94
3—4	20	94	36	15	7	93	67	97
4—5	22	92	45	16	5	**72**	67	93
5—6	**26**	98	45	26	9	62	54	76
6—7	20	99	59	**33**	14	**44**	37	61
7—8	16	95	81	51	10	29	25	40
8—9	8	**114**	84	55	12	17	16	29
9–10	10	110	94	60	9	8	13	17
10—11	11	106	95	61	11	12	14	10
11—Mittern.	8	107	102	66	8	12	15	7
Mittel.....	12·6	108·6	76·0	52·8	10·5	41·0	35·1	43·7

Tabelle III.

Häufigkeit der Windrichtungen in den fünf Jahren 1883—1887.

Sommer.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mittern.—1h *a.*	5	90	143	80	12	6	5	5
1—2	5	87	157	71	13	9	5	5
2—3	3	90	**164**	80	13	5	2	3
3—4	1	90	142	**101**	11	8	3	4
4—5	5	84	151	99	11	9	2	7
5—6	8	95	157	96	9	9	3	3
6—7	12	108	138	90	17	14	4	2
7—8	17	105	103	87	**35**	30	10	17
8—9	16	**111**	71	54	32	63	37	50
9—10	12	99	49	29	20	82	73	84
10—11	20	90	38	16	15	70	86	114
11—Mittag	22	87	34	7	7	81	116	95
Mittag—1h *p.*	23	80	26	13	8	99	118	79
1—2	19	68	23	20	9	**102**	**108**	**96**
2—3	16	71	30	14	8	109	106	89
3—4	**27**	70	22	17	12	99	106	81
4—5	25	77	31	21	10	90	86	87
5—6	26	80	40	26	9	83	73	78
6—7	24	78	79	24	12	58	48	68
7—8	14	101	88	45	12	31	30	36
8—9	11	100	125	47	6	20	14	19
9—10	10	97	126	57	10	10	10	10
10—11	13	**104**	116	60	9	12	4	13
11—Mittern.	6	96	120	79	13	7	5	9
Mittel	14·2	89·9	90·5	51·4	13·0	46·1	43·9	43·9

Tabelle IV.

Häufigkeit der Windrichtungen in den fünf Jahren 1883—1887.

Herbst.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mittern.—1h *a.*	3	112	149	82	10	9	15	2
1—2	4	111	140	99	7	12	7	5
2—3	5	114	146	100	8	10	5	3
3—4	6	93	**156**	115	9	9	6	4
4—5	7	114	136	117	11	15	7	4
5—6	5	112	155	115	4	12	7	6
6—7	1	120	148	**117**	13	9	7	5
7—8	3	122	143	120	16	8	3	4
8—9	9	127	118	103	**28**	26	12	12
9—10	8	119	103	95	15	50	18	23
10—11	4	121	71	63	20	74	35	46
11—Mittag	18	116	60	43	12	82	48	59
Mittag—1h *p.*	12	117	47	32	12	80	64	74
1—2	11	108	52	31	10	**87**	**67**	**69**
2—3	10	117	45	28	16	82	61	72
3—4	13	119	50	40	12	66	54	67
4—5	16	118	64	46	11	54	50	53
5—6	**18**	124	92	46	11	40	31	37
6—7	9	**137**	93	79	15	18	17	24
7—8	11	123	111	87	9	14	13	13
8—9	6	124	127	88	7	9	13	8
9—10	1	129	126	86	7	13	11	8
10—11	3	122	133	86	5	18	9	7
11—Mittern.	3	116	140	87	9	13	11	3
Mittel.....	7·8	118·1	108·5	79·4	11·5	33·8	23·8	25·3

Tabelle V.

Häufigkeit der Windrichtungen in den fünf Jahren 1883—1887.

	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE
Mittern.—1h *a.*	509	300	43	42	32	26	16	456
1—2	533	309	41	39	23	22	14	457
2—3	**585**	340	37	42	19	13	16	466
3—4	516	**397**	33	42	28	14	19	439
4—5	524	395	41	41	28	23	21	451
5—6	551	383	30	42	27	20	20	475
6—7	520	390	50	48	24	20	23	499
7—8	461	380	79	75	25	42	29	**508**
8—9	388	312	**101**	150	83	109	42	500
9—10	329	237	67	213	164	188	32	481
10—11	243	176	59	242	206	274	50	487
11—Mittag	218	120	39	286	262	289	69	465
Mittag—1h *p.*	194	107	34	310	297	290	64	456
1—2	176	101	43	**325**	**296**	305	65	441
2—3	180	93	39	320	288	**306**	52	447
3—4	182	113	36	294	266	291	65	439
4—5	222	114	33	248	236	269	77	438
5—6	256	142	39	207	182	220	77	463
6—7	330	184	52	141	118	180	63	458
7—8	387	234	42	89	84	108	49	469
8—9	444	245	33	60	58	71	31	492
9—10	437	270	36	43	44	51	28	**500**
10—11	461	260	36	52	32	41	37	491
11—Mittern.	480	293	38	44	39	29	27	466
Mittel	378·2	245·6	45·0	141·5	119·2	133·4	41·1	468·5

und Richtung, Annalen der Hydrographie, 1888) erscheint aber die Drehung mit der Sonne ganz deutlich ausgedrückt. Alle Winde ohne Ausnahme ergeben die gleiche Regel durch alle vier Jahreszeiten auch für Triest, nur der NE-Wind zeigt ein zweifaches Maximum, das eine, welches ganz gut in die allgemeine Drehung hineinpasst, und ein zweites, welches auf den Vormittag fällt.

Der häufigste Wind für Triest ist der NE und E, sodann SE, ferner SW, NW und W, am seltensten S und N. Unsere Bora, welche auf ENE fällt, zeigt eine mehr als dreimal so grosse Häufigkeit als der zweite vorherrschende Wind, der Scirocco, wenn wir berücksichtigen, dass der grösste Theil der mit E notirten Windrichtungen zur Bora und nicht zum Scirocco zu rechnen sind.

Für ein mittleres Jahr ergeben sich folgende Frequenzziffern für die einzelnen Windrichtungen:

N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calmen
8·2*	93·7	75·6	49·1	9·0	28·3	23·8	26·7	49·9 Tage.

Für die einzelnen Jahreszeiten erhalte ich folgende mittlere Häufigkeit der einzelnen Windrichtungen, ausgedrückt durch die Anzahl Tage in den fünf Jahren 1883—1887.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calmen
Winter...	6·6*	151·9	103·0	62·0	10·0	20·7	16·4	20·4	58·0
Frühling	12·6	108·6	76·0	52·8	10·5*	41·0	35·1	43·7	77·7
Sommer..	14·2	89·9	90·5	51·4	13·0*	46·1	43·9	43·9	67·1
Herbst...	7·8*	118·1	108·5	79·4	11·5	33·8	28·8	25·3	46·8

In allen Jahreszeiten ist die Bora der vorherrschende Wind, sodann der Scirocco. Sowohl Bora als Scirocco nehmen während der warmen Monate an Frequenz ab, die westlichen Winde vermehren sich hingegen, die letzteren sind für Triest Seewinde.

Zu obigen Zusammenstellungen ist zu bemerken, dass im Jahre 1885, in Folge einer kurzen Störung des Anemographen, die Angaben für den 22. und 23. Jänner und die des 1. und 2. März fehlen. In 1826 Beobachtungstagen versagte der Casella nur viermal.

Windwege in Kilometern. Geradeso wie die Tabellen für die Häufigkeit, ergeben auch die Zusammenstellungen der zurückgelegten Windwege, Tafeln 6—10, im Laufe eines Tages eine deutliche Drehung des Windes mit der Sonne. Diese Drehung ist durch alle vier Jahreszeiten ersichtlich. In der Jahressumme haben wir von 1—2^h Morgens das Maximum der absoluten Windstärke des E, von 4—5^h *a.* des SE, 8—9^h Vormittags des S, von 1—2^h *p.* SW und W, 2—3^h *p.* NW, auf 5—6^h Nachmittags fällt das Maximum des N und zwischen 10—11^h Nachts ein Maximum des NE. Auch hier, wie bei der Häufigkeit, zeigt der NE ein zweites Maximum zwischen 8—9^h Vormittags, welches an Stärke dem Nachtmaximum überlegen ist.

Wenn ich die in fünf Jahren von den einzelnen Windrichtungen erreichte Kilometeranzahl auf ein mittleres Jahr reducire, erhalte ich:

N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
2105·2	72832·4	26079·2	8610·8	1840·0	6784·2	3493·2	3746·6

Man ersieht daraus, dass der NE allen Winden an Stärke weitaus überlegen ist und auf 72832 *km* pro Jahr kommt. Sodann folgt an Stärke der E, SE, ferners SW, NW und W. Am schwächsten sind der N und S.

Die Mittelwerthe der einzelnen Windrichtungen für die vier Jahreszeiten, wie sich dieselben aus den Tabellen 6—9 ergeben, zeigen, dass der NE und E die grösste Kilometeranzahl im Winter

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Winter....	84·7	5778·8	1773·5	438·6	59·0	136·4	68·6	95·8
Frühling ..	145·8	3619·9	1080·3	340·7	97·0	409·9	183·0	262·6
Sommer...	136·7	2191·0	1071·0	389·8	111·3	515·7	323·6	270·2
Herbst....	71·3	3583·0	1508·3	625·0	116·0	351·4	152·5	151·9

erreichen, der SE und S ihre grösste Stärke im Herbst, der SW, W und NW im Sommer haben.

Reduction auf vier Componenten. Bevor ich die Bessel'sche Formel zur Anwendung bringe, will ich noch früher die Windwege der Tafel 10 auf vier Componenten reduciren, und zwar auf die Richtungen NE, SE, SW und NW, welche zugleich den wichtigsten Windrichtungen entsprechen. Die

Tabelle VI.

Windwege in Kilometern in den Jahren 1883—1887.

Winter.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mittern.—1h *a.*	58	5245	**2110**	459	55	100	60	87
1—2	9	5637	2022	284	73	54	21	**53**
2—3	81	5525	1841	428	68	91	25	19
3—4	100	5419	1712	558	78	106	70	19
4—5	52	5568	1642	509	55	91	51	**34**
5—6	15	5530	1900	527	51	67	31	**45**
6—7	109	5413	2108	620	**44**	43	26	**30**
7—8	38	5607	1764	584	80	46	20	79
8—9	28	5806	1907	**645**	86	70	19	17
9—10	147	5572	2076	509	79	91	23	60
10—11	132	6055	1515	573	74	205	68	84
11—Mittag	124	5910	1692	372	66	286	107	140
Mittag—1h *p.*	121	5693	1789	326	**57**	285	179	216
1—2	73	6263	1254	306	89	**295**	**218**	214
2—3	29	5878	1735	300	48	275	174	**302**
3—4	72	5977	1614	339	73	187	148	245
4—5	**211**	5915	1726	247	52	211	111	138
5—6	102	6131	1459	353	37	120	58	120
6—7	154	5677	2023	351	51	125	36	92
7—8	94	5684	2012	400	45	97	55	52
8—9	34	6014	1738	421	12	154	32	92
9—10	42	**6282**	1319	558	78	90	49	89
10—11	62	6188	1743	364	42	75	18	39
11—Mittern.	147	5701	1863	492	27	109	53	34
Mittel	84·7	5778·8	1773·5	438·6	59·0	136·4	68·6	95·8

Tabelle VII.

Windwege in Kilometern in den Jahren 1883—1887.

Frühling.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mittern.—1h *a.*	65	3752	1026	432	154	112	13	53
1—2	61	3566	**1840**	448	106	51	13	35
2—3	17	3658	1318	454	49	114	12	8
3—4	115	3685	1224	512	47	87	21	9
4—5	128	3546	1332	497	81	35	31	52
5—6	96	4059	1160	**517**	72	38	19	28
6—7	45	**4583**	1134	491	80	86	10	26
7—8	26	4474	1074	516	114	185	11	40
8—9	113	4303	1239	426	**188**	375	116	170
9—10	53	4342	955	227	120	579	326	374
10—11	177	3965	1029	253	130	778	383	605
11—Mittag	287	3634	1015	180	74	954	498	689
Mittag—1h *p.*	166	3679	989	174	42	**1174**	**556**	640
1—2	262	3470	731	116	147	1171	490	**670**
2—3	145	3548	552	192	124	1069	551	640
3—4	220	3313	821	146	86	1051	364	644
4—5	221	3166	964	121	80	617	361	551
5—6	**878**	2872	965	206	113	435	245	382
6—7	211	2993	1076	236	120	299	132	277
7—8	232	2965	1216	349	99	184	66	159
8—9	77	3418	1181	400	86	111	35	126
9—10	120	3133	1350	429	89	86	37	68
10—11	149	3435	1121	411	81	112	36	41
11—Mittern.	140	3369	1116	443	51	134	67	16
Mittel.....	145·8	3619·9	1080·3	340·7	97·0	409·9	183·0	262·6

Tabelle VIII.

Windwege in Kilometern in den Jahren 1883—1887.

Sommer.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mittern.—1h *a.*	87	1950	1400	539	96	47	27	43
1—2	58	2024	1532	510	99	59	19	35
2—3	36	2135	**1681**	597	92	33	2	21
3—4	1	2219	1467	**762**	71	76	13	28
4—5	46	2048	1494	758	68	86	3	36
5—6	85	2270	1547	634	50	94	18	14
6—7	84	2469	1590	600	136	102	20	18
7—8	147	2567	1498	587	**281**	252	58	98
8—9	98	**2761**	1205	418	266	531	213	275
9—10	125	2637	993	281	177	829	477	459
10—11	164	2507	920	154	146	914	688	739
11—Mittag	193	2389	765	58	88	1146	906	656
Mittag—1h *p.*	244	2289	460	153	91	1436	1033	563
1—2	192	1929	482	304	89	**1490**	**980**	**644**
2—3	164	1971	568	128	88	1449	945	589
3—4	230	2064	412	174	121	1194	914	546
4—5	**309**	1977	632	184	101	1000	587	535
5—6	304	2093	589	265	81	705	421	389
6—7	189	1721	1202	168	102	439	195	310
7—8	149	2032	911	338	92	190	98	157
8—9	78	2078	1137	344	43	92	32	105
9—10	72	2048	1126	423	86	53	77	48
10—11	164	**2235**	994	408	83	115	6	103
11—Mittern.	62	2170	1150	567	125	45	34	74
Mittel	136·7	2191·0	1071·0	389·8	111·3	515·7	323·6	270·2

Tabelle IX.

Windwege in Kilometern in den Jahren 1883—1887.

Herbst.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mittern.—1h *a.*	13	3408	1908	580	99	93	162	35
1—2	27	3311	1963	716	79	136	70	71
2—3	119	3330	1985	719	51	130	39	30
3—4	102	2790	**2192**	822	104	111	42	28
4—5	85	3393	1613	876	83	213	26	35
5—6	49	3458	1728	811	15	191	26	60
6—7	5	3534	1729	**909**	120	90	35	23
7—8	25	3664	1792	869	100	98	10	20
8—9	49	3715	1591	717	174	195	56	45
9—10	83	3492	1689	762	136	438	103	99
10—11	29	3667	1414	588	**211**	712	242	283
11—Mittag	139	3704	1186	346	128	945	365	384
Mittag—1h *p.*	106	3668	998	336	172	953	553	546
1—2	86	3556	1057	299	125	**1022**	**486**	**446**
2—3	64	3718	906	334	203	907	415	495
3—4	102	3794	910	412	174	677	311	409
4—5	165	3627	1255	403	142	498	228	289
5—6	**197**	3841	1287	400	104	288	133	161
6—7	65	**3901**	1147	728	174	93	69	65
7—8	85	3621	1523	576	74	92	48	26
8—9	41	3792	1495	712	87	77	38	30
9—10	32	3868	1466	750	88	122	34	37
10—11	36	3759	1450	672	58	178	30	19
11—Mittern.	8	3400	1915	662	84	175	139	9
Mittel	71·3	3583·8	1508·3	625·0	116·0	351·4	152·5	151·9

Tabelle X.

Windwege in Kilometern in den Jahren 1883—1887.

	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE
Mittern.—1h *a.*	6444	2010	404	352	262	218	223	14355
1—2	**6857**	1958	357	300	123	194	155	14538
2—3	6775	2198	255	368	78	78	253	14648
3—4	6595	2654	300	380	146	84	318	14113
4—5	6081	**2640**	287	425	111	157	311	14555
5—6	6335	2489	188	390	94	147	**245**	15137
6—7	6561	2620	380	321	91	97	243	15949
7—8	6128	2556	575	581	99	237	236	16312
8—9	5942	2206	**709**	1171	404	507	288	**16585**
9—10	5713	1779	512	1937	929	992	408	16043
10—11	4878	1568	561	2609	1381	1711	502	16194
11—Mittag	4658	956	356	3331	1876	1869	743	15637
Mittag—1h *p.*	4236	989	362	3848	2321	1965	637	15329
1—2	3524	1025	450	**3978**	**2169**	1974	613	15218
2—3	3761	954	463	3700	2085	**2026**	402	15115
3—4	3757	1071	454	3109	1737	1844	624	15148
4—5	4577	955	375	2326	1287	1513	906	14685
5—6	4300	1224	335	1548	857	1052	**976**	14937
6—7	5448	1483	447	956	432	744	619	14292
7—8	5662	1663	310	563	267	394	560	14302
8—9	5551	1877	228	434	137	358	230	15302
9—10	5261	2160	341	351	197	242	266	15331
10—11	5308	1855	264	480	90	202	411	**15617**
11—Mittern.	6044	2164	287	463	293	133	357	14640
Mittel	5433·2	1793·9	383·3	1413·4	727·7	780·6	438·6	15173·4

Reductionen habe ich nach folgenden Gleichungen vorgenommen: NE = NE+(N+E) cos 45°, SE = SE+(E+S) cos 45°, SW = = SW+(S+W) cos 45°, NW = NW+(W+N) cos 45° und die sich ergebenden Werthe noch durch fünf dividirt, um Windwege in einem mittleren Jahre zu erhalten. Auf diese in Tafel 11 zusammengestellten Resultate will ich nun die Bessel'sche Ausgleichsrechnung anwenden. Ich erhalte folgende vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} NE\ldots y = {} & 3865\cdot0+\overline{2\cdot22643}\sin(7^\circ43'+x.15^\circ)+\\ & +\overline{2\cdot13324}\sin(205^\circ10'+x.30^\circ)+\\ & +\overline{1\cdot69557}\sin(93^\circ49'+x.45^\circ). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SE\ldots y = {} & 1181\cdot3+\overline{2\cdot51330}\sin(47^\circ55'+x.15^\circ)+\\ & +\overline{2\cdot01583}\sin(242^\circ59'+x.30^\circ)+\\ & +\overline{1\cdot51880}\sin(44^\circ53'+x.45^\circ). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SW\ldots y = {} & 439\cdot8+\overline{2\cdot67631}\sin(257^\circ19'+x.15^\circ)+\\ & +\overline{2\cdot35409}\sin(68^\circ11'+x.30^\circ)+\\ & +\overline{1\cdot57967}\sin(226^\circ49'+x.45^\circ). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} NW\ldots y = {} & 321\cdot0+\overline{2\cdot55276}\sin(250^\circ4'+x.15^\circ)+\\ & +\overline{2\cdot17408}\sin(62^\circ23'+x.30^\circ)+\\ & +\overline{1\cdot26287}\sin(290^\circ7'+x.45^\circ) \end{aligned}$$

und mit Hilfe dieser Gleichungen die Tafel 12.

Die überstrichenen Zahlen stellen die Logarithmen der gerechneten Sinusfactoren dar. $x = 0$ ist für die Stunde von Mitternacht -1^h *a.* zu setzen.

Sämmtliche Componenten ergaben sehr regelmässige tägliche Gangcurven. Das Maximum der SE-Componente tritt zwischen 5—6^h Morgens ein, zwischen 1—2^h *p.* erreichen zuerst die SW-, sodann die NW-Componente ihr Maximum, zwischen 11—Mitternacht hätte die NE-Componente ein Maximum. Dieses Maximum ist aber schwächer ausgedrückt als ein anderes, welches zwischen 8—9^h Vormittags fällt.

Auch die anderen Winde zeigen secundäre Maxima und Minima, welche aber sehr schwach ausgeprägt erscheinen. Mit Hilfe des ersten Differentialquotienten obiger Gleichungen habe ich die genauen Eintrittszeiten der Maxima und Minima berechnet.

Tabelle XI.

Windwege im Jahresmittel auf vier Componenten reducirt.

Kilometer pro Stunde.

	NE	SE	SW	NW
Mittern.—1h *a.*	3814	1370	165	112
1—2	3899	1412	128	78
2—3	3924	1434	121	62
3—4	3800	**1506**	139	82
4—5	3815	1429	141	91
5—6	3994	1420	118	77
6—7	4152	1506	131	67
7—8	4162	1459	212	95
8—9	**4198**	1382	392	199
9—10	4074	1236	591	387
10—11	4000	1083	796	609
11—Mittag	3891	900	982	744
Mittag—1h *p.*	3755	848	1149	**811**
1—2	3629	767	**1166**	**788**
2—3	3612	788	1100	757
3—4	3649	810	932	703
4—5	3712	891	700	613
5—6	3734	900	478	470
6—7	3716	1130	316	297
7—8	3740	1177	194	196
8—9	3878	1193	138	123
9—10	3848	1224	146	114
10—11	3932	1159	146	111
11—Mittern.	3833	1328	175	119
Mittel.....	3865·0	1181·3	439·8	321·0

Tabelle XII.

Berechneter täglicher Gang der vier Windcomponenten im Jahresmittel.

Kilometer pro Stunde.

	NE	SE	SW	NW	NE	SE	SW	NW
Mittern.—1h *a.*	3879·3	1354·2	158·9	100·4	14·3	172·9	**—280·9**	—220·6
1—2	3851 1	1401·0	151·3	106·7	— 13·9	219·7	—288·5	**—214·3**
2—3	3829·3	1436·5	138·3	101·8	— 35· *	255·2	—301·5	—219·2
3—4	3838·7	1459·9	123·9	83·4	— 26·3	278·6	—315·9	—237·6
4—5	3893·8	1473·7	113·6	58·7	28·8	292·4	—326·2*	—262·3
5—6	3987·9	1478·5	117·6	44·2	122·9	**297·2**	—322·2	—276·8*
6—7	4093·0	1468·8	151·8	60·7	228·0	287·5	—288·0	—260·3
7—8	4169·3	1433·2	234·1	124·5	304·3	251·9	—205·7	—196·5
8—9	4183·1	1359·9	375·8	240·1	**318·1**	178·6	— 64·0	— 80·9
9—10	4122·7	1244·8	571·5	395·4	257·7	63·5	131·7	74·4
10—11	4003·2	1099·0	794·9	563·3	138·2	— 82·3	355·1	242·3
11—Mittag	3860·6	947·7	1001·0	710·3	— 4·4	—233·6	561·2	389·3
Mittag—1h *p.*	3735·1	823·6	1140·3	806·2	—129·9	—357·7	700·5	485·2
1—2	3655·7	754·4	1175·7	833·7	—209·3	—426·9	**785·9**	**512·7**
2—3	3629·9	752·1	1096·5	792·4	—235·1*	—429·2*	656·7	471·4
3—4	3645·3	808·5	923·7	697·0	—219·7	—372·8	483·9	376·0
4—5	3681·0	899·7	701·6	570·9	—184·0	—281·6	261·8	249·9
5—6	3719·1	997·1	482·6	437·8	—145·9	—184·2	42·8	116·8
6—7	3752·6	1078·6	308·2	316·7	—112·4	—102·7	—131·6	— 4·3
7—8	3783·9	1136·6	198·1	219·1	— 81·1	— 44·7	—241·7	—101·9
8—9	3817·7	1176·7	148·6	149·7	— 47·3	— 4·6	—291·2	—171·3
9—10	3853·3	1212·0	140·1	108·2	— 11·7	30·7	—299·7*	—212·8
10—11	3882·0	1252·8	149·1	91·1	17·0	71·5	—290·7	—229·9*
11—Mittern.	3892·4	1301·9	158·0	91·7	**27·4**	120·6	—281·8	—229·3
Mittel	3865·0	1181·3	439·8	321·0	121·4	210·0	327·5	243·2

Ich bringe dieselben in folgender Zusammenstellung, die Hauptculminationen sind besonders hervorgehoben:

	Max.	Min.	Max.	Min.
SE....	5h 55m a.	2h 33m p.	—	—
SW...	0 35 a.	5 15 a.	1h 48m p.	9h 52m p.
NW...	2 8 a.	6 4 a.	1 53 p.	11 31 p.
NE ...	8 41 a.	3 4 p.	11 56 p.	3 14 a.

Die täglichen Gangcurven für den SW und NW, die Seewinde Triest's, steigen Vormittags nach 9h (SW um 9h 15, NW um 9h30) über den Mittelwerth hinauf, um ihr stark ausgeprägtes Maximum gegen 2h zu erreichen, sinken dann mit derselben Regelmässigkeit, mit der sie früher aufgestiegen sind, und fallen vor 7h Abends (SW um 6h 15, NW um 7h) wieder unter den Mittelwerth hinab. Die Ordinate des Maximums ist beim SW mehr als doppelt und beim NW fast doppelt so gross als die Ordinate des Minimums.

Aus Tabelle 12 folgt noch, dass an Stärke die NE-Componente alle anderen überragt, sodann folgt die SE-, SW- und NW-Componente.

Zur Bestimmung der Grösse der täglichen Schwankung habe ich folgende Masszahlen berechnet:

	NE	SE	SW	NW
Max.—Min.	553·2	726·4	1062·1	789·5
Max.: Min.	1·15	1·97	10·35	18·86
Mittlere Ordinate der täglichen Gangcurve	121·4	210·0	327·5	243·2
Quotient der mittleren Ordinate und des Tagesmittels	0·031	0·178	0·745	0·758

Man ersieht daraus, dass die schwächeren Winde eine grössere tägliche periodische Schwankung zeigen als die starken Winde. Der Quotient der mittleren Ordinate und des Tagesmittels ist am kleinsten beim NE, beim SE ist er schon 5·7mal grösser, beim SW gar 24·0mal und beim NW 24·5mal grösser als beim NE. Die Grösse der täglichen Schwankung steht im umgekehrten Verhältnisse zur Intensität des Windes, die stärkste Componente, der NE, hat die geringste Periode, die schwachen Winde, SW und NW, hingegen die grösste.

In Tabelle 13 habe ich die Windwege für die extremen Jahreszeiten zusammengestellt. Ich habe dieselben aus den Tafeln 6 und 8 abgeleitet, und zwar auf gleiche Art wie Tabelle 11 aus 10.

Der tägliche Gang ist in den extremen Jahreszeiten für die drei Componenten SE, SW und NW nahezu derselbe wie im Jahresmittel. Die NE-Componente zeigt eine gänzliche Verschiedenheit, wesshalb ich auf diese Componente, welche zugleich der vorherrschenden Windrichtung entspricht, auch noch die Bessel'sche Ausgleichsrechnung anwenden werde.

Für die übrigen drei Windrichtungen unterscheiden sich die täglichen Gangcurven in den extremen Jahreszeiten nur durch die grössere Amplitude im Sommer und durch einen regelmässigeren Verlauf während dieser warmen Jahreszeit. Man könnte noch hervorheben, dass das Maximum im Sommer etwas früher als im Winter eintritt.

	SE	SW	NW	NE
Max. im Winter	6—7^h *a.*	2^h *p.*	3^h *p.*	9—10^h *p.*
Max. im Sommer	4—5 *a.*	1—2 *p.*	2 *p.*	8—9 *a.*

Was die Intensität anbelangt, so ist in beiden Jahreszeiten der NE allen anderen Componenten überlegen, der Stärke nach folgt dann der SE, SW und endlich der NW. Die Stärke des NE und SE nimmt im Sommer ab, SW und NW hingegen zu. Die Grösse der täglichen Schwankung wächst mit der Abnahme der Windstärke. Die grösste Amplitude zeigt der NW, sodann SW, SE und endlich der NE.

	SE	SW	NW	NE
Intensität im Winter	346·9	45·3	40·9	1418·6
Intensität im Sommer	245·2	164·6	119·2	608·9
Max.—Min. im Winter	177	83	79	153
Max.—Min. im Sommer	264	429	287	265
$\frac{\text{Max.—Min.}}{\text{Intensität}}$ im Winter.....	0·51	1·83	1·93	0·11
$\frac{\text{Max.—Min.}}{\text{Intensität}}$ im Sommer.....	1·08	2·61	2·41	0·44
Max.: Min. im Winter.....	1·7	5·4	8·9	1·1
Max.: Min. im Sommer.....	3·4	22·5	36·9	1·6

Tabelle XIII.

Windcomponenten in den extremen Jahreszeiten.

Kilometer pro Stunde in einem mittleren Jahre.

	Winter				Sommer			
	NE	SE	SW	NW	NE	SE	SW	NW
Mittern.—1h *a.*	1356	398	36	34	600	319	27	25
1—2	1415	353	24	15	630	333	28	18
2—3	1377	355	31	19	663	363	20*	10
3—4	1340*	365	42	28	651	370	27	8*
4—5	1353	342	33	21	627	**373**	27	14
5—6	1377	381	25	16	685	353	28	17
6—7	1396	**428**	19*	25	731	364	42	18
7—8	1376	378	23	24	**746**	369	98	49
8—9	1435	411	29	10*	736	292	174	99
9—10	1429	407	33	36	686	222	258	177
10—11	1444	339	61	45	655	182	301	268
11—Mittag	1439	323	82	61	613	132	370	287
Mittag—1h *p.*	1409	326	90	86	557	109*	446	293
1—2	1440	251*	**102**	83	481*	142	**449**	**295**
2—3	1425	312	86	**89**	498	118	436	275
3—4	1434	306	69	80	504	110	**385**	271
4—5	1457	301	65	73	528	140	297	234
5—6	1447	282	37	47	545	148	212	180
6—7	1443	364	37	45	541	218	130	116
7—8	1435	371	34	31	556	209	65	66
8—9	1453	332	37	28	**587**	**236**	29	37
9—10	1449	309	36	31	579	256	34	31
10—11	**1498**	325	23	19	611	234	36	45
11—Mittern.	1424	366	33	35	604	294	31	28
Mittel.....	1418·6	346·9	45·3	40·9	608·9	245·2	164·6	119·2

Für alle Componenten nimmt die Amplitude im Sommer zu. Das Verhältniss Max.: Min. ist im Sommer für den SW und NW viermal so gross als im Winter, während der NE und SE kaum eine zweifache Vergrösserung erfahren.

Auf die NE-Componente habe ich für die extremen Jahreszeiten ebenfalls die Ausgleichsrechnung angewendet. Die gerechneten Gleichungen sind folgende:

$$\text{NE, Winter} \ldots y = 1418{\cdot}6 + \overline{1{\cdot}57450}\sin(204°43' + x.15°) + \overline{1{\cdot}37749}\sin(176°24' + x.30°) + \overline{0{\cdot}82354}\sin(125°50' + x.45°)$$

$$\text{NE, Sommer} \ldots y = 608{\cdot}9 + \overline{1{\cdot}95582}\sin(14°37' + x.15°) + \overline{1{\cdot}65210}\sin(216°2' + x.30°) + \overline{1{\cdot}25020}\sin(68°55' + x.45°).$$

Auch hier sind die mit einem Querstrich überzogenen Zahlen Logarithmen. Das Intervall Mitternacht—1^h *a.* entspricht dem $x = 0$.

Aus diesen Gleichungen habe ich die Werthe der Tafel 14 berechnet.

Der Verlauf der täglichen Gangcurven ist ein regelmässiger, jedoch für die extremen Jahreszeiten grundverschieden. Im Winter befindet sich die Curve während des Nachmittages, im Sommer hingegen während des Vormittages oberhalb der Mittellinie. Ein Steigen der Curve über den Mittelwerth beginnt im Winter um 9^h *a.*, erreicht das Maximum zwischen 9—10^h Abends und sinkt nach Mitternacht unter den Mittelwerth, um zwischen 4—5^h Morgens das Minimum zu erreichen. Im Sommer hingegen beginnt die Curve sich vor Mitternacht über das Mittel zu erheben, erreicht zwischen 8—9^h Morgens das Maximum, fällt vor Mittag unter den Mittelwerth und erreicht das Minimum um 3^h Nachmittags. Bei der NE-Componente zeigt sich für den Winter noch ein secundäres Maximum und Minimum. Das erstere fällt auf 11^h Vormittags, das Minimum etwas nach 1^h Nachmittags.

Die berechneten genauen Eintrittszeiten der Extreme sind

	Max.	Min.	Max.	Min.
NE, Winter.....	$11^h\ 0^m$ *a.*	$1^h 14^m$ *p.*	$9^h 23^m$ *p.*	$4^h 24^m$ *a.*
NE, Sommer....	8 26 *a.*	3 5 *p.*		

Tabelle XIV.

Berechneter täglicher Gang der NE-Componente in den extremen Jahreszeiten.

Kilometer pro Stunde in einem mittleren Jahre.

	Winter	Sommer	Winter	Sommer
Mittern.—1h a.	1409·8	621·9	— 8·8	13·0
1—2	1385·1	628·8	—33·5	19·9
2—3	1364·2	634·1	—54·4	25·2
3—4	1353·0	643·3	—65·6*	34·4
4—5	1354·4	661·2	—64·2	52·3
5—6	1367·3	687·6	—51·3	78·7
6—7	1386·9	716·3	—31·7	107·4
7—8	1406·9	735·6	—11·7	**126·7**
8—9	1422·2	734·4	3·6	125·5
9—10	1430·5	707·2	11·9	98·3
10—11	1432·6	657·5	**14·0**	48·6
11—Mittag	1431·5	597·6	12·9	— 11·3
Mittag—1h p.	1430·4	543·1	11·8*	— 65·8
1—2	1430·9	507·0	12·3	—101·9
2—3	1433·2	494·5	14·6	—114·4*
3—4	1436·6	501·9	18·0	—107·0
4—5	1440·0	520·2	21·4	— 88·7
5—6	1443·5	539·6	24·9	— 69·3
6—7	1447·3	554·3	28·7	— 54·6
7—8	1451·5	564·2	32·9	— 44·7
8—9	1454·8	572·6	**36·2**	— 36·3
9—10	1454·3	583·2	35·7	— 25·7
10—11	1447·4	596·7	28·8	— 12·2
11—Mittern.	1432·1	610·8	13·5	1·9
Mittel	1418·6	608·9	26·8	61·0

Wie bereits früher erwähnt, ist die Schwankung im Sommer deutlicher ausgeprägt als im Winter. Der Quotient der mittleren Ordinate und des Tagesmittels beträgt im Winter 0·019, während derselbe im Sommer auf 0·100 anwächst.

Täglicher Gang der mittleren Geschwindigkeit der einzelnen Windrichtungen. Aus den Tabellen der zurückgelegten Windwege und der Häufigkeit habe ich die Tafeln 15 bis 19 für die mittlere Geschwindigkeit ableiten können. Man ersieht aus denselben, dass alle Windrichtungen zur Mittagszeit an Stärke zunehmen. Hervorzuheben sind aber die Doppelmaxima für die Winde aus S, SW, W und NW. Im Jahresmittel erhalten diese vier Windrichtungen ein zweites Maximum zwischen 11^h Nachts bis 2^h Früh. Dieses Nachtmaximum ist für den W und NW sogar grösser als das Mittagsmaximum. Der Nordwind, welcher für Triest der seltenste Wind ist, zeigt einen ganz unregelmässigen Gang. Ich erkläre mir diese Unregelmässigkeit durch die Seltenheit des Vorkommens dieser Windrichtung und auch durch die Ablesung des Casella'schen Anemographenstreifens. Es erscheint nämlich oft bei starker Bora, wegen Schwankungen der Windfahne, der Windpfeil in der Richtung NNE selbst N gedruckt; beim Registriren wird dann oft N statt NE in den Autographenbögen eingetragen. Da hiebei aber zugleich eine grosse Geschwindigkeit mit einzutragen ist, so müssen solche Fälle den Gang des N-Windes bedeutend beeinflussen. Bei dieser Gelegenheit will ich gleich erwähnen, dass des Öfteren beobachtet wurde, dass bei stürmischer Bora der Wind oft durch einige Minuten auf N und auch auf andere Richtungen umspringt, um gleich darauf wieder in seine ursprüngliche ENE-Richtung zurückzukehren.

Die oben erwähnte Verstärkung sämmtlicher Windrichtungen zur Mittagszeit und das Doppelmaximum für die westlichen Winde lässt sich durch alle vier Jahreszeiten verfolgen, wie aus den Tabellen 15—18 zu ersehen ist.

Was die Grösse der mittleren Geschwindigkeit anbelangt, so ist der NE allen anderen weitaus überlegen. Der Scirocco, der zweite vorherrschende Wind, resultirt mit einer geringen mittleren Geschwindigkeit, was durch die Lage des Anemographen bedingt erscheint; eine Bodenerhebung schützt die

Tabelle XV.

Mittlere Geschwindigkeit des Windes in Kilometern.

Winter.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mittern.—1h *a.*	11·6	37·2	18·2	6·9	6·1	7·7	**12·0**	**8·7**
1—2	4·5	38·1	15·8	5·0	6·6	6·8	5·3	6·6
2—3	13·5	36·1	16·6	5·8	6·3	8·3	3·6	3·8
3—4	20·0	37·9	16·0	6·5	**9·8**	8·2	7·8	4·8
4—5	17·3	39·2	14·2	5·9	5·5	9·1	5·7	4·9
5—6	7·5	38·1	15·7	6·8	5·7	6·1	3·1	5·6
6—7	21·8	38·4	17·4	6·5	6·3	4·3	3·3	3·8
7—8	9·5	37·9	14·3	6·9	8·9	3·8	2·5	7·9
8—9	5·6	**40·3**	15·4	6·8	5·7	4·4	3·2	2·4
9—10	**36·7**	39·0	16·7	6·5	5·3	4·3	2·6	4·0
10—11	18·9	36·3	16·5	8·2	5·3	6·4	4·3	3·8
11—Mittag	15·5	36·0	20·1	7·3	5·1	6·7	4·9	4·2
Mittag—1h *p.*	15·1	36·3	21·3	7·4	7·1	7·0	**5·1**	4·8
1—2	8·1	37·3	19·0	8·1	6·4	**7·2**	5·1	4·6
2—3	3·6	37·9	21·4	**8·8**	8·0	6·9	4·6	**5·9**
3—4	14·4	38·3	**21·8**	8·3	**14·6**	5·2	3·8	5·3
4—5	15·1	39·2	21·1	8·0	7·4	6·6	3·4	3·8
5—6	14·6	38·1	18·5	8·0	3·7	5·5	2·4	4·1
6—7	15·4	**39·4**	20·4	7·3	4·6	6·0	2·3	3·4
7—8	11·8	37·9	18·8	7·8	4·1	6·5	3·4	2·7
8—9	5·7	39·1	16·1	7·7	1·5	11·0	**2·1**	6·1
9—10	6·0	38·3	14·5	8·3	7·8	7·5	4·9	5·5
10—11	6·2	38·9	14·9	6·9	3·8	7·5	3·6	3·5
11—Mittern.	14·7	38·8	15·8	8·1	3·4	**9·1**	6·6	3·4
Mittel.....	13·0	38·1	17·5	7·2	6·2	6·8	4·4	4·7

Tabelle XVI.

Mittlere Geschwindigkeit des Windes in Kilometern.

Frühling.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mittern.—1h *a.*	**21·7**	**33·2**	10·2	6·1	**12·8**	8·0	1·9	5·9
1—2	20·3	**32·1**	12·4	5·5	10·6	5·1	1·9	8·8
2—3	8·5	**33·6**	11·6	5·3	8·2	7·1	2·4	4·0
3—4	16·4	**32·6**	11·0	5·4	9·4	7·3	2·1	4·5
4—5	21·3	**32·0**	11·0	5·3	9·0	5·0	3·1	**10·4**
5—6	19·2	**33·0**	9·8	5·5	9·0	3·8	2·7	9·3
6—7	9·0	**34·9**	10·0	5·6	6·2	5·7	2·0	5·2
7—8	5·2	**33·6**	11·7	5·9	6·0	7·4	2·8	3·6
8—9	9·4	**36·5**	16·5	7·1	7·0	8·3	4·1	4·3
9—10	6·6	**36·2**	18·0	6·5	7·1	9·7	5·1	5·7
10—11	9·3	**36·4**	24·5	9·4	13·0	11·8	5·6	6·6
11—Mittag	13·7	**37·1**	25·4	9·5	10·6	11·9	6·6	6·8
Mittag—1h *p.*	7·9	36·1	**26·7**	9·7	7·0	**13·0**	**7·0**	7·0
1—2	10·1	35·8	20·9	9·7	14·7	12·3	6·2	**7·2**
2—3	8·1	34·1	23·0	**11·3**	13·8	12·0	6·7	6·8
3—4	11·0	35·2	22·8	9·7	**12·3**	11·3	5·4	6·6
4—5	10·0	34·4	21·4	7·6	16·0	8·6	5·4	5·9
5—6	14·3	29·3	21·4	7·9	12·6	7·0	4·5	5·0
6—7	10·6	30·2	18·2	7·2	8·6	6·8	3·6	4·5
7—8	14·5	31·2	15·0	6·8	9·9	6·3	2·6	4·0
8—9	9·6	30·0	14·1	7·3	7·2	6·5	2·2	4·4
9—10	12·0	28·5	14·4	7·2	9·9	10·8	2·9	4·0
10—11	13·5	**32·4**	11·8	6·7	7·4	9·3	2·6	4·1
11—Mittern.	17·5	31·5	10·9	6·7	6·4	**11·2**	**4·5**	2·3
Mittel	12·5	33·3	16·4	7·3	9·8	8·6	3·9	5·7

Tabelle XVII.

Mittlere Geschwindigkeit des Windes in Kilometern.

Sommer.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mittern.–1h *a.*	**17·4**	21·7	9·8	6·7	8·0	7·8	5·4	**8·6**
1—2	11·6	23·3	9·8	7·2	7·6	6·7	3·8	7·0
2—3	12·0	23·7	10·0	7·5	7·1	6·6	1·0	7·0
3—4	1·0	24·7	10·3	7·6	6·5	9·5	4·3	7·0
4—5	9·2	24·4	9·9	7·7	6·2	9·6	1·5	5·1
5—6	10·6	23·9	9·9	6·6	5·6	**10·4**	6·0	4·7
6—7	7·0	22·9	11·5	6·7	8·0	7 3	5·0	9·0
7—8	8·7	24·5	14·5	6·8	8·0	8·4	5·8	5·8
8—9	6·1	24·9	17·0	7·7	8·3	8·4	5·8	5·5
9—10	10·4	26·6	20·3	9·7	8·9	10·1	6·5	5·5
10—11	8·2	27·9	24·2	9·6	9·7	13·1	8·0	6·5
11—Mittag	8·8	27·5	**22·5**	8·3	**12·6**	14·1	7·8	6·9
Mittag—1h *p.*	10·6	28·6	17·7	11·8	11·4	14·5	8·8	**7·1**
1—2	10·1	**28·4**	21·0	**15·2**	9·9	**14·6**	**9·1**	6·7
2—3	10·3	27·8	18·9	9·1	11·0	13·3	8·9	6·6
3—4	8·5	29·5	18·7	10·2	10·1	12·1	8·6	6·7
4—5	12·4	25·7	20·4	8·8	10·1	11·1	6·8	6·2
5—6	11·7	26·2	14·7	10·2	9·0	8·5	5·8	5·0
6—7	7·9	22·1	15·2	7·0	8·5	7·6	4·1	4·6
7—8	10·6	20·1	10·4	7·5	7·7	6·1	3·3	4·4
8—9	7·1	20·8	9·1	7·3	7·2	4·6	2·3	5·5
9—10	7·2	21·1	8·9	7·4	8·6	5·3	7·7	4·8
10—11	12·6	21·5	8·6	6·8	9·2	9·6	1·5	7·9
11—Mittern.	10·3	22·6	9·6	7·2	**9·6**	6·4	6·8	8·2
Mittel	9·6	24·6	14·3	8·4	8·7	9·4	5·6	6·4

Tabelle XVIII.

Mittlere Geschwindigkeit des Windes in Kilometern.

Herbst.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mittern.—1h *a.*	4·3	30·4	12·8	7·1	9·9	10·3	10·8	**17·5**
1—2	6·8	29·8	14·0	7·2	11·3	11·3	10·0	14·2
2—3	**23·8**	29·2	13·6	7·2	6·4	**13·0**	7·8	10·0
3—4	17·0	30·0	14·1	7·2	11·6	12·3	7·0	7·0
4—5	12·1	29·8	11·9	7·5	7·6	14·2	3·7	8·8
5—6	9·8	30·9	11·2	7·1	3·8	15·9	3·7	10·0
6—7	5·0	29·5	11·7	7·8	9·2	10·0	5·0	4·6
7—8	8·3	30·0	12·5	7·2	6·3	12·3	3·3	5·0
8—9	5·4	29·3	13·5	7·0	6·2	7·5	4·7	3·8
9—10	10·4	29·3	16·4	8·0	9·1	8·8.	5·7	4·3
10—11	7·3	30·3	19·9	9·3	10·6	9·6	6·9	6·2
11—Mittag	7·7	31·9	19·8	8·1	10·7	11·5	7·6	6·5
Mittag—1h *p.*	8·8	31·4	**21·2**	10·5	14·3	**11·9**	**8·6**	**7·4**
1—2	7·8	**32·9**	20·3	9·7	12·5	11·7	7·3	6·5
2—3	6·4	31·8	20·1	**11·9**	**12·7**	11·1	6·8	6·9
3—4	7·9	31·9	18·2	10·3	14·5	10·3	5·8	6·1
4—5	10·3	30·7	19·6	8·8	12·9	9·2	4·6	5·5
5—6	10·9	31·0	14·0	8·7	9·5	7·2	4·3	4·4
6—7	7·2	28·5	12·3	9·2	11·6	5·2	4·1	2·7
7—8	7·7	29·4	13·7	6·6	8·2	6·6	3·7	2·0
8—9	6·8	30·6	11·8	8·1	12·4	8·6	2·9	3·8
9—10	**32·0**	30·0	11·6	8·7	**12·6**	9·4	3·1	4·6
10—11	12·0	30·8	10·9	7·8	11·6	9·9	3·3	2·7
11—Mittern.	2·7	29·3	13·7	7·6	9·3	13·5	**12·6**	3·0
Mittel	9·9	30·4	15·0	8·3	10·2	10·5	6·0	6·4

Tabelle XIX.

Mittlere Geschwindigkeit des Windes in Kilometern.

Jahresmittel.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mittern.–1^h *a.*	13·9	31·5	12·7	6·7	**9·4**	8·4	**8·2**	8·4
1—2	11·1	31·8	12·9	6·3	8·7	7·7	5·4	**8·8**
2—3	15·8	31·4	12·7	6·5	6·9	8·8	4·1	6·0
3—4	**16·7**	32·2	12·8	6·7	9·1	9·1	5·2	6·0
4—5	14·8	32·3	11·6	6·7	7·0	10·4	4·0	6·8
5—6	12·3	32·3	11·5	6·5	6·3	9·3	3·5	7·4
6—7	10·6	32·0	12·6	6·7	7·6	6·7	3·8	4·9
7—8	8·1	32·1	13·3	6·7	7·3	7·8	4·0	5·6
8—9	6·9	33·2	15·3	7·1	7·0	7·8	4·9	4·7
9—10	12·8	33·4	17·4	7·5	7·6	9·1	5·7	5·3
10—11	10·0	33·3	20·1	8·9	9·5	10·8	6·7	6·2
11—Mittag	10·8	33·6	21·4	8·0	9·1	11·7	7·2	6·5
Mittag—1^h *p.*	10·0	33·6	**21·8**	9·3	10·7	**12·4**	**7·8**	**6·8**
1—2	9·4	**34·5**	20·0	10·2	10·5	12·2	7·3	6·5
2—3	7·7	33·8	20·9	**10·8**	11·9	11·6	7·2	6·6
3—4	9·6	34·5	20·6	9·5	**12·6**	10·6	6·5	6·3
4—5	11·8	33·5	20·6	8·4	11·4	9·4	5·5	5·6
5—6	12·7	32·3	16·8	8·6	8·6	7·5	4·7	4·8
6—7	9·8	31·2	16·5	8·1	8·6	6·8	3·7	4·1
7—8	11·4	30·5	14·6	7·1	7·4	6·3	3·2	3·7
8—9	7·4	31·1	12·5	7·7	6·9	7·2	2·4	5·0
9—10	9·5	30·7	12·0	8·0	9·5	8·2	4·5	4·7
10—11	11·1	31·8	11·5	7·1	7·3	9·2	2·8	4·9
11—Mittern.	13·2	31·4	12·6	7·4	7·6	**10·5**	7·5	4·6
Mittel	11·1	32·4	15·6	7·8	8·7	9·2	5·2	5·8

ganze Stadt vor den Scirocco. Am Meere, schon in geringer Entfernung vom Ufer, weht der Scirocco mit einer Stärke, die in der Stadt nie wahrgenommen werden kann. Auf diese Thatsache werde ich bei Besprechung der Häufigkeit stürmischer Winde nochmals zurückkommen müssen.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Mittlere Geschwindigkeit	11·1	32·4	15·6	7·8	8·7	9·2	5·2	5·8
$\frac{\text{Maximum}}{\text{Minimum}}$	2·42	1·13	1·90	1·64	2·00	1·97	3·42	2·38

Bemerkenswerth ist die geringe Gangvariation bei den vorherrschenden Winden. Die grössten täglichen Amplituden weisen die selten vorkommenden Winde auf, während die kleinste Schwankung dem NE zufällt. Das Verhältniss Max.: Min. ist für den NE nur 1·13, während beim W dasselbe auf 3·42 kommt. Die äusserst selten vorkommenden Winde S und N zeigen einen doppelt so grossen Quotienten als der NE.

Vergleichen wir die mittleren Geschwindigkeiten der einzelnen Windrichtungen durch alle vier Jahreszeiten, so ersehen wir, dass

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Winter	13·0	38·1	17·5	7·2	6·2	6·8	4·4	4·7
Frühling	12·5	33·3	16·4	7·3	9·8	8·6	3·9	5·7
Sommer	9·6	24·6	14·3	8·4	8·7	9·4	5·6	6·4
Herbst	9·9	30·4	15·0	8·3	10·2	10·5	6·0	6·4

die Winde N, NE und E einen grösseren Werth im Winter und Frühling als im Sommer und Herbst annehmen, die übrigen SE, S, SW, W und NW zeigen hingegen eine Zunahme im Sommer und Herbst.

Da ich, um die ersten Tabellen dieser Abhandlung aufstellen zu können, bereits alle Winde der fünf Beobachtungsjahre 1883 bis 1887 nach Richtungen, Monaten und Stunden trennen musste, so will ich jetzt noch eine weitere Trennung vornehmen und nur die Winde herausgreifen, welche eine Geschwindigkeit von 50 oder über 50 *km* pro Stunde zeigen, um damit den **täglichen Gang der Häufigkeit der stürmischen Winde** für Triest bestimmen zu können. Eine Berechnung der jährlichen Periode

heftiger Winde kann ich noch nicht unternehmen, da die verwendbaren Ablesungen am Anemographen einen zu geringen Zeitraum umfassen.

In den fünf Jahren 1883—1887 sind 2724 Stunden mit stürmischem Winde zu verzeichnen gewesen. In Tabelle 20 habe ich die Jahressummen und in Tabelle 21 die Häufigkeitsanzahl für das Winter- und Sommerhalbjahr zusammengestellt. Zum Winterhalbjahr gehörig habe ich die Monate October, November, December, Jänner, Februar und März betrachtet. Von den 2724 Stunden stürmischer Winde fallen nichts weniger als 2357 auf den NE, 343 auf E, 14 auf N, 9 auf SW und 1 auf W. Die Winde aus SE, S und NW erreichten niemals die Geschwindigkeit von 50 *km* pro Stunde. Das gänzliche Fehlen heftiger Winde aus SE und die äusserst geringe Frequenzziffer für den SW lässt sich theilweise auf die Lage des Anemographen, respective der Stadt zurückführen. Durch einen südlichen Höhenzug erscheint die ganze Stadt vor SE- und theilweise auch vor SW-Winden geschützt. Bei einem aus dieser Richtung wehenden Wind, mit einer in der Stadt gemessenen Geschwindigkeit von 30—40 *km* sieht man des Öfteren das Meer äusserst bewegt, im Stande, selbst grösseren Wasserbauten vielfachen Schaden anzurichten. Wenn auch bei SW- und SE-Winden der Seegang immer stärker sein wird als bei gleich starker Bora, weil im ersteren Falle die Winde bereits über die Fläche der Adria streichen mussten, so muss doch diese hohe See einem ausser dem Bereiche der Stadt, am Meere heftig wehenden Winde zugesprochen werden. Man bemerkt auch oft an Sciroccotagen in der Stadt fast Windstille, aber schon bei den niedrigsten Wolken eine grosse Geschwindigkeit in der Richtung von SE nach NW.

Die Seewinde W und NW nehmen für Triest keinen stürmischen Charakter an.

Selbst wenn man das Anemometer an dem günstigsten Orte aufstellen könnte, so würde trotzdem die Anzahl stürmischer Winde für SE im Vergleiche zu den 2357 Fällen von stürmischem NE sehr klein ausfallen. Ein Zeichen, dass die Zugstrassen der barometrischen Minimen, welche im Stande sind, in Triest stürmische Winde zu erzeugen, das Triester Gebiet gewöhnlich zur Linken lassen werden.

Tabelle XX.

Häufigkeit der Winde mit oder über 50 *km* pro Stunde in den fünf Jahren 1883—1887.

	NE	E	Bora N+NE+E	W und SW	Gesammtsumme
Mitternacht—1^h *a.*	94	11	105	1	106
1—2	93	13	106	1	107
2—3	88	**21**	110	1	111
3—4	95	17	114	1	115
4—5	98	15	113	0	113
5—6	100	12	112	0	112
6—7	113	19	**133**	0	**133**
7—8	**118**	13	126	0	126
8—9	112	16	128	0	128
9—10	101	16	119	0	119
10—11	110	17	127	1	128
11—Mittag	99	15	114	1	115
Mittag—1^h *p.*	103	10	113	0	113
1—2	104	8	112	0	112
2—3	95	10	105	1	106
3—4	95	14	109	0	109
4—5	99	**22**	**121**	0	**121**
5—6	85	12	100	0	100
6—7	87	15	103	0	103
7—8	90	18	109	0	109
8—9	95	15	110	0	110
9—10	**101**	11	**112**	1	**118**
10—11	98	10	109	1	110
11—Mitternacht	89	13	104	1	105
Summe	2357	343	2714	10	2724

Tabelle XXI.

Häufigkeit der heftigen Winde in den extremen Jahreszeiten.

	Winterhalbjahr			Sommerhalbjahr		
	NE	E	Bora N+NE+E	NE	E	Bora N+NE+E
Mitternacht—1h *a.*	70	11	81	24	0	24
1—2	71	10	81	22	3	25
2—3	64	**16**	81	24	5	29
3—4	68	11	81	27	6	33
4—5	72	10	82	26	5	31
5—6	76	7	83	24	5	29
6—7	82	15	**98**	**31**	4	**35**
7—8	**86**	9	95	27	4	31
8—9	82	12	94	30	4	34
9—10	74	13	88	27	3	31
10—11	83	10	93	27	7	34
11—Mittag	76	14	90	23	1	24
Mittag—1 *p.*	83	9	92	20	1	21
1—2	82	7	89	22	1	23
2—3	75	10	85	20	0	20
3—4	76	13	89	19	1	20
4—5	82	**16**	**98**	17	6	23
5—6	69	10	81	16	2	19
6—7	69	14	84	18	1	19
7—8	73	14	88	17	4	21
8—9	76	10	86	19	5	24
9—10	**81**	8	**89**	20	3	23
10—11	79	6	86	19	4	23
11—Mitternacht	72	12	86	17	1	18
Summe	1821	267	2100	536	76	614

In oben erwähnter Tabelle 20 bringe ich zuerst die Häufigkeit für den NE und E getrennt, in der dritten Columne habe ich dieselben zusammengezogen und mit der Frequenzziffer des N vereinigt. Diese drei Richtungen habe ich unter den Namen Bora zusammengefasst, da die wenigen Aufzeichnungen stürmischer Geschwindigkeit für den N an Tagen fallen, wo constant ein Boracharakter zu verzeichnen war, die Notirung N in den Autographenstreifen eigentlich nur momentanen Schwankungen der Windfahne zuzuschreiben sind.

Was die NE-Richtung anbelangt, so lässt sich ein Maximum um 7—8^h Morgens und ein zweites Abends zwischen 9—10^h hervorheben. Die E-Richtung bringt ein Maximum um 3^h Morgens und ebenfalls ein zweites um 5^h Nachmittags. In der Bora-Summe und in der Gesammtsumme fällt das Hauptmaximum stürmischer Winde auf die Stunde von 6—7^h Morgens.

Für die Tabelle 21, wo ich die Trennung nach zwei Jahreszeiten vorgenommen habe, lassen sich die obigen Bemerkungen der Jahressummen auch für das Winterhalbjahr wiederholen. Im Sommerhalbjahre finden wir ein Maximum für den NE um 7^h Morgens, für den E um 11^h Vormittags.

Um eine bessere Übersicht zu gewinnen, führe ich für die Bora (Summe aus N, NE und E) Gruppen zu je vier Stunden an:

	Mittern. bis 4^h *a.*	4^h *a.* bis 8^h *a.*	8^h *a.* bis Mittag	Mittag bis 4^h *p.*	4^h *p.* bis 8^h *p.*	8^h *p.* bis Mittern.
Winterhalbjahr..	324*	358	365	355	351	347
Sommerhalbjahr	111	126	123	84	82*	88
Jahressumme ...	435	484	488	439	433*	435

Dieselben zeigen, dass das Maximum im Sommer früher eintritt als im Winter.

Zum Schlusse will ich noch die Häufigkeitssummen für die einzelnen Jahreszeiten darstellen:

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
N	7	4	1*	2	14
NE	1086	574	189*	508	2357
E	175	66	30*	72	343
W.....	0	0	0	1	1
SW....	1	0	2	6	9

Die grösste Frequenz fällt für die Bora auf den Winter, die geringste auf den Sommer. Die wenigen Fälle stürmischer W und SW erreichen im Herbst ihre grösste Häufigkeit.

Fasse ich die Winde aus N, NE und E zusammen, so erhalte ich für die einzelnen Monate folgende Zahlen:

December.....	352	März ...	335	Juni	57	September...	85
Jänner	570	April...	181	Juli.....	55*	October	209
Februar	346	Mai	128	August...	108	November...	288

Das Maximum stürmischer Bora fällt auf den Jänner, das Minimum auf den Juli.

In einer späteren Abhandlung gedenke ich dann eine Untersuchung über den täglichen Gang der Bora anzustellen, indem ich nur solche Tage in Berücksichtigung ziehen will, welche durch alle 24 Stunden eines Tages diese Windrichtung aufweisen, ausserdem werde ich den täglichen und jährlichen Gang der Windstärke, ohne Trennung nach einzelnen Windrichtungen, mit Hilfe einer grösseren Anzahl von Beobachtungsjahren bestimmen.

VII. SITZUNG VOM 12. MÄRZ 1891.

Der Vorsitzende gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie durch das am 7. März l. J. erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes, Seiner Excellenz Dr. Franz Ritter v. Miklosich erlitten hat.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. Constantin Freih. v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Über tertiäre Fagus-Arten der südlichen Hemisphäre".

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Die neuesten Hypothesen über die Rotation des Planeten Venus", von Herrn Ferdinand Löschardt, Dechant von Nákófalva (Ungarn).
2. „Beitrag zur Kenntniss des Harzes von Doona zeylanica Thw.", von Herrn Eduard Valenta in Wien.

Herr Prof. Dr. A. Adamkiewicz in Krakau übersendet eine vierte Mittheilung unter dem Titel: „Die Principien einer rationellen Behandlung der bösartigen Geschwülste (Krebse) und die Reactionsfähigkeit derselben".

Herr Gejza v. Bukowski in Wien überreicht eine Abhandlung von Herrn Baron v. Foullon, Adjunct der k. k. Geologischen Reichsanstalt: „Über Gesteine und Minerale von der Insel Rhodus".

Bestimmung der Bahn des Planeten (290) Bruna

von

Dr. S. Oppenheim,

Privatdocenten für Astronomie an der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Februar 1891.)

Der Planet (290) wurde von Herrn Dr. J. Palisa am 20. März 1890 entdeckt und erhielt von Herrn Hofrath A. Biela den Namen „Bruna". Derselbe erregte gleichwie der Planet (265) Anna durch seine ungewöhnlich grosse Bewegung in Rectascension ein besonderes Interesse und in der That bietet auch die Bahn desselben im Vergleiche mit den übrigen Planeten aus der Gruppe zwischen Mars und Jupiter manche Eigenthümlichkeiten, die eine genaue Untersuchung derselben nach jeder Richtung als sehr erwünscht erscheinen lassen.

Die ersten Elemente des Planeten wurden von mir aus den Beobachtungen: Wien 1890, März 21 und 27, April 15 und 22 abgeleitet und sind in den astronomischen Nachrichten Nr. 2967 sammt einer Ephemeride für den Monat Mai veröffentlicht. Der folgenden Ephemeride liegen jedoch etwas geänderte Elemente zu Grunde, nämlich

Epoche 1890, April 22·0, mittl. Zeit Berlin

$$
\begin{aligned}
M &= 52^\circ 45' 27''5 \\
\pi &= 114\ 25\ 52\cdot 7 \\
\Omega &= 10\ 30\ 25\cdot 9 \\
i &= 22\ 4\ 56\cdot 2 \\
\varphi &= 14\ 41\ 19\cdot 4 \\
\log a &= 0\cdot 365789 \\
\mu &= 1003''0535
\end{aligned}
$$

Ekliptik und Äquin. 1890·0

$$x = (9{\cdot}998977)\, r \sin (v + 203^\circ 40' 33''2)$$
$$y = (9{\cdot}848393)\, r \sin (v + 117\ 37\ 30{\cdot}5)$$
$$z = (9{\cdot}852002)\, r \sin (v + 109\ 46\ 52{\cdot}9)$$

Ephemeride für 12^h mittl. Zeit Berlin.

1890		α app.	δ app.	lg ρ	Aberr. Zeit
März	18	12h 38m 15s·84	+2° 22' 37"·9	9 999 068	8m 16s·7
	19	36 41·41	15 11·6	9·999 278	17·0
	20	35 6·46	7 43·7	9·999 604	17·4
	21	33 31·12	+2 0 14·2	0·000 048	17·9
	22	31 55·58	+1 52 43·1	0·000 611	18·5
	23	30 20·05	45 10·3	0·001 294	19·3
	24	28 44·61	37 35·8	0·002 096	20·2
	25	27 9·34	29 59·6	0·003 016	21·2
	26	25 34·38	22 21·7	0·004 053	22·4
	27	23 59·87	14 42·2	0·005 205	23·8
	28	12 22 25·97	+1 7 1·2	0·006 471	8 25·3
April	13	12 0 12·20	−0 58 41·1	0·040 759	9 6·8
	14	11 59 3·74	−1 6 39·4	0·043 651	10·6
	15	57 57·47	14 38·3	0·046 616	14·4
	16	56 53·39	22 37·9	0·049 650	18·2
	17	55 51·55	30 38·3	0·052 748	22·2
	18	54 52·00	38 39·5	0·055 907	26·3
	19	53 54·76	46 41 5	0·059 125	30·6
	20	52 59·87	−1 54 44·3	0·062 400	34·9
	21	52 7·33	−2 2 47·7	0·065 728	39·2
	22	51 17·11	10 51·6	0·069 107	43·6
	23	50 29·31	18 56·3	0·072 532	48·2
	24	49 43·88	27 1·8	0·076 001	52·9
	25	11 49 0·86	−2 35 8 1	0·079 510	9 57·8
Mai	6	11 43 42·64	−4 5 17·9	0·120 075	10 56·3
	7	43 27·35	13 36·4	0·123 878	11 2·1
	8	43 14·25	21 55 5	0·127 694	7·9
	9	43 3·28	30 15·4	0·131 519	13·8
	10	42 54·40	38 36·1	0·135 353	19·8
	11	42 47·57	46 57·6	0·139 192	25·8
	12	11 42 42·77	−4 55 20·0	0·143 036	11 31·9

Die mir bekannt gewordenen Beobachtungen des Planeten, sämmtlich von Herrn Dr. Palisa in Wien angestellt, sind in der folgenden Zusammenstellung enthalten:

Datum	Mittlere Zeit Wien	Beob. Differenz Pl. — Vergleichstern in α	in δ	α app.	δ app.	Nr. des Vergleichst.
1890						
März 20	12h 34m 39s	−1m 41·39	−5′ 40″8	12h 35m 6s·13	+2° 7′ 27″·1	11
21	9 32 21	−1 22·87	+6 46·3	12 33 43·24	+2 0 50·8	10
24	9 27 56	+1 24·15	−0 53·9	12 28 56·59	+1 38 9·8	9
27	9 53 56	−1 8·67	−1 8·8	12 24 9·74	+1 15 5·0	8
April 14	11 57 49	+1 26·81	−5 55·4	11 59 5·08	−1 6 59·3	7
15	9 46 12	+2 40·18	−4 56·8	11 58 4·92	−1 14 14·9	5
18	9 45 0	−1 21·83	−0 34·6	11 54 58·97	−1 38 10·2	6
22	11 42 19	+0 14·54	−0 55·7	11 51 19·09	−2 10 56·4	4
24	10 5 6	+0 39·12	+1 47·4	11 49 48·89	−2 26 34·2	3
Mai 7	9 31 29	−0 22·80	−0 48·2	11 43 29·70	−4 12 35·3	2
11	9 22 13	+2 3·42	−1 17·6	11 42 48·50	−4 45 39·8	1

Die Positionen der Vergleichsterne sind:

Nr.	α 1890·0	δ 1890·0	Reduction $\Delta\alpha$	Reduction $\Delta\delta$	Quelle
1	11h 40m 44s·43	−4° 44′ 15″8	+0s·65	−6″·4	Karlsruhe, Mer. Beob.
2	11 43 51·77	−4 11 40·8	+0·73	−6·3	Mikr. Anschl.
3	11 49 8·93	−2 28 15·4	+0·84	−6·2	Mikr. Anschl.
4	11 51 3·70	−2 9 54·5	+0·85	−6·2	Nicolajew, Zon. der A. G., briefl. Mitth.
5	11 55 23·85	−1 9 12·0	+0·89	−6·1	Mittel aus Nicol. Zon. der A. G. und Karlsruhe, Mer. Beob.
6	11 56 19·91	−1 37 29·5	+0·89	−6·1	Nicol. Zon. d. A. G., briefl. Mitth.
7	11 57 37·37	−1 0 57·8	+0·90	−6·1	Ebenso.
8	12 25 17·49	+1 16 19·8	+0·92	−6·0	Albany Cat. der A. G.
9	12 27 31·54	+1 39 9·7	+0·90	−6·0	Ebenso.
10	12 35 5·24	+1 54 10·5	+0·87	−6·0	Ebenso.
11	12 36 46·66	+2 13 13·8	+0·86	−5·9	Ebenso.

Der Vergleich dieser Beobachtungen mit der obigen Ephemeride lieferte folgende Differenzen, im Sinne Beob.—Rechnung genommen:

Nr. Beob.	Datum u. mittl. Zeit Berlin, von Aberr. befreit	Parallaxe		Fehler: Beob.-Rechnung	
		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	1890				
1	Wien, März 20·51014	−0ˢ01	+6″3	+0ˢ63	− 5″7
2	21·38353	−0·28	+6·4	+0·74	−10·1
3	24·38044	−0·27	+6·4	+0·30	−13·9
4	27·39846	−0·21	+6·4	+0·06	−17·5
5	April 14·48494	+0·14	+6·0	+0·38	−21·6
6	15·39250	−0·06	+6·0	+0·27	−21·1
7	18·39153	−0·03	+5·9	+0·48	−17·0
8	22·47279	+0·16	+5·8	+0·78	−12·2
9	24·40517	+0·04	+5·7	+0·74	−12·7
10	Mai 7·38103	+0·07	+5·5	+0·60	+ 7·3
11	11·37432	+0·07	+5·1	+0·14	+19·9

Zu diesem Tableau ist zu bemerken, dass die Beobachtung Nr. 1 vom 20. März vom Beobachter selbst als unsicher bezeichnet wird, und dass ferner die Beobachtung Nr. 11 vom 11. Mai nur auf einem einzigen Durchgang des Planeten und des Vergleichsternes beruht. Beide diese Beobachtungen wurden daher zur weiteren Bahnbestimmung nicht mehr benützt, sondern nur die Beobachtungen 2—10 in folgender Weise in 5 Normalorte vereinigt:

Normalort I. Die einzelne Beobachtung März 21.

Normalort II. Das Mittel aus Nr. 3 und 4 — als für März 26·0 giltig angenommen.

Normalort III. Das Mittel aus den Beob. Nr. 5 und 6 — als für April 15·0 giltig angenommen.

Normalort IV. Das Mittel aus den Beob. Nr. 7, 8 und 9 — als für April 21·5 geltend angenommen.

Normalort IV. Die Beobachtung Nr. 10.

Die der weiteren Rechnung zu Grunde liegenden Daten sind daher:

Normal-ort	Datum u. mittl. Zeit Berlin	α 1890·0	δ 1890·0
I.	1890, März 21·38353	12ʰ 33ᵐ 43ˢ·33	+2° 0′ 54″·2
II.	26·0	12 26 22·33	+1 25 53·1
III.	April 15·0	11 58 30·87	−1 11 1·5
IV.	21·5	11 52 8·18	−2 3 2·8
V.	Mai 7·38103	11 43 29·82	−4 12 30·1

wobei allen Normalorten gleiches Gewicht gegeben wurde.

Nach der Methode der Variation der geocentrischen Distanzen wurde nun ein Elementensystem gesucht, welches die äusseren Orte I und V vollständig, die mittleren nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung möglichst gut darstellt.

Die Resultate der diesbezüglichen Rechnungen sind in der folgenden Übersicht enthalten, zu welcher nur zu bemerken ist, dass ρ_1 und ρ_5 die zum ersten und fünften Normalorte gehörigen geocentrischen Distanzen bezeichnen.

	I.	II.	III.	
$\lg \rho_1 =$	9·999996	0·000996	9·999996	
$\lg \rho_5 =$	0·123426	0·123426	0·124426	
	Epoche 1890, Mai 7·5, mittl. Zeit Berlin			
$M =$	57° 6′ 55″·1	57° 1′ 13″·8	57° 3′ 8″·5	
$\omega =$	103 52 40·1	104 24 42·5	103 21 9·0	Ecl. Äqu. 1890·0
$\Omega =$	10 30 34·6	10 30 56·7	10 29 35·9	Ecl. Äqu. 1890·0
$i =$	22 4 27·7	22 5 19·7	22 7 29·1	Ecl. Äqu. 1890·0
$\varphi =$	14 41 18·0	14 28 53·5	14 58 11·6	
$\lg a =$	0·365708	0·365770	0·366600	
$\mu =$	1003″·3314	1003″·1182	1000″·2395	
$\Delta\alpha_2 =$	− 7″·1	−21″·6	+ 5″·1	
$\Delta\alpha_3 =$	− 5·4	−37·2	+16·1	
$\Delta\alpha_4 =$	+ 1·0	−24·3	+16·8	
$\Delta\delta_2 =$	− 7·3	−11·1	− 1·8	
$\Delta\delta_3 =$	−22·3	−33·0	− 6·8	
$\Delta\delta_4 =$	−18·1	−27·4	− 5·3	

Aus diesen Abweichungen, welche, wie gebräuchlich, im Sinne Beobachtung—Rechnung angesetzt sind, ergeben sich zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Variationen x, y der geocentrischen Distanzen die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} +\ 7'1 &= -14'5\,x + 12\cdot2\,y \\ +\ 5\cdot4 &= -31\cdot8\,x + 21\cdot5\,y \\ -\ 1\cdot0 &= -25\cdot3\,x + 15\cdot8\,y \end{aligned}\right\} \text{aus den Rectascensionen}$$

$$\left.\begin{aligned} +\ 7\cdot3 &= -\ 3\cdot8\,x + 5\cdot5\,y \\ +22\cdot3 &= -10\cdot7\,x + 15\cdot5\,y \\ +18\cdot1 &= -\ 9\cdot3\,x + 12\cdot8\,y \end{aligned}\right\} \text{aus den Declinationen,}$$

aus denen $x = +1\cdot5770$, $y = +2\cdot5282$ folgt, welche Grössen in der angenommenen Einheit 0·001 der Variationen von $\log \rho$ zu verstehen sind.

Die wahrscheinlichsten Werthe von ρ_1 und ρ_5 sind daher:

$$\begin{aligned} \lg \rho_1 &= 9\cdot999996 + 0\cdot001577 = 0\cdot001573 \\ \lg \rho_5 &= 0\cdot123426 + 0\cdot002528 = 0\cdot125954 \end{aligned}$$

und geben als definitive Elemente des Planeten

(290) Bruna

Epoche 1890, Mai 7·5, mittl. Zeit Berlin

$$\left.\begin{aligned} M &= 56°49'22'1 \\ \pi &= 113\ 51\ 15\cdot2 \\ \omega &= 103\ 22\ 34\cdot0 \\ \Omega &= 10\ 28\ 41\cdot2 \\ i &= 22\ 13\ 28\cdot3 \end{aligned}\right\} \text{Ecl. u. Äquin. 1890·0}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 15\ 4\ 22\cdot7 \\ \lg a &= 0\cdot368066 \\ \mu &= 995'1925 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= (9\cdot998970)\, r \sin (v + 203°\ 5'28'4) \\ y &= (9\cdot847923)\, r \sin (v + 117\ 4\ 23\cdot9) \\ z &= (9\cdot853068)\, r \sin (v + 109\ 12\ 10\cdot4) \end{aligned}$$

Aus den Bedingungsgleichungen folgt als Darstellung der mittleren Orte:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_2 &= +0'8 & \Delta\delta_2 &= +0'6 \\ \Delta\alpha_3 &= -2\cdot0 & \Delta\delta_3 &= \ \ 0\cdot0 \\ \Delta\alpha_4 &= +1\cdot0 & \Delta\delta_4 &= -0\cdot5 \end{aligned}$$

während die obigen definitiven Elemente in denselben die Fehler zurücklassen:

$$\Delta\alpha_2 = +1'1 \quad \Delta\delta_2 = +0'4$$
$$\Delta\alpha_3 = -0\cdot2 \quad \Delta\delta_3 = -0\cdot9$$
$$\Delta\alpha_4 = +0\cdot8 \quad \Delta\delta_4 = -0\cdot6$$

welche mit den obigen ziemlich gut übereinstimmen.

Auch die bisher nicht berücksichtigte Beobachtung vom 11. Mai wird durch diese Elemente in genügender Weise dargestellt:

$$1890, \text{ Mai } 11 \quad \Delta\alpha = -1'5 \quad \Delta\delta = -0'5.$$

Aus der Helligkeit des Planeten zur Zeit seiner Entdeckung, welche von Herrn Dr. J. Palisa zu 13·0 angegeben wird, folgt ferner:

$$g = 11\cdot5$$

und daraus als mittlere Oppositionshelligkeit:

$$m_0 = 13\cdot9.$$

Jahresephemeride 1891.

12^h mittl. Zeit Berlin		α	δ	lg r	lg ρ
Jänner	3	17^h28^m5	$-38°43'5$	0·4403	0·5584
	23	18 9·2	−39 51·9	0·4457	0·5488
Februar	12	18 48·1	−40 43·2	0 4504	0·5314
März	4	19 24·2	−41 23·2	0·4545	0·5081
	24	19 56·5	−42 8·5	0·4581	0·4783
April	13	20 23·4	−43 12·8	0·4613	0·4441
Mai	3	20 43·1	−44 48·8	0·4637	0·4042
	23	20 52·8	−47 6·5	0·4657	0·3669
Juni	12	20 49·4	−49 55·4	0·4671	0·3329
Juli	2	20 30·6	−52 33·9	0·4681	0·3118
	22	20 0·8	−53 30·0	0·4683	0·3091
August	11	19 32·4	−52 27·3	0·4682	0·3268
	31	19 17·0	−49 50·4	0·4677	0·3586
September	20	19 16·6	−46 36·8	0·4665	0·3980
October	10	19 28·3	−43 18·0	0·4647	0·4377
	30	19 48·3	−40 3·5	0·4625	0·4759
November	19	20 13·5	−36 48·9	0·4598	0·5083
December	9	20 41·9	−33 30·4	0·4563	0·5342
	29	21 11·9	−30 4·7	0·4524	0·5533

Zufolge dieser Ephemeride ist der Planet am 21. Juli 1891 in Rectascension in Opposition mit der Sonne. Wegen seiner ungewöhnlich grossen südlichen Declination ist er jedoch für die Sternwarten Europas unsichtbar. Da seine Helligkeit zur Zeit der Opposition 15·4 ist, so ist er wohl auch für die noch nicht mit grösseren Instrumenten versehenen Sternwarten der südlichen Erdhalbkugel unauffindbar und habe ich daher von der Berechnung einer speciellen Oppositionsephemeride für 1891 Umgang genommen.

Jahresephemeride 1892.

12h mittl. Zeit Berlin		α	δ	lg r	lg ρ
Jänner	18	21h 42m 7	−26° 29′ 0	0·4480	0·5655
Februar	7	22 13·6	−22 44·5	0·4429	0·5705
	27	22 41·0	−18 53·3	0·4373	0·5687
März	18	23 13·9	−14 57·1	0·4311	0·5599
April	7	23 43·2	−10 59·0	0·4242	0·5438
	27	0 11·5	− 7 3·4	0·4168	0·5207
Mai	17	0 38·7	− 3 11·2	0·4087	0·4901
Juni	6	1 4·5	+ 0 34·5	0·4001	0·4518
	26	1 28·5	+ 4 15·1	0·3907	0·4051
Juli	16	1 49·1	+ 7 49·1	0·3808	0·3500
August	5	2 5·1	+11 20·2	0·3703	0·2864
	25	2 13·2	+14·52·6	0·3593	0·2159
September	14	2 9·8	+18 27·3	0·3477	0·1440
October	4	1 51·4	+21 46·8	0·3357	0·0838
	24	1 20·9	+24 9·5	0·3234	0·0531
November	13	0 51·9	+25 13·1	0·3110	0·0622
December	3	0 37·7	+25 46·4	0·2985	0·0998
	23	0 41·7	+26 48·0	0·2863	0·1482

Oppositionsephemeride 1892.

12h mittl. Zeit Berlin		α app.	δ app.	lg r	lg ρ
October	8	1h 46m 6s	+22° 23′ 1	0·3332	0·0746
	9	44 39	31·3		
	10	43 12	39·3		
	11	41 43	47·0		
	12	1 40 13	+22 54·6	0·3308	0.0668

12h mittl. Zeit Berlin		α app.	δ app.	lg r	lg δ
October	12	1h40m13s	+22°54'6	0·3308	0·0668
	13	38 41	+23 2·1		
	14	37 8	9·4		
	15	35 34	16·5		
	16	34 0	23·4	0·3283	0·0606
	17	32 24	30·0		
	18	30 48	36·4		
	19	29 11	42·6		
	20	27 34	48·6	0·3258	0·0560
	21	25 56	54·3		
	22	24 18	+23 59·9		
	23	22 40	+24 5·3		
	24	21 3	10·4	0·3234	0·0531
	25	19 26	15·2		
	26	17 49	19·9		
	27	16 12	24·4		
	28	14 36	28·7	0·3209	0·0518
	29	13 0	32·8		
	30	11 26	36·7		
	31	9 53	40·4		
November	1	1 8 21	+24 43·8	0·3184	0·0521

Opposition, October 15. Grösse 13·3.

Zur leichteren Aufsuchung des Planeten nach dem Zeitraum von $2^1/_2$ Jahren dienen noch die folgenden durch Variation der mittleren täglichen Bewegung um $\pm 1''$ erhaltenen hypothetischen Ephemeriden:

12h mittl. Zeit Berlin		$\Delta\mu = +1''..\mu = 996''1925$		$\Delta\mu = -1''..\mu = 994''1925$	
		α	δ	α	δ
October	8	1h47m47s	+22°48'7	1h44m24s	+22° 0'9
	12	41 54	23 20·1	38 32	22 32·2
	16	35 40	23 48·8	32 20	23 0·8
	20	29 13	24 13·9	25 54	23 25·0
	24	22 42	24 35·5	19 24	23 47·1
	28	16 14	24 53·7	12 58	24 5·7
November	1	1 9 58	+25 8·5	1 6 44	+24 19·4

Zur Construction der Polargruppen

von

Emil Waelsch,

Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. März 1891.)

1. Erste Polare eines Quadrupels auf einem Kegelschnitte. Es seien auf einem Kegelschnitte K_2 als binärem Träger vier Punkte (a) gegeben, welche von einem zweiten Kegelschnitte K_2' ausgeschnitten werden; es sollen die drei Punkte $(a)_1^o$ der ersten Polargruppe eines Poles o von K_2 bezüglich des Quadrupels (a) construirt werden.

Betrachtet man die Tangente t_o des Kegelschnittes K_2 für den Punkt o doppeltgezählt als einen Kegelschnitt t_o^2, so bestimmt dieser Kegelschnitt mit K_2' ein Büschel, dessen Kegelschnitte aus K_2 eine biquadratische Involution ausschneiden. Diese Involution hat in o einen vierfachen Punkt und noch drei weitere Doppelpunkte δ, in welchen K_2 von Kegelschnitten des Büschels berührt wird.

Nun gilt der Satz:[1] Hat eine Involution n^{ter} Ordnung einen n-fachen Punkt o, so sind ihre $n-1$ Doppelpunkte, die sie ausserhalb o hat, die Punkte der ersten Polargruppe des Poles o bezüglich aller ihrer Gruppen. Daher bilden die drei Berührungspunkte δ die gesuchte Polargruppe $(a)_1^o$.

Diese Berührungspunkte liegen auf der Jacobi'schen Curve J des Netzes, das durch die Kegelschnitte K_2, K_2', t_o^2 bestimmt ist. Die Curve J ist ein Kegelschnitt, welcher die Doppelpunkte

---

[1] Siehe meine Arbeit: Über die Bestimmung von Punktgruppen aus ihren Polaren, diese Sitzungsber., 88. Bd., S. 1041.

der Kegelschnitte des Büschels K_2, K_2' oder die Ecken d_1, d_2, d_3 des Diagonaldreieckes des Viereckes (a) enthält. Ferner enthält J die beiden Punkte, in welchen t_o von Kegelschnitten dieses Büschels berührt wird, also den Punkt o und denjenigen Punkt o, welcher o in der Steiner'schen Verwandtschaft entspricht, die dem Büschel zugehört. Nun enthält aber der Kegelschnitt, welcher der Tangente t_o in dieser Verwandtschaft entspricht, auch die fünf Punkte d_1, d_2, d_3, o, o, wesshalb sich ergibt:

Das Polartripel $(a)_1^o$ des Quadrupels (a) auf dem Kegelschnitte K_2 wird von demjenigen Kegelschnitte ausgeschnitten, welcher der Tangente t_o von K_2 in der Steiner'schen Verwandtschaft entspricht, die zu den vier Punkten (a) gehört.

Jedem der drei Punkte $(a)_1^o$ entspricht daher in dieser Verwandtschaft ein Punkt, der auf der Tangente t_o liegt. Da aber dieser entsprechende Punkt auch auf der Tangente dieses Punktes von $(a)_1^o$ liegen muss, so folgt als Construction der linearen Polare: Man nehme auf der Tangente des Poles o den Punkt o, welcher o in der Steiner'schen Verwandtschaft entspricht; der Berührungspunkt der Tangente, welche von o noch an K_2 gelegt werden kann, mit K_2 ist diese lineare Polargruppe.[1]

2. Erste Polare eines Tripels auf K_2. Die erste Polare eines Punktes a_1 der vier Punkte (a) des vorigen Artikels bezüglich des Quadrupels (a) besteht aus a_1 und aus den zwei Punkten der ersten Polare $[a]_1^{a_1}$ des Poles a_1, bezüglich der drei übrigen Punkte $[a]$ von (a). Der Kegelschnitt J, welcher der Tangente t_{a_1} des Kegelschnittes K_2 entspricht, berührt daher K_2 in a_1 und schneidet noch in den beiden Punkten $[a]_1^{a_1}$.

Nun gibt es (s. die Figur auf S. 319) eine Perspectivität, in welcher der Punkt a_1 das Centrum ist, und in welcher den Punkten a_2, a_3, a_4 die Punkte d_2, d_3, d_1 entsprechen. In dieser Perspectivität wird dem Kegelschnitte K_2 ein Kegelschnitt entsprechen, welcher ihn in a_1 berührt, und welcher die Punkte d_1, d_2, d_3 enthält, welcher demnach mit J identisch ist. K_2 und J entsprechen sich in dieser Perspectivität, müssen sich daher auf der Perspectivitätsaxe in

---

[1] Vergl. G. Kohn, Über einen Satz von Stephanos, diese Sitzungsberichte, 90. Bd., S. 231.

den Punkten $[a]_1^{a_1}$ schneiden. Diese Axe ist aber die Perspectivitätsaxe der perspectivischen Dreiecke a_2, a_3, a_4 und d_2, d_3, d_4; sie ist die lineare Polare des Punktes a_1 bezüglich der Curve dritter Ordnung, die aus den drei Seiten des Dreieckes $[a]$ besteht; daher:

Die erste Polare eines Poles o bezüglich eines Tripels auf einem Kegelschnitte wird ausgeschnitten von der linearen Polare des Poles o bezüglich des Dreiseits, welches die Punkte des Tripels bilden.

3. Erste Polare für höhere Gruppen. Es seien nun (a) die Punkte eines Quadrupels auf einer cubischen Raumcurve und o ein weiterer Punkt derselben. Wählen wir die Parameterdarstellung der Coordinaten der Punkte der Curve folgendermassen:

$$x_i = \frac{1}{\rho - \rho_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

so entsprechen den Werthen $\rho = \rho_i$ die Ecken des Coordinatentetraeders und dem Werthe $\rho = \infty$ der Einheitspunkt des Coordinatensystems mit den Coordinaten $x_i = 1$.

Verlegen wir die Punkte (a) in die Ecken des Coordinatentetraeders, so sind demnach die ihnen entsprechenden Parameter: $\rho = \rho_i$; den Pol o können wir dann noch in den Einheitspunkt mit dem Parameter $\rho = \infty$ verlegen.

Ist $f = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3)(\rho - \rho_4)(\rho - \rho_5)$, so ist die erste Polare des Punktes $\rho = \infty$ bezüglich f dargestellt durch $\frac{\partial f}{\partial \rho} = 0$. Daher genügen die Parameter der Punkte des ersten Polartripels des Einheitspunktes o der Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = f \Sigma \frac{1}{\rho - \rho_i} = f \Sigma x_i = 0.$$

Nun ist aber die Einheitsebene mit der Gleichung $\Sigma x_i = 0$ die lineare Polare des Einheitspunktes bezüglich des Coordinatentetraeders, dasselbe aufgefasst als Fläche vierter Ordnung; demnach gilt: Die Punkte der ersten Polargruppe eines Punktes o einer cubischen Raumcurve bezüglich einer Gruppe von vier Punkten dieser Curve liegen in der Polarebene von o bezüglich der Fläche vierter Ordnung, die von den Seitenflächen des Tetraeders der vier Punkte gebildet wird.

Da sich der angegebene Beweis auf Räume beliebiger Dimension entsprechend ausdehnen lässt, folgt der Satz:

Die Punkte der ersten Polargruppe von $n+1$ Punkten einer Curve n^{ter} Ordnung (und desshalb rationalen Curve) des Raumes von n Dimensionen für einen beliebigen Punkt der Curve als Pol liegen auf der linearen Polare bezüglich der Fläche $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung, welche von den Seitenflächen des Polyeders der $n+1$ Punkte gebildet wird.

Diese Polarebene des Punktes o wird bekanntlich in folgender Weise construirt: Man schneide die Gerade, welche o mit einer Ecke des Polyeders verbindet, mit der gegenüber liegenden Seitenfläche des Polyeders, so erhält man in den Seitenflächen des Polyeders $n+1$ Punkte, die ein neues Polyeder bilden, welches dem gegebenen perspectivisch ist für das Centrum o. Die Perspectivitätsebene ist die gesuchte Ebene.

Die r^{te} Polare von $\rho = \infty$ wird, wenn

$$f = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_{n+1})$$

ist, dargestellt durch $\frac{\partial^r f}{\partial \rho^r} = 0$; daher liegen die Punkte der r^{ten} Polargruppe auf der Fläche:

$$\frac{\partial^r f}{\partial \rho^r} = f.\Sigma \frac{1}{(\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\ldots(\rho-\rho_r)} = f.\Sigma x_1 x_2 \ldots x_r = 0.$$

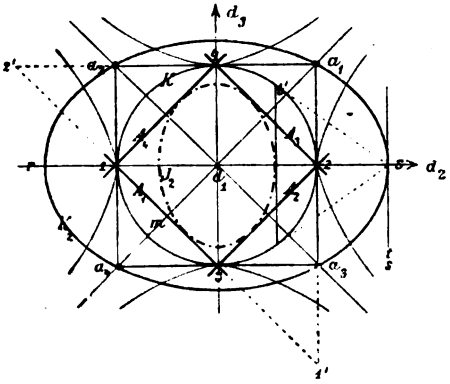
$\Sigma x_1 x_2 \ldots x_r = 0$ ist aber die $(n+1-r)^{\text{te}}$ Polare des Poles o bezüglich des obigen Polyeders, woraus sich allgemein ergibt: Die Punkte der r^{ten} Polargruppe bezüglich der Punktgruppe von $n+1$ Punkten liegen auf der $(n+1-r)^{\text{ten}}$ Polare des Poles bezüglich des Polyeders.

4. Die Polarinvolution des Quadrupels. Das erste Polartripel $(a)_1^o$ für einen Pol o bezüglich des Quadrupels (a) auf einem Kegelschnitte K_2 variirt, wenn o sich auf K_2 bewegt, in einer cubischen Involution; die Seiten der Dreiecke $(a)_1^o$ berühren den Involutionskegelschnitt J_2 dieser Involution.

Ist o einer der Punkte a_i von (a), so ist nach Art. 2 die eine Seite dieses Dreieckes die lineare Polare A_i des Punktes a_i bezüg-

lich des Dreiseits, welches von den drei übrigen Punkten (a) gebildet wird. Der Kegelschnitt J_2 berührt daher die vier Geraden (A). Diese Geraden (A) sind nach Art. 2 die Perspectivitätsaxen der Perspectivitäten, in welchen das Diagonaldreieck $d_1\,d_2\,d_3$ der Punkte (a) perspectivisch ist zu dreien der Punkte (a), mit dem vierten als Perspectivitätscentrum. Herr Schröter hat gezeigt,[1] dass jeder Kegelschnitt, welcher die Punkte (a) enthält, bezüglich einer Gruppe von vier Kegelschnitten, welche „harmonisch-zugeordnet" genannt werden, denselben Polarkegelschnitt hat, welcher die Geraden (A) berührt.

Denkt man sich die Punkte (a) wie in der gezeichneten Figur als Ecken eines Quadrats, so sind auch die Geraden (A) Seiten eines Quadrats, und man sieht, dass die Punkte a_i den Geraden A_i bezüglich des Kreises K polar sind. Von den vier harmonisch-zugeordneten Kegelschnitten sind in unserer Figur drei reell, nämlich der Kreis K und die beiden gezeichneten gleichseitigen Hyperbeln; der vierte Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ist imaginär und hat, wenn $x_i = 0$ die Gleichungen der Seiten A_i sind, und $\Sigma x_i = 0$ ist, die Gleichung $\Sigma x_i^2 = 0$.



Dieser Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ ist eine Combinante des Kegelschnittsbüschels mit den Grundpunkten (a), er hat nach Herrn Mertens die Eigenschaft,[2] dass sich auf ihm die harmonischen Kegelschnitte je zweier beliebigen Kegelschnitte des Büschels schneiden und dass er auf jeder Seite des Dreieckes d_1, d_2, d_3 das Punkte-

[1] Siehe Steiner's Vorlesungen, S. 417. Vergl. Kohn, Über das Vierseit und sein associirtes Viereck, das Fünfflach und sein associirtes Fünfeck, diese Sitzungsber., Bd. 93, S. 314.

[2] Siehe F. Mertens, Über einen Kegelschnitt, welcher die Combinanteneigenschaft bezüglich eines Kegelschnittbüschels hat. Diese Sitzungsber., Bd. 91, S. 637.

paar enthält, welches gleichzeitig die Ecken des Dreieckes und die Schnittpunkte mit den durch den gegenüber liegenden Eckpunkt laufenden Seiten des Viereckes (a) harmonisch trennt. Letztere Eigenschaft kann man auch so ausdrücken: $\mathfrak{K}$ hat das Dreieck d_1, d_2, d_3 als Polardreieck und das Viereck (a) als Polviereck. Setzt man in $\Sigma x_i^2 = 0$ z. B. $x_4 = 0$, so erhält man in $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 0$ die Gleichung der Hesse'schen Covariante des Tripels der drei Schnittpunkte der Geraden A_4 mit den drei übrigen Geraden (A); daher enthält $\mathfrak{K}$ die Hesse'schen Covarianten der Tripel, welche drei Seiten des Vierseits (A) auf der vierten ausschneiden. Diesen Satz und den vorhergehenden findet man bei Herrn Kohn geometrisch bewiesen.

Der Punkt s sei ein Schnittpunkt der Geraden d_1, d_2 mit dem Kegelschnitte K_2; die Polargruppe $(a)_1'$ wird nach Art. 1 von dem Kegelschnitte ausgeschnitten, welcher der Tangente t_s in der mit dem Büschel verbundenen Steiner'schen Verwandtschaft zugehört. Da aber diese Tangente durch die Ecke d_3 des Polardreieckes geht, so zerfällt dieser Kegelschnitt in die Gerade $d_1 d_2$ und in die Gerade t', welche t_s von den Geraden $a_1 a_3$ und $a_2 a_4$ harmonisch trennt. Die erste Polargruppe besteht daher aus dem Punkte r, in welchem $d_1 d_2$, und den beiden Punkten, in welchen t' den Kegelschnitt K_2 schneidet. t' ist demnach die Seite des Dreieckes $(a)_1'$, also eine Tangente des Involutionskegelschnittes J_2. Da aber t' von s durch die Punkte 1, 2 harmonisch getrennt wird, so ist t' die Polare von s bezüglich des Kreises K. Der Kegelschnitt J_2 berührt daher die Geraden (A) und die Gerade t', welche fünf Gerade die Polaren der Punkte (a) und s bezüglich K sind; J_2 ist demnach der Polarkegelschnitt von K_2 bezüglich K. Nach dem oben angeführten Schröter'schen Satze folgt dann, dass J_2 auch polar zu K_2 ist bezüglich $\mathfrak{K}$ und der beiden gleichseitigen Hyperbeln; es ergibt sich der Satz:

Der Involutionskegelschnitt der Involution der ersten Polaren des Quadrupels (a) auf einem Kegelschnitte K_2 eines Büschels ist polar zu K_2 bezüglich des dem Büschel combinanten Kegelschnittes $\mathfrak{K}$, überhaupt polar bezüglich der vier Kegelschnitte der harmonisch-zugeordneten Gruppe, welche zu dem Vierecke (a) gehört.

Die beiden Kegelschnitte E_1, E_2, für welche (a) ein äquianharmonisches Quadrupel ist, berühren nach Herrn Kohn die Seiten des Vierseits (A), sie sind daher einander polarreciprok bezüglich des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$: der eine ist der Involutionskegelschnitt der Polarinvolution des Quadrupels (a) auf dem anderen.

Variirt der Kegelschnitt K_2 in dem Büschel, so beschreiben die Schnittpunkte n_1, n_2 desselben mit einer Seite des Vierseits (A), z. B. mit A_1, eine quadratische Involution; zu dieser gehören die Paare $m\infty$, $1\,1'$, $2'3$. Die Doppelelemente dieser Involution sind daher die Hesse'sche Covariante des Tripels $m\,1'2'$, welches man erhält, indem man die Punkte a_2, a_3, a_4 aus a_1 auf A_1 projicirt, also nach Obigem die Schnittpunkte von A_1 mit $\mathfrak{K}$. Da nun aber die Schnittpunkte von A_1 mit K_2 Punkte der ersten Polargruppe des Poles a_1 sind, so folgt, dass das Dreieck $a_1 n_1 n_2$ ein Polardreieck des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ ist. Dasselbe gilt für die Polartripel, welche irgend einen der Punkte a_i enthalten; es folgt demnach:

Die Dreiecke, welche von Polartripeln des Quadrupels (a) gebildet werden, sind Polardreiecke des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$.

Hieraus ergibt sich, dass die Doppelpunkte dieser Polarinvolution auf dem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ liegen; da aber diese Doppelpunkte die Hesse'sche Covariante des Quadrupels bilden, folgt:

Die Hesse'sche Covariante des Quadrupels (a) auf einem Kegelschnitte des Büschels liegt auf dem combinanten Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ des Büschels.

5. Zweite und gemischte Polaren des Quadrupels. Die zweite Polare $(a)^o_2$ eines Punktes o des Kegelschnittes K_2 bezüglich des Quadrupels (a) wird durch eine Gerade g^o ausgeschnitten. Da jeder Punkt von K_2 zu zwei solchen zweiten Polaren gehört, so umhüllen diese Geraden g^o einen Kegelschnitt $\mathfrak{Z}_2$. Jedem Punkte o von K_2 entspricht so eine Tangente g^o von $\mathfrak{Z}_2$ und umgekehrt; diese Kegelschnitte entsprechen einander daher in einer Reciprocität R, in welcher jedem Punkte o die entsprechende Gerade g^o zugehört.

Wird als Pol o einer der Punkte (a), z. B. der Punkt a_1 genommen, so besteht die zweite Polare $(a)^{a_1}_2$ aus a_1 und einem Punkte α_1, der die lineare Polare von a_1 bezüglich der drei übrigen

Punkte ist und in folgender Weise gefunden werden kann. Man bestimme die Tangente t_{a_1} von K_2 im Punkte a_1; dann ist die Gerade $a_1\alpha_1$ die lineare Polare von t_{a_1} bezüglich des Tripels T der drei Geraden a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4. Es lässt sich nun zeigen, dass der Kegelschnitt k_2 des Büschels, welcher die Geraden $a_1\alpha_1$ berührt, den Kegelschnitt K_2 stützt, dass er Polardreiecken von K_2 umschrieben ist. Ist in der That λ der Parameter der Tangente t_{a_1} des Punktes a_1 in ihrem Büschel und ist

$$D\lambda^3+3\Theta\lambda^2+3\Theta'\lambda+D'=0$$

die annullirte Discriminante des Büschelkegelschnittes

$$\lambda K_2+K_2'=0,$$

so sind die Wurzeln dieser Gleichung die Parameter der drei Geraden des Tripels T. Soll nun der Kegelschnitt $\lambda=0$ den Kegelschnitt $\lambda=\infty$ stützen, so muss $\Theta=0$ sein; dann ist aber $\lambda=0$ die lineare Polare von $\lambda=\infty$ bezüglich der drei Wurzelparameter, womit die Behauptung erwiesen.

In der oben aufgestellten Reciprocität R entsprechen daher den Punkten a_i des Quadrupels (a) die Tangenten t_{a_i} des Kegelschnittes k_2. Diese Reciprocität ist demnach die Polareciprocität bezüglich k_2, und man erhält den Satz:

Die zweite Polare eines Punktes o von K_2 bezüglich des Quadrupels (a) liegt auf der Polare g^o des Punktes o bezüglich des Kegelschnittes k_2, welcher das Quadrupel enthält und K_2 stützt. Der Kegelschnitt $\mathfrak{J}_2$ ist daher polar von K_2 bezüglich k_2.

Ist auf K_2 ein Tripel gegeben, so bilden die ersten Polaren dieses Tripels eine quadratische Involution, deren Centrum der Brianchon'sche Punkt dieses Tripels ist. Nimmt man daher die zwei ersten Polartripel des Quadrupels (a) für die Pole o und o', so wird die Verbindungslinie B der Brianchon'schen Punkte b und b' dieser Tripel aus K_2 die gemischte Polare von oo' bezüglich des Quadrupels (a) ausschneiden.

Rücken o, o' unendlich nahe, so übergeht diese gemischte Polare in die reine Polare von o, daher wird B zur Geraden g^o, und es folgt, dass der Ort der Brianchon'schen Punkte b der Polartripel von (a) der Kegelschnitt $\mathfrak{J}_2$ ist.

Um die Gerade B, welche die gemischten Polare der Pole o, o' ausschneidet, zu bestimmen, suche man daher die diesen Polen bezüglich k_2 polaren Geraden g^o und $g^{o'}$; dieselben berühren den Kegelschnitt $\mathfrak{J}_2$ in zwei Punkten der Geraden B. Oder: B ist die Polare bezüglich $\mathfrak{J}_2$ des Punktes m, dessen Polare bezüglich k_2 die Gerade oo' ist.

oo' ist Polare von m bezüglich k_2, und b sei der Pol von B bezüglich k_2, so sind oo' und b polar bezüglich K_2, denn m und B sind polar bezüglich $\mathfrak{J}_2$, und $\mathfrak{J}_2$ ist Polare von K_2 bezüglich k_2. Daher hat die Gerade oo' für K_2 denselben Pol wie B für k_2: Die Gerade oo', welche die Pole o und o' verbindet, entspricht der Geraden, welche die gemischte Polare dieser Punkte aus K_2 ausschneidet, in der Collineation, in welcher entsprechende Gerade denselben Pol bezüglich K_2 und k_2 haben.

In dieser Collineation entspricht dem Kegelschnitte K_2 ein Kegelschnitt, welcher aus K_2 die Hesse'sche Covariante des Quadrupels (a) ausschneidet. Denn die Hesse'sche Covariante des Quadrupels (a) wird gebildet von den Polen o, deren zweite Polare ein doppeltgezählter Punkt ist, für welche also die Polare g^o bezüglich k^2 den Kegelschnitt K_2 berührt. Diese vier Geraden g^o, welche den Punkten der Hesse'schen Covariante entsprechen, sind demnach die gemeinsamen Tangenten von K_2 und $\mathfrak{J}_2$. Die Pole dieser Geraden g^o bezüglich k_2 sind dann die Punkte der Hesse'schen Covariante; um sie zu finden, polarisirt man zunächst K_2 an k_2 und erhält $\mathfrak{J}_2$, dann polarisirt man $\mathfrak{J}_2$ an K_2 und erhält denjenigen Kegelschnitt, welcher K_2 in der obigen Collineation entspricht, und auf welchem diese Punkte liegen.

Von den beiden Kegelschnitten E_1, E_2 (s. vorig. Art.), auf welchen das Quadrupel (a) äquianharmonisch ist, stützt einer den andern; daher wird die Polare $\mathfrak{J}_2$ des Kegelschnittes E_1 bezüglich E_2 unendlich vielen Polardreiecken von E_2 eingeschrieben sein. Da aber die zweite Polare eines Punktes o von E_1 für (a) auf der Polare dieses Punktes o bezüglich E_2 liegt, so folgt, dass der iterirte Process der zweiten Polare für ein äquianharmonisches Quadrupel sich nach dreimaliger Anwendung schliesst.[1]

[1] Vergl. meine Arbeit: Über ein Schliessungsproblem, diese Sitzungsberichte, Bd. 90, S. 164.

Die drei Kegelschnitte, für welche a ein harmonisches Quadrupel ist, haben zu Tangenten in a_1 die Geraden der cubischen Covariante des Tripels T. Eine dieser Tangenten für einen dieser Kegelschnitte H_2 ist dann die lineare Polare der Geraden $a_1 a_2$ bezüglich der beiden übrigen Strahlen des Tripels T, also ist $a_1 a_2$ die lineare Polare von dieser Tangente bezüglich des Tripels; demnach ist der Kegelschnitt k_2 des Büschels, welcher H_2 stützt, ein zerfallender Kegelschnitt. Die Polare g^o des Punktes o bezüglich dieses zerfallenden Kegelschnittes geht dann durch den Doppelpunkt desselben, und es ergibt sich leicht, dass hier der Process der zweiten Polare sich nach viermaliger Anwendung schliesst.

6. Das Quintupel auf der cubischen Raumcurve. Auf einer Raumcurve dritter Ordnung C_3 sind fünf Punkte (a) gegeben; die ersten Polargruppen $(a)_1^o$ der Punkte o dieser Curve bezüglich dieses Quintupels bilden eine biquadratische Involution. Die Ebenen des Tetraeders, dessen Ecken die Punkte $(a)_1^o$ sind, osculiren daher eine Raumcurve dritter Classe $\mathfrak{C}^3$.

Die erste Polare eines Punktes a_i der Gruppe (a) besteht aus a_i und aus der ersten Polare $[a]_1^{a_i}$ bezüglich der Gruppe der vier übrigbleibenden Punkte $[a]$. Nach Art. 3 erhält man die Ebene A_i, welche die Gruppe $[a]_1^{a_i}$ aus C_3 ausschneidet als Polarebene von a_i bezüglich des Tetraeders $[a]$. Diese Ebene ist also ganz unabhängig von der durch die fünf Punkte (a) gelegten C_3, sie ist eine simultane Covariante zwischen a_i und der Gruppe $[a]$. So erhält man für jeden der Punkte a_i eine entsprechende Ebene A_i, und die fünf Ebenen A_i bilden ein Fünfflach, welches dem Fünfeck (a) covariant ist.[1]

Weist man den fünf Punkten a_i die fünf Ebenen A_i zu, so ist hiedurch eine Reciprocität des Raumes bestimmt. Eine solche Reciprocität hat zwei Kernflächen zweiten Grades; die eine ist der Ort des Punktes, dessen entsprechende Ebene ihn enthält, und die andere ist die Enveloppe dieser Ebene. Diese Flächen müssten Covarianten des Fünfeckes sein.

---

[1] Herr Kohn hat a. a. O. dieses Fünfflach „als dem Fünfeck associirt“ bezeichnet und diese Gebilde hinsichtlich ihrer Reciprocität an 26 Flächen zweiten Grades betrachtet.

Nun hat Herr Klein gezeigt,[1] dass ein Fünfeck im Raume nur eine einzige covariante Fläche zweiten Grades besitzt, die sogenannte Hauptfläche des Fünfeckes. Daher müssen die beiden Kernflächen, und zwar in die Hauptfläche zusammenfallen, die Reciprocität muss eine Polarreciprocität, und zwar diejenige an der Hauptfläche sein.

Wir beweisen nun: Die Curve $\mathfrak{C}^3$, die Enveloppe der Ebenen der Tetraeder $(a)_1^\circ$, ist die Polare der gegebenen Curve C_3 bezüglich der Hauptfläche. Es sei a_i° eine Ecke des Tetraeders $(a)_1^\circ$ und A_i° die ihr gegenüberliegende Ebene des Tetraeders. Dann sind die Curven C_3 und $\mathfrak{C}^3$ projectiv aufeinander bezogen, indem dem Punkte a_i° die Ebene A_i° zugeordnet ist.

Es wurde oben gezeigt, dass für den Pol a_i, welcher dem Quintupel (a) angehört, die Ebene A_i des Fünfflaches (A) die Punkte $[a]_1^{a_i}$ der ersten Polare ausschneidet: a_i und $[a]_1^{a_i}$ bilden zusammen das Tetraeder $(a)_1^{a_i}$. Hieraus folgt, dass in der soeben bestimmten Projectivität der Curven C_3 und $\mathfrak{C}^3$ den Punkten a_i die Ebenen A_i zugewiesen sind.

Bestimmt man ferner die polarreciproke $C^{3\prime}$ der Curve C_3 bezüglich der Hauptfläche, so wird diese Curve $C^{3\prime}$ (da den Punkten a_i die Ebenen A_i reciprok sind) die fünf Ebenen A_i enthalten, und zwar werden die Punkte a_i den Ebenen A_i in derselben Reihenfolge projectiv sein. Demnach gilt: Die Curven $\mathfrak{C}^3$ und $C^{3\prime}$ enthalten die fünf Ebenen A_i, und diese Ebenen sind auf diesen Curven in derselben Reihenfolge projectiv.

Es lässt sich aber zeigen: Es gibt keine zwei Curven dritter Ordnung durch fünf Punkte, auf welchen Curven diese fünf Punkte in derselben Reihenfolge projectiv wären. Denn projicirt man aus einem der fünf Punkte die beiden Curven auf eine Ebene, so erhält man zwei Kegelschnitte eines Büschels, auf welchen die vier Basispunkte in derselben Reihenfolge projectiv wären, und dies ist nicht möglich. Demnach müssen die Curven aus jedem der fünf Punkte durch denselben Kegel projicirt werden, also müssen sie identisch sein.

Wendet man die duale Form dieses Satzes auf die Curven $\mathfrak{C}^3$ und $C^{3\prime}$ an, so folgt, dass dieselben zusammenfallen müssen, wodurch der obige Satz bewiesen ist.

[1] Siehe F. Klein, Geometrisches über Resolventen, M. Ann., Bd. 4, S. 350.

Es ergibt sich aber ferner, dass jede Seitenfläche des Tetraeders $(a)_1^6$ die Polarebene bezüglich der Hauptfläche für den gegenüberliegenden Eckpunkt als Pol ist, daher:

Die Tetraeder $(a)_1^6$ sind Polartetraeder der Hauptfläche.

Ist ein Punkt einer Fläche zweiter Ordnung ein Eckpunkt eines Polartetraeders dieser Fläche, so fällt noch ein zweiter Eckpunkt des Tetraeders mit ihm zusammen. Die Gruppen $(a)_1^6$, welche einen der Durchstosspunkte der Hauptfläche mit C_3 enthalten, müssen ihn demnach noch einmal enthalten; desshalb sind diese Punkte die Doppelpunkte der Polarinvolution, oder:

Die Durchstosspunkte der Curve C_3 mit der Hauptfläche bilden die Hesse'sche Covariante des Quintupels (a).

7. Räume höherer Dimension. Die Beweise der vorstehenden Sätze sind so gewählt, dass sie sich ohneweiters für Räume höherer Dimension verallgemeinern lassen.

Hat man in einem Raume von n Dimensionen $n+2$ Punkte (a), so lässt sich zu diesen Punkten ein associirtes $(n+2)$-Flach (A) construiren. Sind $x_i = 0$ die Gleichungen der Ebenen (A) und ist $\Sigma x_i = 0$, so ist $\Sigma x_i^2 = 0$ die Gleichung der Hauptfläche, in Bezug auf welche (a) und (A) polar sind.

Wird nun eine beliebige Raumcurve n^{ter} Ordnung C_n durch die $n+2$ Punkte (a) gelegt, so schneidet die Ebene A_i aus der Curve die Polargruppe $[a]_1^{a_i}$ des Poles a_i bezüglich der $n+1$ anderen Punkte (a) aus. Die Ebenen des $(n+1)$-Polareckes $(a)_1^6$ umhüllen eine Curve $\mathfrak{C}^n$, welche zu C_n bezüglich der Hauptfläche polar ist. Die $(n+1)$-Ecke $(a)_1^6$ sind Polarecke der Hauptfläche. Die Hauptfläche schneidet C_n in den Punkten der Hesse'schen Covariante der Gruppe (a).

Nach dem letzten Satze lässt sich vermuthen, dass zwischen den Covarianten der Gruppe (a) auf C_n und den covarianten Flächen des $(n+2)$-Eckes ein Zusammenhang besteht; ich werde diesen Zusammenhang in einer nächsten Arbeit begründen und weiter entwickeln.

Bestimmung des Coefficienten der Selbstinduction mit Hilfe des Elektrodynamometers und eines Inductors

von

J. Puluj,

Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. März 1891.)

Beschreibung des Inductors.

Zur Messung der Selbstinduction mit Hilfe eines Elektrodynamometers ist ein Inductor erforderlich, welcher sinusartige Wechselströme liefert, deren Schwingungsperiode sich leicht bestimmen lässt. Ein derartiger Wechselstrominductor wird von mir seit 1888 für Vorlesungszwecke benützt und beruht auf dem Principe, dass ein magnetischer Kreis durch eiserne Ankerstäbe periodisch geschlossen und geöffnet wird.

Der Apparat besteht im Wesentlichen, wie in Fig. 1 perspectivisch dargestellt ist, aus einem fixen zweischenkeligen Elektromagnet, vor dessen Polen eine Armatur, bestehend aus 10 eisernen Ankerstäben, mittelst Schwungrad und Schnur in Rotation versetzt werden kann. Die Ankerstäbe haben dreieckigen Querschnitt und bilden mit ihren Enden am Umfange zweier messingener Scheiben von $7 \cdot 2\ cm$ Durchmesser verschraubt, eine cylindrische $4 \cdot 4\ cm$ lange Trommel, deren Axe, in zwei Ständern gelagert, mittelst eines Stiftes die Axe eines Tourenzählers mitnehmen kann. Die Elektromagnetschenkel haben eine primäre Bewickelung aus wenigen Windungen dicken isolirten Kupferdrahtes und eine secundäre Bewickelung aus vielen Windungen dünnen Drahtes von beziehungsweise $1\ mm$ und $0 \cdot 2\ mm$ Durchmesser und $0 \cdot 16$ beziehungsweise $692 \cdot 1$ Ohm Widerstand. Die

vier Enden der primären und secundären Spulen stehen mit ebenso vielen Klemmen am Apparatbrett in Verbindung. Die Polschuhe der Elektromagnete sind zur Erzielung eines möglichst starken magnetischen Feldes abgeschrägt.

Wird durch die primäre Bewickelung des Elektromagnets der Strom einer constanten Stromquelle, etwa einer Batterie von 2—3 Accumulatorzellen, gesendet und die Ankerarmatur in Rotation versetzt, so entsteht in der geschlossenen secundären Spule ein Wechselstrom, denn die Anzahl der Kraftlinien, welche die secundäre Bewickelung passiren, ändert sich, je nachdem der

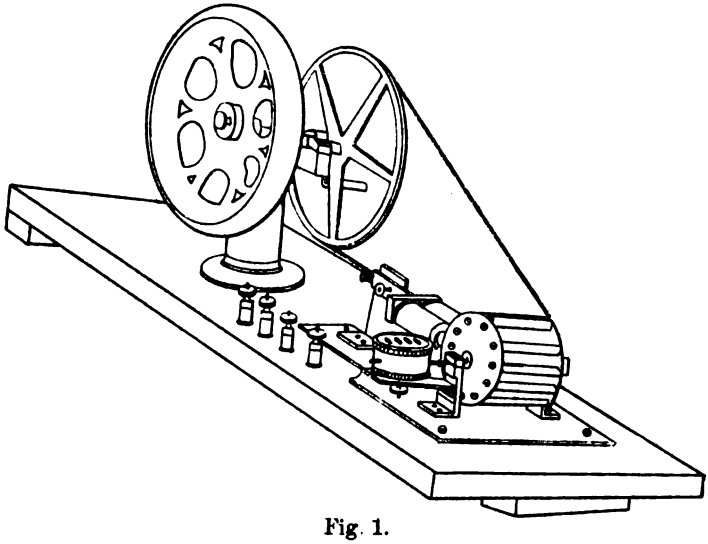


Fig. 1.

magnetische Kreis durch Annäherung eines Ankerstabes geschlossen oder nach Entfernung desselben geöffnet wird. Die Anzahl der Stromwechselperioden ist durch die Formel $n = \frac{1}{6} N$ gegeben, wenn mit N die Anzahl Touren, welche die Trommel in einer Minute macht, bezeichnet wird.

Der Apparat gibt während der Rotation einen sehr kräftigen Ton, dessen Schwingungszahl ebenfalls gleich n ist. Der Ton entsteht in Folge der periodischen Erschütterungen des Apparates, erzeugt durch die anziehende Wirkung der Pole auf die Ankerstäbe der rotirenden Armatur. Die einer bestimmten Rotationsgeschwindigkeit entsprechende Schwingungszahl n des erzeugten

Tones lässt sich mittelst des erwähnten Tourenzählers ebenso leicht wie genau ermitteln.

Will man den Inductor zur Bestimmung des Coefficienten der Selbstinduction verwenden, so ist es nicht nöthig die Anzahl Stromwechselperioden bei jedem einzelnen Versuche zu bestimmen, es empfiehlt sich vielmehr die Schwingungszahl einer Normalpfeife mit Hilfe des Inductors auf gleiche Weise wie mittelst einer Syrene zu ermitteln und bei den Versuchen über Selbstinduction den Apparat mit einer solchen Geschwindigkeit zu drehen, dass er stets denselben Ton gibt wie die Normalpfeife. Das schwere Schwungrad des Inductors sichert den gleichmässigen Gang desselben, so dass die Tonhöhe und die Anzahl der Stromwechselperioden während einer beliebig langen Versuchsdauer constant erhalten werden können.

Theorie der Bestimmung des Coefficienten der Selbstinduction mit Hilfe des Elektrodynamometers.

Wirkt in einem Stromkreise eine periodische elektromotorische Kraft und liegen zwischen zwei Punkten desselben A und B zwei parallele Zweige mit den Widerständen R und r' und den Coefficienten der Selbstinduction L und L', so sind die Zweigströme i und i' ebenfalls periodische Functionen der Zeit und die Potentialdifferenz e zwischen A und B ist bekanntlich in einem bestimmten Momente durch die Formeln

$$e = Ri + L\frac{di}{dt} \quad \text{und} \quad e = r'i' + L'\frac{di'}{dt}$$

gegeben, vorausgesetzt, dass zwischen den Zweigen keine gegenseitige Induction vorhanden ist. Bedeutet ferner T die Dauer einer Stromwechselperiode und variirt der unverzweigte Strom $J = i + i'$ nach dem Gesetze

$$J = J_0 \sin\frac{2\pi}{T}t = J_0 \sin 2n\pi t,$$

wo n die Anzahl der Stromwechselperioden in einer Secunde bedeutet, so genügen die beiden Amplituden A und A' der Zweigströme den Gleichungen[1]

[1] Mascart-Joubert, Elektricität und Magnetismus, übersetzt von Dr. L. Levy, Bd. II, S. 272.

$$\frac{A^2}{r'^2+4\pi^2n^2L'^2}=\frac{A'^2}{R^2+4\pi^2n^2L^2}=\frac{J_0^2}{(R+r')^2+4\pi^2n^2(L+L')^2}.$$

Nehmen wir nun an, dass der Zweigstrom mit dem Widerstande r' und dem Coefficienten der Selbstinduction L' einem Elektrodynamometer angehört, welches an die Hauptleitung in den Punkten A und B angelegt ist, um daselbst die mittlere Potentialdifferenz des sinusartigen Wechselstromes zu messen. Aus der obigen Gleichung erhalten wir für das Quadrat der Amplitude

$$A'^2=J_0^2\cdot\frac{R^2+4\pi^2n^2L^2}{(R+r')^2+4\pi^2n^2(L+L')^2}.$$

Wird das Elektrodynamometer an die Enden eines inductionslosen Widerstandes r, welcher demselben Stromkreise angehört wie R, angelegt, so ergibt sich in gleicher Weise, wenn mit a' die Amplitude des Stromes im Elektrodynamometerkreise bezeichnet wird und der unverzweigte Strom J_0 derselbe bleibt, die Beziehung

$$a'^2=J_0^2\frac{r^2}{(r+r')^2+4\pi^2n^2L'^2},$$

und wenn φ_1 und φ die Ablenkungen der beweglichen Rolle des Elektrodynamometers, gemessen an den Enden der Widerstände R und r, bedeuten, die Gleichung

$$\frac{A'^2}{a'^2}=\frac{R^2+4\pi^2n^2L^2}{(R+r')^2+4\pi^2n^2(L+L')^2}\cdot\frac{(r+r')^2+4\pi^2n^2L'^2}{r^2}=\frac{\varphi_1}{\varphi}. \quad 2)$$

Diese Gleichung, nach L aufgelöst, gibt, wenn bloss die positive Wurzel berücksichtigt und der Kürze halber

$$m=\frac{\varphi_1}{\varphi}\cdot\frac{r^2}{(r+r')^2+4\pi^2n^2L'^2}$$

gesetzt wird, den Ausdruck

$$L=\frac{2\pi mnL'+\sqrt{[m(R+r')^2-R^2](1-m)+4\pi^2n^2mL'^2}}{2\pi n(1-m)}. \quad 3)$$

Unter der Annahme, dass der Coefficient der Selbstinduction des Elektrodynamometers $L'=0$ gesetzt werden darf, erhält man ferner die Beziehung

$$L = \frac{1}{2\pi n}\sqrt{\frac{\frac{\varphi_1}{\varphi} r^2\left(\frac{R+r'}{r+r'}\right)^2 - R^2}{1-\frac{\varphi_1}{\varphi}\left(\frac{r}{r+r'}\right)^2}}, \qquad 4)$$

und falls auch r' im Vergleiche zu R und r sehr gross angenommen wird,

$$L = \frac{1}{2\pi n}\sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi} r^2 - R^2}, \qquad 5)$$

welcher letztere Ausdruck schon von Joubert[1] für den Fall abgeleitet wurde, dass die Ablenkungen φ_1 und φ mittelst eines Elektrometers gemessen werden, dessen Nadel mit einem Quadrantenpaar verbunden ist.

Versuche mit Normalrollen.

Um die Verwendbarkeit des Elektrodynamometers und des Inductors zur Messung der Selbstinduction zu erproben, wurde eine Normalrolle von beiläufig denselben Dimensionen ausgeführt, wie sie Lord Rayleigh zur Widerstandsbestimmung benützte, und der Coefficient der Selbsinduction dieser Rolle nach einer von C. Maxwell abgeleiteten und von Hofrath Prof. J. Stefan corrigirten Formel berechnet. Anderseits wurde der Coefficient der Selbstinduction der Rolle mit Hilfe eines Elektrodynamometers und des beschriebenen Inductors auf Grund der Formel 3) bestimmt und das Resultat der experimentellen Bestimmung mit jenem der reinen Rechnung verglichen. Aus der Übereinstimmung der beiden Resultate kann sowohl auf die Richtigkeit der erwähnten Formel 3) als auf die Verwendbarkeit des Inductors zur Messung der Selbstinduction geschlossen werden.

Der Betrag des Coefficienten der Selbstinduction einer Rolle mit n Windungen vom mittleren Radius a, deren Achsenschnitt ein Rechteck von der Breite b und Höhe c bildet, ist nach Maxwell und Stefan[2] durch nachstehende Formeln gegeben:

---

[1] Joubert, Ann. de l'école norm. sup., [2], t. X, p. 131, 1881. Mascart-Joubert, Elektricität und Magnetismus, übersetzt von Dr. L. Levy, Bd. II, S. 482.

[2] Stefan, diese Sitzungsberichte, Bd. LXXXVIII, S. 1201, 1883.

$$L = 4\pi a n^2 \left[\left(1 + \frac{3b^2+c^2}{96a^2}\right)\log\frac{8a}{\sqrt{b^2+c^2}} - y_1 + \frac{b^2}{16a^2}y_2\right] + \varkappa,$$

$$y_1 = \frac{2x}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + \frac{2}{3x}\operatorname{arctg}x - \frac{x^2}{6}\log\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \\ - \frac{1}{6x^2}\log\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{12},$$

$$y_2 = \frac{23}{40} + \frac{221x^2}{360} - \frac{x^4}{30}\log\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \\ + \frac{1}{6x^2}\log\sqrt{1+x^2} - \frac{8}{15x}\operatorname{arctg}x,$$

$$x = \frac{c}{b} \quad \text{und} \quad \varkappa = 4\pi a n\left(\log\frac{\rho}{\rho_0} + 0{\cdot}15494\right).$$

Im Correctionsgliede $\varkappa$ bedeutet ρ den Durchmesser des umsponnenen und ρ_0 den des blanken Kupferdrahtes.

Für diese Versuchszwecke wurden zwei Normalrollen von nahezu gleichen Dimensionen ausgeführt. Die Rolle I hatte 30 Lagen zu 36 Windungen, zusammen 1080 Windungen eines 0·0559 *cm* dicken isolirten Kupferdrahtes von 222·6 Ohm Widerstand bei 21·3° C. Die Rolle II hatte 16 Lagen zu je 17 Windungen, zusammen 272 Windungen eines 0·11765 *cm* dicken isolirten Kupferdrahtes von 8·71 Ohm Widerstand bei 20° C. Die Dimensionen der Rollen waren folgende:

Normalrolle I.	Normalrolle II.
$a_1 = 22{\cdot}9135\ cm$	$a_1 = 22{\cdot}873\ cm$
$a_2 = 24{\cdot}4985\ cm$	$a_2 = 24{\cdot}395\ cm$
$a = 23{\cdot}7060\ cm$	$a = 23{\cdot}634\ cm$
$b = 1{\cdot}956\ cm$	$b = 1{\cdot}88235\ cm$
$c = 1{\cdot}585\ cm$	$c = 1{\cdot}5221\ cm$
$\rho = 0{\cdot}0559\ cm$	$\rho = 0{\cdot}11765\ cm$
$\rho_0 = 0{\cdot}0412\ cm$	$\rho_2 = 0{\cdot}10357\ cm$
$\varkappa = 0{\cdot}0001\times10^9\ cm$	$\varkappa = 0{\cdot}000023\times10^9\ cm$
$L = 1{\cdot}2094\times10^9\ cm$	$L = 0{\cdot}077295\times10^9\ cm$

Die Buchstaben a_1 und a_2 bedeuten die Radien der ersten, beziehungsweise der letzten Lage, gemessen von der Axe der Rolle bis zur Axe des Drahtes. Die Dimensionen b und c sind

ebenfalls von Axe zur Axe des ersten und letzten Drahtes einer Windung gemessen.

Zu den Messungen der Selbstinduction diente ein Elektrodynamometer für schwache Ströme von Siemens & Halske mit zwei fixen flachen und einer beweglichen kugelförmigen Rolle mit Eisenkern, welche hinter einander geschaltet waren und einen Widerstand von zusammen 313·21 Ohm bei 23·3° C. hatten. Das Elektrodynamometer war mit Wasser gedämpft und die Beobachtung geschah mittelst Spiegel, Fernrohr und einer in Millimeter getheilten, vom Instrumente 3 *m* weit entfernten Scala. In der nebenstehenden Fig. 2 ist die Anordnung der Apparate schematisch dargestellt. Die primäre Bewickelung des Inductors stand mit einer constanten Batterie *B* in Verbindung, während die secundäre Bewickelung desselben, die Normalrolle *R* und ein inductionsloser Widerstand *r* zu einem Stromkreise verbunden waren. Durch passende Stöpselung eines Lamellenumschalters *C* konnte das Elektrodynamometer, dem ein Widerstand ρ vorgeschaltet war, entweder an die Klemmen der Normalrolle *R* oder jene des inductionslosen Widerstandes *r* angelegt und die Ablenkungen des Elektrodynamometers φ_1 und φ beobachtet werden. Die Beobachtung geschah in der Weise, dass ein Beobachter zuerst den Nullpunkt der Scala ermittelte und nachher, während ein zweiter Beobachter den Inductor gleichmässig mit einer bestimmten Geschwindigkeit drehte, an den Enden der Normalrolle und des Vergleichswiderstandes abwechselnd dreimal nach einander die den herrschenden Potentialdifferenzen entsprechenden Ausschläge φ_1 und φ bestimmte, woraus dann die Mittelwerthe gebildet wurden. Der Inductor wurde so

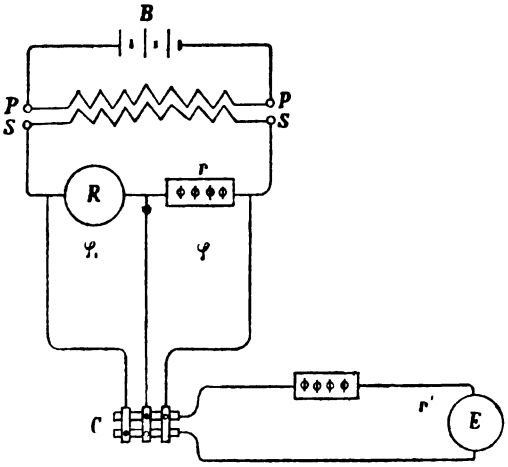


Fig. 2.

schnell gedreht, dass derselbe den Ton mit der Schwingungszahl 220 gab. Zum Vergleiche der Töne diente eine kleine Zungenpfeife, die auf den Ton von 440 Stimmungen abgestimmt war.

Bestimmung des Selbstinductionscoefficienten des Elektrodynamometers.

Um aus den beobachteten Grössen den Selbstinductionscoefficienten der Rolle berechnen zu können, muss, wie aus der Formel 2) zu ersehen ist, der Selbstinductionscoefficient des Elektrodynamometers bekannt sein. Derselbe wurde nach der Lord Rayleigh'schen Brückenmethode mit Hilfe eines ballistischen Galvanometers bestimmt, welches aus einem aperiodischen Spiegelgalvanometer von Siemens & Halske dadurch entstand, dass die kupferne Dämpfung entfernt und der Glockenmagnet durch einen seitlichen Magnetstab astasirt wurde.

Nach der erwähnten Methode lässt sich bekanntlich der Selbstinductioncoefficient nach der Formel

$$L' = \frac{T\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) r \varepsilon}{\pi \alpha}$$

berechnen. In dieser Formel bedeutet: π die Zahl 3·1416, T die Schwingungsdauer, λ das logarithmische Decrement, ε den momentanen Ausschlag der Magnetnadel in Folge der Selbstinduction beim Schliessen des Batteriekreises, wenn die Brücke dauernd im Gleichgewichte sich befindet und das Galvanometer im dauernden Zustande stromlos ist, und α den constanten Ausschlag der Nadel, wenn ein sehr kleiner Widerstand r in den Brückenarm mit Selbstinduction eingeschaltet wird. Die Ausschläge wurden mit Fernrohr und Scala abgelesen und dafür, sowie für T und $1 + \frac{\lambda}{2}$ folgende Mittelwerthe erhalten:

1. Versuch.

1890

6. Juli.. $T = 2{\cdot}773^s$ $\varepsilon = 18{\cdot}00$ $r = 0{\cdot}3773\ \Omega$

$1 + \frac{\lambda}{2} = 1{\cdot}2579$ $\alpha = 17{\cdot}875$ $L' = 0{\cdot}4219 \times 10^9\ cm$

2. Versuch.

1890
8. Juli.. $T = 2 \cdot 580^s$ $\varepsilon = 18 \cdot 83$ $r = 0 \cdot 3773\,\Omega$

$1 + \frac{\lambda}{2} = 1 \cdot 2505$ $\alpha = 19 \cdot 60$ $L' = 0 \cdot 4654 \times 10^9\,cm$

Beide Versuche geben somit für L' den Mittelwerth

$$L' = 0 \cdot 4436 \times 19^9\,cm.$$

Es sei hier noch bemerkt, dass bei dem Versuche am 8. Juli der astasirende Magnetstab nicht die ursprüngliche Lage hatte, wesshalb auch die Schwingungsdauer ein wenig verschieden war.

Der Selbstinductionscoefficient des Elektrodynamometers lässt sich aber auch in der Weise bestimmen, dass man mit dem letzteren die Potentialdifferenzen an den Enden zweier Widerstände mit bekannter Selbstinduction, die auch Null sein kann, beobachtet und aus jenen Potentialdifferenzen nach der Formel 3) den Coefficienten L' berechnet. Der nach der Maxwell-Stefan'schen Formel berechnete Coefficient der Normalorte I $L = 1 \cdot 2094 \times 19^9\,cm$ in Verbindung mit den hier folgenden Werthen:

$r = 2000\,\Omega$	$\varphi_1 = 55 \cdot 0$
$R = 222 \cdot 6\,\Omega$	$\varphi = 71 \cdot 5$
$r' = 364 \cdot 2\,\Omega$	$n = 220$

lieferte für den Coefficienten des Elektrodynamometers den Werth $L' = 0 \cdot 4327 \times 10^9\,cm$, welcher von dem obigen Mittelwerthe $0 \cdot 4436 \times 10^9\,cm$ bloss um $2 \cdot 5\,\%$ verschieden ist.

Es wurde indessen den weiter folgenden Berechnungen der nach der Lord Rayleigh'schen Brückenmethode bestimmte Werth L' zu Grunde gelegt. Nachstehend folgen die mit der Normalrolle I erhaltenen Beobachtungsresultate und die daraus berechneten Coefficienten der Selbstinduction.

Bestimmung des Selbstinductionscoefficienten der Normalrolle I mit Hilfe des Elektrodynamometers.

2. Juli 1890	$n = 220$	$\varphi_1 = 55 \cdot 0$	$\varphi = 71 \cdot 5$
	$R = 222 \cdot 6\,\Omega$	$55 \cdot 1$	$71 \cdot 6$
	$r = 2000 \cdot 0\,\Omega$	$54 \cdot 9$	$71 \cdot 4$
	$r' = 364 \cdot 2\,\Omega$	Mittel. $55 \cdot 0$	Mittel. $71 \cdot 5$

$$L' = 0{\cdot}4436 \times 10^9 \; cm$$
$$L = 1{\cdot}2279 \times 10^9 \; cm$$

3. Juli 1890 $n = 220$ $r' = 9798{\cdot}2\,\Omega$
$R = 222{\cdot}6\,\Omega$ $\varphi_1 = 12$
$r = 1933{\cdot}0\,\Omega$ $\varphi = 12$

$$L' = 0{\cdot}4436 \times 10^9 \; cm$$
$$L = 1{\cdot}2128 \times 10^9 \; cm$$

Beide Versuche geben für den Coefficienten der Selbstinduction den Mittelwerth

$$L = 1{\cdot}2203 \times 10^9 \; cm,$$

welcher von dem nach der Maxwell-Stefan'schen Formel berechneten Werthe $1{\cdot}2094 \times 10^9 \; cm$ um $0{\cdot}9\%$ verschieden ist.

Aus beiden Versuchen ist noch zu ersehen, dass die Formel 3) nahezu denselben Coefficienten der Selbstinduction liefert, wenn der Widerstand des Elektrodynamometerkreises durch Vorschalten eines inductionslosen Widerstandes von $364{\cdot}2\,\Omega$ auf $9798{\cdot}2\,\Omega$ gebracht wird.

Mit Vernachlässigung der Selbstinduction des Elektrodynamometers würde man aus dem ersten Versuche für L den Werth $0{\cdot}4037 \times 10^9 \; cm$, aus dem zweiten den Werth $1{\cdot}2001 \times 10^9 \; cm$ erhalten. Die Vernachlässigung der Selbstinduction des Elektrodynamometers hat somit auf das Resultat einen desto kleineren Einfluss, je grösser der dem Elektrodynamometer vorgeschaltete inductionslose Zusatzwiderstand ist.

Die Formel 3), nach welcher die Coefficienten der Selbstinduction berechnet werden, liefert für denselben streng genommen nur dann richtige Werthe, wenn, wie aus der vorangehenden theoretischen Betrachtung zu ersehen ist, der unvertheilte Strom J_0 in der Hauptleitung sowohl beim Anlegen des Elektrodynamometers an die Normalrolle, als an den Vergleichswiderstand derselbe bleibt. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn bei constanter Anzahl Stromschwingungen die Ausschläge des Elektrodynamometers φ_1 und φ gleich gross oder nur wenig von einander verschieden sind. Es wurde daher mit der Rolle I eine Reihe von Versuchen bei einem Vergleichswiderstande r ausgeführt, welcher bei der gewählten Anzahl Stromschwingungen dem scheinbaren

Widerstande der Normalrolle nahezu gleich war. Bei diesen Versuchen wurde auch auf die Temperatur der Normalrolle des Vergleichswiderstandes und des Elektrodynamometerkreises Rücksicht genommen und sämmtliche Widerstände auf die beobachtete Temperatur reducirt. Zur Bestimmung der Anzahl Umdrehungen des Inductors wurde der Tourenzähler und ein Secundenzähler schon vor Beginn der Beobachtungen gleichzeitig eingeschaltet und darauf geachtet, dass der Ton des Inductors während des Versuches sich nicht ändere. Nach Beendigung der Beobachtungen wurden Tourenzähler und Secundenzähler gleichzeitig ausgeschaltet und aus ihren Ablesungen die mittlere Tourenzahl während des Versuches bestimmt.

Nachstehend folgen die Versuchsresultate. Die Buchstaben bedeuten: t die Zimmertemperatur in Celsiusgraden, gemessen unmittelbar an der Normalrolle und in der Nähe des Vergleichswiderstandes, γ den Widerstand des Elektrodynamometers, ρ den Zusatzwiderstand des Elektrodynamometerkreises, R den Widerstand der Normalrolle, r den Vergleichswiderstand, $r' = \gamma + \rho$ den Gesammtwiderstand des Elektrodynamometerkreises, sämmtliche Widerstände in Ohm und auf die Zimmertemperatur reducirt, und n die Anzahl Stromwechselperioden. Die Ablenkungen des Elektrodynamometers φ_1 und φ wurden abwechselnd beobachtet. Für die Selbstinduction des Elektrodynamometers wurde, wie oben, $L' = 0{\cdot}4436 \times 10^9\ cm$ gesetzt.

1891 — 1. Versuch.

2. Febr.	$t = 18{\cdot}8°$ C.	$\gamma = 307{\cdot}8\ \Omega$	$\varphi_1 = 11{\cdot}8$	$\varphi = 11{\cdot}0$
	$n = 222{\cdot}25$	$\rho = 9429{\cdot}7\ \Omega$	$11{\cdot}8$	$11{\cdot}0$
	$R = 220{\cdot}5\ \Omega$	$r' = 9737{\cdot}5\ \Omega$	$11{\cdot}5$	$11{\cdot}0$
	$r = 1933{\cdot}1\ \Omega$		$11{\cdot}5$	—
			Mittel . $11{\cdot}65$	$11{\cdot}0$

$$L = 1{\cdot}2371 \times 10^8\ cm.$$

2. Versuch.

2. Febr.	$t = 18{\cdot}9°$ C.	$\gamma = 307{\cdot}9\ \Omega$	$\varphi_1 = 16{\cdot}8$	$\varphi = 16{\cdot}1$
	$n = 218{\cdot}25$	$\rho = 9430{\cdot}0\ \Omega$	$16{\cdot}4$	$16{\cdot}2$
	$R = 220{\cdot}6\ \Omega$	$r' = 9737{\cdot}9\ \Omega$	$16{\cdot}8$	$16{\cdot}3$
	$r = 1933{\cdot}1\ \Omega$		Mittel . $16{\cdot}67$	$16{\cdot}2$

$$L = 1{\cdot}2403 \times 10^9\ cm.$$

3. Versuch.

1891

4. Febr.	$t = 19{\cdot}2°$ C.	$\gamma = 309{\cdot}1\ \Omega$	$\varphi_1 = 17{\cdot}4$	$\varphi = 17{\cdot}7$
	$n = 215{\cdot}68$	$\rho = 9431{\cdot}0\ \Omega$	$17{\cdot}5$	$18{\cdot}0$
	$R = 220{\cdot}8\ \Omega$	$r' = 9740{\cdot}1\ \Omega$	$17{\cdot}8$	$18{\cdot}1$
	$r = 1952{\cdot}8\ \Omega$		$18{\cdot}0$	$18{\cdot}5$
			$18{\cdot}1$	—
			$18{\cdot}3$	—
			Mittel . $17{\cdot}85$	$18{\cdot}08$

$$L = 1{\cdot}2392 \times 10^9\ cm.$$

4. Versuch.

4. Febr.	$t = 19{\cdot}2°$ C.	$\gamma = 309{\cdot}1\ \Omega$	$\varphi_1 = 18{\cdot}0$	$\varphi = 17{\cdot}7$
	$n = 219{\cdot}18$	$\rho = 9431{\cdot}0\ \Omega$	$17{\cdot}9$	$17{\cdot}6$
	$R = 220{\cdot}8\ \Omega$	$r' = 9740{\cdot}1\ \Omega$	$17{\cdot}9$	$17{\cdot}6$
	$r = 1952{\cdot}8\ \Omega$		$17{\cdot}7$	$17{\cdot}7$
			$17{\cdot}8$	$17{\cdot}6$
			Mittel . $17{\cdot}86$	$17{\cdot}64$

$$L = 1{\cdot}2358 \times 10^9\ cm.$$

5. Versuch.

4. Febr.	$t = 18{\cdot}4°$ C.	$\gamma = 307{\cdot}4\ \Omega$	$\varphi_1 = 24{\cdot}0$	$\varphi = 24{\cdot}20$
	$n = 218{\cdot}53$	$\rho = 9428{\cdot}4\ \Omega$	$24{\cdot}0$	$23{\cdot}90$
	$R = 220{\cdot}2\ \Omega$	$r' = 9735{\cdot}8\ \Omega$	$24{\cdot}0$	—
	$r = 1951{\cdot}7\ \Omega$		Mittel . $24{\cdot}0$	$24{\cdot}05$

$$L = 1{\cdot}2292 \times 10^9\ cm.$$

6. Versuch.

5. Febr.	$t = 17{\cdot}4°$ C.	$\gamma = 306{\cdot}2\ \Omega$	$\varphi_1 = 18{\cdot}1$	$\varphi = 18{\cdot}7$
	$n = 215{\cdot}87$	$\rho = 9425{\cdot}0\ \Omega$	$18{\cdot}2$	$18{\cdot}6$
	$R = 219{\cdot}4\ \Omega$	$r' = 9731{\cdot}2\ \Omega$	$18{\cdot}4$	—
	$r = 1951{\cdot}0\ \Omega$		Mittel . $18{\cdot}23$	$18{\cdot}65$

$$L = 1{\cdot}2301 \times 10^9\ cm.$$

Als Mittelwerth ergibt sich aus den voranstehenden Selbstinductionscoefficienten

$$L = 1{\cdot}2353 \times 10^9\ cm,$$

welcher von dem nach der Maxwell-Stefan'schen Formel berechneten Werthe

$$L = 1 \cdot 2094 \times 10^9 \, cm$$

bloss um $2 \cdot 1\%$ differirt.

Bestimmung des Selbstinductionscoefficienten der Normalrolle I nach der Brückenmethode von Lord Rayleigh.

Wiewohl die obige Übereinstimmung des Mittelwerthes von L mit dem theoretisch berechneten, sowie jene der einzelnen Werthe untereinander eine sehr gute ist, so wurde nichtsdestoweniger der Coefficient der Normalrolle I nach der Lord Rayleigh'schen Methode bestimmt, um zu sehen, wie der nach dieser Methode erhaltene Werth mit dem theoretischen Selbstinductionscoefficienten übereinstimmt. Die Anordnung des Versuches war folgende. Dem Galvanometer war ein Widerstand von 10.000 S. E. vorgeschaltet und der Glockenmagnet mit Hilfe eines seitlichen Stabmagnets astasirt. Dem Messdrahte, auf dem ein Contact verschoben wurde, war auf der einen Seite ein Widerstand von 150 S. E., auf der anderen ein solcher von 65 S. E. vorgeschaltet und bildeten zwei Zweige der Wheatstone'schen Drahtcombination. Im dritten Zweige war die Normalrolle I und im vierten ein Vergleichswiderstand 100 S. E. eingeschaltet. Als kleiner Widerstand im dritten Zweige wurde ein messingener Drahtsiebwiderstand von $1 \cdot 01\ \Omega$ bei $21 \cdot 5°$ C. gewählt, welcher mittelst zweier kurzer Kupferdrähte, die in Quecksilber getaucht wurden, kurz geschlossen werden konnte. Als Stromquelle dienten zwei Accumulatorelemente. Der momentane Ausschlag des Galvanometers wurde bei Unterbrechung des Batteriekreises mit Fernrohr und Scala beobachtet. Die Entfernung zwischen Spiegel und Scala betrug $3 \cdot 5\ m$.

Nachstehend sind die Resultate einiger Versuche zusammengestellt. Die Buchstaben t, T und λ bedeuten die Zimmertemperatur, die Schwingungsdauer, das logarithmische Decrement des Glockenmagnets, ε den momentanen Ausschlag beim Unterbrechen des Batteriekreises und α den dauernden Ausschlag des

Galvanometers beim Einschalten des kleinen Widerstandes r in Ohm, der auf die Zimmertemperatur reducirt ist.

Nr.	t	T	$1+\frac{\lambda}{2}$	ε	α	r	L in $10^9 cm$
1	14°4 C.	2'842	1·10825	59·13	47·06	0·9994	1·2588
2	17·0	2·822	1·10995	58 33	46·33	1·0032	1·2593
3	17·8	2·819	1·14105	63·25	50·61	1·0044	1·2852
4	18·4	3·128	1·09206	78·33	68·43	1·0053	1·2513
						Mittel.	1·2637

Beim Versuche 3 war dem Galvanometer ein Widerstand von 5000 S. E., beim Versuche 4 ein solcher von 20.000 S. E. vorgeschaltet und beim letzteren ausserdem der Glockenmagnet stärker astasirt. Der Mittelwerth des Selbstinductionscoefficienten differirt noch mehr von dem theoretischen Werthe, als der mit Hilfe des Elektrodynamometers bestimmte.

Bestimmung des Selbstinductionscoefficienten der Normalrolle II mit Hilfe des Elektrodynamometers.

Es wurde auch der Selbstinductionscoefficient der Normalrolle II, welcher ungefähr 16mal kleiner ist, als jener der Rolle I, nach beiden Methoden bestimmt und mit dem theoretisch berechneten Werthe verglichen. Die nachstehende Zusammenstellung enthält die mit dem Elektrodynamometer erhaltenen Resultate.

1. Versuch.

$t = 23{\cdot}3°$ C. $\quad \gamma = 313{\cdot}21\ \Omega \quad r = 94{\cdot}32\ \Omega$
$n = 220 \quad\quad \rho = 300{\cdot}00\ \Omega \quad \varphi_1 = 23{\cdot}75$
$R = 8{\cdot}76\ \Omega \quad r' = 613{\cdot}21\ \Omega \quad \varphi = 17{\cdot}75$

$$L = 0{\cdot}08024 \times 10^9\ cm.$$

2. Versuch.

$t = 23{\cdot}2°$ C. $\quad \gamma = 313{\cdot}21\ \Omega \quad r = 114{\cdot}43\ \Omega$
$n = 219{\cdot}04 \quad\quad \rho = 500{\cdot}60\ \Omega \quad \varphi_1 = 10{\cdot}975$
$R = 8{\cdot}76\ \Omega \quad r' = 813{\cdot}81\ \Omega \quad \varphi = 10{\cdot}575$

$$L = 0{\cdot}08339 \times 10^9\ cm.$$

3. Versuch.

$t = 23{\cdot}2°$ C. $\quad \gamma = 313{\cdot}21\ \Omega \quad r = 100{\cdot}1\ \Omega$

$n = 223{\cdot}1 \quad \rho = 500{\cdot}60\ \Omega \quad \varphi_1 = 13{\cdot}0$

$R = 8{\cdot}76\ \Omega \quad r' = 813{\cdot}81\ \Omega \quad \varphi = 10{\cdot}0$

$$L = 0{\cdot}08093 \times 10^9\ cm.$$

φ_1 und φ sind Mittelwerthe aus je vier Beoachtungen. Aus den voranstehenden Versuchen ergibt sich für den Selbstinductionscoefficienten der Normalrolle II der Mittelwerth

$$L = 0{\cdot}08152 \times 10^9\ cm,$$

welcher vom theoretischen Werthe $L = 0{\cdot}077295 \times 10^9\ cm$ um $5{\cdot}4\%$ verschieden ist.

Bestimmung des Selbstinductionscoefficienten der Normalrolle II nach der Brückenmethode.

Um den Selbstinductionscoefficienten der Normalrolle II nach der Lord Rayleigh'schen Brückenmethode zu bestimmen, wurden zu diesem Zwecke die wahren Werthe von drei kleinen inductionslosen Widerständen von angeblich 0·1, 0·05 und 0·01 Ohm mittelst einer von Siemens & Halske modificirten Thomson'schen Brücke mit möglichster Genauigkeit bestimmt. Die wirklichen Widerstände waren bei 20° C. 0·10014 Ω, 0·05237 Ω und 0·01023 Ω. Ein vierter kleiner Widerstand wurde mit einem bekannten Widerstande mit Hilfe eines Spiegelgalvanometers verglichen, indem die Potentialdifferenzen an ihren Enden bestimmt wurden. Der wirkliche Widerstand wurde bei 20° C. zu 0·1572 Ω ermittelt.

Die Anordnung des Versuches war folgende. Dem Messdrahte mit dem verschiebbaren Contacte waren 10 S. E. und 100 S. E. vorgeschaltet und bildeten zwei Zweige der Wheatstone'schen Drahtcombination; im dritten Zweige befanden sich die Normalrolle II und ein kleiner Widerstand r, und im vierten Zweige ein Widerstand von 100 S. E. Dem Galvanometer waren 5000 S. E. vorgeschaltet. In der folgenden Tabelle sind die Resultate dieser Versuche zusammengestellt.

Nr.	t	T	$1+\frac{\lambda}{2}$	r in Ω	ε	α	L in 10^9 cm
1	18°4 C.	2'800	1·14394	0·09989	51·33	61·58	0·08491
2	22·0	2·850	1·14260	0·10040	69·50	91·40	·07916
3	17·2	2·837	1·14363	0·09972	71·00	90·33	·08095
4	20·3	2·940	1·15000	0·10019	72·00	98·17	·07908
5	20·8	2·940	1·14977	0·10026	54·00	73·22	·07956
6	21·0	2·928	1·14885	0·05258	54·80	38·55	·08000
7	23·8	2·928	1·14885	0·15959	53·83	116·58	·07889
8	21·5	2·928	1·14885	0·01023	53·95	7 55	·07843
9	23·2	2·928	1·14855	0·10062	53·93	7·33	·07922
						Mittel..	0·08002

Der in der letzten Spalte stehende Mittelwerth des Selbstinductionscoefficienten ist ebenfalls grösser, als der theoretische Selbstinductionscoefficient der Normalrolle II und liegt näher dem Mittelwerthe, welchen die Versuche mit dem Elektrodynamometer ergeben haben. Nachstehend sind noch die beiden beobachteten Mittelwerthe mit dem berechneten Coefficienten zusammengestellt.

$L = 0{\cdot}08002$ Erdquadranten
$0{\cdot}08152$ „
$0{\cdot}07730$ „

Bestimmung des Selbstinductionscoefficienten der Normalrolle II bei verschiedenen Vergleichswiderständen.

Eine Reihe von Versuchen, ausgeführt zu dem Zwecke, um zu sehen, ob der Selbstinductionscoefficient merklich beeinflusst wird, wenn bei constanter Anzahl Stromwechselperioden der Vergleichswiderstand r, also auch die mittlere Stromstärke in der Hauptleitung variirt werden, ergab folgende Resultate:

1. Versuchsreihe.

$t = 23{\cdot}3°$ C. $\gamma = 313{\cdot}21\ \Omega$ $\rho = 300\ \Omega$ $n = 220$.

φ_1	φ	r	L in 10^9 cm
24·50	54·45	179·24	0·08286
23·45	44·50	160·38	·08129
23·90	35·80	141·51	·08202
23·75	17·75	94·32	·08024
		Mittel..	0·08160

2. Versuchsreihe.

$t = 23{\cdot}2°$ C. $\gamma = 313{\cdot}21\ \Omega$ $\rho = 500{\cdot}6\ \Omega$ $n = 219{\cdot}04$.

φ_1	φ	r	L in 10^9 cm
11·00	7·86	94·32	0·03082
10·98	10·58	114·43	0·08339
10·13	14·93	141·51	0·08162
10·40	18·80	160·38	0·08245
10·40	21·30	169·81	0·08139
10·60	22·95	179·24	0·08312
10·25	23·80	188·64	0·08398
		Mittel..	0·08240

3. Versuchsreihe.

$t = 23{\cdot}2°$ C. $\gamma = 313{\cdot}21\ \Omega$ $\rho = 522{\cdot}69\ \Omega$ $n = 223{\cdot}1$.

φ_1	φ	r	L in 10^9 cm
12·10	26·35	179·24	0·08130
11·70	23·20	169·81	08126
12·55	22·85	160·38	08058
12·38	17·90	127·92	08007
12·57	8·53	94·32	08154
13·00	10·00	100·00	03082
		Mittel..	0·08093

Aus den Versuchsreihen ist zu ersehen, dass bei Vergleichswiderständen, die grösser sind als der scheinbare Widerstand der Normalrolle II, der bei $n = 220$ rund 107 Ω beträgt, die Änderungen des Selbstinductionscoefficienten nicht grösser sind als die möglichen Fehler der Bestimmung. Wäre der Selbstinductionscoefficient der secundären Bewickelung des Inductors auch bekannt, so liesse sich leicht berechnen, um wieviel die mittlere Stromstärke in der Hauptleitung grösser ist, wenn das Elektrodynamometer einmal an einen bekannten Vergleichswiderstand und dann an die Normalrolle angelegt wird.

Wie aus weiter folgenden Versuchen sich ergeben wird, kann der Selbstinductionscoefficient der secundären Bewickelung des Inductors, deren Widerstand 692·1 Ω ist, gleich 1·4 Erdquadranten gesetzt werden. Mit diesem Coefficienten ergibt sich für die secundäre Bewickelung des Inductors bei 220 Stromschwingungen in einer Secunde ein scheinbarer Widerstand von 2050 Ω. Aus diesem und den übrigen Widerständen des verzweigten Stromkreises ist es nicht schwer zu berechnen, wie die Stromstärke in der Hauptleitung sich ändert, wenn das Elektrodynamometer an die Normalrolle und dann an den Vergleichswiderstand angelegt wird. Mit Benützung der Angaben der ersten Versuchsreihe ergibt die Rechnung für den ersten und letzten Versuch die numerischen Beziehungen

$$J_r = J_R + 0{\cdot}0113\, J_R \quad \text{für} \quad r = 179{\cdot}24\ \Omega$$

und

$$J_R = J_r + 0{\cdot}0018\, J_r \quad \text{für} \quad r = 94{\cdot}32\ \Omega,$$

J_r und J_R bedeuten die Stromstärken in der Hauptleitung beim Anlegen des Elektrodynamometers an den Vergleichswiderstand, beziehungsweise an die Normalrolle. Im ersten Falle ist J_r um $1{\cdot}1\%$ grösser, im zweiten um $0{\cdot}2\%$ kleiner als J_R, in beiden Fällen aber ist die Änderung des Selbstinductionscoefficienten nicht grösser als der mögliche Fehler der Bestimmung.

Es sei hier noch bemerkt, dass alle drei Beobachtungsreihen den Mittelwerth

$$L = 0{\cdot}08169 \times 10^9\ cm$$

geben, welcher mit dem früher gefundenen Resultate

$$L = 0{\cdot}08152 \times 10^9\ cm$$

sehr gut übereinstimmt.

Bestimmung des Selbstinductionscoefficienten des Inductors.

Der Selbstinductionscoefficient der secundären Bewickelung des Inductors wurde mit Hilfe des Elektrodynamometers nach einer Methode bestimmt, nach welcher 1883 von Hofrath Prof. Stefan die Selbstinductionscoefficienten von Wechselstrommaschinen gemessen wurden,[1] jedoch mit dem Unterschiede, dass nicht die mittleren Stromstärken, sondern die ihren Quadraten proportionalen Ablenkungen des Elektrodynamometers der Rechnung zu Grunde gelegt wurden.

Wird die secundäre Bewickelung des Inductors mit dem Elektrodynamometer von bekannter Selbstinduction und einem inductionslosen Widerstande R zu einem Stromkreise verbunden, und bedeutet δ den Ausschlag des Elektrodynamometers bei einer bestimmten Anzahl n Stromschwingungen, L_s und L_e die Selbstinductionscoefficienten der secundären Bewickelung des Inductors, beziehungsweise des Elektrodynamometers, r_s und r_e ihre Widerstände, so ist die mittlere elektromotorische Kraft des ganzen Stromkreises gegeben durch den Ausdruck:

$$E = k\sqrt{\delta}\sqrt{(R+r_s+r_e)^2+4\pi^2n^2(L_s+L_e)^2},$$

in welchem k einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Bei Einschaltung eines anderen inductionslosen Widerstandes R_1 gibt das Elektrodynamometer einen Ausschlag δ_1, für welchen, wenn n constant bleibt, die Beziehung gilt:

$$E = k\sqrt{\delta_1}\sqrt{(R_1+r_s+r_e)^2+4\pi^2n^2(L_s+L_e)^2}.$$

Beide Gleichungen geben den Selbstinductionscoefficienten des Inductors:

$$L_s = \frac{1}{2\pi n}\cdot\sqrt{\frac{\delta_1(R_1+r_e+r_s)^2-\delta(R+r_e+r_s)^2}{\delta-\delta_1}} - L_e.$$

---

[1] J. Stefan, Bericht über die von der wissenschaftlichen Commission an Dynamomaschinen und elektrischen Lampen ausgeführten Messungen. Wien 1886, S. 222 u. 224.

Eine Reihe diesbezüglicher Versuche mit dem Inductor, dessen primäre Bewickelung jedoch offen blieb und bloss der remanente Magnetismus der Elektromagnetkerne zur Wirkung gelangte, ergab folgende Ablenkungen, die nachstehend mit den zugehörigen Widerständen zusammengestellt sind. Die Ablenkungen δ sind Mittelwerthe aus je neun Ablesungen. Die vierte Spalte enthält die nach der letzten Formel berechnete Summe der Selbstinductionscoefficienten.

25. Juli 1890.

$n = 220 \quad r_e = 313 \cdot 21\ \Omega \quad r_s = 692 \cdot 1\ \Omega.$

Nr.	R	δ	$L_s + L_e$ in 10^9 *cm*	Berechnet aus
1	943·4	51·6		
2	1886·8	34·5	1·8680	1 und 2
3	2830·2	24·8	1·8127	1 „ 3
4	4716·9	14·0	1·9041	1 „ 4
		Mittel..	1·8616	

Aus dem Mittelwerthe der vorletzten Spalte ergibt sich, da $L_e = 0 \cdot 4436$ Erdquadranten beträgt, der Selbstinductionscoefficient der secundären Bewickelung des Inductors bei offener primärer Bewickelung

$$L_s = 1 \cdot 418 \text{ Erdquadranten.}$$

Zum Schlusse sei hier noch anerkennend erwähnt, dass Herr Assistent Dr. Sahulka mir bei der Ausführung der Versuche behilflich war und auch die meisten Versuche berechnete.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. Band. IV. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

VIII. SITZUNG VOM 9. APRIL 1891.

Der Vorsitzende gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie, und speciell diese Classe, durch das am 24. März d. J. erfolgte Ableben des correspondirenden Mitgliedes Prof. Dr. Richard Maly in Prag erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär legt die im Laufe der letzten Wochen erschienenen akademischen Publicationen vor, und zwar:

Das X. Heft (December 1890) der Abtheilung II. a., XCIX. Bd., der Sitzungsberichte;

das Heft I—II (Jänner-Februar 1891), Bd. XII der Monatshefte für Chemie und

das Register zum Bande XI, Jahrgang 1890, der letztgenannten Publicationen.

Ferner legt der Secretär den Band VIII, Heft 1—4, des von der Akademie subventionirten Werkes: „Beiträge zur Paläontologie Österreich-Ungarns und des Orientes", herausgegeben von den c. M. E. v. Mojsisovics und M. Neumayr, vor.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler in Innsbruck sendet eine Abhandlung ein: „Über eine verbesserte Methode, Wärmecapacitäten mittelst des elektrischen Stromes zu bestimmen".

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. Constantin Freih. v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung für

die Denkschriften, betitelt: „Die fossile Flora von Schoenegg bei Wies in Steiermark, II. Theil“. Dieselbe enthält die Gamopetalen dieser Flora.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über einige carbone Pflanzenreste aus der Argentinischen Republik“, von Prof. Dr. Ladislaus Szajnocha in Krakau.
2. Über das System der covarianten Strahlencomplexe zweier Flächen zweiter Ordnung“, von Prof. Dr. G. Pick in Prag.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität von Prof. Hans Hartl in Reichenberg vor, welches die Aufschrift trägt: „Neue Idee für fernzeigende, den continuirlichen Gang der Temperatur wiedergebende Thermometer“.

Das w. M. Herr Hofrath Dr. J. Hann überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Studien über die Luftdruck- und Temperaturverhältnisse auf dem Sonnblickgipfel, nebst Bemerkungen über die Bedeutung derselben für die Theorie der Cyclonen und Anticyclonen“.

Das w. M. Herr Prof. J. Wiesner überreicht eine im pflanzenphysiologischen Institute der Wiener Universität von Herrn W. Figdor ausgeführte Arbeit, betitelt: „Experimentelle und histologische Studien über die Erscheinung der Verwachsung im Pflanzenreiche“.

Das c. M. Herr k. und k. Oberst des Armeestandes Albert v. Obermayer legt Photographien vor, welche die mit dem Zerstäuben von Eisendrähten durch den elektrischen Entladungsschlag verbundene Lichterscheinung wiedergeben.

Herr Dr. Gottlieb Adler, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: „Über den magnetischen Arbeitswerth von Substanzen veränderlicher Magnetisirungszahl, insbesondere von Eisen“.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

1. Kraetzl, F.: „Die süsse Eberesche“ *Sorbus aucuparia* L. var. dulcis. Wien, 1890. 8°.
2. Palacky, J.: Die Verbreitung der Fische. Prag, 1891. 8°.
3. Machado Virgilio: A Electricidade, Estudio de algumas das suas principaes applicações. Lisboa, 1887. 8°.
4. Motta Eduardo Augusto: Lições de Pharmacologia e Therapeutica geraes. Lisboa, 1888. 8°.
5. Pereira Coutinho Antonio Xavier: Curso de Silvicultura. Tomo I. Botanica florestal. Lisboa, 1886. 8°. — Tomo II. Esboço de uma Flora Lenhosa Portugueza. Lisboa, 1887. 8°.
6. Ponte Horta José Maria da: Conferencia ácerca dos infintamente pequenos. Lisboa, 1884. 8°. — Conferencia ácerca da Circulação da materia. Lisboa, 1886. 8°.

Über eine verbesserte Methode, Wärmecapacitäten mittelst des elektrischen Stromes zu bestimmen

von

L. Pfaundler,
w. M. k. Akad.

(Mit 1 Tafel.)

Im Jahre 1869 habe ich in diesen Berichten[1] eine neue Methode zur Bestimmung der Wärmecapacität von Flüssigkeiten beschrieben, welche auf dem Joule'schen Gesetze beruht, wonach ein und derselbe Strom in hintereinander geschalteten Drahtspiralen Wärmemengen entwickelt, welche den Widerständen dieser Spiralen proportional sind.

Tauchen die beiden Spiralen in gewogene Mengen m und m' von Flüssigkeiten, welche in Calorimetern enthalten sind, deren Wasserwerthe inclusive Rührer, Thermometer und Spiralen mit w und w' bezeichnet werden; sind ferner r und r' die Widerstände dieser Spiralen, Δt und $\Delta t'$ die corrigirten Temperaturanstiege, endlich c und c' die Wärmecapacitäten der Flüssigkeiten, so gilt die Proportion:

$$(mc+w)\Delta t : (m'c'+w')\Delta t' = r : r'.$$

Ist die eine Capacität c, z. B. die des Wassers, bekannt, so erhält man für die andere den Ausdruck:

$$c' = \frac{r'}{r}\frac{\Delta t}{\Delta t'}\frac{(mc+w)}{m'} - \frac{w'}{m'}.$$

Die Methode wird am einfachsten, wenn man die Widerstände r und r' einander gleich macht. Ich habe in der citirten

[1] Über eine neue Methode zur Bestimmung der Wärmecapacität von Flüssigkeiten, diese Berichte, 1869.

Abhandlung gezeigt, wie man durch successive Vertauschung der Spiralen und der Thermometer kleine Unterschiede in den Widerständen und in den Angaben der Thermometer eliminiren kann.

Sind die Wärmecapacitäten der beiden Flüssigkeiten sehr verschieden, so fallen bei Anwendung gleicher Flüssigkeitsmengen und gleicher Widerstände die Temperaturanstiege sehr ungleich aus, wodurch die Genauigkeit leidet, und zwar einmal, weil sich die Fehler bei der Correction wegen der Wärmeverluste an die Umgebung weniger leicht eliminiren lassen, insbesondere aber desshalb, weil das Verhältniss der Widerstände der Spiralen durch die verschiedene Temperaturhöhe geändert wird. Ich habe zwar darauf hingewiesen, dass der letztere Fehler durch eine Correction mit Hilfe des bekannten Temperaturcoefficienten des Metalles der Spiralen beseitigt werden kann und dass man ausserdem beide Missstände dadurch vermeidet, indem man durch passende Wahl der Flüssigkeitsmengen oder des Widerstandsverhältnisses die Temperaturanstiege nahe gleich macht.

Ein wesentlicher Nachtheil der Methode bestand aber darin, dass sie nur auf nicht leitende oder doch sehr wenig leitende Flüssigkeiten, wie Wasser, Anwendung finden konnte, da sonst Nebenschlüsse durch die Flüssigkeit und elektrolytische Processe störend einwirken.

Einige Jahre später hat zwar Jamin unabhängig von mir eine ähnliche Methode beschrieben, bei welcher dieser Nachtheil nicht auftritt, indem die stromführenden Drähte an der Aussenseite des Calorimeters isolirt aufgewickelt waren. Selbstverständlich gewährt diese letztere Methode eine viel geringere Genauigkeit, da bei ihr unbestimmbare Mengen von Wärme nach aussen verloren gehen.

Meine Methode wurde meines Wissens bisher nur noch von Dr. Lecher,[1] und zwar zur Untersuchung der Wärmecapacitäten von Methylalkohol-Wassergemischen angewendet.

Ich habe leider viele Zeit damit verloren, die Methode dadurch auch für leitende Flüssigkeiten zugänglich zu machen, indem ich versuchte, die Drahtspiralen mit isolirenden Überzügen zu versehen. Dieselben wurden stets bald theils durch den Strom

[1] Diese Berichte, 1877.

selber, theils durch die Wärme oder chemische Einwirkung elektrisch undicht gemacht.

Neuerlich habe ich aber mit bestem Erfolge die Drahtspiralen durch dünnwandige Glasspiralen mit Quecksilberfüllung ersetzt, so dass jetzt die Methode für alle Flüssigkeiten ausser Flusssäure und Fluorsalzlösungen anwendbar ist.

Die Anwendung des die Wärme schlecht leitenden Glases als Umhüllung des Leiters liess jedoch befürchten, dass die Temperatur desselben von jener, welche das in die Flüssigkeit getauchte Thermometer anzeigt, merklich verschieden sein werde, so dass die Anbringung der Temperaturcorrection an den Widerständen der beiden Spiralen eine Unsicherheit mit sich bringt, welche der Genauigkeit der Methode Abbruch thun muss. Es war dies umsomehr zu besorgen, als anderseits ziemlich starke Ströme angewendet werden mussten, um die Zeit der Erwärmung abzukürzen.

Dazu kommt noch die weitere Erwägung, dass durch die Ausdehnung des Glases Änderungen des Querschnittes und damit bedeutendere Änderungen des Widerstandes eintreten müssen, welche sich bei beiden Spiralen nicht genau compensiren, da es nicht möglich ist, sie genau gleich anzufertigen.

Ich habe desshalb den weiteren Kunstgriff angewendet, das Widerstandsverhältniss der beiden Spiralen während der ganzen Zeit des Stromdurchganges zu controliren, beziehungsweise zu messen, indem ich die Spiralen als Zweige einer Wheatston'schen Brückenvorrichtung in den Strom einschaltete.

Dabei bieten sich noch zwei Modificationen der Versuchsanordnung dar. Bei der ersten werden die Widerstände der Spiralen auf constantem Verhältnisse erhalten, indem man durch Einschieben von Glasfäden in die geradlinigen Enden der Spiralen eine Querschnittänderung des Quecksilbers bewirkt, wodurch der Ausschlag des Brückengalvanometers auf Null erhalten wird.

Bei der zweiten Modification lässt man die Änderungen der Widerstände uncompensirt, misst aber ihr Verhältniss in gleichen kleinen Zeitintervallen während des Stromdurchganges, indem man den Brückencontact entsprechend verschiebt und abliest. Die erstere Modification ist theoretisch vollkommener, da sie von

der Constanz des Stromes unabhängig ist; die zweite ist experimentell leichter auszuführen. Beide Modificationen habe ich sowohl mit Gleichstrom als mit Wechselstrom durchprobirt, wobei im ersten Falle ein Projectionsgalvanometer, im zweiten ein Dynamometer oder (bequemer) ein Telephon angewendet wurde.

Die Methode erwies sich nach diesen Anordnungen als so genau, dass sie die Genauigkeit der Quecksilberthermometer bei weitem überholte. Jeder erfahrene Physiker weiss, dass die letzteren, auch wenn sie in Zehntelgrade getheilt sind, keine grössere Genauigkeit als etwa $^2/_{100}°$ gewährleisten, so dass also die Differenz der Angaben zweier Thermometer im ungünstigsten Falle um $^4/_{100}°$ unrichtig sein kann. Bei einem Temperaturanstiege von 4° macht dies bereits einen Fehler von 1%.

Da nun die Methode gestattet, die Temperaturanstiege der beiden Thermometer nahe einander gleich zu machen, indem man entweder die Flüssigkeitsmengen oder das Widerstandsverhältniss entsprechend wählt, so versuchte ich folgende Verbesserung. Ich benützte die Ablesungen an den Thermometern nur zur möglichst angenäherten Messung der Höhe des Anstieges; die Differenz dieser Anstiege aber bestimmte ich mittelst einer Thermosäule, deren entgegengesetzte Löthstellen in die beiden Calorimeterflüssigkeiten tauchten und deren Strom an einem empfindlichen Thermogalvanometer beobachtet werden konnte. Das letztere war so weit astasirt, dass 1 *mm* Scalenausschlag ungefähr 0·01° C. entsprach, also noch Tausendstel Grade abgelesen werden konnten. Die Thermosäule war aus fünf Elementen von Neusilber und Eisendraht gebildet. Ich gehe nun zur Beschreibung des Apparates über.

Beschreibung des Apparates.

Derselbe ist auf beistehender Tafel zum Theil in halber natürlicher Grösse, und zwar auf der linken Seite perspectivisch, auf der rechten Seite im Verticalschnitte abgebildet. Die Wheatston'sche Brücke nebst Brückengalvanometer und Zuleitung, sowie das Thermogalvanometer sammt Zuleitung sind nur schematisch in kleinerem Massstabe angefügt; die Vorrichtung zur Bewegung der Rührer und der das Ganze bedeckende Glaskasten sind aus der Zeichnung fortgelassen.

Auf dem mit Paraffin getränktem Grundbrette B erheben sich drei massive Messingsäulen S, S_1, S', an deren oberen Enden die starken prismatischen Klemmen aus Messing M, M_1, M' angeschraubt und angelöthet sind. An den äusseren Säulen S und S' sind Hülsen H, H' zu verschieben und in beliebiger Höhe festzuklemmen, welche die Tischchen P, P' und auf diesen die Calorimeter C, C' mit deren Umhüllungsgefässen U, U' tragen.

Die aus dünnstem vergoldeten Messingbleche hergestellten Calorimeter sind in der gebräuchlichen Weise auf Korkspitzen montirt. Zwischen die Klemmen M und M_1, M_1 und M' sind die starken parallelipipedischen Messingplatten m, m und m', m' einzusetzen. m und m, sowie m' und m', sind unter sich durch isolirende Hartgummiplatten h und h' mittelst Schrauben verbunden. Nach unten setzen sich die Messingplatten in 5 *mm* starke angelöthete Messingcylinder zz, $z'z'$ fort, welche als Zuleiter des Stromes in das Quecksilber der Spiralen dienen. Ihre unteren Enden schliessen sich mit kegelförmigen Zuspitzungen an die trichterförmigen Verengungen der Glasröhren G, G, G', G' an, welche die Enden der Glasspiralen bilden. Diese Glasröhren sind an die Zuleitungen zz, $z'z'$ oberhalb mittelst Wachs angekittet. Die Glasspiralen haben die aus der Zeichnung ersichtlichen Dimensionen und Form. Ihre Länge würde in gestrecktem Zustande ungefähr 120 *cm* betragen. Der innere Durchmesser der Spiralen ist durchschnittlich etwas kleiner als 1 *mm*, der äussere ungefähr 1·5 *mm*, mithin die Wandstärke ungefähr $^1/_4$ *mm*.

Um zwei Spiralen von möglichst gleichem Leitungswiderstande zu erhalten, wurde deren eine grössere Anzahl hergestellt, mit Quecksilber gefüllt und auf den Widerstand vorläufig untersucht. Die einander am nächsten kommenden wurden für die nachfolgend zu beschreibenden Versuche ausgewählt. Ihre Widerstände betrugen bei mittlerer Zimmertemperatur 1·344 und 1·389 Ohm.

Die vollständige Ausgleichung dieser Widerstände erfolgte, wie erwähnt, durch Einführung von Glasfäden gg, $g'g'$. Zu diesem Behufe sind sowohl die Hartgummiplatten h, h', als auch die Messingplatten mm, $m'm'$ und die Zuleiter zz, $z'z'$ mit verticalen Bohrungen von 1·5 *mm* Weite versehen, so dass die Glasfäden ungehindert bis ans untere Ende der geradlinigen Theile der Spirale eingeführt werden können, in welchen sie durch ihre

Reibung in beliebiger Höhe festgehalten werden. Hiedurch war es möglich, den Widerstand einer Spirale um 5—6% zu erhöhen. Durch Einführung von Platindrähten an Stelle der Glasfäden war auch eine (wenn auch geringere) Verminderung des Widerstandes erzielbar.

Die Wasserwerthe der Spiralen bis zu ihrer Eintauchstelle unterhalb der Verengung wurden durch Bestimmung des Auftriebes in Wasser aus dem spec. Gewichte des Glases und aus dem Gewichte des bis zu den Marken reichenden Quecksilbers erhalten. Die Versuchsergebnisse waren folgende:

	Spirale I	Spirale II
Auftrieb der Spiralen in Wasser	2·6315	2·6655
Gewicht des Quecksilbers	14·4135	15·2995
Volum des Quecksilbers	1·0601	1·1252
„ „ Glases	1·5714	1·5403
Gewicht des Glases (sp. Gew. = 2·6)	4·0856	4·0048
Wasserwerth des Quecksilbers	0·4800	0·5095
„ „ Glases	0·7763	0·7609
Wasserwerth der gefüllten Spiralen	1·2563	1·2704

Die Wasserwerthe der Calorimetergefässe und Rührer waren durch Wägung, die der eingetauchten Theile der Thermometer und der Thermosäule durch eigene Versuche in einem sehr kleinen Calorimeter bestimmt worden. Sie betrugen:

	I.	II.
Calorimeter sammt Rührer	0·6875	0·7590
Thermometer	0·1316	0·1316
Thermosäule	0·1360	0·1360

Die Stielchen der Rührer r, r' waren an der Eintauchstelle durch Glasfäden unterbrochen, um die Wärmeleitung längs derselben möglichst zu vermeiden.

Von den Bodenklemmen a und b gingen Leitungen von verschwindend kleinem Widerstande zu dem Commutator und durch diesen zu den Enden des Messdrahtes der Wheatston'schen Brücke. Derselbe bestand aus 1 *mm* dickem Neusilberdraht und hatte eine Länge von 10 *m*, von denen nur der mittlere Meter längs des in Millimeter getheilten Massstabes ausgespannt war. Die übrigen Drahtlängen waren frei im Zickzack zwischen Hartgummiwalzen ausgespannt. Es waren alle Vorsichtsmassregeln getroffen, um eine Gleichheit der Temperatur aller Theile des

Messdrahtes zu sichern. Die von der Klemme *c* und von dem Contacte *d*, respective von *e*, ausgehenden Leitungen führten zu einem astasirten Projectionsgalvanometer, dessen durchsichtige Scala dem Experimentator gerade gegenüber aufgestellt war, so dass er sich in jedem Momente durch Niederdrücken des Tasters von der Abwesenheit eines Brückenstromes überzeugen eventuell den Lichtzeiger wieder auf die Ruhelage zurückführen konnte. Bei Benützung von Wechselstrom trat an die Stelle dieses Galvanometers ein Dynamometer oder bequemer (da letzteres zu langsam anzeigte) ein Telephon. Die Empfindlichkeit war eine solche, dass bei Anwendung des Galvanometers das Widerstandsverhältniss sicher auf $^1/_{20000}$, bei Anwendung des Telephons sicher auf $^1/_{5000}$ ermittelt, beziehungsweise eingehalten werden konnte.

Der Halbirungspunkt am Messdrahte wurde durch Vertauschung zweier gleicher Widerstände von je 1 Ω, deren Enden statt der Spiralen, beziehungsweise statt der Messingplatten *m*, *m'* zwischen die Klemmen *kk* und *k'k'* geschaltet wurden, ausgemittelt. Hiedurch war es auch möglich, die fehlerfreie Beschaffenheit der Zuleitungen und des Commutators zu controliren.

Der Werth eines Scalentheiles des Messdrahtes wurde nicht aus dem Längenverhältnisse zum ganzen Drahte, sondern dadurch ermittelt, dass man zwischen die Klemmen einerseits ein Normalohm, anderseits ein eben solches parallel geschaltet mit einem 10 Ohm Etalon einlegte und umtauschte.

Die Thermosäule *th th* bestand aus fünf Neusilber- und vier Eisendrähten nebst Enddrähten von Kupfer von ungefähr $^1/_2$ *mm* Dicke, welche an den Löthstellen zugespitzt und oben durch Rahmen von Hartgummi in ihrer Lage erhalten wurden. Von ihr ging eine wohlverwahrte Leitung zu einem astasirten Wiedemann'schen Spiegelgalvanometer, welches aus der Distanz von 1720 *mm* mit Fernrohr und Scala abgelesen wurde. Die Constante dieses Instruments wurde bei jedem Versuche neu bestimmt, indem man den beiden Calorimetern um 4—5° verschiedene Temperaturen nahe der Umgebungstemperatur gab und während des Umrührens eine Anzahl gleichzeitiger Ablesungen an den Thermometern und am Galvanometer machte. Dass die beiden Thermometer sorgfältigst unter sich und mit einem calibrirten Normalthermometer verglichen waren, ist selbstverständlich.

Versuche zur Prüfung der Genauigkeit der Methode.

Zum Zwecke dieser Prüfung wurden beide Calorimeter zunächst mit solchen Wassermengen beschickt, durch welche die Gesammtwasserwerthe auf den gleichen Betrag gebracht wurden, dann mit ungleichen Wassermengen, wodurch derselbe Effect erzielt wurde, wie wenn man gleiche Mengen von Flüssigkeiten verschiedener Capacität angewendet hätte. Indem dabei die Capacität im linksseitigen Calorimeter als Eins angenommen wurde, ermittelte man die Capacität im rechtsseitigen Calorimeter durch den Versuch. Der Betrag, um den dieselbe von Eins abwich, ergab den Fehler der Methode.

1. Versuch mit Gleichstrom von 3·14 Ampère mit gleichen Wasserwerthen und gleichen Widerständen.

Beschickung und Wasserwerthe der Calorimeter:

	Links	Rechts
Wasserwerthe der Calorimeter sammt Rührer	0·6875	0·7590
Wasserwerthe der Spiralen	1·2563	1·2704
„ „ Thermometer	0·1316	0·1316
„ „ Thermosäule	0·1360	0·1360
Gewicht des Wassers	133·789	133·703
Gesammtwasserwerthe....	136·000	136·000

Der Rührapparat und eine Signaluhr, welche halbe Minuten schlägt, werden in Gang gesetzt, die Temperaturen des Calorimeters mittelst des Stromes auf nahe gleiche Höhe gebracht, indem man denselben nur durch das kältere Calorimeter gehen lässt. Der Contact am Messdrahte wird auf den Halbirungspunkt des Widerstandes gesetzt und mittelst des Commutators controlirt. Hierauf werden die Glasfäden so adjustirt, dass weder der Schluss des Brückenstromes, noch die Umschaltung des Commutators den Lichtzeiger aus der Ruhelage verschieben. Der Strom wird dann unterbrochen und zunächst in einer Vorperiode von fünf Zeitintervallen der Gang der Thermometer und der Scalenausschlag am Thermogalvanometer beobachtet. Selbstverständlich wurde durch Umlegen des Commutators am letzteren die Ruhelage jedesmal controlirt. Die Ablesungen von Intervall zu Intervall dienten nur zur Constatirung des ungestörten regelmässigen Ganges. Für die Rechnung werden nur die Ablesungen

am Beginne und am Schlusse dieser Periode benöthigt. Dieselben seien mit t_0 und t_5 am linksseitigen, mit t_0' und t_5' am rechtsseitigen Calorimeter, mit s_0 und s_5 an der Scala des Galvanometers bezeichnet.

Mit dem Signal 5 wird der Strom geschlossen, sofort der Lichtzeiger des Brückengalvanometers beobachtet und, wenn nöthig, durch Verschiebung eines Glasfadens genau auf die Ruhelage gebracht. Durch periodisches Schliessen des Tasters wird das Widerstandsverhältniss genau controlirt.

Diese Hauptperiode dauert 10 Intervalle; nach Ablauf der Hälfte derselben wird der Commutator umgeschaltet, um etwaige Änderungen der Messdrahthälften zu eliminiren. Der Strom wird schon ein Intervall vor Ende dieser Hauptperiode geschlossen, um der zugeführten Wärme Zeit zu gestatten, sich gleichmässig zu vertheilen. Mit dem Signale 15 beginnt die Nachperiode, während welcher wiederum die Thermometer und der Scalenausschlag von Intervall zu Intervall notirt werden. Mit dem Signal 20 endet der eigentliche Versuch, worauf sofort das eine Calorimeter um einige Grade abgekühlt und die Beobachtungen zur Ermittlung der Constanten des Thermogalvanometers angestellt werden.

Ich gebe, um das Zahlenmateriale nicht unnöthig zu vermehren, im Nachfolgenden nur die corrigirten Temperaturen und die (mittelst der Czermak'schen Tafeln reducirten) Scalenausschläge. Die letzteren werden positiv gerechnet, wenn $t'-t$ positiv ist.

	Zeitsignal	Thermometer I	Thermometer II	Galvanometer	
Vorperiode	0	$t_0 = 11{\cdot}32°$	$t_0' = 11{\cdot}55°$	$s_0 = 22{\cdot}9\,mm$	
	⋮				
	5	$t_5 = 11{\cdot}53$	$t_5' = 11{\cdot}76$	$s_5 = 22{\cdot}8$	Strom geschlossen.
	⋮				
Hauptperiode	10	. . . . .			Commutator umgeschaltet
	⋮				
	14	. . . . .			Strom geöffnet
Nachperiode	15	$t_{15} = 16{\cdot}97$	$t_{15}' = 17{\cdot}21$	$s_{15} = 23{\cdot}1$	
	⋮				
	20	$t_{20} = 16{\cdot}95$	$t_{20}' = 19{\cdot}19$	$s_{20} = 22{\cdot}9$	

Ausmittlung der Galvanometerconstanten:

	Thermom. I	Thermom. II	Galvanometer
	14·61	17·97	348·9
	14·62	17·97	347·1
	14·64	17·99	347·0
Mittel =	14·623	17·977	347·7
		Differenz = 3·354	

1 *mm* Scala entspricht $\frac{3 \cdot 354}{347 \cdot 7} = 0 \cdot 00962°$ C.

Die Berechnung des Versuches wird nun auf folgende Weise durchgeführt:

Die Temperatur steigt durch den Strom in dem Calorimeter links von t_5 auf t_{15}, rechts von t'_5 auf t'_{15}, dabei wirkt aber auch der Einfluss der Umgebung mit. Da jedoch der Strom constant ist, so steigt die Temperatur proportional mit der Zeit. Die mittlere Änderung per Intervall, so weit sie von der Umgebung stammt, ist somit gleich dem arithmetischen Mittel der Änderungen per Intervall der Vor- und der Nachperiode. Die Änderungen per Intervall der Vorperiode sind

$$\frac{t_5 - t_0}{5} \quad \text{und} \quad \frac{t'_5 - t'_0}{5},$$

die Änderungen per Intervall der Nachperiode sind

$$\frac{t_{20} - t_{15}}{5} \quad \text{und} \quad \frac{t'_{20} - t'_{15}}{5},$$

die mittleren Änderungen per Intervall der Hauptperiode (so weit sie von der Umgebung stammen), sind demnach

$$\frac{t_5 - t_0 + t_{20} - t_{15}}{10} \quad \text{und} \quad \frac{t'_5 - t'_0 + t'_{20} - t'_{15}}{10}.$$

Da die Hauptperiode 10 Intervalle umfasst, so erhält man demnach die an den Temperaturen t_{15} und t'_{15} anzubringenden Correctionen:

$$t_5 - t_0 + t_{20} - t_{15} \quad \text{und} \quad t'_5 - t'_0 + t'_{20} - t'_{15},$$

die corrigirten (vom Einflusse der Umgebung befreiten) Temperaturanstiege sind demnach:

$t_{15}-t_5-(t_5-t_0+t_{20}-t_{15})$ und $t'_{15}-t'_5-(t'_5-t'_0+t'_{20}-t'_{15})$
$=2t_{15}+t_0-(2t_5+t_{20})$ $2t'_{15}+t'_0-(2t'_5+t'_{20})$.

Bezeichnet man diese corrigirten Temperaturanstiege mit Δ und Δ', so würde das Verhältniss $\frac{\Delta}{\Delta'}$ die gesuchte Wärmecapacität c' im rechtsseitigen Calorimeter geben, wenn die im linksseitigen $=1$ gesetzt wird. Aber diese Messung ist nicht genau, weil die Thermometer nicht empfindlich genug sind. Durch die Thermosäule wird aber die Differenz zwischen Δ und Δ' genauer gemessen. Ist diese Differenz $\Delta'-\Delta=\delta$, so erhält man den genaueren Werth aus

$$c'=\frac{\Delta}{\Delta+\delta}=\frac{\Delta'-\delta}{\Delta'}=1-\frac{\delta}{\Delta'}.$$

Die Grösse δ, nämlich die vom Einflusse der Umgebung corrigirte Differenz der Temperaturanstiege, wird aus den Scalenausschlägen auf analoge Weise abgeleitet wie Δ und Δ' aus den Thermometerangaben. Da nämlich die Änderung der Temperatur eines Calorimeters dem Temperaturüberschusse proportional ist, so muss auch die Änderung der Temperaturdifferenz beider Calorimeter (per Intervall) proportional sein der Temperaturdifferenz derselben. Da aber anderseits wegen der Constanz der Stromstärke die Temperaturen beider Calorimeter während der Hauptperiode proportional der Zeit gesteigert werden, so muss sich auch die Temperaturdifferenz derselben proportional der Zeit verändern und daher auch die von der Umgebung stammende Änderung der Temperaturdifferenz per Intervall in linearer Weise von der Zeit abhängen. Man hat desshalb zur Correction des Scalenausschlages s_{15} am Schlusse der Hauptperiode genau die analoge Formel. Die Correction beträgt:

$$-(s_5-s_0+s_{20}-s_{15}).$$

Mithin erhält man für die Grösse δ:

$$\delta=R[s_{15}-s_5-(s_5-s_0+s_{20}-s_{15})]=R[2s_{15}+s_0-(2s_5+s_{20})],$$

worin R die Constante des Galvanometers zur Umrechnung von Scalentheilen in Grade bedeutet.

Um obigen Versuch zu berechnen, suchen wir also zunächst

$$\Delta = 2t_{15} + t_0 - (2t_5 + t_{20}) = 33 \cdot 94 + 11 \cdot 32 - (23 \cdot 06 + 16 \cdot 95) =$$
$$= 5 \cdot 25° \text{ C.}$$

$$\Delta' = 2t'_{15} + t'_0 - (2t'_5 + t'_{20}) = 34 \cdot 42 + 11 \cdot 55 - (23 \cdot 52 + 17 \cdot 19) =$$
$$= 5 \cdot 26° \text{ C.}$$

$$R = \frac{3 \cdot 354}{347 \cdot 7} = 0 \cdot 00962$$

$$\delta = R[2s_{15} + s_0 - (2s_5 + s_{20})] = 0 \cdot 00962\,[46 \cdot 2 + 229 - (45 \cdot 6 + 229) =$$
$$= 0 \cdot 00577° \text{ C.}$$

endlich

$$c' = 1 - \frac{\delta}{\Delta'} = 1 - 0 \cdot 0011 = 0 \cdot 9989.$$

Aus den Thermometern allein würde sich

$$c' = \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{5 \cdot 25}{5 \cdot 26} = 0 \cdot 9981$$

ergeben. Wie ersichtlich, benöthigt man für die Rechnung nur die Angaben eines Thermometers, doch liefert das zweite eine Controle gegen grössere Fehler und ist für die Leitung des ganzen Versuches und die Ausmittlung der Constante R unentbehrlich.

2. Versuch mit Wechselstrom von 5·7 Ampère,[1] Telephon, gleichen Wasserwerthen und Widerständen.

Die Beschickung der Calorimeter war dieselbe, wie oben.

$t_0 = 11 \cdot 84$	$t'_0 = 11 \cdot 85$	$s_0 = 0 \cdot 7$
$t_5 = 11 \cdot 94$	$t'_5 = 11 \cdot 96$	$s_5 = 2 \cdot 1$
$t_{15} = 27 \cdot 70$	$t'_{15} = 27 \cdot 73$	$s_{15} = 2 \cdot 9$
$t_{20} = 27 \cdot 30$	$t'_{20} = 27 \cdot 31$	$s_{20} = 0 \cdot 5$

$$R = \frac{3 \cdot 886}{404 \cdot 9} = 0 \cdot 00959$$

$$\Delta = 16 \cdot 06$$
$$\Delta' = 16 \cdot 08$$
$$\delta = 0 \cdot 0173$$
$$c' = 1 - 0 \cdot 00106 = 0 \cdot 99894.$$

[1] Der Wechselstrom wurde der Beleuchtungsanlage des Innsbrucker Elektricitätswerkes entnommen.

3. Versuch. Mit Gleichstrom, ungleichen Wasserwerthen, aber gleichen Widerständen.

Das rechtsseitige Calorimeter erhielt um 2 g Wasser weniger, daher die Wasservorräthe betrugen:

Links	Rechts
136·00	134·00

$$t_0 = 12{\cdot}98 \qquad t_0' = 13{\cdot}09 \qquad s_0 = 11{\cdot}0$$
$$t_5 = 13{\cdot}01 \qquad t_5' = 13{\cdot}12 \qquad s_5 = 10{\cdot}5$$
$$t_{15} = 15{\cdot}16 \qquad t_{15}' = 15{\cdot}31 \qquad s_{15} = 13{\cdot}0$$
$$t_{20} = 15{\cdot}17 \qquad t_{20}' = 15{\cdot}33 \qquad s_{20} = 12{\cdot}5$$

$$R = \frac{2{\cdot}325}{232{\cdot}2} = 0{\cdot}0010$$

$$\Delta = 2{\cdot}11$$
$$\Delta' = 2{\cdot}14$$
$$\delta = 0{\cdot}035$$

Zur Berechnung von c' haben wir in diesem Falle zu setzen:

$$136.(2{\cdot}14 - 0{\cdot}035) = 134.2{\cdot}14.c',$$

woraus

$$c' = 0{\cdot}9980$$

erhalten wird.

4. Versuch. Mit Wechselstrom und Telephon, mit ungleichen Wasserwerthen und Widerständen.

Bei diesem Versuche wurden die Glasfäden ganz entfernt, so dass die beiden Spiralen ungleiche Widerstände im Betrage 1·344 und 1·389 Ω darboten. Es wurde desshalb das Telephon dadurch zum Schweigen (beziehungsweise auf das Minimum des Tones) gebracht, dass man den Brückencontact so weit aus der Mitte des Messdrahtes verschob, bis das Minimum eintrat. Während des Stromdurchganges änderte sich diese Lage nur wenig. Von Intervall zu Intervall wurde dieselbe notirt, in Mitte der Hauptperiode wurde der Strom auf einen Moment unterbrochen und nach Umschaltung des Commutators die entsprechende Stelle der Messbrücke auf der anderen Seite zum Contacte gebracht. Durch einen Vorversuch waren diese Contactstellen ausgemittelt, um sie nachher rasch aufzufinden, damit

nicht merkliche Zeit hindurch ungleiche Stromstärken durch die Spiralen geführt wurden.

Zeit-signal	Thermometer		Galvanometer	Contact auf	
0	$t_0 = 16 \cdot 95$	$t_0' = 16 \cdot 96$	$s_0 = 1 \cdot 1$		
5	$t_5 = 16 \cdot 94$	$t_5' = 16 \cdot 95$	$s_5 = 1 \cdot 0$	-83	
6	—	—	—	-82	
7	—	—	—	-82	Mittel $-82 \cdot 3$
8	—	—	—	-82	
9	—	—	—	-82	
				Umlegung des Commutators	
10	—	—	—	$+83$	
11	—	—	—	$+81$	
12	—	—	—	$+82$	$+82 \cdot 3$
13	—	—	—	$+82$	
14	—	—	—	$+83$	
15	$t_{15} = 27 \cdot 73$	$t_{15} = 28 \cdot 26$	$s_{15} = 53 \cdot 0$	$R = 0 \cdot 0010$	
20	$t_{20} = 27 \cdot 43$	$t_{20} = 27 \cdot 95$	$s_{20} = 52 \cdot 8$		

Die Ablesungen der Contactstellen sind bereits corrigirt und auf Tausendtheile des ganzen Messdrahtes reducirt. Es betrug daher das mittlere Widerstandsverhältniss $5000 - 82 \cdot 3 : 5000 + 82 \cdot 3$

$$\Delta = 11 \cdot 10$$
$$\Delta' = 11 \cdot 63$$
$$\delta = 0 \cdot 523$$

Zur Berechnung des c' hat man die Proportion:

$$136 . (11 \cdot 63 - 0 \cdot 523) : 134 . 11 \cdot 63\, c' = \\ = (5000 - 82 \cdot 3) : (5000 + 82 \cdot 3),$$

woraus

$$c' = 1 \cdot 0019.$$

Die vier mitgetheilten Versuche ergaben also für die Wärmecapacität des Wassers im rechtsseitigen Calorimeter, wobei die im linksseitigen als Eins angenommen wurde, die Werthe:

$$0{\cdot}9989 = 1 - 0{\cdot}0011$$
$$0{\cdot}9989 = 1 - 0{\cdot}0011$$
$$0{\cdot}9980 = 1 - 0{\cdot}0020$$
$$1{\cdot}0019 = 1 + 0{\cdot}0019$$

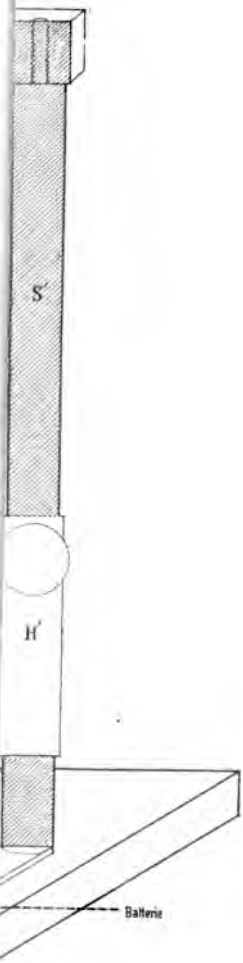
Wie man sieht, stimmen die ersten drei sehr gut unter sich überein, während der vierte, wie wegen der ungünstigen Umstände zu erwarten war, etwas differirt. Die constante Abweichung der zwei ersten Versuche dürfte den Umstand zum Grunde haben, dass der Wasserwerth eines der beiden Calorimeter durch etwas tieferes Eintauchen einer der zuführenden, Quecksilber haltenden Glasröhren vergrössert war. Unter den sämmtlichen angestellten Versuchen waren eine Anzahl durch zufällige Störungen verunglückt, insbesondere war das Thermogalvanometer manchmal stärkeren Verschiebungen seiner Ruhelage ausgesetzt.[1] Von den gelungenen Versuchen wurden die obigen desshalb ausgewählt, um für die extremen Umstände grosser und kleiner Temperaturanstiege, sowie die verschiedenen Modificationen der Methode Beispiele darzubieten. Eine weitere Steigerung der Genauigkeit dürfte durch Vergrösserung des Apparates zu erzielen sein, da dann sowohl die Unsicherheiten der Wasserwerthe, als auch des Einflusses der Umgebungstemperatur verringert werden können.

Ich war eben im Begriffe, die Methode zur Bestimmung der Wärmecapacität des Wassers bei verschiedenen Temperaturen anzuwenden. Da ich aber wegen eingetretener Übersiedlung an die Universität Graz diese Versuche abbrechen musste, so glaubte ich vorläufig die bisherigen Ergebnisse bekannt geben zu sollen.

---

[1] Die gesammte Gasleitung der Stadt Innsbruck ist fast fortwährend von elektrischen Strömen durchflossen. Dieselben stammen zum Theile daher, dass sie an einigen Punkten als Erdleitung von Telegraphen und Telephonen benützt wird, dann aber wohl auch daher, dass sie einen kleinen Theil der Wechselströme aufnimmt, deren Leitung im Verlaufe des Winters einigen Isolationsstörungen ausgesetzt war.

. n. Gr.



i Anstalt v. J. Barth, Funfhaus, Wien.

Studien über die Luftdruck- und Temperaturverhältnisse auf dem Sonnblickgipfel, nebst Bemerkungen über deren Bedeutung für die Theorie der Cyclonen und Anticyclonen

von

J. Hann,
w. M. k. Akad.

Die nachfolgenden Untersuchungen haben ihren Ausgangspunkt genommen von dem Versuche einer Beantwortung der Frage, unter welchen meteorologischen Verhältnissen in einer Seehöhe von circa 3 *km* die Monatsmaxima und Minima des Luftdruckes und der Temperatur einzutreten pflegen. Es schien mir an sich von Interesse, diese Verhältnisse klarzustellen. Für die Erdoberfläche sind dieselben seit Langem bekannt und nun bot sich zum erstenmale durch die jetzt mehr als vier Jahre umfassenden Beobachtungen auf dem Sonnblickgipfel eine Gelegenheit, nachzusehen, welche Verschiedenheiten das Auftreten der Luftdruck- und Temperaturextreme in 3100 *m* Seehöhe gegenüber jenem an der Erdoberfläche darbieten mag.

Im Verfolg der darauf bezüglichen Auszüge und Zusammenstellungen aus den Beobachtungsjournalen der meteorologischen Station auf dem Sonnblickgipfel und jenen zu Ischl (als Basisstation) ergaben sich dann von selbst mehrere andere Fragepunkte von allgemeinerem und theoretischem Interesse, deren Beantwortung näher zu treten gleichfalls versucht worden ist. Die Ergebnisse der daraus hervorgegangenen Untersuchungen bilden den Inhalt dieser Abhandlung.

I. Die Luftdruckmaxima und Minima auf dem Sonnblickgipfel.

Aus dem Beobachtungsjournal der Station auf dem Sonnblickgipfel von October 1886 bis December 1890 wurden zunächst die Monatsmaxima und Minima des Luftdruckes ausgezogen und die Daten über die zugehörigen Temperaturen, Feuchtigkeitsgehalte der Luft, Bewölkung und Windrichtung beigeschrieben. Aus mehrfachen Gründen nahm ich bei allen Elementen (auch beim Luftdruck) die Tagesmittel. Die Hauptvortheile, welche die Tagesmittel darbieten, sind: die Elimination des täglichen Ganges und die grössere Sicherheit der Resultate.

Als Basisstation bei dieser speciellen Untersuchung wurde Ischl genommen. Für Ischl liegt eine längere homogene Reihe von sorgfältigen Luftdruck- und Temperaturbeobachtungen vor, welche es leicht machte, auch die Abweichungen vom 30jährigen Mittel (1851—1880) aufzustellen.

Die Seehöhe von Ischl ist an das Präcisionsnivellement angeschlossen, desgleichen ist auch die Barometercorrection gut bekannt. Ischl ist ferner in Bezug auf die Temperatur im Winter nicht der Ansammlung stagnirender kalter Luftmassen unterworfen, welche den Beobachtungen eine allgemeinere Geltung rauben. Die etwas grössere Entfernung vom Fusse des Sonnblick kam im vorliegenden Falle dagegen kaum in Betracht.[1]

Für die Monate October bis December konnten je fünf Luftdruckextreme verwendet werden, für die übrigen Monate nur je vier, in Summa also 51 Maxima und 51 Minima; für das Winterhalbjahr je 27, für das Sommerhalbjahr je 24. Zu jedem Maximum und Minimum wurde ausserdem auf der täglichen Wetterkarte die entsprechende Lage des Maximums und Minimums des Luftdruckes um 7^h Morgens des betreffenden Tages aufgesucht, desgleichen die der Position des Sonnblick entsprechende Isobare.

---

[1] Die directe Entfernung des Sonnblick von Ischl beträgt 87 *km*; Salzburg ist ein wenig weiter entfernt. Die nächste Station wäre Zell a. S., wo aber im Winter eine locale Temperaturdepression sich einstellt.

Die den Maximis und Minimis des Luftdruckes auf dem Sonnblickgipfel correspondirenden Tagesmittel des Luftdruckes, der Temperatur, Feuchtigkeit und Bewölkung zu Ischl wurden in andere Tabellen eingetragen. Schliesslich wurden dann noch die Abweichungen des Luftdruckes und der Temperatur bei den einzelnen Maximis und Minimis am Sonnblickgipfel wie zu Ischl aufgesucht. Dabei wurden die 30jährigen Mittel der Periode 1851—1880 zu Grunde gelegt, aus welchen durch einfache lineare Interpolation noch Mittel für jeden ersten Monatstag abgeleitet wurden. Dies schien mir für den vorliegenden Zweck genügend.[1]

In der folgenden Tabelle findet man die allgemeineren Ergebnisse der auf die Luftdruckmaxima auf dem Sonnblickgipfel bezüglichen Untersuchung zusammengestellt. Ich muss leider darauf verzichten, die Tabelle, welche die jedes einzelne Barometermaximum begleitenden meteorologischen Zustände enthält, hier wiederzugeben. Es würde dies den Umfang dieser Abhandlung ungebührlich erhöht und zugleich den Überblick über die Ergebnisse behindert haben. Es schien mir das Detail auch nicht so wesentlich, dass dessen Abdruck diese Nachtheile aufgewogen hätte. Ich werde suchen, diesen Mangel eines Einblickes in die einzelnen Daten durch Hervorhebung der von den Mitteln abweichenden Fälle möglichst leicht vermissen zu lassen.

---

[1] Die hier verwendeten 30jährigen Mittelwerthe des Luftdruckes und der Temperatur für den Sonnblickgipfel sind durch Differenzen gegen die correspondirenden Mittel der Schmittenhöhe, des Obir und des Säntisgipfels erhalten worden. Ich habe jene Mittel benützt, die ich schon in der Zeitschrift des Deutschen und Österreichischen Alpenvereines, 1889, Bd. XX, S. 78, veröffentlicht habe.

I. Monatsmaxima des Luftdruckes auf dem Sonnblick.

	Luftdruck		Temperatur		Relative Feuchtigkeit		Bewölkung		Abweichungen vom 30jährigen Mittel			
									Luftdruck		Temperatur	
	Sonnblick	Meeresniveau[1]	Sonnblick	Ischl	Sonnblick	Ischl	Sonnblick	Ischl	Sonnblick	Ischl	Sonnblick	Ischl
					A. Winterhalbjahr.							
October ..	528·5	773·0	— 2°5	8°4	76	82	2·8	5 0	8·6	8·5	3°5	1°6
November	27·5	74·3	— 4·8	2·8	52	91	1·4	6·8	10·1	9·5	5·0	0·4
December	24·6	74·8	— 8·0	—2·6	74	90	3·2	4·6	7·9	7·1	3·9	—2·4
Jänner ...	28·5	79·6	— 6·7	—1·5	70	90	1·2	5·0	12·4	11·8	6·5	0·6
Februar ..	23 2	72·4	—10·0	1·0	77	81	5·0	6·7	7·7	7·4	3·0	0·3
März	24·1	72·8	— 8·2	4·0	65	73	3·2	2·0	8·7	8·1	3·6	1·1
Mittel ...	526·1	774·5	— 6·7	2·0	69	85	2·8	5·0	9·2	8·7	4·2	0·3
					B. Sommerhalbjahr.							
April	523·1	766·4	— 6·0	10 4	81	72	4·0	4·5	5·5	3·9	1·6	2·0
Mai.....	26·0	65·6	— 1·0	16·6	90	76	5·0	4·5	5·8	3·2	3·3	3·8
Juni	28·8	65·7	1·6	20·4	91	66	4·2	5·2	6·3	2·8	3·4	5·2
Juli.....	29·7	64·2	4·7	21·9	87	63	4·2	2·2	4·8	0·5	3·6	4·6
August ..	31·0	65·5	4·8	21·4	75	72	3·5	5·0	6·1	2·0	3·6	4·4
September	30·4	70·2	1·8	15·4	88	83	4·2	3·8	6·6	5·4	3·0	1·9
Mittel	528·2	766·3	1·0	17·7	85	72	4·2	4·2	5·8	3·0	3·1	3·6

Betrachten wir zunächst das Auftreten der Luftdruckmaxima im Winterhalbjahr auf dem Sonnblickgipfel. Dasselbe ist verbunden mit relativ hoher Temperatur, geringer relativer Feuchtigkeit und sehr geringer Bewölkung. Gleichzeitig ist unten in 467 *m* Seehöhe, nahe dem Fusse des Sonnblick (2630 *m* tiefer) die Temperatur relativ niedriger, die Luft feuchter, der Himmel stärker bedeckt.

Die Luftdruckabweichung vom Mittel ist auf dem Sonnblick etwas grösser als zu Ischl. Den Luftdruckmaximis auf dem Sonn-

[1] Die correspondirenden Luftdruckmittel im Meeresniveau beziehen sich auf 7ʰ Morgens und sind den täglichen Wetterkarten entnommen, dagegen sind die Mittel für den Sonnblick Tagesmittel.

blickgipfel entsprechen auch Luftdruckmaxima an der Erdoberfläche, wie dies auch die aus den täglichen Wetterkarten entnommenen Barometerstände direct ersehen lassen. Da in einer Seehöhe von 3 *km* der Luftdruck schon in erheblichem Maasse von der Temperatur der Luftschichten unterhalb abhängt, ist dies nicht so selbstverständlich, sobald die Luftdruckmaxima in der Höhe mit erhöhter Temperatur verbunden sind, wie dies thatsächlich der Fall ist.

Unter den 27 Maximis der Winterhalbjahre (October 1886 bis December 1890) auf dem Sonnblickgipfel, die unserer Tabelle zu Grunde liegen, sind 14, bei denen gleichzeitig auch am Meeresniveau das Centrum hohen Luftdruckes über den Ostalpen lag, und nur 3, bei denen am Meeresniveau die Sonnblickisobare[1] um 5 *mm* oder mehr unter der höchsten Isobare der Wetterkarte lag. Und nur in einem Falle entsprach das Monatsmaximum des Luftdruckes auf dem Sonnblickgipfel überhaupt keinem Maximumgebiet an der Erdoberfläche. Dies war am 26. Februar 1888 der Fall, wo die Luftdruckabweichung auch auf dem Sonnblick nur 1·1 *mm* betrug, die Sonnblickisobare etwas unter 760 *mm* war und das Maximum, 780 *mm*, erst in der Gegend von Petersburg anzutreffen war. Es trat eben im ganzen Februar 1888 kein wahres Luftdruckmaximum auf. (Auch in Ischl erhob sich das Maximum des Februar 1888 nur um 1·4 *mm* über das 30jährige Mittel).

Den Barometermaximis des Winterhalbjahres auf dem Sonnblickgipfel entsprechen demnach fast ausnahmslos auch Barometermaxima an der Erdoberfläche. Von diesen letzteren treten daher viele derart auf, dass auch noch in 3 *km* Seehöhe das Barometermaximum mindestens ebenso gross ist, als unten an der Erdoberfläche, so dass diese Maxima wohl die ganze Höhe der Atmosphäre, in welcher sich die gewöhnlichen Witterungsvorgänge abspielen, beherrschen.

Die Heiterkeit des Himmels und die grosse Lufttrockenheit, nicht minder auch die hohe Temperatur, welche diese Barometermaxima begleiten, weisen sehr deutlich auf ihren Ursprung, eine

[1] Unter Sonnblickisobare verstehe ich natürlich nicht den auf das Meeresniveau reducirten Luftdruck des Sonnblickgipfels, sondern die der Position des Sonnblick entsprechende Isobare der Wetterkarte.

herabsinkende Luftbewegung, hin. Diese Barometermaxima dürfen wir demnach als dynamische Phänomene betrachten,[1] im Gegensatz zu jenen, welche thermischen Ursprungs sind.

Jene 14 Barometermaxima (von 27) auf dem Sonnblickgipfel, bei denen zugleich die Sonnblickisobare grösser oder wenigstens gleich war der höchsten Isobare der täglichen Wetterkarten, zeigten im Durchschnitt folgendes Verhalten. Es entfielen auf den October 2, November 4, December 2, Januar 3, Februar 1 und März 2 solcher Maxima.

Sonnblick im Centrum hohen Luftdruckes.

	Abweichung		Beob.	Relat.	Bewölkung
	Luftdruck	Temp.	Temperatur	Feucht.	
Sonnblick	+11·8 *mm*	+6°0	—5°0	61%	1·3
Ischl	+11·1	+0·5	1·7	85	4·1

Die Temperaturabweichung auf dem Sonnblick war stets positiv und hielt sich zwischen den Grenzen +2°6 und +8°6 im Tagesmittel. In Ischl war gleichzeitig die Temperaturabweichung fast ebenso oft negativ als positiv. Diese kleine Tabelle zeigt die oben hervorgehobenen Eigenschaften der Barometermaxima auf dem Sonnblickgipfel in noch entschiedenerer Weise; es ist ja aus meinen früheren Untersuchungen bekannt, dass gerade im Centrum einer Area hohen Druckes die Lufttrockenheit und positive Temperaturanomalie in den grösseren Höhen am stärksten auftreten, während sie am Rande derselben oft nicht zu finden sind.

Diese 14 centralen Barometermaxima sind aber durchaus nicht alle, welche in der Periode October 1886 bis December 1890 während des Winterhalbjahres eingetreten sind. Es sind nur jene, welche auf dem Sonnblickgipfel ein Monatsmaximum des Luftdruckes erzeugten. Die über den Ostalpen centralen Maxima sind aber nicht immer gerade die höchsten. Auch würden, wie sich später zeigen wird, die positive Wärmeanomalie und die Lufttrockenheit einen noch höheren Grad erreichen, wenn nicht bloss

[1] Um einem Missverständniss der Bezeichnung „Dynamische Phänomene“ zu begegnen, verweisen wir schon hier auf S. 482, Anmerkung.

der Tag des Maximums allein in Rechnung gezogen worden wäre. Die Barometermaxima des Winterhalbjahres halten sich ja oft eine und selbst mehrere Wochen über den Ostalpen und es stellt sich, wie gezeigt werden wird, die höchste Temperatur und die grösste Trockenheit zumeist etwas nach dem Eintritt des Maximums ein.

Bevor wir die Barometermaxima des Winterhalbjahres verlassen, wollen wir noch die Frage beantworten: Welche Witterungsverhältnisse herrschen auf dem Sonnblick während der Monatsmaxima des Luftdruckes zu Ischl? Dass die Monatsmaxima oben und unten zumeist nicht zusammenfallen dürften, geht aus der Überlegung hervor, dass eine niedrigere Temperatur der Luftsäule die Barometermaxima in Ischl verstärkt, sie dagegen auf dem Sonnblick vermindert.

Von den 27 Monatsmaximis des Barometerstandes treten oben und unten gleichzeitig nur 7 ein (26%), nimmt man aber den Tag vorher und nachher noch hinzu, so fallen 17 zusammen, und sogar 19, wenn man das Zusammenfallen auf die gleiche Periode hohen Druckes überhaupt bezieht.

Ich habe nun die Luftdruckmaxima des Winterhalbjahres (der Periode October 1886 bis December 1890) zu Ischl mit ihren Begleiterscheinungen aufgesucht und die correspondirenden Daten für den Sonnblick zugeschrieben. Es wurde dann eine der Tabelle I entsprechende Tabelle angelegt und schliesslich die Mittelwerthe für das Winterhalbjahr genommen, auf deren Wiedergabe ich mich hier beschränke.[1]

Monatsmaxima des Luftdruckes zu Ischl.

	Luftdruck	Temperatur	Abweichung Luftdruck	Abweichung Temp.	Relat. Feucht.	Bewölkung
Ischl	732·0	— 0°2	+10·9	—0°8	89	4·7
Sonnblick	525·0	—10.4	+ 8·2	+0·9	73	3·3

Die Eigenschaften der Barometermaxima treten nun zu Ischl entschiedener hervor, auf dem Sonnblick dagegen, wie zu erwarten war, erheblich schwächer. Es ist aber gewiss sehr bemerkens-

[1] Diese Mittel sind aus 25 Daten abgeleitet, da die Monatsmaxima vom December 1886 und Februar 1888 gar keine Maxima sind, indem die Luftdruckabweichung nur 2 und $1^1/_2$ *mm* zu Ischl selbst erreichte.

werth, dass auch die den Monatsmaximis zu Ischl genau correspondirenden meteorologischen Mittelwerthe für den Sonnblickgipfel denselben Charakter haben, den wir früher im höchsten Grade in dem Centrum der Barometermaxima angetroffen haben.

Betrachten wir nun die Monatsmaxima des Barometers im Sommerhalbjahr. Tabelle I zeigt, dass im Sommerhalbjahr die oben erwähnten Begleiterscheinungen derselben auf dem Sonnblickgipfel, in den Mittelwerthen wenigstens, kaum mehr anzutreffen sind. Die positive Temperaturabweichung ist unten grösser als oben, umgekehrt verhält es sich bei der relativen Feuchtigkeit. Die mittlere Bewölkung ist oben und unten gleich, überall ziemlich gering. Die positiven Luftdruckabweichungen auf dem Sonnblickgipfel sind fast zweimal grösser als die correspondirenden zu Ischl, woraus sich ergibt, dass dieselben (der Mehrzahl nach) den grösseren Theil ihres Betrages nach ein Effect der gesteigerten Temperatur der Luftschichten unterhalb 3100 *m* sind.

Die während des Sommerhalbjahres gesteigerte Erwärmung der Niederungen und Bergabhänge ist es, welche durch die dabei ins Leben gerufenen aufsteigenden Luftströmungen den wahren Charakter der meteorologischen Erscheinungen der hohen Regionen innerhalb der Barometermaxima maskirt, wenigstens auf Berggipfeln. Die aufsteigenden Luftströmungen bedecken die Berggipfel mit Wolken, wodurch auch die Temperatur, namentlich wenn es zu Niederschlägen kommt, herabgedrückt wird.

Nimmt man von den 24 Fällen der Barometermaxima auf dem Sonnblickgipfel jene speciell heraus, bei welchen die Sonnblickisobare gleich oder höher war als die höchste Isobare der täglichen Wetterkarten (der k. k. Centralanstalt für Meteorologie), so erhält man deren 9, welche folgende Mittelwerthe liefern.

Barometermaximum an der Erdoberfläche; Sommerhalbjahr.

	Abweichung		Beob.	Relative	Bewölkung
	Luftdruck	Temp.	Temperatur	Feucht.	
Ischl	+2·7 *mm*	+4°1	18°5	71%	2·2
Sonnblick ..	+6·2	+3·9	2·4	75	2·3

Die Temperaturanomalie ist oben und unten nahe gleich. Die Luftdruckanomalie ist oben in Folge der hohen Temperatur

der Luftsäule mehr als zweimal grösser als unten, die Temperaturabnahme mit der Höhe ist nahezu die mittlere (0°61 pro 100 *m*), die relative Feuchtigkeit ist gering, namentlich oben, wo im Sommerhalbjahr das Mittel aus vier Jahren 93% beträgt,[1] der Himmel ist oben wie unten heiter. Dies sind die meteorologischen Verhältnisse im centralen Theile einer Anticyclone des Sommers.

Monatsminima des Luftdruckes auf dem Sonnblickgipfel.

In der folgenden Tabelle findet man in ganz analoger Weise, wie dies früher für die Barometermaxima geschehen ist, auch die Mittelwerthe der meteorologischen Elemente für die Monats-Minima des Luftdruckes auf dem Sonnblickgipfel zusammengestellt.

II. Monatsminima des Luftdruckes auf dem Sonnblick.

	Luftdruck		Temperatur		Relative Feuchtigkeit		Bewölkung		Abweichungen vom 30jährigen Mittel			
									Luftdruck		Temperatur	
	Sonnblick	Meeresniveau	Sonnblick	Ischl	Sonnblick	Ischl	Sonnblick	Ischl	Sonnblick	Ischl	Sonnblick	Ischl
					A. Winterhalbjahr.							
October . .	510·9	750·9	— 9°8	6°5	98	86	9·4	7·6	—10·4	—10·5	—5°3	—2°4
November	8·3	51·6	—12·0	2·4	97	86	9·6	9·6	— 9·6	—10·2	—1·9	0·4
December	6·7	52·7	—15·0	—3·3	94	88	8·8	7·0	— 9·8	—12·2	—2·2	—1·8
Jänner . . .	5·1	52·2	—14·9	—0·3	93	80	8·2	7·5	—11·0	—13·9	—1·6	1·7
Februar . .	5·5	59·1	—21·3	—4·8	95	87	7·0	6·2	—10·1	— 7·7	—8·1	—3·6
März	4·2	58·7	—22·0	—5·1	93	92	7·2	7·8	—10·6	— 5·1	—9·5	—6·2
Mittel	506·8	754·2	—15·8	—0·8	95	86	8·4	7·6	—10·2	— 9·9	—4·8	—2·0

[1] Die Mittel der absoluten und relativen Feuchtigkeit, aus der Periode October 1886 bis inclusive Februar 1891 abgeleitet, sind:

Mittlerer Dampfdruck (Millimeter) und relative Feuchtigkeit (Procent) auf dem Sonnblickgipfel, 3105 *m*.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	Sept.
Mm.	1·4	1·2	1·6	2·1	3·2	3·9	4·4	4·4	3·5
Proc.	84	84	91	95	93	93	94	93	91

	Oct.	Nov.	Dec.	Jahr
Mm.	2·5	2·0	1·4	2·6
Proc.	88	86	84	90

	Luftdruck		Temperatur		Relative Feuchtigkeit		Bewölkung		Abweichungen vom 30jährigen Mittel			
									Luftdruck		Temperatur	
	Sonnblick	Meeresniveau	Sonnblick	Ischl	Sonnblick	Ischl	Sonnblick	Ischl	Sonnblick	Ischl	Sonnblick	Ischl
					B. Sommerhalbjahr.							
April	507·4	754·0	—16°8	2°0	96	81	8·5	7·5	— 9·2	— 7·4	—7°8	—4°5
Mai	14·8	52·1	— 4·5	13·6	93	65	8·0	6·5	— 5·0	— 7·9	—0·2	1·6
Juni	18·3	55·8	— 2·6	15·0	97	76	9·5	6·8	— 4·5	— 5·8	—1·1	—0·7
Juli.....	18·2	55·1	— 1·9	15·0	99	73	9·8	6·5	— 6·2	— 6·8	—2·4	—2·0
August ..	18·0	58·4	— 4·1	11·6	99	82	9·0	8·2	— 6·6	— 4·2	—4·7	—4·6
September	16·2	57·4	— 5·0	9·6	98	89	10·0	9·8	— 7·1	— 5·9	—4·6	—4·9
Mittel ...	515·5	755·5	— 5·8	11·1	97	78	9·1	7·5	— 6·4	— 6·3	—3·5	—2·5

Die Monatsminima des Luftdruckes sind im Winter- wie im Sommerhalbjahr gleicherweise charakterisirt durch niedrige Temperatur oben wie unten (die negative Temperaturabweichung ist oben grösser als unten), grosse relative Feuchtigkeit (oben fast völlige Sättigung) der Luft und starke Bewölkung, die sich oben zur nahezu completen Bedeckung des Himmels steigert. Anders gesagt: Die Barometerminima auf dem Sonnblickgipfel treten bei jenem Witterungszustand ein, den wir kurz als „schlechtes Wetter" bezeichnen. Die niedrige Temperatur der Luftsäule bringt es mit sich, dass die negative Luftdruckanomalie oben grösser ist als unten.

Sehr bemerkenswerth ist, dass bei den Luftdruckminimis in 3000 *m* Seehöhe die Temperaturabnahme mit der Höhe im Winterhalbjahr und im Sommerhalbjahr nahezu dieselbe ist. Die Temperaturdifferenz Ischl—Sonnblick ist im Winterhalbjahr 15°0, im Sommerhalbjahr 16°9, was einer Wärmeabnahme pro 100 *m* von 0°57 und 0°64 entspricht. Während der Barometermaxima auf dem Sonnblickgipfel ist die Temperaturdifferenz Ischl—Sonnblick im Winterhalbjahr nur 8°7, im Sommerhalbjahr 16°7 (wie bei den Barometerminimis). Die Wärmeabnahme pro 100 *m* beträgt demnach im Winterhalbjahr bei den Maximis 0°33, im Sommerhalbjahr dagegen 0°63.

Dass die absoluten Luftdruckminima auf dem Sonnblickgipfel bei niedriger Temperatur auftreten, ist natürlich zum Theil ein Effect dieser niedrigen Temperatur selbst. Diese Minima fallen aber in den allermeisten Fällen zusammen mit Luftdruckminimis an der Erdoberfläche, wie ja schon die correspondirenden Luftdruckabweichungen zu Ischl in der Tabelle zeigen. Ich habe aber ausserdem die den Barometerminimis auf dem Sonnblick correspondirenden Isobaren an der Erdoberfläche (für den Sonnblick) in jedem Falle aufgesucht. Die Mittelwerthe dieser Isobaren findet man in der zweiten Columne unserer Tabelle, und diese zeigt direct, dass die absoluten Luftdruckminima auf dem Sonnblickgipfel zusammenfallen mit niedrigen Barometerständen an der Erdoberfläche. Diese Minima sind demnach nicht bloss ein Effect der niedrigen Temperatur der Luftsäule unterhalb 3000 *m*, welche dieselben begleiten.

Bemerkenswerth ist die regelmässige Zunahme der Luftdruckdifferenz Ischl—Sonnblick vom October bis März während der Barometerminima, welche in folgenden Zahlen zu Tage tritt:

Luftdruckdifferenz Ischl—Sonnblick während der Luftdruckminima an letzterer Station.

October	November	December	Jänner	Februar	März
199·8	202·3	202·8	203·0	208·3	213·1
April	**Mai**	**Juni**	**Juli**	**August**	**September**
204·5	197·1	197·1	196·7	199·5	200·0

Diese Differenzen hängen allerdings auch von den absoluten Barometerständen ab, aber nicht in dem Maasse, dass dadurch der Charakter des jährlichen Ganges merklich beeinflusst werden würde. Man sieht, dass im Allgemeinen die Zunahme des Luftgewichtes oder die Abnahme der mittleren Temperatur der 2630 *m* mächtigen Luftschichte während der Barometerminima gegen den Ausgang des Winters hin ein Maximum erreicht. Die Barometerminima auf dem Sonnblickgipfel erreichen im März ihre grösste Intensität und sind dann verbunden mit sehr niedrigen Temperaturen der Luftsäule unterhalb 3100 *m*. Es scheint mir, dass diese Thatsache für das Regime der höheren Luftschichten unserer Gegenden nicht ganz ohne Bedeutung ist.

Von den 27 Monatsminimis des Luftdruckes im Winterhalbjahr auf dem Sonnblickgipfel fielen 13, also nur die Hälfte, mit Barometerminimis an der Erdoberfläche zusammen (Sonnblickisobare $\gtrless$ als die niedrigste Isobare der täglichen Wetterkarte von Europa), in den übrigen Fällen, bis auf zwei, lag das Centrum des niedrigsten Barometerstandes in grösserer Entfernung.

In zwei Fällen aber betrug die Sonnblickisobare über 765 *mm*. Der bemerkenswertheste dieser Fälle war der vom 18. Februar 1887, wo die Sonnblickisobare sogar 771·0 *mm* betrug, und die Wetterkarte ein locales secundäres Barometermaximum über den Ostalpen verzeichnet, was allerdings ein Effect der Reduction der Barometerstände der über 400 *m* hoch gelegenen Stationen bei Temperaturen von —14 bis —23° C. ist. Das Maximum lag im nordöstlichen Russland (775) und von diesem aus erstreckte sich eine Zunge hohen Luftdruckes nach SW hin bis nach Böhmen herein (770 *mm*). Über dem Mittelmeer aber herrschte niedriger Luftdruck. Auf dem Sonnblick war die Temperatur sehr niedrig (Tagesmittel —26°7, Minimum —31°0) bei NNE_5. Die Luftdruckabweichung betrug auf dem Sonnblick —6·3 *mm*, in Ischl +1·5 *mm*. Der Sonnblick lag am östlichen Rande eines Barometermaximums im Bereiche eines starken, nach Süd gerichteten Gradienten.

Der zweite Fall war der vom 12. Februar 1890. Das Barometermaximum 775 lag über Mittelrussland und der Ostsee, der Sonnblick lag auf der Isobare 768, das Minimum 750 lag an der Westküste von Irland. Die Windrichtung auf dem Sonnblickgipfel S 5 entspricht ziemlich gut der Druckvertheilung am Meeresniveau; bemerkenswerth ist aber die dabei herrschende niedrige Temperatur (Tagesmittel —19°4, Minimum —24°) bei Schneefall. Sonst ist bei dieser Druckvertheilung die Temperatur auf dem Sonnblick relativ hoch, während sie bei niedrigem Druck im Süden, wie im vorigen Falle, in der Regel sehr tief ist. Die Luftdruckabweichung auf dem Sonnblickgipfel war bloss —2·8 *mm*, zu Ischl +0·8 *mm*.

Februar und März sind die Monate, wo eine Tendenz zu sehr niedrigen Temperaturen auf dem Sonnblickgipfel bei relativ hohem Barometerstande am Meeresniveau zu bestehen scheint.

Es ist, als wenn in diesen Monaten in den höheren Luftschichten ein nach Süd gerichteter Gradient am leichtesten sich einstellen würde. (Man sehe auch den 4. März 1888 und den 2. März 1890).

Auf die Luftdruckminima des Sommerhalbjahres näher einzugehen, liegt keine Veranlassung vor. Sie sind fast durchgängig (in 21 Fällen von 24) von Schnee und Regen begleitet, von totaler Bedeckung des Himmels und niedriger Temperatur. Nur in sechs Fällen (von 24) war die Temperatur etwas über dem Mittel,[1] in den übrigen tief unter demselben.

Wir können zunächst das Ergebniss der vorausgehenden Untersuchung kurz dahin zusammenfassen, dass die Luftdruckanomalie in 3100 *m* Seehöhe in der weitaus grössten Mehrzahl der Fälle den correspondirenden Luftdruckanomalien an der Erdoberfläche dem Sinne nach entsprechen. Von den Barometer-Maximis (oben) gilt dies fast ohne Ausnahme. Die Luftdruckanomalie ist oben stärker ausgeprägt als unten, was mit den Temperaturverhältnissen der Luftsäule während dieser Luftdruckanomalien causal zusammenhängt. Die Barometermaxima sind nämlich mit hoher Temperatur der Luftsäule (auch im Winter) verbunden, die Barometerminima mit niedriger Temperatur. Die begleitende Temperaturanomalie verstärkt daher die Luftdruckanomalie in den höheren Schichten.

II. Gang der Temperatur in 3100 *m* Seehöhe beim Vorübergang eines Barometermaximums und eines Barometerminimums daselbst.

An der Erdoberfläche bringt bekanntlich im Winter unserer Breiten der steigende Luftdruck (ein Barometermaximum) im Durchschnitt eine Temperaturdepression als Folge der Wärmeausstrahlung bei heiterem Himmel. Die Annäherung eines Barometerminimums dagegen bringt steigende Temperatur, welche dann bei wieder zunehmendem Luftdruck auf der Rückseite derselben von einer neuerdings eintretenden Temperaturdepression gefolgt wird. Im Sommerhalbjahr verhält es sich im Allgemeinen umgekehrt.

[1] Im Winterhalbjahr in acht Fällen von 27.

Es schien mir nun von Interesse, zu fragen, wie sich in einer Seehöhe von 3100 *m* der Gang des Barometers zu dem des Thermometers verhält. Zu diesem Zwecke wurden die jedem Monatsmaximum des Luftdruckes vorausgehenden und nachfolgenden zwei Tage (im Ganzen also fünf Tage) aus dem Beobachtungsjournale der Sonnblickstation mit ihren Luftdruck- und Temperaturmitteln ausgeschrieben und schliesslich die Mittelwerthe derselben für jeden Monat gebildet. In der Art sind die folgenden zwei Tabellen entstanden, welche die Antwort auf die oben gestellte Frage enthalten.

Luftdruckmaxima auf dem Sonnblickgipfel.

	Gang des Barometers 500 *mm*+					Gang des Thermometers				
Decemb.	16·6	20·3	24·6	22·1	16·4	—12·1	—12·3	— 8·8	—7·6	— 9·8
Jänner ..	23·5	27·0	28·5	26·1	22·5	— 9·4	— 9·5	— 6·7	—7·4	—10·7
Februar .	15·1	20.2	23·2	21·4	16·5	—13·0	—12·7	—10·0	—9·8	—13·3
März	13·0	19·2	22·2	21·0	16·8	—13·8	—12·2	— 9·0	—7·0	— 7·5
April ...	17·4	20·8	23·1	22·5	20·0	— 8·9	— 7·5	— 5·9	—4·9	— 5·2
Mai.....	22·6	24·9	26·0	25·0	23·0	— 4·0	— 1·7	— 1·0	—0·5	— 0·7
Juni	26·5	28·3	28·8	27·5	25·6	— 2·1	0·0	1·6	2·3	1·4
Juli.....	27·0	28·7	29·8	28·7	27·8	2·5	3·3	5·0	5·4	4·5
August .	27·9	30·0	31·1	29·2	25·9	0·0	1·6	4·2	5·2	3·5
Septemb.	27·8	29·2	30·3	28·7	26·6	— 0·6	— 1·0	0·7	1·8	1·1
October .	25·0	27·2	28·5	27·2	25·4	— 4·6	— 3·4	— 2·3	—2·4	— 4·9
Novemb.	22·4	25·0	27·0	24·9	21·9	— 7·4	— 7·5	— 5·6	—6·0	— 7·9
Winter ..	18·4	22·5	25·4	23·2	18·5	—11·5	—11·5	— 8·5	—8·3	—11·3
Frühling	17·7	21·6	23·8	22·8	19·9	— 8·9	— 7·1	— 5·3	—4·1	— 4·5
Sommer .	27·1	29·0	29·9	28·5	26·4	0·1	1·6	3·6	4·3	3·1
Herbst ..	25·1	27·1	28·6	26·9	24·6	— 4·2	— 4·0	— 2·4	—2·2	— 3·9
Jahr	22·1	25·1	26·9	25·4	22·4	— 6·1	— 5·2	— 3·1	—2·6	— 4·1

Luftdruckminima auf dem Sonnblickgipfel.

	Gang des Barometers 500 *mm*+					Gang des Thermometers				
Decemb.	12·4	9·5	6·7	10·0	13·8	—13 5	—13·9	—15·0	—16·0	—16·1
Jänner ..	11·8	9·1	5·1	6·7	11·8	— 14·0	—15·5	—14·9	—18·3	—15·6
Februar .	12·1	10·0	5·5	7·3	9·4	—15·6	—19·8	—21·3	—20·3	—17·1
März ...	11·4	8·7	6·0	9·3	15·0	—15·8	—16·3	—20·8	—19·3	—17·6
April ...	14·2	9·9	8·0	11·0	18·6	— 9·6	—11·8	—14·3	—14·4	—11·2
Mai	19·6	18·4	14·8	16·6	19·2	— 6·3	— 5·0	— 4·5	— 4·5	— 4·5
Juni .. .	22·5	20·2	18·4	20·3	22·6	— 0·6	— 1·6	— 3·3	— 4·1	— 4·0
Juli	24·1	20·3	18·2	21·3	24·0	1·7	0·8	— 2·0	— 3·1	— 2·2
August .	25·2	22·5	18·0	20·3	22·5	1·0	0·7	— 4·1	— 5·6	— 4·2
Septemb.	22·4	19·3	17·3	19·5	21·5	— 4·0	— 3·2	— 5·2	— 6·2	— 5·0
October .	15·9	11·8	10·7	14·1	18·0	— 8.1	— 7·8	— 9·8	—10·3	—10·6
Novemb.	14·1	10·8	8·3	11 2	13·8	— 5·5	— 8·2	—12·0	—12·5	—12·2
Winter ..	12·1	9·5	5·8	8·0	11·7	—14·4	—16·4	—17·1	—18·2	—16·3
Frühling	15·1	12·3	9·6	12·3	15·9	—10 6	—11·0	—13·2	—12·7	—11·1
Sommer .	23·9	21·0	18·2	20·6	23·0	0·7	0·0	— 3·1	— 4·3	— 3·5
Herbst ..	17·5	14·0	12·1	14·9	17·8	— 5·9	— 6·4	— 9·0	— 9·7	— 9·3
Jahr	17·1	14·2	11·4	14·0	17·1	— 7·5	— 8·5	—10·6	—11·2	—10·0

Wir ersehen aus diesen Tabellen erstlich, dass in allen Jahreszeiten die Temperatur mit dem Luftdruck steigt, und dass das Maximum der Temperatur einen Tag nach dem Maximum des Luftdruckes eintritt.[1] Den gleichen Barometerständen vor und nach dem Maximum entsprechen durchaus nicht gleiche Temperaturen, wie es sein müsste, wenn der Luftdruck in erster

[1] Eigenthümlich ist, dass im Winterhalbjahr öfter unmittelbar vor dem Eintritt des Barometermaximums eine kleine Temperaturdepression sich einstellt. Es zeigt sich dies auch noch etwas in den Monatsmitteln des November, December und Jänner. Ich habe keinen Grund dafür in etwaigen correspondirenden Änderungen der Windrichtung finden können.

Linie eine Function der Temperatur wäre. Einem Luftdruck von 525·1 *mm* einen Tag vor dem Maximum entspricht eine Temperatur von —5°2, dem nahe gleichen Drucke von 525·4 einen Tag nach dem Maximum dagegen eine Temperatur von —2°6.

Im Vergleich mit der Niederung ist der Gang der Temperatur im Winterhalbjahr in 3100 *m* Seehöhe der entgegengesetzte; unten sinkt die Temperatur unter dem Einflusse eines Barometermaximums, oben steigt sie.

Die zweite Tabelle zeigt uns, dass beim Herannahen eines Barometerminimums in 3100 *m* Seehöhe die Temperatur rasch sinkt und am Tage nach dem Eintritte des Barometerminimums das Temperaturminimum sich einstellt, am nächsten Tage steigt die Temperatur wieder. Dies findet gleichmässig in allen Jahreszeiten statt. Auch hier entsprechen wieder gleichen Barometerständen vor und nach dem Maximum ganz verschiedene Temperaturen, ein abermaliger Beweis dafür, dass es nicht die Temperatur selbst ist, die den Gang des Barometers bestimmt. Bei demselben Barometerstande von 514 *mm* ist die Temperatur einen Tag vor dem Minimum —8°5, am Tage nach dem Minimum —11°2, ebenso bei dem gleichen Barometerstande von 517 *mm* zwei Tage vor dem Minimum —7°5, zwei Tage nach demselben —10°0.

Im Vergleiche zur Niederung ist auch bei den Barometerminimis der Gang der Temperatur in 3100 *m*, im Winterhalbjahr wenigstens, der entgegengesetzte, oben sinkt die Temperatur beim Herannahen eines Barometerminimums, unten steigt sie bekanntlich.

Stellen wir die correspondirenden Gänge des Luftdruckes und der Temperatur im Jahresmittel in 3100 *m* Seehöhe vergleichend nebeneinander, so erhalten wir folgende Übersicht der Verhältnisse.

Correspondirender Gang des Barometers und des Thermometers auf dem Sonnblickgipfel, 3100 *m*.

A. Luftdruck.

		Abweichungen				
	Mittel	2 Tage vor	1 Tag vor	Max. oder Min.	1 Tag nach	2 Tage nach
Barometermaximum	524·4	—2·3	+0·7	+2·5	+1·0	—2·0 *mm*
Barometerminimum	514·8	+2·4	—0·6	—3·4	—0·8	+2·3

B. Temperatur (correspondirend).

		Abweichungen				
	Mittel	2 Tage vor	1 Tag vor	Max. oder Min.	1 Tag nach	2 Tage nach
Barometermaximum	—4°2	—1°9	—1°0	+1°1	+1°6	+0°1 C.
Barometerminimum	—9·6	+2·1	+1·1	—1·0	—1·6	—0.4

Der Gang des Barometers und des Thermometers zeigt eine bemerkenswerthe Symmetrie zu beiden Seiten des Maximums und Minimums.

Im Allgemeinen können wir schliesslich den Satz aufstellen, dass die dem Vorübergang eines Barometermaximums und eines Barometerminimums in 3100 *m* Seehöhe entsprechenden Temperaturänderungen im Winterhalbjahr wenigstens sich entgegengesetzt verhalten, wie die Temperaturänderungen beim Vorübergang der Luftdruckmaxima und Minima in der Niederung.

III. Temperatur bei verschiedener Bewölkung auf dem Sonnblick.

Mit dem entgegengesetzten Gange der Temperatur in 3100 *m* Seehöhe gegenüber der Niederung während des Vorüberganges der Barometermaxima im Winterhalbjahr stimmt auch die Thatsache überein, dass der Einfluss der Bewölkung auf die Temperatur auf dem Sonnblickgipfel der entgegengesetzte von dem in der Niederung ist.

Für mehrere Orte der gemässigten Zone ist schon nachgewiesen worden, dass im Winter einer Abnahme der Bewölkung auch eine Abnahme der Temperatur entspricht. Kämtz hat für Dorpat die den verschiedenen Graden der Bedeckung des Himmels entsprechenden Mitteltemperaturen berechnet. Das Ergebniss für den Winter ist folgendes:

Bewölkung	0	1	2	3	4
Temperaturabweichung	—10°5	—6°8	—3°1	+0°5	+4°4

In ähnlicher Weise fand Augustin für Prag die mittlere Wintertemperatur an ganz heiteren Tagen —6°5, an ganz trüben Tagen dagegen 0°0. Für Greenwich sind diese Temperaturen: ganz heiter 1°3, ganz trüb 4°3; für Paris: ganz heiter —0°1, ganz trüb 2°9. Mit Abnahme der Bewölkung sinkt also im Winter

unserer Breiten die Temperatur, und zwar im Inneren des Continentes viel stärker als an den Küsten. Anders in 3100 *m* Seehöhe auf dem Sonnblickgipfel. Ich habe aus den Beobachtungsjournalen von vier Jahren die während der Monate November bis März beobachteten mittleren Temperaturen und zugehörigen mittleren Bewölkungsgrade ausgeschrieben, die Temperaturen nach den Bewölkungsgraden sortirt und dann die Mittel gerechnet. Auf diese Weise erhielt ich folgende Zahlen für die Abhängigkeit der Temperatur von dem Grade der Bewölkung.

Temperatur auf dem Sonnblickgipfel bei verschiedenen Graden der Bewölkung. Mittel für November bis März.

Bewölkung ..	0	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit ...	71	61	38	24	34	38	38
Temperatur ..	—9°9	—10°8	—10°6	—12°8	—13°8	—12°8	—13°9

Bewölkung	7	8	9	10
Häufigkeit	39	71	50	140
Temperatur	—13°5	—13°1	—13°0	—13°0

Den kleinsten Bewölkungsgraden entspricht die höchste Temperatur, ganz umgekehrt wie in der Niederung. Dass die ganz heiteren und ganz trüben Tage am häufigsten sind, ist bekanntlich für den Winter überhaupt charakteristisch. Da die mittleren Bewölkungsgrade relativ selten sind, so erscheint es begründet, mehrere Stufen zusammenzufassen, um ziemlich gleichwerthige Temperaturmittel zu erhalten. Man erhält so folgende Zahlenreihe, die schon übersichtlicher ist.

Temperatur auf dem Sonnblick bei verschiedenen Bewölkungsgraden.

Bewölkung ...	0	1	2—3	4—5	6—7	8—9	10
Häufigkeit ...	71	61	62	72	77	121	140
Temperatur ..	—9°9	—10°8	—11°5	—13°3	—13°7	—13°0	—13°0

Die niedrigste Temperatur tritt bei den Bewölkungsgraden 6— 7 ein und ist um 3°8 tiefer als die höchste Temperatur, die bei ganz heiterem Himmel eintritt. Da die höchsten Bewölkungsgrade so sehr dominiren, so ist es begreiflich, dass ihre Mitteltemperatur sich nicht weit von der mittleren Temperatur der

Monate November bis März entfernen kann, welche —12°3 beträgt.

Wir haben also hier von einem ganz anderen Gesichtspunkte ausgehend abermals das Resultat erhalten, dass mit den Barometermaximis im eigentlichen Sinne (an der Erdoberfläche, die allerdings auch Maximis in 3100 *m* entsprechen) auf dem Sonnblickgipfel die höchste Temperatur eintritt. Denn dass die ganz heiteren Tage nur während der Barometermaxima auftreten, ist eine bekannte Thatsache.

Obgleich es eigentlich überflüssig scheinen mag, wollen wir doch dem Einwurfe begegnen, dass diese hohe Temperatur bei heiterem Himmel ein Effect der Sonnenstrahlung ist. Wer jemals einen Blick in die publicirten täglichen Beobachtungen auf dem Sonnblick geworfen hat, konnte sich überzeugen, wie gering die tägliche Temperaturschwankung daselbst namentlich im Winterhalbjahr auch an ganz heiteren Tagen ist. Da ich aber zu einem anderen Behufe alle Perioden von ganz heiteren Tagen (drei und darüber) auf dem Sonnblick während der Monate October bis März ausgezogen und die zugehörigen Mitteltemperaturen berechnet habe, so kann ich die mittlere tägliche Temperaturschwankung an ganz heiteren Tagen (mittlere Bewölkung 0 bis 0·5) hieher stellen.

Sonnblick.

	7^h	2^h	9^h
Temperaturgang an ganz heiteren Tagen (70 an der Zahl).	—8°6	—7°3	—8°5

Das Tagesmittel erhebt sich demnach selbst an ganz heiteren Tagen nur um 0°4 über die Temperatur um 7^h Morgens, wo (von November bis März) noch kein Einfluss der Insolation wirksam sein kann. Die hohe Temperatur an ganz heiteren Tagen auf dem Sonnblickgipfel in 3100 *m* Seehöhe ist demnach nicht anders zu erklären, als durch die dynamische Erwärmung der in den Centren der Barometermaxima langsam herabsinkenden Luftmassen, welcher Umstand zugleich die Heiterkeit des Himmels und die begleitende Trockenheit der Luft bedingt. Für die Trockenheit der Luft an diesen heiteren Tagen geben folgende Mittelzahlen einen genügenden Nachweis.

Sonnblick. Relative Feuchtigkeit.

	7h	2h	9h
Mittel von 70 ganz heiteren Tagen (October bis März)	56%	58%	58%

Perioden von mindestens drei sich folgenden ganz heiteren Tagen kommen auf dem Sonnblick im Sommerhalbjahr fast gar nicht mehr vor. Im Winterhalbjahr, October bis März, fand ich in der Zeit von October 1886 bis December 1890 folgende:

	Oct.	Nov.	Dec.	Jänner	Feb.	März
Zahl der heiteren Tage[1]	13	18	9	10	16	4
Mittl. Sonnblickisobare	772·8	776·5	770·3	777·5	771·8	768·6

Wie man sieht, treten diese Perioden heiterer Witterung innerhalb der Barometermaxima auf und sind, wie vorher gezeigt wurde, von relativ hoher Temperatur und grosser Lufttrockenheit begleitet. Die Winde sind dabei variabel und schwach.

Als Beispiel der bedeutenden Psychrometerdifferenzen, die während dieser Perioden heiterer ruhiger Witterung innerhalb der Barometermaxima auf dem Sonnblickgipfel auftreten können, will ich nur den 8. und 9. December 1888 anführen.[2] Dabei ist zu bedenken, dass in Folge der schwachen Luftbewegung das Psychrometer wahrscheinlich noch eine zu grosse Feuchtigkeit angibt.

Sonnblick, December 1888.

	Trockenes Thermometer			Feuchtes Thermometer			Luftdruck Sonnblick	Bewölkung	
Dec.	7h	2h	9h	7h	2h	9h	7h		Wind
8.	−6·2	−4·4	−3·4	−7·0	−7·8	−7·4	525·9	0·7	S 1
9.	−2·4	−3·0	−5·8	−6·6	−5·4	−7·6	525·8	0·7	WSW 1

	Dampfdruck			Relative Feuchtigkeit			Sonnblick-isobare 7h	Lage des Maximums
8.	2·2	1·3	1·2	79	40	33	774·6	Ostalpen, Ungarn
9.	1·3	2·2	1·9	33	60	65	774·2	Mittel- und Südeuropa.

[1] Es sind nur jene gezählt, welche Perioden von mindestens drei Tagen umfassen.

[2] Man vergleiche das Barometermaximum von November 1889.

Die Temperaturabweichung betrug am 8. +8°3, am 9. aber +9°3 C.

Derartige Fälle kommen in jedem Winter mehrfach vor. Sie sind eben für die Barometermaxima charakteristisch.

IV. Die Temperaturmaxima und Minima auf dem Sonnblickgipfel.

Wir stellen uns jetzt die Frage: Unter welchen allgemeinen meteorologischen Verhältnissen treten auf dem Sonnblickgipfel in 3100 *m* Seehöhe die Monatsmaxima und Minima der Temperatur ein?

Betrachten wir zunächst die Monatsmaxima der Temperatur auf dem Sonnblick. Wir haben die Beobachtungen der Jahre 1887 bis 1890 benützt. In den Monaten Februar 1887 und September 1888 traten zwei nahe gleich hohe Temperaturmaxima auf, welche beide berücksichtigt worden sind, so dass im Ganzen 50 Temperaturmaxima der nachfolgenden Untersuchung zu Grunde liegen.

Temperaturmaxima auf dem Sonnblick. Winterhalbjahr.

Monat	Mittl. Temp. Tagesm.	Mittl. Temp. Max.	Luftdruck	Bewölkung	Sonnblickisobare	Höchste Isobare der Wetterkarte
Oct. (4)	—0°1	1°8	525·1	4·0	768·6	770·0
Nov. (4)	—3·3	—2·1	524·2	2·8	769·4	774·0
Dec. (4)	—5·4	—4·5	522·0	3·7	770·4	772·0
Jän. (4)	—6·2	—4·6	527·3	3·5	778·2	775·0
Feb. (5)	—8·1	—6·9	522·4	3·2	772·1	775·0
März (4)	—4·9	—2·8	518·7	5·5	760·6	769·0

Die Temperaturmaxima des Winterhalbjahres auf dem Sonnblickgipfel treten fast durchgängig im Gefolge der Barometermaxima auf. Während 25 Maximis lag das Barometermaximum 15mal über den Ostalpen selbst, zweimal war dies am Vortage der Fall, einmal lag der Sonnblick auf einem Rücken hohen Druckes zwischen einem Maximum in SW und einem in NE. In den übrigen sieben Fällen, wo die Sonnblickisobare mehr weniger beträchtlich niedriger war als die höchste der europäischen Wetterkarte, lagen die Maxima zumeist in E oder SE und niedriger Luftdruck in W oder NW.

Die Windverhältnisse während der Temperaturmaxima zeigen nichts Charakteristisches. Es herrschten Calmen und schwache variable Winde sechsmal, NW, SW und S je viermal, W dreimal, NE zweimal, N und SE einmal. Dreimal trat das Temperaturmaximum bei starkem S und SE ein, zweimal bei heftigem NW, siebenmal schneite es.

Betrachten wir nun die Temperaturmaxima des Sommerhalbjahres.

Temperaturmaxima auf dem Sonnblick. Sommerhalbjahr.

Monat	Mittl. Temperatur Tagesm.	Max.	Luftdruck	Bewölkung	Sonnblickisobare	Höchste Isobare der Wetterkarte
April (4)	—4°4	—3°1	518·8	8·7	760·2	763·0
Mai (4)	—0·1	1·4	523·0	7·5	759·4	766·0
Juni (4)	2·9	5·4	527·8	6·5	763·3	766·0
Juli (4)	5·8	7·7	528·7	5·0	762·3	765·0
Aug. (4)	6·4	8·3	529·8	3·8	764·3	764·0
Sept. (5)	3·1	4·9	528·9	4·0	766·3	765·0

Im Sommerhalbjahre ist der Eintritt der Temperaturmaxima auf dem Sonnblickgipfel nicht mehr regelmässig mit den Barometermaximis verknüpft. Nur der August und der September stimmen mit ihrem hohen Druck (im Meeresniveau) und heiteren Himmel mit den gleichartigen Verhältnissen des Winterhalbjahres überein (dagegen zeigt der März mehr Anschluss an die Verhältnisse des Sommerhalbjahres). Von den 25 Temperaturmaximis des Sommerhalbjahres fielen 10 zusammen mit einem Barometermaximum über den Alpen, einmal lag der Sonnblick auf einem Rücken hohen Druckes und einmal war das Barometermaximum am Vortage über den Alpen gelegen. Es ist also ungefähr die Hälfte der Fälle der Temperaturmaxima, die im Sommerhalbjahr noch mit einem Barometermaximum an der Erdoberfläche zusammenfallen.

Die Häufigkeit der Windrichtungen während der Temperaturmaxima des Sommerhalbjahres war folgende: 7 SW (einmal stürmisch), 6 N (stets schwach), 5 W (einmal stürmisch), 4 Calmen und variabel, endlich SE, S und NW je einmal.

Im Allgemeinen treten die Temperaturmaxima auf dem Sonnblick auf: in der grössten Mehrzahl der Fälle innerhalb der Barometermaxima, dann auch bei einer Druckvertheilung, welche stärkere südöstliche, südliche und südwestliche Winde bewirkt, d. i. hoher Druck in SE oder S, niedriger in NW und N.

Temperaturminima auf dem Sonnblick.

Die folgende kleine Tabelle enthält die mittleren Temperaturen, Barometerstände und Bewölkung bei den Temperaturminimis des Winterhalbjahres.

Temperaturminima auf dem Sonnblick. Winterhalbjahr.

Monat	Mittl. Temperatur Tagesm.	Min.	Luftdruck	Mittl. Bewölkung	Sonnblickisobare	Höchste Isobare der Wetterkarte	Tiefste Isobare der Wetterkarte
Oct. (4)	—17·2	—20·3	517·8	4·2	770·0	772	757
Nov. (4)	—17·9	—20·2	512·7	7·8	763·4	772	758
Dec. (4)	—23·4	—27·0	510 3	5·0	767·7	770	756
Jän. (4)	—24·8	—26·8	509·8	8·7	765·4	772	754
Febr. (5)	—23·8	—27·4	509·6	8·0	767·0	773	759
März (4)	—26·6	—30·2	507·1	8·2	765·5	770	750

Die Temperaturminima des Winterhalbjahres auf dem Sonnblickgipfel treten ohne Ausnahme dann ein, wenn der Sonnblick am östlichen oder (seltener) am südlichen Rande eines Barometermaximums liegt und das Barometerminimum sich im Süden oder Südosten befindet. In den vorliegenden 25 Fällen lag das Maximum stets in N, NW oder W (zumeist in NW), das Minimum mit wenigen Ausnahmen über Italien, oder über der Adria, oder über Ungarn, wo es dann am Vortage über Italien oder der Adria gelegen war. Nur in zwei Fällen lag das Minimum der Wetterkarte in SE-Europa. Der Sonnblick kann selbst innerhalb der höchsten Isobare der Wetterkarte liegen[1] (aber das Centrum des hohen Druckes liegt dann stets in W oder NW), was fünfmal der Fall war, wenn gleichzeitig ein nahes Minimum im Süden liegt, so treten in der

[1] Die Isobaren sind daselbst nur von 5 zu 5 *mm* eingezeichnet.

Höhe und auch in der Niederung sehr tiefe Temperaturen ein. Von N nach S verlaufende Isobaren bei einem hohen Maximum im Westen und einem nahen Minimum im Süden, das ist die Druckvertheilung, die oben wie unten, namentlich gegen Ausgang des Winters, grosse Temperaturdepressionen bringt.

Die Windvertheilung und Windstärke auf dem Sonnblickgipfel stimmt mit der geschilderten Druckvertheilung. N herrschte 14mal, NE siebenmal, NW dreimal, W einmal (unter 25 Fällen), Windstille gab es nie. Stürmisch traten diese Winde zwölfmal auf. Wie ich schon anderswo bemerkt habe, weicht die Windrichtung auf dem Sonnblickgipfel meist erheblich im Sinne einer Drehung nach rechts (oft bis zu 90°) von dem Unterwind ab (z. B. unten NW oben NE). Der Himmel ist während des Eintrittes der Temperaturminima meist stark bedeckt.

Februar und März sind die Jahreszeit, wo bei der geschilderten Luftdruckvertheilung (Maximum im W, tieferes Minimum über Italien oder der Adria) die Jahresminima der Temperatur auf dem Sonnblickgipfel eintreten. Im März 1889 trat noch am 16. ein Minimum von —34° ein bei stürmischem Wind, der von NNW nach ENE drehte.

Temperaturminima des Sommerhalbjahres auf dem Sonnblickgipfel.

Monat	Mittl. Temperatur Tagesm.	Min.	Luftdruck	Bewölkung	Sonnblickisobare	Höchste Isobare der Wetterkarte	Tiefste Isobare der Wetterkarte
April (4)	—18·0	—20·0	511·1	8·2	761·9	768	752
Mai (4)	— 8·4	— 9·3	519·5	8·7	762·8	766	758
Juni (4)	— 6·5	— 8·3	522·9	9·7	767·1	770	760
Juli (4)	— 5·9	— 7·2	522·5	8·2	764·3	766	753
Aug. (4)	— 7·1	— 8·7	520·6	8·5	763'1	767	754
Sept. (4)	—10·1	—11·6	520·8	6·8	767·1	769	758

Die Verhältnisse, unter welchen im Sommerhalbjahr die Temperaturminima auf dem Sonnblickgipfel eintreten, stimmen mit jenen des Winterhalbjahres fast vollkommen überein. Das Barometerminimum lag 20mal über Italien oder der Adria, oder über Ungarn (dann am Vortag über der Adria) und viermal über SE-Europa. Das Barometermaximum lag stets in NW oder W,

zweimal in SW; in diesen letzteren Fällen lag aber das Minimum nahe im Süden der Alpen. Der Sonnblick lag mehrmals innerhalb der höchsten Isobare der Wetterkarte am Rande des Maximums, dessen Centrum in W oder NW lag. Die während des Temperaturminimums herrschenden Winde sind dieselben wie im Winterhalbjahr. Nord, meist stürmisch, herrschte 14mal, NE siebenmal, NW, W und S je einmal (in 24 Fällen). Stürmisch wehte der Wind elfmal, der Himmel ist meist ganz bedeckt und Schneefälle sind häufig (zwölfmal).

Es treten demnach die niedrigsten Temperaturen auf dem Sonnblickgipfel auch meist bei hohem Luftdruck an der Erdoberfläche auf, aber nicht im Centrum eines Barometermaximums (in welchem die Temperaturmaxima auftreten), sondern am östlichen Rande der Barometermaxima, wenn zugleich ein ziemlich nahes Barometerminimum im Süden (oder im Südosten) vorhanden ist.

Ähnliche Verhältnisse treten wohl beim Mt. Washington in Nordamerika recht häufig auf, der im Süden den warmen Golfstrom und dadurch ein grosses Druckgefälle nach Süden hat, sobald ein Barometermaximum von West herannaht. Hieraus und aus der relativ grossen Geschwindigkeit des westöstlichen Fortschreitens der Barometermaxima in dieser Gegend erklärt es sich wohl, wie Herr Hazen dazu gekommen ist, aus den Beobachtungen auf dem Mt. Washington die Temperatursteigerung im Centrum der Barometermaxima in grösseren Höhen so energisch zu bestreiten. Übrigens ist von Anderen nachgewiesen worden, dass auch auf dem Mt. Washington die Erwärmung im Centrum eines Barometermaximums geradeso eintritt, wie in den Alpen.

V. Temperatur und Luftdruck auf dem Sonnblickgipfel während der Barometerminima über Mitteleuropa und speciell über den Ostalpen. Berechnung der Temperaturabweichungen einer Luftsäule aus den Luftdruckabweichungen oben und unten.

Ich habe auf den täglichen Wetterkarten von Europa alle Barometerminima aufgesucht, welche während eines Zeitraumes von vier Jahren, October 1886 bis inclusive September 1890, in der Nähe des Sonnblick verweilten oder geradezu über

den Ostalpen selbst sich eingestellt haben. Es sind davon im Ganzen 37 zu constatiren gewesen, davon kommen 20 auf das Winterhalbjahr und 17 auf das Sommerhalbjahr. Während der vier Jahre traten aber im Sommerhalbjahr (April bis September) nur in den Monaten April und Mai Barometerminima in der Nähe des Sonnblickgipfels auf; dazu kommt noch das einzige Minimum) das vom 25. zum 26. August 1890 über die Alpen hinweggezogen ist. In den Monaten Juni, Juli, September war innerhalb der vier Jahre kein Minimum zu finden, das den hier gestellten Bedingungen mir zu entsprechen schien.

In der folgenden Liste habe ich alle diese 37 Barometerminima zusammengestellt und ganz allgemein charakterisirt. Die nächste Tabelle enthält dann die diesen Barometerminimis entsprechenden Beobachtungen des Luftdruckes der Temperatur, der Windrichtung und Geschwindigkeit auf dem Sonnblickgipfel und zu Ischl um 7^h Morgens, d. i. die Zeit, auf welche sich die Wetterkarte bezieht.

Barometerminima des Zeitraumes October 1886 bis October 1890, welche in der Nähe des Sonnblick vorübergegangen sind.

1886	October	17	Centrum bei Utrecht 731. Sonnblickisobare 742. Niederschläge über ganz Mitteleuropa ausgebreitet, auf der Nord- und Südseite der Alpen.
	December	20	Centrum bei München und Zürich 751. Sonnblickisobare 752. Niederschläge und Trübung über Centraleuropa ausgebreitet. Norddeutschland Schnee, Südseite der Alpen grosse Regenmengen, Nordseite weniger.
1887	April	1	Centrum Holland, Belgien 746. Sonnblickisobare 756. Trübung über ganz Mitteleuropa, Nord- und Südseite der Alpen; Niederschläge auf der Nordseite der Alpen, Südseite nicht; etwas Föhn.

1887	April	6	Drei Minima, Centrum 749 bei München und Paris, dann 748 bei Toulon. Central- und Südeuropa innerhalb der Isobare 755. Sonnblickisobare 749. Allgemeine Trübung, sehr starke Niederschläge auf der Südseite der Alpen; Nordseite trocken.
		7	Centrum am Nordfuss der Alpen. Genf—Salzburg 748 *mm*. Ganz Westeuropa bis etwa 15° E allgemeine Trübung, starke Niederschläge auf der Südseite der Alpen. Nordseite Föhn.
	Mai	27	Flache Depression über Centraleuropa 758 *mm*. Sonnblickisobare 757·5. Trübung und Niederschläge auf Nord- und Südseite der Alpen, im Süden.
	October	10	Centrum über Niederland und Nordwestdeutschland 742. Sonnblickisobare 748. Allgemeine Trübung. Niederschläge auf der Nord- und Südseite der Alpen, stark im Süden, Nordseite etwas Föhnwind.
	December	26	Zwei Minima über Mitteleuropa. Centrum bei München 752 und Golf von Lyon 755. Sonnblickisobare 754·5. Nordseite der Alpen Schnee, Südseite heiter, föhnig.
1888	Februar	16	Centrum über Oberitalien 750. Sonnblickisobare 754. Ganz Westeuropa innerhalb der Isobare 760. Ausgebreitete intensive Niederschläge auf der Nord- und Südseite der Alpen, starke Schneefälle. Luftdruck steigt in Nordwest- und Nordeuropa, 770 *mm*.
		17	Zwei Minima, München 752 und Golf von Genua detto. Sonnblickisobare 754. Ganz Mitteleuropa und Oberitalien innerhalb der Isobare 755. Allgemeine Trübung und Niederschläge in Nord und Süd.
		18	Ähnlich, noch grössere Ausbreitung des Gebietes der Isobare 755. Minima bei München 752 und Florenz 748. Sonnblickisobare 751·5. Niederschläge auf der Nord- und Südseite der Alpen.

1888	Februar	19	Minimum über Centraleuropa noch ausgebreiteter. Isobare 750, bedeckt ganz Frankreich, reicht nach Westrussland hinein und von der Ostsee bis Sardinien. Centren bei Paris, Karlsruhe, Hamburg, Lemberg 746 *mm*. Sonnblickisobare 749·5. Niederschläge, namentlich auf der Nordseite der Alpen.
		20	Centrum Provence 735. West- und Mitteleuropa Isobare 750. Sonnblickisobare 746·2. Nordseite der Alpen trocken, Südseite starke Niederschläge (Schnee).
		21	Minimum über den Alpenkamm nach NE fortgeschritten. Centrum über den Ostalpen. München 744, Salzburg, Chur 745 *mm*. Niederschläge (Schnee) auf der Südseite der Alpen, Nordseite trocken. Sonnblickisobare 746.
		22	Minima bei München 751 und Golf von Genua 750. Sonnblickisobare 752·5. Niederschläge auf der Südseite der Alpen, Nordseite trocken.
		23	Minima über Golf von Genua 750, Ungarn 750 und bei München 752. Sonnblickisobare 754. Schneefälle auf der Nordseite der Alpen, Südseite trocken.
	März	17	Minimum bei München 748 und bei Toulon 745. Ganz Westeuropa innerhalb der Isobare 755. Sonnblickisobare 749. Schnee und Regen auf der Nord- und Südseite der Alpen. Schnee in Lugano.
	April	20	Ausgedehntes Minimum. Centren Nizza 751, England 750. Sonnblickisobare 753·5. Starke Niederschläge auf der Nord- und Südseite der Alpen.
	Mai	29	Minimum über Centraleuropa. Centren Nordbayern und Golf von Lyon 756 und 755. Sonnblickisobare 755·5. Niederschläge auf der Nord- und Südseite der Alpen.

1888	November	2	Minimum über Frankreich, Centrum 748. Bregenz 749, Sonnblickisobare 754. Allgemeine Trübung in Westeuropa. Starke Niederschläge auf der Südseite der Alpen, Nordseite Föhn.
		3	Minimum nach E vorgerückt. Centrum nahe dem Fusse des Sonnblick 749 *mm*. Zweites Minimum (750) erscheint über dem Eingang des Canals. Starke Niederschläge auf der Nord- und Südseite der Alpen, namentlich im Süden (Lugano 102 *mm*).
1889	Februar	9	Tiefes Minimum über Dänemark, 725 *mm*. Zweites Minimum über Oberitalien 744. Hoher Druck im Westen, an der französischen Küste 760. Sonnblickisobare 746. Schneefall auf der Nordseite der Alpen, im Süden noch sonnig und mild.
		11	Minimum über Belgien, nach Südwestdeutschland sich erstreckend (743), zweites Minimum in Russland. Sonnblickisobare 748·5. Hoher Druck in SW. Regen und Schneefälle auf der Nordseite der Alpen.
	April	6	Minimum 750 *mm* über Mitteleuropa und Oberitalien. Sonnblickisobare 748·5. Etwas Regen auf der Nordseite der Alpen, starker Regen auf der Südseite.
		9	Minimum über Süddeutschland, Frankreich, Oberitalien 745 *mm*, bei Toulon 740 *mm*. Sonnblickisobare 744·5. Geringe Niederschläge. Nordschweiz Föhnwetter.
		25	Minimum über Centraleuropa 755 *mm*, ein Keil etwas höheren Luftdruckes schiebt sich von West her am Nordfusse der Alpen über Süddeutschland vor. Sonnblickisobare 753. Starke Niederschläge auf der Nord- und Südseite der Alpen (z. B. Zürich 32 Locarno 96).
	Mai	27	Minimum 755 *mm* über ganz Mitteleuropa, Centrum bei Salzburg 751·2. Niederschläge auf der Nord- und Südseite der Alpen.

1889	Mai	28	Minimum 755 *mm*, Nordseite der Alpen. Sonnblickisobare 755. Niederschläge und Trübung ziemlich allgemein.
	October	1	Minimum über Mitteleuropa 755. Centrum bei Wien 752. Sonnblickisobare 753 *mm*. Erhebliche Niederschläge auf der Nord- und Südseite der Ostalpen.
1890	März	19	Minimum über Mitteleuropa, Centrum Bayern und Salzburg 742, zweites Minimum bei den Balearen 745. Sonnblickisobare 741. Sehr starke Niederschläge auf der Südseite der Alpen, weniger auf der Nordseite.
		20	Minimum 755 über ganz West- und Südeuropa, Spanien ausgenommen. Centren über der Nordsee 742 und Mittelitalien 743. Sonnblickisobare 749·5. Starke Niederschläge auf der Südseite der Alpen, schwächere auf der Nordseite.
	Mai	2	Minimum über Bayern 755. Sonnblickisobare 755. Niederschläge auf der Südseite der Alpen. Im W trüb, in E heiter.
		8	Minimum über Mitteleuropa und Oberitalien 746—747. Sonnblickisobare 746. Niederschläge auf der Südseite und Nordseite der Alpen.
		13	Minimum über dem westlichen Norddeutschland 745 *mm*. Zweites secundäres Minimum über dem Golf von Genua 750. Sonnblickisobare 746. Starke Niederschläge auf der Südseite der Alpen, weniger auf der Nordseite.
		28	Minimum über den Süd- und Westalpen 755 *mm*. Sonnblickisobare 756 (Wien 759). Ausgebreitete starke Niederschläge über der Süd- und Nordseite der Alpen, namentlich im Süden. In den Alpen regnerisch und trüb.

1890	August	25	Minimum über Italien und Norddeutschland, von Frankreich her schiebt sich ein Keil höheren Druckes über 755 *mm* nach E nach Bayern herein. Centrum Golf von Genua 750. Sonnblickisobare 754 *mm*. Grosse Niederschläge und Gewitter auf der Nord- und Südseite der Alpen.
		26	Das Minimum ist über die Ostalpen nach NE vorgerückt und liegt jetzt über Polen 750 *mm*. Von SW her dringt höherer Luftdruck von Südfrankreich nach, 760. Sonnblickisobare 758. Sehr starke Niederschläge, zum Theil Schnee auf der Nordseite und Südseite der Alpen.

Datum	Sonnblick			Ischl		
	Luftdruck	Temperatur	Wind	Luftdruck	Temperatur	Wind
1886 October 17	504·5	— 9·4	SW 3	701·0	6·2	S 5
Decemb. 20	13·8	— 7·4	W 7	09·8	0·1	Var.
1887 April 1	09·1	—19·2	W 2	13·7	— 2·1	S 5
6	13·2	— 8·2	SW 4	09·6	6·8	S 2
7	11·8	— 8·4	SW 4	08·3	7·8	S 3
Mai 27	16·5	— 7·0	SW 3	16·5	11·3	Var.
October 10	11·1	— 5·0	SW 4	06·2	10·4	W 2
Decemb. 26	03·8	—22·4	WNW 3	11·0	— 4·4	Var.
1888 Februar 16	08·1	—10·2	S 2	10·4	— 0·2	N 2
17	06·0	—17·2	SW 2	11·4	— 0·6	C.
18	02·5	—18·2	SE 1	08·3	— 3·3	Var.
19	00·4	—21·2	S 2	07·0	— 7·7	S 1
20	04·9	—15 8	SE 3	06·3	4·6	SE 6
21	04·4	—13·8	S 2	05·1	0·0	E 1
22	05·2	—18·6	WSW 1	10·5	— 1·4	E 1
23	07·3	—17·8	SW 1	14·6	— 3·6	NE 3
März 17	07·3	—10·2	S 2	07·8	0·0	Var.
April 20	13·1	— 6·2	S 3	12·0	8·6	W 3
Mai 29	18·2	— 4·6	NNE 2	15·0	15·0	C.
Novemb. 2	13·8	— 6·6	SW 4	12·5	3·6	Var.
3	10·1	— 5·4	W 1	07·8	9·0	WNW 4

Datum		Sonnblick			Ischl		
		Luftdruck	Temperatur	Wind	Luftdruck	Temperatur	Wind
1889 Februar	9	499·5	—16·0	SW 5	702·9	— 3·6	NE 4
	11	503 0	—19·2	SW 2	05·8	— 4·6	SE 3
April	6	08·5	—11·2	SSW 4	07·1	2·4	Var.
	9	05·8	— 9·2	W 3	03·0	4·2	Var.
	25	13·8	— 6·0	WSW 3	12·0	8·2	Var.
Mai	27	17·5	— 0·2	SW 0	11·7	16·6	S 1
	28	19·5	— 0·8	ENE 1	14·9	14·4	SW 1
October	1	11·9	— 6·0	S 2	11·5	7·2	Var.
1890 März	19	05·8	— 8·2	SW 2	02·2	11 6	S 1
	20	08·6	— 9·8	ESE 2	08·6	8·0	C.
Mai	2	15·1	— 8·2	SSW 2	14·4	11·2	S 1
	8	12·4	— 3·6	S 3	05·8	14·2	C.
	13	12·7	— 4·6	S 5	06·5	17·0	S 1
	28	18·0	— 2·0	S 3	15·5	12·6	C.
August	25	18·3	2·0	SW 6	14·5	14·8	Var.
	26	14·5	— 7·8	N 5	16·4	7·6	NW

Aus den Beobachtungen auf dem Sonnblickgipfel ergibt sich zunächst, dass den Vorübergang eines Barometerminimums in der Nähe desselben fast ausschliesslich S und SW-Winde begleiteten. Die Windfrequenz während der 37 Fälle war folgende: SW 14, S 11, W 6, SE 3, E, NE und N je einmal. Die mittlere Windrichtung war also S 30° W, d. i. nahezu SSW. Stürmisch waren die Winde nur zweimal, in der Regel war die Luftbewegung mässig, wie dies wohl dem inneren Theile eines Barometerminimums entspricht.

Aus den Luftdruck- und Temperaturbeobachtungen lassen sich zunächst keine weiteren Schlüsse ziehen. Man kann nur versuchen, die Temperaturänderung mit der Höhe zwischen Ischl und Sonnblickgipfel (Höhenunterschied rund 2630 *m*) zu bestimmen. Es ergibt sich dann:

Winterhalbjahr (20 Fälle) Sonnblick —12°4, Ischl 1°6, Wärmeabnahme pro 100 *m* 0°53. Diese Wärmeabnahme ist etwas rascher als im Mittel des Winterhalbjahres überhaupt; die Temperatur ist oben wie unten niedrig.

Sommerhalbjahr (17 Fälle, fast ausschliesslich April und Mai) Sonnblick —6°2, Ischl 10°0, Wärmeabnahme pro 100 *m* 0°62. Diese Wärmeabnahme ist nahezu normal, wenn man berücksichtigt, dass sie für 7^h Morgens gilt.

Im Ganzen ist die Wärmeabnahme mit der Höhe innerhalb der Barometerminima ziemlich normal, doch etwas rascher als im Mittel.

Um aus den oben mitgetheilten Temperatur- und Luftdruckbeobachtungen weitere Schlüsse ziehen zu können, habe ich jedem Falle die Abweichung vom 30jährigen Mittel berechnet, sowohl für Luftdruck wie für die Temperatur. Diese Abweichungen lassen sich in strenger Weise zu Mitteln zusammenfassen, was mit den absoluten Werthen wegen ihrer ungleichmässigen Vertheilung über das Jahr nicht thunlich ist.

Die einzelnen Abweichungen hier mitzutheilen halte ich für unnöthig, ich muss mich mit der Anführung der wichtigsten Schlüsse begnügen, zu denen dieselben führen. Vorerst wollen wir die mittleren Werthe dieser Abweichungen kennen lernen.

Luftdruck- und Temperaturabweichungen auf dem Sonnblickgipfel und zu Ischl während der Barometerminima (an der Erdoberfläche).

	Luftdruckabweichung in Millimetern		Temperaturabweichung	
	Sonnblick	Ischl	Sonnblick	Ischl
Winterhalbjahr (20)	—10·2	—12·8	—1°7	+1°3
Sommerhalbjahr (17)	— 5·2	— 8·4	0·0	+1·1
Allgemeines Mittel (37)	— 7·9	—10·8	—0·9	+1·2

Indem wir vorläufig die Luftdruckabweichungen bei Seite lassen, können wir constatiren, dass die Barometerminima in einer Höhe von 3 *km* durchschnittlich von einer Temperaturerniedrigung begleitet sind. Während in den Centren der Barometermaxima fast ausnahmslos eine Temperaturerhöhung eintritt, bringen die Barometerminima eine, wenn auch durchschnittlich nur geringe Temperaturdepression. So weit ich sehen kann, lässt sich deshalb der Schluss nicht abweisen, dass in der Regel die Luft (sagen wir vorläufig nur in der Höhe von 3 *km*) in den

Centren der Barometerminima niedriger ist als in den Centren der Barometermaxima im Winter wie im Sommer.

Unter 37 Fällen war in 20 Fällen die Temperaturabweichung auf dem Sonnblick negativ, speciell im Winterhalbjahr unter 20 Fällen in 13 negativ. Es ist dies umso auffälliger, als die während dieser 37 Fälle herrschende Windrichtung SSW war. Ich habe schon bei einer anderen Gelegenheit gezeigt, dass in einer Höhe von 3 *km* auch kräftige, weit her kommende südliche Winde (bei andauernd hohem Druck in SE und niedrigem in NW) keine so grosse Erwärmung bringen, wie die herabsinkende Luft in den Barometermaximis.

Zu Ischl war die Temperaturabweichung nur 16 mal negativ und 21 mal positiv.

Betrachten wir nun auch die Luftdruckabweichungen oben und unten.

Da wir einen Einfluss der Luftbewegung selbst, also dynamische Einflüsse auf den Luftdruck unten und oben bei Seite lassen dürfen, umso mehr, als die Luftbewegung innerhalb der Minima im Allgemeinen nur schwach war, so besteht, wenn wir mit ΔB die Luftdruckabweichung unten und mit db jene auf dem Sonnblickgipfel bezeichnen, die Relation [1]

$$db = \Delta B \frac{b}{B}.$$

Für den Sonnblick und Ischl ist das Verhältniss $b:B = 0{\cdot}72$. (Die grössten Schwankungen dieses Verhältnisses sind: bei den Winterminimis ist dasselbe $0{\cdot}71$, bei den Sommermaximis $0{\cdot}73$.) Wenn man die Luftdruckabweichungen von Ischl mit $0{\cdot}72$ multiplicirt, so würde man die Luftdruckabweichungen auf dem Sonnblick erhalten, wenn die Temperatur der Luftsäule von der normalen nicht abweichen würde. Eine höhere Temperatur der

[1] Ändert sich die Temperatur der Luftsäule nicht, geht aber der Barometerstand B unten in $B+\Delta B$, in der Höhe b in $b+db$ über, so besteht die Gleichung (bei constanter Temperatur und Feuchtigkeit)

$$\lg\left(\frac{B}{b}\right) = \lg\left(\frac{B+\Delta B}{b+db}\right),$$

woraus sogleich auch obige Relation sich ergibt.

Luftsäule bedingt aber bei negativen Luftdruckabweichungen eine Verminderung derselben in der Höhe, und umgekehrt.

Im Mittel aller 37 Fälle ist die Luftdruckabweichung auf dem Sonnblick etwas grösser, als sie bei der mittleren Lufttemperatur sein würde, was einer geringen negativen Abweichung der Temperatur der Luftsäule während der Barometerminima entspricht. Die berechnete Abweichung ist genau $-10 \cdot 78 \times 0 \cdot 72 = 7 \cdot 76$, die beobachtete $7 \cdot 91$.

Wenn man die einzelnen Luftdruckabweichungen auf dem Sonnblick mit jenen für eine constante Temperatur vergleicht, so sind dieselben bald grösser, bald kleiner als letztere, wie dies den bald negativen, bald positiven Temperaturabweichungen der Luftsäule entspricht. Die Abweichungen erreichten bis zu 6 *mm* nach beiden Richtungen. Wir können den Versuch machen, den theoretischen Temperatureinfluss auf die Luftdruckabweichungen mit den beobachteten zu vergleichen, wobei wir die allerdings nur im Mittel vieler Fälle hinlänglich zutreffende Annahme zu Grunde legen müssen, dass die Abweichung der Temperatur der ganzen Luftsäule das Mittel ist aus der Abweichung oben und unten. Dass diese Annahme wenigstens dem Sinne nach sich nicht so weit von der Wahrheit entfernt, geht daraus hervor, dass nur in drei Fällen von 37 das Zeichen der Anomalie der Luftdruckabweichung auf dem Sonnblick mit dem Vorzeichen der derart angenommenen Temperaturabweichung nicht übereinstimmt.[1]

Legt man, um verlässlichere Resultate zu erhalten, nur die grösseren Anomalien der Luftdruckabweichungen auf dem Sonnblickgipfel der Rechnung zu Grunde, so erhält man folgende Resultate.

Die Luftdruckabweichung auf dem Sonnblick war gegenüber jener bei constanter Temperatur in 12 Fällen erheblich (Grenzen $1 \cdot 8$ und $5 \cdot 9$ *mm*) zu gross (Grenzen der Temperaturabweichungen $-1°4$ bis $-7°2$). Diese Fälle geben eine mittlere positive Anomalie der Luftdruckabweichung oben von $+3 \cdot 38$ *mm*

[1] Einmal ist die Abweichung um $0 \cdot 7$ *mm* zu gross bei einer Temperaturabweichung von $+1°3$, zweimal zu klein um $1 \cdot 4$ *mm* bei Abweichungen von $-1°7$ und $-0°1$. Hier sind jedenfalls die angenommenen Temperaturabweichungen unrichtig.

bei einer mittleren Temperaturabweichung von —3°80. Daraus würde pro Grad eine Anomalie der Luftdruckabweichung von 0·89 *mm* folgen für das Höhenintervall von 2633 *m*. Dagegen liefern 12 grössere negative Anomalien der Luftdruckabweichungen auf dem Sonnblickgipfel eine mittlere Anomalie von —2·28 *mm*, während das Mittel der entsprechenden Temperaturanomalien +3°62 war (Grenzen —0·6 und —6·0 *mm* und +1°1 und +6°5.) Hiernach entspricht 1° Temperaturanomalie einer Luftdruckanomalie von 0·63. Nimmt man das Mittel aus diesen 24 Fällen, so erhält man die empirische Relation (für constanten Druck)

$$db = 0{\cdot}76\, dt.$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit dem theoretischen Werth.

Die bekannte hypsometrische Formel gibt für constanten Druck die Gleichung

$$db = \frac{bh}{RT^2}\, dt,$$

worin b den Luftdruck der oberen Station, h die Höhe der Luftsäule, R eine Constante und T die absolute Temperatur bedeuten.

Für ganz trockene Luft ist $R = 29{\cdot}3$. Nimmt man in der bekannten genäherten Weise dadurch auf den Feuchtigkeitsgehalt der Luft Rücksicht,[1] dass man den Ausdehnungscoëfficienten der

[1] Will man den Einfluss einer Änderung der Luftfeuchtigkeit oder des mittleren Dampfdruckes e auf den Luftdruck in der Höhe h separat kennen lernen, so erhält man aus der Gleichung

$$\log b = \log B - \frac{h}{RT\left(1+\beta\frac{e}{b}\right)}$$

zunächst, wenn für $1+\beta\frac{e}{b}$ kurz $f(e)$ gesetzt wird,

$$db = \frac{hbdf(e)}{RTf(e)^2}.$$

$f(e)^2$ ist so nahe gleich 1, dass man diesen Factor weglassen darf; $df(e)$ ist $= \beta\left(\frac{de}{b} - \frac{e\,db}{b^2}\right)$. Auch hier darf fast immer $ebd:b^2$ vernachlässigt werden. Für den Sonnblick z. B. ist e (mittlerer Dampfdruck der ganzen Luft-

Luft auf 0·004 erhöht,[1] so wird $R = 32·0$ (genauer lg $R = 1·50535$) und $T_0 = 250$.

Für den uns vorliegenden Fall ist $b = 510\ mm$, $h = 2633\ m$, $t = -2°2$, somit $T = 247·8$. Durch Einführung dieser Werthe erhält man

$$db = 0·68\ dt.$$

Man sieht, dass der empirisch gefundene Werth des Coëfficienten von dt recht befriedigend mit dem theoretischen überein-

---

säule) im Sommer circa 6 *mm*, die Änderung vom Winter zum Sommer weniger als 4 *mm*; dem entspricht genähert eine Druckänderung auf dem Sonnblick aus dieser Quelle allein von circa 0·5 *mm*. Es ist daher, wenn b rund = 520 *mm* gesetzt wird, $de : b = 0·0080$, dagegen $edb : b^2 = 0·000012$, somit gegen das erste Glied völlig zu vernachlässigen. Somit dürfen wir setzen:

$$db = \frac{\beta h}{RT}\, de,$$

wo $\beta = 0·377$.

Da der Einfluss von de auf die Druckänderungen nur gering ist, so dürfen wir allgemein setzen $R = 29·3$, $T = 273$, und es wird dann, wenn h in Hektometern ausgedrückt wird,

$$db = 0·00472\ h\ de,$$

h in Hektometern.

Nehmen wir für den Sonnblick $h = 26$, so wird für den Sonnblickgipfel

$$db = 0·123\ de.$$

Eine Änderung des Dampfdruckes um 1 *mm* in einer Luftsäule von 26 *hm* Mächtigkeit bewirkt somit eine Druckänderung von etwas über 0·1 *mm* in demselben Sinne, in welchem die Änderung des Dampfdruckes erfolgt. Ich glaube nicht, dass man selbst in den Sommermonaten eine tägliche Änderung des Dampfdruckes der ganzen Luftsäule um mehr als 1 *mm* annehmen darf. Dies mag zur Beurtheilung des Einflusses der täglichen Änderungen der Luftfeuchtigkeit auf den täglichen Gang des Barometers auf dem Sonnblickgipfel dienen. Ein Millimeter Dampfdruckänderung ist noch nicht einmal 0°2 Temperaturänderung äquivalent.

[1] Dass dieser Werth in der That den Beobachtungen sehr gut entspricht, habe ich nachgewiesen in meiner Abhandlung „Zur barometrischen Höhenmessung", diese Sitzungsber., Bd. LXXIV, Juli 1876. Die etwas kleineren Werthe, die Bruhns und Jordan gefunden haben, sind aus den geringen Höhenunterschieden abgeleitet, welche die sächsischen und badischen Stationen darbieten. Ich habe aus Beobachtungen in verschiedenen Klimagebieten und aus grossen Höhenunterschieden den betreffenden Factor berechnet.

stimmt. Wenn die angenommene mittlere Temperaturabweichung der Luftsäule, die wir ja bloss aus den Abweichungen oben und unten (in einer eingeschlossenen entfernten Thalstation) bestimmt haben, statt 3·50 (Mittel von 24 Fällen) 3·93 gewesen wäre, so würden wir den theoretischen Werth des Temperatureinflusses ganz genau erhalten haben. Ob dem Umstand, dass wir aus den negativen, wie aus den positiven Temperaturanomalien gleicherweise einen etwas zu grossen Temperatureinfluss gefunden haben, eine Bedeutung beizumessen ist, lässt sich aus dem vorliegenden Materiale nicht entscheiden. Die Luftdruckabweichungen während der Barometermaxima lassen sich zu einer ähnlichen Rechnung deshalb nicht verwenden, weil die abnorme Temperaturschichtung während derselben durchaus nicht gestattet, aus den Temperaturabweichungen zu Ischl und auf dem Sonnblick auf die mittlere Temperaturabweichung der ganzen Luftsäule zu schliessen. Es würde interessant sein, mittelst eines besser geeigneten Materiales von Temperaturabweichungen den Einfluss derselben auf die Luftdruckabweichungen der oberen Station genauer zu untersuchen, und zu prüfen, wie weit die folgende Gleichung[1] mit den Beobachtungen übereinstimmt, d. h. die ganze Druckänderung oben nur durch die Temperatur- und Druckänderung unterhalb ausgedrückt werden kann.

$$db = dB\frac{b}{B} + \frac{bh}{RT^2}dt.$$

Wie wir eben gezeigt haben, scheint diese Gleichung in der That in sehr befriedigender Weise mit den Beobachtungen übereinzustimmen, wie es auch sein muss, wenn die dynamischen Druckänderungen von keinem merklichen Einfluss sind. Speciell für den Sonnblick nimmt diese Gleichung folgende Form an, wenn wir, was wohl den Verhältnissen am besten entsprechen dürfte, $h = 2600\ m$ setzen, b im Winterhalbjahr $= 516{\cdot}8\ mm$, im Sommerhalbjahr $= 522{\cdot}3$, t entsprechend $-5°2$ (oben $-11°0$, unten

[1] Man erhält dieselbe unmittelbar als Differentiale der Gleichung

$$\log b = \log B - \frac{h}{RT}.$$

+0°7) und 6°3 (oben —2°2, unten 14°9), also $T = 244 \cdot 8$ und $256 \cdot 3$. Dann wird:

$$\text{Winterhalbjahr} \ldots\ldots db = 0 \cdot 72\, dB + 0 \cdot 699\, dt$$
$$\text{Sommerhalbjahr} \ldots\ldots db = 0 \cdot 72\, dB + 0 \cdot 647\, dt.$$

Die vorstehenden Erörterungen zeigen nun auch, welchen Vortheil die Einführung der Temperatur- und Luftdruckabweichungen in die Untersuchungen über die Druckvertheilung in den höheren Niveaux gewähren. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Mittelwerthe, mittelst welcher die Abweichungen des Luftdruckes und der Temperatur oben und unten berechnet werden, sich auf die gleiche Zeitperiode beziehen. Dann kann man mittelst derselben zahlreiche Fragen, die sonst nur durch umständliche Rechnungen erledigt werden können, auf höchst einfache Weise beantworten. Ich betone dies hier besonders, weil es in neuerer Zeit üblich geworden ist, den Luftdruck- und Temperaturabweichungen fast jede Bedeutung abzusprechen, namentlich in allen Fragen der sogenannten „dynamischen Meteorologie". Das ist aber ein ganz einseitiger Standpunkt. Auch für Probleme der Physik der Atmosphäre empfiehlt sich öfter die Einführung der Abweichungen von Mittelwerthen desselben Zeitraumes.

Wenn wir z. B. die Frage zu beantworten haben: Welche mittlere Temperatur muss eine 2600 *m* mächtige Luftsäule haben, damit ein Barometermaximum im untersten Niveau von, sagen wir 10 *mm* Abweichung von dem mittleren Drucke, im obersten Niveau den Druck ungeändert lässt, so ist eine derartige Frage mit absoluten Luftdruck- und Temperaturwerthen gar nicht allgemein und überhaupt nur durch umständlichere Rechnung zu beantworten. Mit Zuhilfenahme von Abweichungen haben wir die Antwort sogleich. Ein Barometermaximum von 10 *mm* Druckabweichung unten gibt oben (im vorliegenden Falle) bei ungeänderter Temperatur eine positive Druckabweichung von $7 \cdot 2\, mm$. Damit diese verschwinde, muss die mittlere Temperatur der ganzen Luftsäule um $dt = 7 \cdot 2 : 0 \cdot 68 = 10°6$ sinken.[1]

[1] Man kann übrigens diese Abweichungen auch als Unterschiede des Luftdruckes und der mittleren Temperatur zweier Luftsäulen von gleicher Höhe auffassen, wodurch die obige Frage allgemeinere Bedeutung erlangt.

Auf Seite 372 haben wir gefunden, dass während 14 Barometermaximis, deren Centrum über den Ostalpen lag, die Luftdruckabweichung auf dem Sonnblick 11·8 *mm* betrug, zu Ischl dagegen 11·1 *mm*. Versuchen wir, aus diesen Daten die Abweichung der mittleren Temperatur der Luftsäule von 2630 *m* zu berechnen, so finden wir Folgendes: Nach der Luftdruckabweichung zu Ischl sollte jene auf dem Sonnblick $11{\cdot}1 \times 0{\cdot}72 = 7{\cdot}99$ *mm* sein. Die positive Anomalie ist demnach 3·8 *mm*. Dies gibt durch Division mit 0·68 eine positive Temperaturabweichung von 5°6. Dies stimmt ganz gut mit der beobachteten Temperaturabweichung von +6°0 auf dem Sonnblickgipfel, wenn man die gewöhnliche verticale Temperaturvertheilung während der Barometermaxima dabei berücksichtigt.

Während des grossen Barometermaximums vom November 1889 über Mitteleuropa[1] betrug während fünf Tagen, vom 19. bis 23. November die Luftdruckabweichung zu Ischl +15·3, auf dem Sonnblick +14·7. Die Abweichung bei constanter Temperatur wäre $15{\cdot}3 \times 0{\cdot}72 = 11{\cdot}0$ *mm*, die positive Anomalie der Abweichung auf dem Sonnblickgipfel war demnach 3·7 *mm*, woraus sich mit Rücksicht auf die damals herrschende Temperatur eine Abweichung der mittleren Temperatur der Luftsäule von gleichfalls +5°6 berechnet.

VI. Verticale Temperaturvertheilung und mittlere Temperatur in einer Luftsäule von 3 *km* Höhe in den Ostalpen im Winter, bei verschiedener Vertheilung des Luftdruckes über Mitteleuropa.

Zur weiteren und vollständigen Begründung jener Darlegungen über die Temperatur in den Cyclonen und Anticyclonen, die ich in meiner Abhandlung über das Barometermaximum vom November 1889 veröffentlicht habe, wird im Nachfolgenden noch ein allgemeiner Nachweis über die verticale Temperaturvertheilung in einer Luftsäule von 3 *km* Seehöhe bei den Hauptstadien der Luftdruckvertheilung über Centraleuropa im Mittel

[1] Das Luftdruckmaximum vom November 1889 in Mitteleuropa. Von J. Hann. Denkschriften der Wiener Akademie. Bd. LVII, 1890.

von drei Wintern,[1] 1887, 1888 und 1889, geliefert. Das Ergebniss ist, wie man sehen wird, eine vollständige Bestätigung der früher auf Grund einiger Specialfälle aufgestellten Sätze.

Ich entnahm aus den täglichen Wetterkarten für jeden Tag um 7^h Morgens die allgemeine Druckvertheilung über Mitteleuropa und excerpirte aus den Beobachtungsjournalen einer Reihe von Stationen die entsprechenden Tagesmittel der Temperatur.

Die Temperaturstationen wurden so gewählt, dass möglichst für jede ähnliche Höhenstufe die eine Station südlich, die andere nördlich vom Sonnblick gelegen war, und dass das Mittel aus beiden der Position des Sonnblick annähernd entsprach. Die derart benützten Stationen sind: Zell am See 766 *m*, Oberdrauburg 610 *m*, Rauris 940 *m*, Lienz 680 *m*, Haller Salzberg 1490 *m*, Stellzing 1410 *m*, Kolm 1600 *m* (dazu in manchen Fällen Schafberggipfel 1780 *m*), Schmittenhöhe 1974 *m*, Obir 2046 *m*, endlich Säntis 2500 *m* und Sonnblick 3100 *m*. Der Säntis passt allerdings wegen seiner zu westlichen Lage nicht gut in diese Stationsgruppe; da aber in den Ostalpen eine Station in dieser vortheilhaften Seehöhe (zwischen 2000 und 3100 *m*) fehlt, so zog ich es doch vor, die Säntisbeobachtungen mitzubenützen. Es ist ja auch zu berücksichtigen, dass in einer Seehöhe von 2500 *m* die Temperaturvertheilung schon eine viel gleichmässigere ist als in den tieferen Niveaux. Ich habe zudem, wie man später sehen wird, die Säntisbeobachtungen meist nur zu einer ersten Annäherungsrechnung benützt und dann das Ergebniss derselben für die Seehöhe von 2500 *m* in die definitive Rechnung eingestellt, sobald die Abweichung zwischen Beobachtung und erster Rechnung erheblich war.

Dieses Materiale von Temperaturbeobachtungen wurde dann nach den Hauptkategorien der Luftdruckvertheilung in sechs Gruppen getheilt. Die sechs Kategorien der Luftdruckvertheilung über Mitteleuropa, welche untersucht worden sind, waren: 1. Hoher Druck in West, tiefer in Ost; 2. hoher Druck im Norden,

[1] Es sind somit neun Monate in Rechnung gezogen worden. Aus Gründen, auf die hier einzugehen unnöthig, weil sie für das Ergebniss gleichgiltig sind, wurde statt des December 1886 der December 1889 genommen.

niedriger im Süden; 3. hoher Druck im Osten, tiefer im Westen, endlich 4. hoher Druck im Süden, niedriger Druck im Norden. Dazu kommt dann noch 5. hoher Druck über Mitteleuropa selbst 6. der niedrige Druck liegt über Mitteleuropa. Jene Fälle, in welchen die Druckvertheilung keiner dieser Kategorien gut entsprach, z. B. mehrere Minima oder Maxima vorhanden waren etc., wurden weggelassen. Dafür wurden, wenn ein charakteristischer Typus der Druckvertheilung schon in den letzteren Tagen des November begann oder sich in den März hinein fortsetzte, die entsprechenden Tage in die Rechnung einbezogen. Im Ganzen konnten die Beobachtungen von 260 Tagen verwendet werden.

Es wurde dann für jeden einzelnen Winter die mittlere verticale Temperaturvertheilung bei jeder der oben bezeichneten sechs Kategorien der Luftdruckvertheilung berechnet, damit man daraus leichter entnehmen könne, wie weit das allgemeine Mittel aus den drei Wintern schon als typisch für die betreffende Druckvertheilung angesehen werden darf. Die folgende Tabelle liefert in dieser Art den Nachweis dafür, dass in der That je drei zusammengehörige Reihen von Temperaturen in einer Verticalen eine ganz auffallende Übereinstimmung zeigen, so dass die Mittelwerthe eine allgemeine Giltigkeit beanspruchen dürfen.

Verticale Temperaturvertheilung in den Ostalpen bei verschiedener Vertheilung des Luftdruckes über Europa.

Winter und Zahl der Fälle	Sonnblick 3100	Säntis 2500	Obir 2046	Schmittenhöhe 1974	Kolm-Saigurn 1600	Haller Salzberg 1490	Stellzing 1410	Rauris 940	Zell a. S. 766	Lienz 680	Oberdrauburg 610
Hoher Druck im Westen.											
1887 (9)	—19°8	—12°8	—11°5	—12°9	—9°3	—8°0	—7°4	—5°9	—4°4	—6°5	—7°6
1888 (19)	—20·7	—13·1	—12·3	—13·0	—9·9	—8·3	—7·3	—5·9	—5·1	—2·9	—3·0
1889 (10)	—15·9	—10·9	— 8·0	— 8·9	—5·2	—4·2	—3·9	—1·4	—1·2	—0·7	—1·3
Mittel (38)	—18·9	—12·2	—11·0	—11·9	—8·5	—7·1	—6·5	—4·7	—3·9	—3·1	—3·6

Winter und Zahl der Fälle	Sonnblick 3100	Säntis 2500	Obir 2046	Schmittenhöhe 1974	Kolm-Saigurn 1600	Haller Salzberg 1490	Stellzing 1410	Rauris 940	Zell a. S. 766	Lienz 680	Oberdrauburg 610
Hoher Druck im Norden.											
1887 (27)	—17°2	—10°5	—12°0	—11°3	— 9°5	—8°6	—8°0	—8°4	—7°1	—6°2	—6°0
1888 (18)	—18·0	—12·2	—12·5	—12·2	— 9·8	—8·7	—8·1	—7·4	—6·8	—6·0	—5·5
1889 (22)	—18·8	—12·4	—13·1	—12·5	—10·9	—9·6	—8·1	—6·6	—7·3	—5·8	—5·6
Mittel (67)	—18·0	—11·7	—12·5	—12·0	—10·0	—9·0	—8·1	—7·5	—7·1	—6·0	—5·7
Hoher Druck im Osten.											
1887 (11)	—13·5	— 8·7	— 7·9	— 6·9	—3·9	—4·2	—5·7	—6·4	—6·7	—7·3	—6·8
1888 (4)	— 9·1	— 5·5	— 3·2	— 3·1	1·4	0·7	—0·3	—1·8	—2·1	0·8	0·5
1889 (15)	— 9·7	— 5·2	— 3·3	— 1·8	1·1	0·9	—0·5	—0·8	—2·8	—1·3	—1·4
Mittel (30)	—11·0	— 6·5	— 5·0	— 3·9	—0·7[1]	—1·0	—2·4	—3·0	—4·1	—3·3	—3·1
Hoher Druck im Süden.											
1887 (4)	—10·7	— 6·3	— 5·8	— 2·4	—1·8	—1·3	—1·8	—3·0	—5·7	—6·8	—6·3
1888 (11)	—13·3	— 8·2	— 7·0	— 6·8	—4·6	—3·3	—3·9	—3·7	—3·7	—3·3	—2·7
1889 (4)	— 8·9	— 5·6	— 3·0	— 2·5	—0·7	1·2	0·1	—1·0	—2·2	0·0	—1·8
Mittel (19)	—11·8	— 7·3	— 5·9	—5·0	—3·2	—1·9	—2·6	—3·0	—3·8	—3·4	—3·3
Barometermaximum über Mitteleuropa und den Alpen.											
1887 (32)	— 9·1	— 3·5	— 4·0	— 3·1	—1·8	—1·2	—0·6	—5·7	—7·7	—6·4	—7·4
1888 (21)	—11·8	— 5·9	— 6·8	— 5·8	—5·0	—3·0	—3·8	—6·7	—7·6	—6·5	—5·8
1889 (25)	— 9·1	— 3·7	— 3·8	— 2·5	—3·0	—0·6	—1·4	—4·9	—5·4	—4·8	—5·6
Mittel (78)	— 9·8	— 4·3	— 4·8	— 3·6	—3·1	—1·5	—1·7	—5·7	—6·9	—5·9	—6·5
Barometerminimum über Mitteleuropa und den Alpen.											
1887 (5)	—15·7	—11·2	— 8·1	— 8·6	—5·0	—5·3	—4·6	—5·8	—5·3	—6·5	—8·4
1888 (9)	—17·0	—14·3	— 9·8	—10·5	—7·4	—7·3	—5·6	—3·9	—3·6	—3·1	—3·1
1889 (14)	—18·6	—13·6	—11·2	—11·3	—8·8	—7·4	—7·3	—4·4	—5·6	—3·0	—3·2
Mittel (28)	—17·5	—13·4	—10·2	—10·6	—7·7	—7·1	—6·3	—4·5	—4·9	—3·6	—4·0

[1] Kolm-Saigurn hat bei dieser Druckvertheilung oft Föhn, also locale Erwärmung. Daher habe ich auch die Beobachtungen auf dem Schafberg benützt. Diese geben —2°0 in 1780 *m*. Reducirt auf 1600 *m* gibt dies (nach Differenz Schmittenhöhe—Schafberg) —1°1. Ich nehme daher —0°9 für 1600 *m*.

Eine übersichtlichere Darlegung der verticalen Temperaturschichtung während der verschiedenen Hauptstadien der Druckvertheilung gibt die nachfolgende kleine Tabelle.

Verticale Temperaturvertheilung in den Ostalpen bei verschiedener Vertheilung des Luftdruckes.

Ort	Höhe	Hoher Druck im				Barometer-	
		Westen	Norden	Osten	Süden	Maximum	Minimum
Sonnblick	3100	—18·9	—18·0	—11·0	—11·8	—9·8	—17·5
Säntis	2500	—12·2	—11·7	— 6·5	— 7·3	—4·3	—13·4
Obir	2046	—11·0	—12·5	— 5·0	— 5·9	—4·8	—10·2
Schmittenhöhe ...	1974	—11·9	—12·0	— 3·9	— 5·0	—3·6	—10·6
Kolm	1600	— 8·5	—10·0	— 0·9	— 3·2	—3·1	— 7·7
Haller Salzberg...	1190	— 7·1	— 9·0	— 1·0	— 1·9	—1·5	— 7·1
Stellzing	1410	— 6·5	— 8·1	— 2·4	— 2·6	—1·7	— 6·3
Rauris	940	— 4·7	— 7·5	— 3·0	— 3·0	—5·7	— 4·5
Zell am See.....	766	— 3·9	— 7·1	— 4·1	— 3·8	—6·9	— 4·9
Lienz	680	— 3·1	— 6·0	— 3·3	— 3·4	—5·9	— 3·6
Oberdrauburg	610	— 3·6	— 5·7	— 3·1	— 3·3	—6·5	— 4·0

Die niedrigste Temperatur tritt in den grössten Höhen ein, wenn das Barometermaximum im Westen liegt; wir haben das gleiche Resultat schon früher auf einem anderen Wege gefunden, als wir die allgemeinen meteorologischen Verhältnisse aufsuchten, unter welchen auf dem Sonnblickgipfel die Monatsminima der Temperatur eintreten. Liegt der hohe Druck im Norden, dann wird es in den Niederungen viel kälter, oben eher etwas wärmer. Die Temperaturabnahme mit der Höhe ist deshalb am raschesten auf der Vorderseite (Ostseite) eines Barometer-Maximums oder auf der Rückseite (Westseite) einer Area niedrigen Druckes. Dies stimmt auch sehr gut mit schon anderseits bekannten meteorologischen Thatsachen.

Liegt der hohe Druck im Osten, dann wird es namentlich in den grossen und mittleren Höhen warm, und es stellt sich in den Ostalpen eine Wärmezunahme mit der Höhe ein, von den Thälern aus bis zu Höhen von 2000 *m*. Ganz ähnlich ist die verticale Temperaturvertheilung bei hohem Druck im Süden. Die Wärmezunahme mit der Höhe bei diesen beiden Stadien der Druckvertheilung ist wohl der Hauptsache nach auf zwei

Ursachen zurückzuführen. Erstlich sind dann die Winde im Gebiete der Ostalpen schwach, in den Thälern bis zur Windstille, zweitens liegt wohl öfter ein secundäres Druckmaximum über diesem Theile der Alpen selbst, das aber zu untergeordneter Natur ist, um auf den Wetterkarten zur Darstellung zu kommen. Es ist also ein Übergang zu dem Zustande, der in der fünften Temperaturcolonne zum vollen Ausdruck kommt. Die Stationen im Norden der Alpen (Kolm, Haller Salzberg) haben übrigens bei dieser Druckvertheilung häufig auch Föhn.

Am lehrreichsten sind die beiden letzten Zahlencolumnen rechts, welche uns über die verticale Temperaturvertheilung im Gebiete der Barometermaxima und der Barometerminima unterrichten.

Keine andere Druckvertheilung bringt für die grösseren Seehöhen eine so hohe Temperatur, wie der Eintritt eines Barometermaximums. Die Zahlenwerthe unserer Tabelle beziehen sich nicht auf ausgewählte Barometermaxima, sie beruhen auf allen Fällen, 78 an der Zahl (in drei Wintern), wo der hohe Druck nach der Wetterkarte über Mitteleuropa sich lagerte. Es sind darunter zweifellos manche Fälle, welche nicht wahren Barometermaximis entsprochen haben, wodurch die Temperaturen noch eine Depression erfahren haben gegenüber jenen im wirklichen Centrum eines Barometermaximums. Ich habe deshalb noch speciell jene Barometermaxima aufgesucht, wo die Sonnblickisobare höher war als die höchste Isobare der täglichen Wetterkarte, und wo angenommen werden konnte, dass die hohen Tauern (Sonnblick) wirklich in die mittlere Area des Barometermaximums zu liegen gekommen sind. Diese Fälle (noch immer 40 an der Zahl) geben in der That eine noch beträchtlich höhere Temperatur der Luftsäule als die obigen 78 Fälle. Es ist ja zu berücksichtigen, dass an den Rändern der Barometermaxima keine hohe Temperatur mehr herrscht, namentlich am östlichen Rande derselben kann die Temperatur sogar sehr niedrig sein. Geringe Unrichtigkeiten in der Auffassung der Luftdruckvertheilung von Seite des Zeichners der täglichen Wetterkarten können daher leicht solche Fälle mit unter die wahren Barometermaxima Aufnahme finden lassen, wodurch die Temperaturen nur erniedrigt werden können.

Den Resultaten der vorstehenden Tabelle gegenüber muss man wohl jeden Zweifel darüber aufgeben, dass die mittlere Temperatur einer Luftsäule von 3 *km* Mächtigkeit im inneren Bereiche der Barometermaxima höher ist als in jenem der Barometerminima. Das Gesetz, nach welchem in beiden Fällen die Temperaturabnahme mit der Höhe erfolgt, zeigt, dass dieser Unterschied sich jedenfalls noch bis zu viel grösseren Höhen fortsetzt.

Um noch reinere Resultate bezüglich der verticalen Temperaturvertheilung in den Barometermaximis und den Barometerminimis zu erhalten, habe ich erstlich, wie schon bemerkt, zuerst jene Barometermaxima der drei Winter 1887, 1888, 1889 aufgesucht, deren Centrum mehr oder minder genau über den Ostalpen selbst lag; es ergaben sich 41 dieser Fälle, von denen ich einen der Bequemlichkeit halber weggelassen habe.

Diese Fälle sind (ich führe sie speciell an, damit man sie auf den täglichen Wetterkarten aufsuchen kann): das Barometermaximum vom 22.—31. Jänner 1887 (dasselbe kann dem von mir specieller untersuchten Barometermaximum vom November 1889 zur Seite gestellt werden); 4., 5., 6.; 23., 24. Februar und 2., 3. December desselben Jahres. 1888: Jänner 11, 20, 21, 25 December 4, 5, 6, 7, 8, 9; 14, 15, 16, 17, 18, 19. 1889: Jänner 18, 19, 28 (weggelassen), 29; December 17, 18, 19, 20. In der nachfolgenden Tabelle gebe ich die Temperaturmittel für je 10 solcher Tage mit Barometermaximis, damit man sehen könne, dass in allen Fällen auf eine seichte, kalte untere Luftschichte die mächtigen, relativ warmen Luftschichten bis zu den grössten Höhen hinauf folgen. Die erste Columne (1—10) enthält die verticale Temperaturschichtung während des Barometermaximums vom 22.—31. Jänner 1887. Der entsprechende mittlere Luftdruck im Meeresniveau ist jeder Columne unten beigegeben (den täglichen Wetterkarten entnommen).

In gleicher Weise habe ich jene Barometerminima aufgesucht, bei denen der Sonnblick innerhalb oder unmittelbar am Rande der niedrigsten Isobare der Wetterkarte zu liegen gekommen ist. Ich nenne dieselben kurz „centrale Minima“. Diese Minima wurden in zwei Gruppen getheilt, jene, welche im Winterhalbjahr eingetreten sind, und jene, welche dem Sommerhalbjahr angehören. Da aber thatsächlich nur im April und Mai solche constatirt

werden konnten, so habe ich die betreffende Columne mit Frühling überschrieben. Die benützten Fälle (als central angesehener Barometerminima) sind folgende:

1886 December 20; 1887 December 26; 1888 Februar 16, 17, 18, 21, 22; 1888 März 17 und November 3; 1890 März 19. Ferner 1887 Mai 27; 1889 April 6, 9, Mai 27 und 28; 1890 Mai 2 und 8.

Für die Gruppe I (Winterhalbjahr) war die mittlere Sonnblickisobare 750·3, die niedrigste Isobare der Wetterkarte 749·9. Mittlere Bewölkung (Tagesmittel) 8·2, Wind nur einmal NW, sonst S bis WSW, stets schwach oder mässig. In fünf Fällen Schneefall. Für die Gruppe II (Frühling) war die mittlere Sonnblickisobare 751·1, die niedrigste Isobare der täglichen Wetterkarte 753·0, mittlere Bewölkung 9·0, Wind nur S—W, schwach, dreimal fiel Schnee.

Die folgende Tabelle enthält die mittleren Temperaturen, die diesen Barometermaximis und Barometerminimis entsprechen.

Verticale Temperaturvertheilung in den Ostalpen.

Ort	Höhe in Metern	*A.* Im Inneren der Barometermaxima 40 Fälle während 3 Wintern					*B.* Im Inneren der Barometerminima. October 1886 bis September 1890	
		1 bis 10	11 bis 20	21 bis 30	31 bis 40	Mittel 40	Winterhalbjahr 10 Fälle	Frühling 7 Fälle
Sonnblick ..	3100	—6°9	—9°5	—7°5	—7°3	—7°8	—13°4	—5°1
Säntis	2500	—1·0	—3·8	—2·7	—1·7	—2·3	—10·4	—0·4
Obir	2046	—2·8	—4·1	—2·7	—2·8	—3·1	— 6·8	0·5
Schmittenh.	1974	—2·1	—3·8	—1·6	—0·6	—2·0	— 6·6	4·5
Schafberg..	1780	0·6	—2·7	—0·4	0·9	—0·4	— 5·2	4·9
Kolm	1600	0·6	—2·6	—3·1	—1·0	—1·5	— 3·3	6·5
Haller Salzb.	1490	0·0	—1·6	0·1	0·7	—0·2	— 3·5	7·8
Stellzing ...	1410	1·0	—1·1	—1·0	0·0	—0·3	— 2·4	6·0
Rauris	940	—5·7	—5·2	—5·8	—5·8	—5·6	— 0·2	10·4
Zell a. S.	766	—9·6	—6·0	—5·2	—7·4	—7·1	0·3	11·6
Lienz	680	—5·9	—3·9	—4·4	—6·9	—5·3	0·2	11·6
O.-Drauburg	610	—7·6	—4·4	—5·2	—8·0	—6·3	— 0·3	10·3
		Mittlere Sonnblickisobare					Sonnblickisobare	
Meeresniveau		777·5	777·4	774·4	775·2	776·1	750·3	751·1

Mit Hilfe der in dieser und der vorhergehenden Tabelle enthaltenen Mitteltemperaturen konnten für die Wärmeabnahme mit der Höhe Gleichungen aufgestellt werden, deren Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt worden sind. Die hiebei benützten Normalgleichungen beruhen auf den in folgender kleiner Tabelle in condensirter Form enthaltenen Werthen der relativen Seehöhen und zugehörigen Temperaturen.

	Sonnblick	Säntis	Obir und Schmittenhöhe	Kolm	Hall und Stellzing	Rauris und Lienz	Zell und Oberdrauburg	Zahl der Fälle
	26·0	20·0	15·0	11·0	9·5	3·1	1·9	
	Temperatur Celsius							
Hoher Druck in:								
West	—18·9	—13·9[1]	—11·4	— 8·5	—6·8	— 3·9	— 3·7	38
Nord	—18·0	—13·9[1]	—12·2	—10·0	—8·6	— 6·8	— 6·4	67
Ost.....	—11·0	— 6·5	— 4·4	— 0·9	—1·7	— 3·1	— 3·6	30
Süd	—11·8	— 7·3	— 5·4	— 3·2	—2·2	— 3·2	— 3·6	19
Maximum ..	— 9·8	— 4·3	— 4·2	— 3·1	—1·6	— 5·8	— 6·7	78
Minimum ...	—17·5	—13·4	—10·4	— 7·7	—6·7	— 4·0	— 4·4	28
Centrale Maxima ..	— 7·8	— 2·3	— 2·5	— 0·7	—0·2	— 5·5	— 6·7	40
Minima:								
Winter.....	—13·4	—10·4	— 6·7	— 3·6	—3·0	0·0	0·0	10
Frühling ...	— 5·1	— 0·4	2·5	6·2	6·9	11·0	11·0	7

In den folgenden Gleichungen bedeutet h' die um 500 m verminderte und in Hektometern ausgedrückte absolute Seehöhe. Es ist demnach $h' = h—5$. Die Mitteltemperaturen der Luftsäule von 500—3500 m wurden auch nach diesen Formeln berechnet. Es ist wohl zu bemerken, dass die Formeln, in welchen auch h^2 vorkommt, nicht viel über 3100 m

[1] Hier sind die für den Säntis in erster Annäherung berechneten Werthe eingesetzt.

angewendet werden dürfen, weil das Glied mit h^2 dann schon einen zu grossen Einfluss erhält und die berechneten Temperaturen viel zu niedrig ausfallen müssen. Schon die für 3500 *m* berechneten Temperaturen sind etwas zu niedrig.

Hoch in W ..... $t = -1°78 - 0·632\,h'$
Hoch in N ..... $t = -5·00 - 0·473\,h'$
Hoch in E ..... $t = -4·26 + 0·527\,h' - 0·0308\,h'^2$
Hoch in S ..... $t = -3·89 + 0·315\,h' - 0·0241\,h'^2$

Maximum ..... $t = -8°11 + 0·896\,h' - 0·0368\,h'^2$
Minimum ..... $t = -2·23 - 0·561\,h'$

Centrale:

Maxima ..... $t = -8°55 + 1·172\,h' - 0·0440\,h'^2$
Minima { Winter ..... $t = 1·91 - 0·584\,h'$
Frühling ..... $t = 13·01 - 0·681\,h'$

Berechnete Temperaturen.

h	Hoher Druck in:				Barometer-		Centrale Maxima	Centrale Minima	
	W	N	E	S	Maximum	Minimum		Winter	Frühling
500	— 1·8	— 5·0	— 4·3	— 3·9	— 8·1	— 2·2	— 8·6	1·9	13·0
1000	— 4·9	— 7·4	— 2·4	— 2·9	— 4·5	— 5·0	— 3·8	— 1·0	9·6
1500	— 8·1	— 9·7	— 2·1	— 3·1	— 3·5	— 7·8	— 1·2	— 3·9	6·2
2000	—11·3	—12·1	— 3·3	— 4·6	— 2·9	—10·6	— 0·9	— 6·8	2·8
2500	—14·4	—14·5	— 6·0	— 7·2	— 4·9	—13·5	— 2·7	— 9·8	— 0·6
3000	—17·6	—16·8	—10·3	—11·1	— 8·7	—16·2	— 6·7	—12·7	— 4·0
3500	—20·7	—19·2	—16·2	—16·1	—14·3	—19·1	—13·0	—15·6	— 7·4
Mitteltemp.	—11·3	—12·1	— 5·6	— 6·4	— 5·7	—10·6	— 4·2	—6·85	2·8

Die niedrigste Temperatur herrscht in der ganzen Luftsäule von 3 *km* Höhe, wenn der hohe Druck im Norden liegt; es ist dann zwar in den grössten Höhen etwas wärmer, aber dafür in den mittleren und untersten Schichten erheblich kälter, als wenn der hohe Druck sich im Westen befindet. Am wärmsten ist die

Luftsäule, wenn der hohe Druck sich im Osten befindet und besonders, wenn dieselbe in den Kern eines Barometermaximums zu liegen kommt.

Es ist zu bemerken, dass auch eine Gleichung mit drei Constanten nicht im Stande ist, die Temperaturänderung mit der Höhe in den Barometermaximis entsprechend zum Ausdrucke zu bringen; der schroffe Übergang von den kalten, wenig mächtigen unteren Luftschichten zu den warmen oberen Schichten, die etwa bei 1000 *m* absoluter Höhe beginnen, erscheint in den berechneten Werthen als ein allmäliger, wodurch der untere Theil der warmen Schichten zu kalt herauskommt und das Maximum der höheren Temperatur etwas höher hinauf verlegt wird, als wo es wirklich zu finden ist. Die Mitteltemperaturen aber dürften soweit richtig sein, als es die fehlenden Beobachtungen in den Schichten zwischen 900 und 1400 *m*, wo die Temperatur meist am höchsten ist, gestatten. Sie sind desshalb eher etwas zu niedrig.

Nimmt man speciell das Barometermaximum vom 22. bis 31. Jänner 1887, so erhält man folgende zusammengehörige Werthe der relativen Seehöhen und Temperaturen. Ich setze dabei $h' = h - 10$ in Hektometern, weil die warme Schichte ungefähr bei 1000 *m* Höhe beginnt.

$h' =$	4·5	7·0	10·0	15·0	21·0
$t =$	0·5	0·6	— 2·4	— 1·0	— 6·9.

Daraus erhält man die Relation

$$t = 2 \cdot 89 - 0 \cdot 412\, h'.$$

Rechnet man nach dieser Formel die mittlere Temperatur von 1000—3500 *m* und nimmt nach den Beobachtungen in dem untersten Niveau die mittlere Temperatur von 500—1000 *m* zu —4°9 an (—1°2 oben, —8°6 unten), so erhält man als mittlere Temperatur der Luftsäule von 3000 *m* Höhe zu Ende Jänner 1887 den Werth —2°7, gewiss eine ganz abnorm hohe Temperatur für diese Jahreszeit und Örtlichkeit. Im 30jährigen Mittel ist dieselbe etwa —9°2 (unten —4°6, wohl noch zu hoch genommen, oben —13°7), die Abweichung war demnach etwa +6°5.

Dies stimmt zufällig sehr gut mit der aus den Luftdruckabweichungen unten und oben berechneten Temperaturabwei-

chung. Im Meeresniveau war der mittlere Druck dieser 10 Tage 777·5, d. i. nach meinen Isobarenkarten um 11·5 *mm* zu hoch; auf dem Sonnblick war der mittlere Luftdruck 528·22, Abweichung +12·22 *mm*. Die Abweichung bei mittlerer Temperatur wäre nur $(528:777)\times 11\cdot 5 = 7\cdot 80$ *mm* gewesen, der Überschuss in Folge der höheren Temperatur war demnach +4·4 *mm*. Dies gibt durch 0·68 dividirt +6°5 als Temperaturabweichung. Diese Abweichung bezieht sich allerdings nur auf eine Luftsäule von 2630 *m* Mächtigkeit, für welche der Divisor 0·68 früher gefunden worden ist. Man kann sie aber unbedenklich auch für 3000 *m* gelten lassen, wie die folgenden aus den Beobachtungen abgeleiteten Temperaturabweichungen zeigen, welche nach oben eher eine Zunahme, als eine Abnahme der positiven Temperaturabweichungen zeigen.

Temperaturabweichungen vom 22.—31. Jänner 1887.

Sonnblick	Säntis	Schmittenhöhe, Obir	Schafberg	Kolm	Stellzing, Hall
+6°2	+7°8	+4°3	+5°7	+5°6	+3°5

Allerdings erhält man aus diesen Abweichungen kaum ein höheres Mittel als +5°8 für das Höhenintervall von 1400 bis 3500 *m*, und für die gaze Luftsäule bis zu 500 *m* noch weniger, da die untersten Schichten eine negative Temperaturabweichung hatten. Es scheint mir aber keinem Zweifel zu unterliegen, dass die Temperaturen zu Stellzing und Hall (1450 *m*) zu niedrig waren gegenüber jener der freien Atmosphäre.

Was die Temperaturen im Inneren der Barometerminima anbelangt, so erhält man stets, man mag von was immer für einem Gesichtspunkte ausgehen, durchschnittlich eine erheblich niedrigere Temperatur für dieselben als für das Innere der Barometermaxima. Ich muss daher die in meiner Abhandlung über das Barometermaximum vom November 1889 in dieser Hinsicht ausgesprochenen Ansichten in vollem Umfange aufrecht erhalten, zumal dieselben auch mit den Forderungen der Theorie über die Temperaturänderungen in aufsteigenden und niedersinkenden Luftströmen im vollkommensten Einklange stehen. Wenn bei physikalischen Untersuchungen die Beobachtungsergebnisse mit den aus allgemeinen physikalischen Gesetzen abgeleiteten

Werthen übereinstimmen, so betrachtet man dies stets als eine Bürgschaft dafür, dass die betreffende Erscheinung im vollen Umfange durch die Theorie erklärt ist. Dieses Zusammentreffen der Ergebnisse der Beobachtungen und der Theorie findet aber im vorliegenden Falle statt.

Ich will hier noch die folgende kleine Tabelle einschalten, welche mehr zufällig nebenher gewonnen worden ist und daher auch keine besondere Bedeutung beansprucht. Sie ist aus den Beobachtungen um 7^h Morgens des Jahres 1888 abgeleitet. Vollständigere Windrosen für den Sonnblickgipfel habe ich in der Meteorologischen Zeitschrift, Juliheft 1889, S. 260—261 veröffentlicht.

Temperatur um 7^h Morgens bei verschiedenen Windrichtungen auf dem Sonnblickgipfel.

Wind (Häufigkeit)	Stärke	Bewölkung	Temperatur			Temperaturabnahme mit der Höhe pro 100 *m*	
			Sonnblick	Kolm	Schafberg	Sonnbl.-Kolm	Sonnbl.-Schafberg
			A. Winterhalbjahr.				
N (38)	4·0	4·9	—13°4	—6°6	—6°6	0°45	0·52
NE (14)	4·4	5·0	—14·8	—7·5	—7·3	0·49	0·58
E (3)	3·0	4·3	—12·5	—5·8	—5·8	0·45	0·51
SE (5)	3·6	10·5	—13·1	—4·5	—6·4	0·57	0·51
S (24)	3·7	7·5	—10·6	—1·7	—3·5	0·60	0·54
SW (36)	4·1	7·1	— 9·3	—0·2	—2·1	0·61	0·54
W (21)	3·6	5·0	— 9·1	—1·5	—2·5	0·51	0·63
NW (32)	3·5	5·6	—10·4	—5·3	—5·1	0·43	0·40
Calmen (8)	0·0	5·6	— 9·6	—3·3	—2·4	0·42	0 54
			B. Sommerhalbjahr.				
N (46)	3·4	6·9	— 5·6	5·3	3·0	0·73	0·65
NE (15)	2·9	7·5	— 3·3	6·2	5·4	0·63	0·66
E (0)	—	—	—	—	—	—	—
SE (0)	—	—	—	—	—	—	—
S (21)	3·6	8·4	— 2·5	7·0	5·5	0·63	0·61
SW (49)	3·6	6·5	— 1·2	9·7	7·1	0·73	0·63
W (13)	2·8	5·8	— 2 3	8·4	5·2	0·71	0·57
NW (16)	2·9	4·3	— 4·4	5·6	2·7	0·66	0·53
Calmen (21)	0·0	3·3	— 1·1	8·2	6·8	0·62	0·60

Winter wie Sommer sind die Nord- und Südwinde die stärksten Winde und bringt der SE-Wind die grösste Trübung. N und NE im Winterhalbjahr und NW und N im Sommerhalbjahr bringen die niedrigste, der SW die höchste Temperatur, die Zahlen für die Wärmeabnahme mit der Höhe in dem Höhenintervall von circa 1700 und 3100 *m* zeigen keine charakteristische Abhängigkeit von der Windrichtung, welche sie von erheblichem Interesse machen würde. Dass im Winter bei S und SW die Temperaturabnahme zwischen Kolm und Sonnblickgipfel ein Maximum erreicht, erklärt sich dadurch, dass diese Winde, wenn sie stärker wehen, in Kolm als Föhn auftreten.

VII. Einige vorläufige Andeutungen über Beziehungen der Windrichtungen auf dem Sonnblickgipfel zu den Barometermaximis und Minimis.

Schon in meiner Abhandlung über das Barometermaximum vom November 1889 habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass die Windrichtungen auf dem Sonnblickgipfel in sehr vielen Fällen die von Cl. Ley, J. A. Broun und neuestens von Hon. Ralph Abercromby aus den Wolkenbeobachtungen abgeleitete Regel bestätigen, dass die von unten nach oben sich folgenden Windrichtungen sich wie eine Schraubenwindung drehen, und zwar von links nach rechts, wenn man dem Wind das Gesicht zukehrt. Nimmt man Unterwind, Säntis und Sonnblick, so findet man auf den täglichen Wetterkarten manche derartige Fälle. In den allermeisten Fällen aber, wo unten für die Gegend der Tauern eine entschiedene herrschende Windrichtung aus der Wetterkarte entnommen werden kann, weicht die Windrichtung auf dem Sonnblick um 45—90° von derselben im Sinne einer Rechtsdrehung (oder Linksdrehung, wenn man dem Wind den Rücken kehrt) ab.

In letzterer Zeit ist mir öfter aufgefallen, dass die Windrichtung auf dem Sonnblickgipfel zuweilen derart ist, dass sie sich wie ein Ausströmen der Luft aus einem entfernten Minimumgebiet gegen den unteren Gradienten ausnimmt, ja wie es scheint, auch gegen den Gradienten in 3100 *m*.

Bei den warmen Anticyclonen über Mitteleuropa, von denen ich einige näher untersucht habe, herrschten auf den höheren Berg-

gipfeln meist NE-liche Winde, während gleichzeitig das Minimumgebiet am Nordrande unserer Wetterkarten lag. Bei der Durchsicht der täglichen Wetterkarten der letzten Monate (Winter 1890/91) habe ich manche Fälle gefunden, in welchen der Wind auf dem Sonnblickgipfel, zuweilen auch schon auf dem Säntisgipfel (2500 *m*), gegen das Barometermaximum gerichtet war. In anderen Fällen verhält sich der Wind auf dem Sonnblickgipfel derart, als würde über dem Maximum der Wetterkarte in der Höhe von 3100 *m* schon ein Minimum sich befinden. Dieser Fall könnte in der That hie und da eintreten, ist aber höchst unwahrscheinlich, schon aus dem Grunde, weil, sobald das früher östlich gelegene Maximum nach Westen sich verlagert oder ausbreitet, die Temperatur auf den Berggipfeln steigt und beträchtlich über die normale hinausgeht. Ein warmes Barometermaximum kann aber nicht in 3100 *m* in ein Barometerminimum übergehen. In der That steigt auch das Barometer auf dem Sonnblickgipfel in diesen Fällen, statt zu sinken, wie es sonst der Fall sein müsste. Kurz, die Sache sieht so aus, als würde die Luft in dieser Höhe aus einem Barometerminimum gegen den Gradienten ausströmen, wie dies nach theoretischen Untersuchungen auch unter gewissen Verhältnissen der Fall sein kann. (Man sehe z. B. die jüngste Abhandlung des Herrn v. Bezold über Cyclonen.) Mein Zweck ist hier nur, auf derartige Beobachtungen aufmerksam zu machen, welche eine gründlichere Untersuchung verdienen. Ich führe hier einige specielle Fälle bloss aus der jüngsten Zeit an:

1890 December 28. Hoher Druck in NNE (Centrum finischer Meerbusen) 785; Minimum 750, Tyrrhenisches Meer. Windrichtung unten[1] E und NE. Temperatur: Wien —14°, Passau —11°, München —9°.

Sonnblick SSW 4 (Vorabend SW 7), —15·2. Windrichtung senkrecht auf die unteren Isobaren gegen das Maximum gerichtet. Säntis stürmischer E.

December 29. Druckvertheilung fast unverändert. Unten E, SE, an der Adria NE und N. Temperatur gesunken. Wien —18°, München —15°.

Sonnblick SW 5 (Vorabend W 5), Temperatur —14°. Wind also gleichfalls gegen das Maximum gerichtet. Säntis gleichfalls SSW 3.

---

[1] Mit „unten" ist hier kurz die Gegend auf der Nordseite des Sonnblick bezeichnet.

December 30. Maximum in NE und N ausgedehnter, 780. Minimum in SW über Spanien, 760. Winde unten, entschieden NE über ganz Mitteleuropa. Temperatur niedrig, Wien —14°, München —13°.

Sonnblick SW 3, Temperatur —13°0. Säntis W 6, Temperatur —10°4.

December 31. Druckvertheilung fast dieselbe. 780 in NE über Ostpreussen, 755 Golf von Biscaya. Winde unten E und SE. Temperatur: Wien —10°, München —13°.

Sonnblick NNW 2 (Vorabend WSW 2), —14°4. Säntis WNW 2. Temperatur —6°5 (Zürich —7°).

1891 Jänner 1. Maximum 775 über Mitteleuropa, Sonnblick aber noch am westlichen Rande desselben, niedriger Druck unter 760 in SW. Winde schwach, E. Wien —17°, München —13°.

Sonnblick NNW 2 (Vorabend N 1), —13°8, Säntis —4° NNE 1.

Jänner 2. Maximum über Ungarn 770. Sonnblick am westlichen Rande. Wien —15°, Salzburg —14°, München —13°4. Sonnblick SW 8, —11°4, Säntis WSW 2, —8°2.

Jänner 3. Maximum 770 auch nach W über Frankreich ausgebreitet, ganz Mitteleuropa umfassend. Temperatur: Wien —10°4, Ischl —13°2, München —6°5, Klagenfurth —21°0. Sonnblick NNW 1, ganz heiter, —8°6.

Die folgende kleine Tabelle gibt eine Übersicht der Änderungen des Luftdruckes und der Temperatur auf dem Sonnblickgipfel an diesen Tagen.

	December			Jänner		
1890—1891	29.	30.	31.	1.	2.	3.
Luftdruckmaximum in...	NNE	NE	NE u. N	E	E (nahe)	Central[1]
Sonnblickisobare	767	767	773	773	773	773
Sonnblick, Luftdruck ...	519	515	519	520	521	523
„ Temperatur ..	—14	—13	—14	—14	—11	—9°
„ Wind.....	SW 5	SW 3	NNW 2	NNW 2	SW 8	NNW 1

Bis zum 1. Januar liegt das Maximum in NE und E vom Sonnblick, am 2. liegt der Sonnblick schon innerhalb des westlichen Randes, am 3. im mittleren Theile desselben. Temperatur und Luftdruck steigen, zum Beweise, dass die Anticyclone, wie dies ja fast ausnahmslos der Fall ist, ein warmes Centrum hatte (Säntis 2500 *m* hat am 3. sogar —4°, dagegen Zürich —11°, Klagenfurt —21°) und sich desshalb sicherlich zu weit grösseren Höhen als 3100 *m* erstreckte.

Im Nachfolgenden stelle ich noch einige ähnliche Fälle zusammen, welche die Rechtsdrehung des Windes in 3100 *m*

[1] D. h. Sonnblick im inneren Theile des Maximums.

gegenüber dem Unterwind zeigen. Zugleich ersieht man die ausserordentlich rasche Erkaltung, die in der Höhe eintritt, sobald ein Maximum im Westen zugleich mit niedrigem Druck im Süden sich einstellt, wie ich dies ja als normales Verhalten oben nachgewiesen habe.

Jänner 10. Hoher Druck in W über Nordfrankreich, Nordwestdeutschland, England 770, tiefer in S, 760 *mm*. Winde unten NW.

Sonnblick ESE 2 (Vorabend E 2), —13°4. Säntis ENE 8, —10°6.

Jänner 11. Hoher Druck nach E vorgerückt, Isobare 775 reicht bis zu den Alpen. Tiefer Druck in S. Winde unten NW bis N. Sonnblick NNE 5, Schnee, —14°8.

Jänner 12. Situation ähnlich, unten W und NW, Sonnblick N 5.

Jänner 15. Hohes Maximum 780 *mm* erscheint bei Island, Minimum 750 über den russischen Ostseeprovinzen und im Südosten (750). Isobaren in Westeuropa verlaufen N—S. Winde unten W, NW bis N. Sonnblick NNE 2 (Vorabend NW 8), —25°2.

Jänner 16. Höchster Druck in Irland 770, tiefster in Süditalien 750. Winde NW und W. Wien —6°, Salzburg —9°, München —12°. Sonnblick NNE 5 (Vorabend N 5), —31°6.

Jänner 27 bis 30. Niedriger Druck, 745 *mm*, im Nordwesten. Hoher Druck über Mitteleuropa, höchster in Russland, 775—780. Sonnblick hat constant schwachen NW und W bei relativ hoher Temperatur —10°. Ähnlich am 31. Jänner und 1. Februar.

Februar 3. Hohes Maximum über Westfrankreich 780 *mm*. Zone hohen Druckes über Mitteleuropa bis zum schwarzen Meere. Niedriger Druck (770) im Süden und im äussersten Norden (745). Unten schwache SW-Winde. Temperatur gelinde, —2°. Sonnblick NNE 5, —17°6.

Februar 9. Maximum über Polen und Ungarn 775. Ganz Mitteleuropa 770. Winde unten NE, E, SE. Sonnblick WSW 3, heiter —15°0. Säntis SSW 8, heiter, —11°.

Februar 10 und 11. Druckvertheilung ähnlich. Hoher Druck in E tiefer in N. Sonnblick NW und ENE.

Am 12. Februar erscheint ein Maximum an der Westküste von Frankreich 775. Tiefes Minimum über der Ostsee 745, im Süden 765. Winde unten, SW vorherrschend, Sonnblick NNW 2, heiter, —13°4, Säntis WSW 8.

Februar 14. Hoher Druck über Nordfrankreich und Nordwestdeutschland bis gegen den Fuss der Alpen 780 *mm*. Minimum Südspitze Italiens 755. Sonnblick ENE 5, Schnee, —28°2. Säntis NNE 2, —20°8 (unten —5° bis —10°).

März 5. Tiefes Minimum bei Stockholm 730 *mm*. Hoher Druck im Golf von Biscaya 775. Über Nord- und Mitteldeutschland stürmische W- und SW-Winde mit Schnee, Temperatur 3—5°. Sonnblick N 5, Schnee, —13°2. Säntis WSW 6, —8°5.

März 6. Maximum nach E über Mittel- und Südfrankreich und Italien vorgerückt 770 *mm*. Tiefer Druck im Norden, 735 *mm*. Winde unten SW

stark, Temperatur gestiegen. Sonnblick N 3 (Vorabend NW 5), Schnee. —10°6, Säntis WSW 6, —5°4.

März 13. Hoher Druck in NE, 765 *mm*, tiefer in SW, 750. Winde unten schwach, unbestimmt. Sonnblick SW 3, Säntis SSW 6.

März 14. Hoher Druck in N, 770, nach W vorgerückt und näher, Minimum 750 über Oberitalien. Winde unten E und SE. Sonnblick S 3 (Vorabend SW 5), —12°8, Säntis NE 4, —8°3.

VIII. Widerlegung einiger Einwürfe gegen die Beweiskraft der Temperaturbeobachtungen auf Berggipfeln, nebst einigen allgemeinen Bemerkungen über die Cyclonen und Anticyclonen.

Die in meiner Abhandlung über das Barometermaximum vom November 1889 niedergelegten Ansichten haben in Amerika zu einer ziemlich erregten Discussion für und gegen dieselben Veranlassung gegeben, während sie in Frankreich und England, soweit ich sehen konnte, nur zustimmend aufgenommen worden sind. Namentlich haben hervorragende Forscher auf dem Gebiete der Theorie der Cyclonen, wie Blanford,[1] Mohn und Hildebrandson[2] in meinen Darlegungen der Beobachtungsergebnisse und den darauf gegründeten Schlüssen einen bedeutsamen Fortschritt in unserer Kenntniss über die wahre Natur der Barometermaxima und Barometerminima zugestanden.

Ein von mir hochverehrter amerikanischer Fachgenosse hat dagegen meine Bedenken und Einwürfe gegen die sogenannte „Convectionstheorie der Cyclonen“ in ihrer unbeschränkten Anwendung auf unsere Stürme, wie es scheint, fast als einen persönlichen Angriff aufgefasst und mit einiger Heftigkeit sich gegen dieselben ausgesprochen. Es ist mir peinlich, mich mit einem Manne in Widerspruch zu wissen, der für die neueren Fortschritte der Physik der Atmosphäre mehr geleistet hat als irgend einer der jetzt lebenden Meteorologen und Physiker, und auf den die Amerikaner mit Recht stolz sind. Dass es mir vergönnt war wenigstens eine der grundlegenden Arbeiten dieses ausgezeichneten Mannes zuerst auf unserem Continent eine

---

[1] Siehe Nature, Nov. 6, 1890, Vol. 43, pag. 15.

[2] Briefliche Mittheilungen.

weitere Verbreitung und Würdigung zu verschaffen,[1] werde ich stets als ein besonderes Glück betrachten.

Aber alle Hochachtung vor einem der hervorragendsten Begründer der neueren Meteorologie darf mich natürlich nicht abhalten, mich in Widerspruch mit einigen seiner Ansichten zu setzen, wenn neue Beobachtungsthatsachen gegen dieselbe aussagen, oder auch nur mir gegen dieselbe zu sprechen scheinen. Ich sehe mich besonders genöthigt gegenüber einigen scheinbar schwerwiegenden Einwendungen, die in einer Serie von Artikeln in der amerikanischen Wochenschrift „Science" (December 19, 1890; Jänner 2, 16, 30, 1891) gegen die Tragweite der von mir mitgetheilten Beobachtungsergebnisse vorgebracht worden sind, Stellung zu nehmen und nachzuweisen, dass diese Einwendungen gänzlich unbegründet sind. Es ist dies umso mehr nöthig, als die grosse Autorität desjenigen, der diese Einwürfe aufgestellt hat, in der That auch schon einige seiner Landsleute verleitet hat, dieselben ohne eigene Prüfung als richtig hinzunehmen.

Der wichtigste Einwurf gegen meine Darlegungen in der öfter citirten Abhandlung über das Barometermaximum vom November 1889 ist der, dass den Temperaturbeobachtungen auf Berggipfeln gar keine Beweiskraft darüber zukommt, welche Temperatur die freie Atmosphäre in gleicher Höhe hat. Namentlich soll, wenn Niederschläge gefallen sind, die Luft in der Nähe des Bodens so erheblich abgekühlt werden, dass die niedrige Temperatur, die ich in dem Barometerminimum vom 1. October 1889 gefunden habe, bloss eine auf den Beobachtungsort beschränkte Erscheinung sei, welche keine weitergehenden Schlüsse gestattet. Dasselbe wird sogar von den Temperaturen behauptet, die bei der trockenen heiteren Witterung innerhalb der Barometermaxima auf Berggipfeln beobachtet werden. Der Autor dieser Einwürfe vermeint, mit der blossen Bezeichnung „surface observations" alle unsere Temperaturbeobachtungen von vorneherein als für die Theorie gleichgiltig und bedeutungslos abfertigen zu dürfen.

Wenn das richtig wäre, so würde nicht allein auch jenen Untersuchungen, die ich in der vorliegenden Abhandlung angestellt

[1] Zeitschrift für Meteorologie, Bd. X, 1875, S. 81 etc.

habe, keinerlei Bedeutung zukommen, sondern es wäre überhaupt überflüssig, meteorologische Stationen auf Berggipfeln zu errichten, um dort Temperaturbeobachtungen anzustellen. Der Einwurf verdient desshalb eine gründliche Widerlegung.

Der Versuch, die für eine Theorie unbequemen Beobachtungsergebnisse dadurch unschädlich zu machen, dass man sie in Zweifel zieht, ist schon einmal bei Gelegenheit der Discussion über den Schweizer Föhn ohne Erfolg gemacht worden. Im vorliegenden Falle hätte man sich auch leicht überzeugen können, dass die der angenommenen Theorie widersprechenden Beobachtungen nicht einfach verworfen werden dürfen, sondern eine Beachtung sehr wohl verdient haben würden.

Dass die Lufttemperatur auf Berggipfeln, wenn Schnee oder Regen gefallen ist, merklich unter die Temperatur der freien Atmosphäre in gleicher Höhe sinkt, ist an sich im höchsten Grade unwahrscheinlich. Herrscht ein mehr oder weniger lebhafter Wind, wie dies auf Berggipfeln fast stets der Fall ist, so kann die einige hundert Quadratmeter umfassende Oberfläche des Berggipfels, der frei in die Atmosphäre aufragt, die Temperatur in der Höhe von einigen Metern über dem Boden kaum merklich beeinflussen. Die grossen Luftmengen der freien Atmosphäre, die stets erneuert mit dem Thermometer in Berührung kommen, werden demselben sicher jene Temperatur geben, die in dieser Höhe herrscht. Von den Temperaturen, die auf dem Sonnblickgipfel beobachtet werden, kann man eine Beeinflussung von Seite des Berggipfels überhaupt gar nicht annehmen. Es ist wichtig, dies zu constatiren. Der Thurm, an dessen Nordseite das Thermometer in einer Beschirmung aufgestellt ist, steht am Nordrande des Gipfels, dessen Fläche nicht grösser ist als das Haus selbst. Das Thermometer hat unter sich keinen Boden, sondern einen Abgrund von 1600 *m* Tiefe. Die Temperaturbeobachtungen auf dem Sonnblickgipfel mit der Bezeichnung „surface observations“ abzufertigen, ist desshalb gänzlich unstatthaft.

Bei Windstille fliesst bekanntlich die etwa auf der Oberfläche der Berggipfel unter die Temperatur der freien Atmosphäre abgekühlte Luft frei und rasch ab und wird durch Luft aus der freien Atmosphäre ersetzt. Also auch unter diesen

Verhältnissen kann man nicht von „surface observations“ sprechen.

Ganz unbegreiflich ist es aber, wie man die hohen Temperaturen, die auf den Berggipfeln während der Barometermaxima beobachtet werden, auch nicht gelten lassen will, weil sie auf „surface observations“ beruhen.

Etwas ruhigere Überlegung würde ja gelehrt haben, dass diese Behauptung widersinnig ist. Die Temperaturen um 7^h Morgens um die Mitte November müssen, wenn sie wirklich „Oberflächentemperaturen“ sind, niedriger ausfallen als die der freien Atmosphäre, namentlich bei der Klarheit und Trockenheit derselben, wie sie in den Barometermaximis in grossen Höhen herrscht und damals auch, wie nachgewiesen wurde, in ungewöhnlich hohem Grade geherrscht hat. Die mittlere Temperatur der freien Atmosphäre müsste also noch höher gewesen sein, als sie aus den Stationsbeobachtungen sich ergibt, was für meine Folgerungen noch günstiger ist.

Wenn sich der Autor der Artikelserie in „Science“ nicht durch Voreingenommenheit gegen alle Beobachtungsergebnisse, die der reinen Convectionstheorie unserer Stürme nicht gerade günstig sind, hätte leiten lassen, so würde er auch bemerkt haben, dass ich nicht bloss aus den Temperaturaufzeichnungen selbst, sondern auch aus den Luftdruckbeobachtungen und bekannten Höhenunterschieden einerseits die Temperatur der Luftsäule während des Barometermaximums aus dem Luftgewichte berechnet und mit den Temperaturbeobachtungen übereinstimmend gefunden, anderseits gezeigt habe, dass man aus den Abweichungen der Barometerstände vom Mittel oben und unten während des Barometerminimums vom 1. October 1889 auf das Vorhandensein negativer Temperaturabweichungen schliessen muss. Diese Schlussweise ist ganz unabhängig von einer etwaigen localen Beeinflussung der Temperaturangaben der Stationsthermometer.

Eine Berechnung der Lufttemperatur aus den Barometerständen für das Luftdruckminimum vom 1. October 1889 habe ich damals unterlassen. Ich will diese Berechnung hier nachholen. Man kann sich mit grossem Vortheile hiezu der Luftdruckabweichungen bedienen und aus denselben die Temperatur-

abweichung der Luftsäule zu berechnen. Es genügt dann nur eine genäherte Kenntniss des Höhenunterschiedes und die Barometercorrectionen braucht man gar nicht zu kennen. Ich will desshalb hier auf diesem Wege die Abweichung der Lufttemperatur in einer Luftsäule von 2630 *m* Höhe (Sonnblick—Ischl) für das Barometerminimum vom 1. October 1889 berechnen. Ich setze zu diesem Zwecke in der Gleichung:

$$db = dB\frac{b}{B} + \frac{bh}{RT^2}dt$$

die entsprechenden Werthe des 1. October für Sonnblick (3100 *m*) und Ischl (467 *m*) ein. Die Werthe *db* und *dB* nehme ich von den Mittelwerthen, welche vierjährige (1887—1890) correspondirende Beobachtungen an beiden Stationen für September und October geliefert haben; das *dt* entspricht dann der Temperaturabweichung von dem Mittel derselben vierjährigen Periode. Es war um 7^h Morgens am 1. October:

Sonnblick . . . . . $b = 511{\cdot}9,\ t = -4{\cdot}6,\ db = -10{\cdot}07\ mm$
Ischl . . . . . $b = 711{\cdot}5,\ t = \ \ 7{\cdot}2,\ db = -10{\cdot}62$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die obige Gleichung ($T_0 = 250$ genommen, wie früher) erhält man:

$$-10{\cdot}07 = -7{\cdot}64 + 0{\cdot}663\,dt,$$

somit $dt = -3°7$.

Die Temperatur der Luftsäule zwischen Ischl und Sonnblick war also 3°7 unter dem Mittel von vier Jahren, welches zu +2°0 (nach Sonnblick und Ischl allein) angenommen werden kann, die mittlere Temperatur der Luftsäule selbst war also —1°7. Die beobachteten Abweichungen sind: Sonnblick —1°4, Schafberg —3°4, Ischl —2°4 etc. Die directen Temperaturaufzeichnungen geben also noch etwas kleinere negative Abweichungen,[1] als sie aus dem Luftgewichte folgen. Für die 20 Luftdruckminima von drei Winterhalbjahren berechnet sich in ähnlicher Weise aus den Daten auf S. 33 eine mittlere Temperaturabweichung der Luft-

[1] Die in meiner früheren Abhandlung angegebenen Abweichungen sind von 30jährigen Mitteln genommen und beziehen sich auf das Tagesmittel des 1. October.

säule Ischl—Sonnblick (2630 *m*) von —1°4 C. ($dB = -12 \cdot 8$, daraus db berechnet —9·22 auf dem Sonnblick, beobachtet 10·20. Die Differenz 0·98 : 0·699 gibt 1·4).

Diese Ausführungen und Nachweise dürften genügen, um die Behauptung zu widerlegen, dass die Temperaturbeobachtungen auf Berggipfeln zur Beurtheilung der Lufttemperaturen in gleicher Höhe ganz ungeeignet sind.[1] Sie eignen sich in der That sehr wohl zu einer Prüfung der verticalen Temperaturvertheilung in den Cyclonen und Anticyclonen des Winterhalbjahres.

Die Barometermaxima oder Anticyclonen. Aus den Artikeln in „Science" ist zu ersehen, dass den amerikanischen Meteorologen die zahlreichen Untersuchungen, durch welche die hohe Lufttemperatur im inneren Theile der Anticyclonen über allen Zweifel festgestellt worden ist, unbekannt geblieben oder von ihnen nicht beachtet worden sind.[2] Sonst hätte die Einwendung nicht gemacht werden können, dass die Temperaturerscheinungen in dem Barometermaximum vom November 1889 abnorm waren und als exceptionelle betrachtet werden müssten. In der vorliegenden Abhandlung habe ich neuerdings nachgewiesen, dass alle Luftdruckmaxima von hoher Temperatur in den höheren Schichten der Atmosphäre begleitet sind, und dass diese Erscheinung eine ganz normale und sehr häufig wiederkehrende ist. Ich habe übrigens früher schon auch für den Pic du Midi in Südfrankreich nachgewiesen, dass die höchsten Temperaturen auch dort in den Barometermaximis auftreten.[3] Ballonfahrten, die in den letzten Wintern theils von Berlin, theils von München aus während einer anticyclonalen Luftdruckvertheilung unternommen

[1] Dass im Sommerhalbjahr die Temperaturangaben auf dem Schafberggipfel, Schmittenhöhe, Obir etc. höher sein können als die der freien Atmosphäre, wird damit nicht bestritten, es handelt sich ja hier nur um Temperaturen, auf welche die Insolation keinen Einfluss haben konnte. Auf dem Sonnblickgipfel ist aber selbst im Sommer kein Einfluss der Insolation anzunehmen.

[2] Eine Ausnahme machen Herr Wm. Davis und Herr R. Dewey (Cambridge Mass.); auf den Artikel des letzteren in American Met. Journal, Vol. III, p. 25, wurde ich erst wieder durch Herrn Helm-Clayton aufmerksam gemacht.

[3] Meteorolog. Zeitschrift, Bd. XXV (1890), S. 337.

worden sind, haben dessgleichen den Nachweis geliefert, dass bei dieser Druckvertheilung die Temperatur an der Erdoberfläche niedriger ist als in grösseren Höhen, und dass die höheren Schichten der Atmosphäre dann eine relativ hohe Temperatur haben, in völliger Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Beobachtungen auf den Berggipfeln. Anderseits stehen auch die Ergebnisse der bekannten Ballonfahrt von Barral und Bixio am 27. Juli 1850 in Übereinstimmung mit der aus den Beobachtungen auf Berggipfeln folgenden niedrigen Temperatur im Inneren der Barometerminima. Bei dieser Fahrt, die bei niedrigem Barometerstande kurz nach einem längeren heftigen Platzregen angetreten wurde, fand man (um $4^h\ 50^m$ *p. m.*) in einer Höhe von 7000 *m* (unterhalb der oberen Wolkengrenze) eine Temperatur —39°7 C., die niedrigste, die je in den höheren Schichten der freien Atmosphäre bisher angetroffen worden ist.[1]

---

[1] Folgende erst kürzlich publicirte Ergebnisse von Ballonfahrten mögen hier Platz finden.

I. Fahrt des Ballon „München" am 11. December 1890. Bayern lag damals am südwestlichen Rande eines im Norden gelegenen Barometermaximums von 770 *mm*. Das Centrum dieses Maximums lag über dem südlichen Theile der Ostsee. Isobare der oberbayerischen Ebene zwischen 768 und 770 *mm*. Unten schwache Ostwinde. Temperatur: Wien —5°, München —9°, Zürich —7° um 7^h Morgens. Die Temperaturzunahme mit der Höhe, welche im Ballon constatirt werden konnte, oberhalb einer über 700 *m* mächtigen Nebelschichte, war sehr auffallend. Die Fahrt des Ballons dauerte von $11^h\ 20^m$ *a.m.* (Aufstieg) bis $2^h\ 45^m$ *p. m.* Die Temperaturen (mit Assmann's Aspirationsthermometer gemessen) und relativen Höhen über München (520 *m*; die Seehöhen sind demnach um soviel grösser) waren:

Temperatur in der relativen Höhe von:									
400	720	800	860	960	1170	1250	1320	1450	1475 *m*
—6°0	—6°5	+1°6	+3°2	+3°0	—1°5	+0°4	+1°0	+0°4	+0°2 C.

Beim Sinken wurde in 1340 *m* 0°0, in 1140 *m* —0°5 beobachtet, dann bewegte sich der Ballon auf den Wolken zwischen 800 und 700 *m*. Die mittlere Temperatur in einer mittleren Seehöhe von 750 *m* war —7°5. Das Wolkenmeer dehnte sich nach allen Richtungen aus, oben war die Luft klar, der Himmel tiefblau; der Ballon flog in westlicher Richtung. (Zeitschrift für Luftschifffahrt, X. Jahrg., 1891, S. 34.)

Auf die bei einer Ballonfahrt von Berlin aus am 19. December 1888 innerhalb eines Barometermaximums beobachtete rasche Temperaturzunahme mit der Höhe hat schon v. Bezold aufmerksam gemacht. Die

Diesen unbestreitbaren Beobachtungsergebnissen gegenüber ist nicht wohl einzusehen, wie noch der Standpunkt festgehalten werden kann, dass die niedrige Temperatur der oberen Luftschichten die Ursache des Herabsinkens derselben in den Barometermaximis ist, wie dies in „Science" (Vol. XVII, p. 38) geschieht. Mir scheint diese Erklärung überhaupt physikalisch unstatthaft, weil herabsinkende Luft sich zu rasch erwärmt. Wenn die Temperaturabweichung in 3100 *m* noch +8° ist, so muss sich die Erwärmung sicherlich bis zu 5000 oder 6000 *m* erstrecken, da an einen schroffen Übergang zu relativ kalten Luftschichten nach oben nicht gedacht werden kann, namentlich nicht, wenn dieselben in herabsinkender Bewegung begriffen sind. Wie soll eine vielleicht 5000 *m* und darüber mächtige, ausgedehnte, abnorm warme Luftschichte durch ihr specifisches Gewicht herabsinken? Oder wer

---

Temperaturzunahme betrug 8° pro 1000 *m*. Die näheren Details sind noch nicht veröffentlicht.

II. In dem mir eben zugekommenen Februarheft 1891 des American Meteorological Journal sind die Ergebnisse von vier Ballonfahrten aus dem Jahre 1885, im Dienste des „Signal Service" von Philadelphia aus unternommen, publicirt. Die erste Fahrt am 19. Jänner während eines Barometermaximums ergab in den unteren Schichten bis 3300 Feet innerhalb der NW-Strömung eine Temperaturabnahme von 0°40 F. pro 100 Feet, dann eine Temperaturzunahme von 0°36 bis 4600 Feet. Bei der zweiten Fahrt am 13. März hatte sich ein Maximum aus NW nach S hin verlagert, begleitet von einer Temperaturdepression. Die Temperatur nahm zuerst ab bis zur Höhe von 2400 Feet um 0°41 F. pro 100 Feet, dann bis 4350 Feet zu, und zwar um 0°44 F. pro 100 Feet. Bei der dritten Fahrt am 27. März lag ein Minimum über dem Thal des Lorenzstromes, Wind SW leicht, Regen fiel zu Philadelphia Nachmittags, heftiger Abends. Temperaturabnahme bis 6200 Feet im Verhältniss von 0°30 F. pro 100 Feet. Bei der vierten Fahrt am 16. April lag am Vortage ein Minimum über Kansas und Missouri; die Witterung zu Philadelphia war trüb und in der Nacht fiel Regen, doch hatte sich das Wetter ausgeheitert bei der Auffahrt. Temperaturabnahme 0°47 F. pro 100 Feet.

Also auch diese Ballonfahrten in Amerika ergaben im Mittel eine nach oben stationäre Temperatur bei hohem Luftdruck (wie schon der Wind unten zeigt, erfolgten diese Fahrten nicht im Kern des Maximums selbst, sondern an dessen Rande), dagegen fast gleichförmig und rasch abnehmende Temperatur im Gebiete eines niedrigen Luftdruckes. Die Temperaturabnahme war hier 0°70 C. pro 100 *m*. Dies stimmt vollständig mit den Beobachtungsergebnissen an unseren Gebirgsstationen.

will etwa die absurde Behauptung aufstellen, dass in der Umgebung dieser, nach den Beobachtungen vom Pic du Midi bis zur Schneekoppe reichenden, also in horizontaler Richtung sich über 1500 *km* erstreckenden warmen Luftschichte es noch wärmer gewesen sei! Zudem verbieten dies die Beobachtungen direct, welche nachweisen, dass es vor und nach dem Vorübergange eines Barometermaximums kälter ist als innerhalb desselben.

Wenn der Autor des Artikels in „Science" fragt, wie man denn anders (als durch das specifische Gewicht der Luftmassen) den höheren Druck und das Herabsteigen der Luft erklären könne, so müssen wir zunächst antworten, dass in den Naturwissenschaften in erster Linie die Thatsachen stehen, und dass die Theorie denselben angepasst werden muss, nicht umgekehrt. Namentlich dürfen nicht wohl constatirte Thatsachen desshalb bezweifelt und, wie es an der citirten Stelle geschieht, einfach verworfen werden, weil sie einer deductiv abgeleiteten Theorie widersprechen. Wenn ein solcher Vorgang Platz greifen würde, so würde bald aller Fortschritt in der Erkenntniss der Naturerscheinungen zum Stillstande kommen und eine starre Dogmatik an die Stelle der in fortschreitender Entwicklung begriffenen Wissenschaft treten.

Es ist wohl keine sachliche und wissenschaftliche Kritik mehr, sondern eine zu Tage liegende Entstellung des Sachverhaltes, wenn der Autor meinen Nachweis von der hohen Temperatur der Luft in dem Barometermaximum vom November 1889 als „auf einigen wenigen Beobachtungen an der Erdoberfläche über einem sehr beschränkten Raum" (a few surface observations merely in a very limited region) beruhend und demgemäss als ohne Bedeutung hinstellt. Hätte der Autor meine Abhandlung eingesehen, was doch zu einem Urtheil über dieselbe nothwendig erscheinen dürfte, so würde er gefunden haben, dass die Area, für welche ich sehr zahlreiche Beobachtungen aus allen Niveaus zwischen 400—3100 *m* mittheile, sich vom Pic du Midi bis zur Schneekoppe und von dieser bis zum Obir erstreckt. Diese Area hat circa 1500 und 500 *km* (900 und 300 Miles) zu Durchmessern.

Dass trotz der hohen Temperatur diese warme Luftmasse, die, wie bemerkt, mindestens bis zu 5000 oder 6000 *m* Höhe gereicht haben muss, in einer herabsinkenden Bewegung be-

griffen gewesen ist, dafür sprechen nicht bloss die Wärme und Trockenheit derselben, sondern auch die Winde an der Erdoberfläche, die aus der Area des Barometermaximums nach allen Richtungen hin ausfliessende Luftbewegungen nachweisen.

Auf welche Ursachen man diesen Vorgang mit einiger Wahrscheinlichkeit zurückführen kann, darüber habe ich mich schon mehrmals in Übereinstimmung mit anderen Fachgenossen im Allgemeinen ausgesprochen. Ob diese Ansichten zum Theil zutreffen oder gar nicht, ist Nebensache. Die richtige Theorie wird sich schon finden, wenn sie auf Grundlage der Beobachtungen aufgebaut wird. Es wird dies letztere auch für eine strenge mathematisch-physikalische Durchbildung derselben durchaus kein Hinderniss sein.[1]

Die Barometerminima und die Cyclonen. In „Science“ (19. December 1890, Nr. 411) wird behauptet, die sogenannte Convectionstheorie der Cyclonen lasse sich durch Temperaturbeobachtungen weder stützen noch widerlegen. Wenn das wirklich der Fall wäre, so würde dies für jeden Naturforscher eine Nöthigung sein, sich um eine andere Theorie umzusehen, welche

---

[1] Es scheint mir, dass die Bezeichnung einer „dynamischen Ursache“ der Drucksteigerung in den Anticyclonen, die ich namentlich für die grosse Anticyclone im November 1889 und für alle warmen Anticyclonen angewendet habe, ein Missverständniss hervorgerufen hat. Ich denke dabei durchaus nicht an eine dynamische Drucksteigerung durch die verticale Luftbewegung in den Anticyclonen selbst, welche ich von einem kaum nachweisbar geringen Betrage halten möchte. Ich habe bei der Bezeichnung „dynamisch“ nur den Gegensatz zu „thermisch“ (durch das specifische Gewicht der Luft bedingt) im Auge gehabt und meine damit, dass die Drucksteigerung in den warmen Anticyclonen ein localer Effect der allgemeinen Bewegungen der Atmosphäre über einem weit grösseren Gebiete, als das der Anticyclone, sei. Wenn z. B. aus irgend einer Ursache Luft in grossen Höhen von einem Gebiete abfliesst, so wird daselbst der Druck unten sinken, anderswo aber steigen, wo die Luft sich angehäuft hat; denselben Effect müssen einerseits eine Acceleration der grossen oberen Circulationsströmung (Druckabnahme), anderseits Retardationen derselben (Drucksteigerung unten) zur Folge haben. Die Druckverhältnisse in den warmen Anticyclonen sind, wenigstens bis zu 3100 *m* hinauf, wie ich ja gezeigt habe, gerade so, als wenn oberhalb eine Luftanhäufung platzgegriffen haben würde.

nach den Beobachtungen auf ihre Richtigkeit geprüft werden kann. Die „Convectionstheorie" der Cyclonen ist deductiv abgeleitet, allerdings auf strenger mathematisch-physikalischer Grundlage, aber nur unter vielen Voraussetzungen, ohne welche die Rechnung nicht durchzuführen wäre. Nehmen wir die Convectionstheorie, wie sie namentlich von dem Autor des Artikels in classischer Weise ausgebaut worden ist, an sich, ohne Beziehung auf die wirklichen Erscheinungen, so muss man zugestehen, dass sie dem Geiste volle Befriedigung gewährt, dass sie wirklich eine schöne Theorie ist. Zu einer wahren Theorie wird sie aber erst dann, wenn sie mit allen beobachteten Erscheinungen in Übereinstimmung steht, und das kann man von der Convectionstheorie durchaus nicht sagen, sobald sie auf die Stürme der gemässigten Zone angewendet wird. Der Autor meint freilich, dass man an einer Theorie nicht rütteln dürfe, bis man nicht eine bessere an ihre Stelle setzen kann, aber das ist gegen alle Regeln der Naturforschung. Wer Staatseinrichtungen angreift, von dem kann man verlangen, dass er etwas Besseres an ihre Stelle zu setzen wisse, wissenschaftliche Theorien aber können das nicht für sich beanspruchen. Wer Thatsachen aufgefunden hat, welche mit denselben in Widerspruch stehen, der hat geradezu die Verpflichtung, ihre Mängel aufzudecken, wenn er auch selbst gar keine Verbesserungsvorschläge zu machen im Stande ist.

Die Convectionstheorie der Cyclonen hat zu ihrer Grundlage gewisse Bedingungen der Temperaturvertheilung innerhalb und ausserhalb der Cyclonen. Unser Streben muss desshalb dahin gehen, zu untersuchen, ob diese Temperaturbedingungen bei unseren Cyclonen wirklich vorhanden sind. Ich muss gestehen, dass ich selbst früher kaum daran gezweifelt habe, weil der physikalische Gedankengang, welcher zu dieser Annahme führt, so einleuchtend scheint. Die Beobachtungen auf hohen Bergen haben aber in Übereinstimmung mit den Ergebnissen einiger Ballonfahrten gezeigt, dass *gegen* die Forderung der Convectionstheorie die Luft in den Barometermaximis wärmer ist als in den Barometerminimis. Ich bin dann darauf aufmerksam geworden, dass dies schon im Vorhinein deductiv aus den nach bekannten physikalischen Gesetzen erfolgenden Temperaturänderungen in aufsteigenden und herabsinkenden Luftmassen hätte geschlossen

werden können.[1] Wenn man demnach, wie dies die reine Convectionstheorie der Cyclonen thut, die Kräfte, welche letztere in Action erhalten, ganz innerhalb dieselben verlegt, so begegnet man auch schon theoretisch oder rein deductiv der Schwierigkeit, dass die durch sie eingeleitete verticale Luftcirculation alsbald Temperaturbedingungen schafft, welche die Voraussetzungen ihrer Existenz aufheben.

Man kann nicht sagen, wie dies in „Science" geschieht, dass ja eine warme Anticyclone über den Alpen kein Hinderniss sei für eine Cyclone in Nordamerika. Das ist allerdings richtig, aber in Wirklichkeit steht die Sache in unseren Breiten, namentlich im Winter, der Zeit der höchsten Cyclonenthätigkeit durchaus nicht so. In den Tropen, wo die grossen Cyclonen ganz vereinzelt vorkommen, ist es allerdings anders; aber in unseren Breiten folgen sich Cyclonen und Anticyclonen unmittelbar und es besteht keine Scheidewand zwischen ihnen; ja, der Autor des Artikels in „Science" (19. December 1890) war es, der geradezu die Anticyclonen mit den Cyclonen causal verknüpft hat, indem er beide als die Glieder derselben verticalen Luftcirculation betrachtet hat. Die aus der Wärmelehre folgende theoretische Schwierigkeit für die Convectionstheorie im vorliegenden Falle hat er übersehen. Die aufsteigende feuchte Luft kühlt langsamer ab, als sich die nebenan herabsinkende Luft erwärmt, so dass der herabsteigende Arm der verticalen Luftcirculation theoretisch wärmer sein muss als der aufsteigende. Namentlich müsste dies der Fall sein, wenn eine Anticyclone dieses Ursprunges zwischen zwei Cyclonen sich befindet, wie dies oft vorkommt und von dem Autor gerade als typisches Beispiel für seine Theorie betrachtet wird. Wie kann man dies aber mit der Convectionstheorie in Übereinstimmung bringen, welche verlangt, dass der Luftkörper der Cyclone wärmer ist als die Umgebung.

Nun finden sich in bemerkenswerther Weise die Temperaturbeobachtungen auf den Gipfelstationen in voller Übereinstimmung mit den Forderungen der mechanischen Wärmetheorie, wenn man von der mit allen Beobachtungsthatsachen in bester Übereinstimmung befindlichen Annahme ausgeht, dass die Luft

[1] Meteorologische Zeitschrift, Bd. XXV, 1890, S. 331—334.

in den Barometerminimis aufsteigt und sich in den Barometermaximis herabsenkt.

Dagegen stehen die Temperaturverhältnisse, wie sie die Theorie und die Beobachtungen auf Berggipfeln und in Luftballons für die Barometerminima und die Barometermaxima ergeben, in vollen Widerspruch mit der reinen Convectionstheorie der Cyclonen. Hier sind also neue Untersuchungen nothwendig, um diese Schwierigkeit aufzuklären, wenn nicht die Theorie für unsere Stürme ganz oder theilweise fallen gelassen werden muss. Dass auch andere Gründe für letzteres sprechen, soll später noch erwähnt werden. Die widersprechenden Beobachtungen einfach zu bezweifeln und zu ignoriren ist aber sicherlich der schlechteste Ausweg.

Die von mir in der Abhandlung über das Barometermaximum vom November 1889 mitgetheilten Beobachtungen über die Temperaturen in dem vorausgegangenen Barometerminimum vom 1. October desselben Jahres würden natürlich für sich allein kein Grund sein, die Convectionstheorie aufzugeben, ich selbst habe ihnen diese Bedeutung nie zugeschrieben. Aber im Zusammenhalt mit dem Umstande, dass die höchsten Temperaturen in den uns noch zugänglichen oberen Schichten der Atmosphäre im Centrum der Barometermaxima eintreten, zugleich mit der daran geknüpften Überlegung, dass auch theoretisch eine aufsteigende Luftmasse kühler sein muss, als eine daneben herabsinkende (bei oben gleicher Temperatur), welche mit diesen Beobachtungen vollkommen übereinstimmt, erhält auch dieser Eine Fall eine viel grössere Bedeutung, als er, für sich betrachtet, haben würde.

In der hier vorliegenden Untersuchung habe ich nun nachgewiesen, dass der Fall vom 1. October 1889 durchaus nicht allein steht, sondern dass im Mittel aller Fälle von drei Wintern die mittlere Temperatur einer Luftsäule bis zu mindestens 3500 *m* hinauf in den Barometerminimis viel niedriger ist als in den Barometermaximis. Gegen dieses Resultat kann nicht mehr der Einwand erhoben werden, dass die benützten Beobachtungsstationen am 1. October 1889 zufällig in einem kalten Theile des Minimums gelegen gewesen seien.

Die Forderung, welche in „Science“ aufgestellt wird, dass es zum Nachweise, dass die mittlere Lufttemperatur im Inneren eines Barometerminimums niedriger sei als ausserhalb in der Umgebung, nothwendig wäre, dass man die gleichzeitig herrschenden Temperaturen nicht bloss in allen verschiedenen Niveaus, sondern auch in horizontaler Erstreckung auf viele Hunderte von Meilen kennen müsste, wird natürlich niemals erfüllt werden können. Gäbe es in der That keinen anderen Weg, die Temperaturverhältnisse in den Barometerminimis durch Beobachtungen zu prüfen, so würde die Convectionstheorie auch nur ein „Glaubenssatz“ bleiben, dem man einen anderen gegensätzlichen mit gleichem Rechte entgegenstellen könnte, weil die Wärmetheorie verlangt, dass aufsteigende feuchte Luftsäulen kühler sein müssen als herabsinkende, wenn sie oben die gleiche Temperatur haben, was zugestanden werden muss, wenn sie demselben verticalen Kreislauf angehören.

Es bleibt aber glücklicher Weise ein zwar weniger directer, aber doch vollkommen beweiskräftiger Weg übrig, die mittleren Temperaturverhältnisse in den Cyclonen zu prüfen. Was wir nicht gleichzeitig neben einander beobachten können, können wir doch nach einander beobachten, weil die Cyclonen wie die Anticyclonen in einer beständigen Ortsveränderung begriffen sind. Wenn wir daher an einigen festen Punkten im Luftmeere in verschiedenen Höhen die Temperaturen in den vorüberziehenden Luftdruckmaximis und Luftdruckminimis aufzeichnen, so erfahren wir mit grösster Bestimmtheit, ob der Luftkörper eines Barometerminimums oder der eines Barometermaximums wärmer ist.

Die Beobachtungen von mehreren Jahren haben, wie diese Abhandlung nachweist, das Ergebniss geliefert, dass der Luftkörper eines Barometermaximums wärmer ist als der eines Barometerminimums. Dieses Resultat widerspricht nun entschieden der sogenannten Convectionstheorie unserer Stürme. Es scheint mir umso beweiskräftiger, als es noch viele andere Thatsachen gibt, welche sich mit dieser Theorie schwerlich in Einklang bringen lassen, wenn sie ausser den Cyclonen der Tropen, viele Sommerstürme und Gewittercyclonen etc. auch den grössten Theil unserer Winterstürme und die ausgedehnten Sommerstürme gleichen Charakters erklären soll.

Man hat den Versuch gemacht, die der Theorie widersprechenden Temperaturbeobachtungen auf den Bergen dadurch mit derselben doch in Einklang zu bringen, dass man in diesen Fällen den Sitz der Cyclone in die höheren Schichten der Atmosphäre verlegt hat. Die Cyclone hebt dann die kälteren tieferen Schichten und versetzt sie gleichfalls in rotirende Bewegung durch die von ihr in den höheren Niveaus geschaffenen Druckverhältnisse und durch die Reibung.[1] Weyher's schöne Experimente haben einen solchen Vorgang experimentell nachgewiesen, und wir haben nichts dagegen zu bemerken, sondern glauben im Gegentheile, dass ein solcher Vorgang bei vielen unserer Stürme, auch bei den Tornados und Tromben in der That stattfindet. Auch den Ansichten von Faye steht diese Annahme nahe. Mit einer derartigen Voraussetzung aber gibt sich eigentlich die Convectionstheorie selbst auf. Erstlich braucht man sie nicht mehr, wenn man die Wirbel aus den höheren, rasch bewegten Luftschichten auf die Erde herabsteigen lässt, zweitens ist in diesen hohen Schichten die Ausbildung einer Cyclone in der Art, wie sie der Convectionstheorie entspricht, höchst unwahrscheinlich, wenigstens im Winter.

In etwas mehr als Sonnblickhöhe (two miles, wie angenommen wird) ist der Wasserdampfgehalt der Luft schon so gering, dass jene Kräfte zur Entwicklung einer Cyclone fehlen, welche nach der genannten Theorie zu derselben erforderlich sind. Bei einer Temperatur von —10° bis —20°, wie sie namentlich in den Barometerminimis im Winter in dieser Höhe herrscht, enthält selbst die mit Wasserdampf gesättigte Luft nur mehr 2 bis 1 *g* Wasserdampf im Kubikmeter, und die Wärmeabnahme in derselben, wenn sie aufsteigt, unterscheidet sich kaum mehr von jener der trockenen Luft (sie beträgt schon im unteren Niveau 0°8 bis 0°9 pro 100 *m*). Wäre sie etwa 2000 *m* im Wirbel aufgestiegen, so hätte sie sich schon mindestens auf —36° bis —40° abgekühlt und ihren Wasserdampfgehalt so gut wie gänzlich eingebüsst. Ein selbst unter den günstigsten Verhältnissen in dieser Höhe entstandener, der Convectionstheorie entsprechender

[1] Science. December 19. 1890, Vol. XVI, 345; ebenso January 16, 1891, Vol. XVII, 38.

Wirbel hätte demnach keine Kraft, die unteren kalten 3000 *m* mächtigen Luftschichten hinaufzupumpen und durch Friction in Rotation zu versetzen. Selbst im Sommer ist nach den Beobachtungen Glaishers (im Seeklima!) der Wasserdampfgehalt der Luft in Höhen von 6000—7000 *m* schon verschwindend klein. In grosse Höhen über 2000 oder 3000 *m* darf daher die Convectionstheorie den Ursprung ihrer Cyclonen nicht verlegen. Es mag im Anschlusse hieran bemerkt werden, dass es aus dem gleichen Grunde schwer verständlich ist, wie die Cyclonen der Convectionstheorie Gebirgsketten von 2000—3000 *m* Höhe überschreiten können, wie sie es wirklich regelmässig, z. B. im Felsengebirge, thun.

Die echten tropischen Cyclonen, die doch als die typischen Repräsentanten der Cyclonen der Convectionstheorie angesehen werden müssen, können dies auch nicht; sie lösen sich auf, selbst wenn sie viel niedrigere Gebirgszüge auf ihrer Bahn treffen. Schon dies weist darauf hin, dass bei den Cyclonen der höheren Breiten in erster Linie andere Kräfte im Spiele sind als jene, welche die reine Convectionstheorie allein gelten lässt.

Es ist mir von anderer Seite die Bemerkung zugekommen, dass es sich ja nicht so sehr um die Temperatur im Inneren einer Cyclone handle, gegenüber den grossen Temperaturverschiedenheiten ausserhalb derselben. Hierauf möchte ich nur Folgendes hier erwidern:

Wenn eine Cyclone in unseren Breiten sich einmal gebildet hat, so setzt sie sich allerdings gewisse Temperaturverhältnisse in ihrer Umgebung, so namentlich den Gegensatz zwischen ihrer Rückseite, wo kalte nördliche Winde und ihrer Vorderseite, wo warme südliche Winde herrschen. Damit rechnet aber die Convectionstheorie nicht, nach welcher die wirkenden Kräfte im Inneren des Luftkörpers der Cyclone liegen. Bei den typischen Repräsentanten der Convectionstheorie, den tropischen Cyclonen gibt es auch so gut wie keine Temperaturunterschiede im äusseren Umkreise derselben.

Wenn die Luft im Inneren einer Cyclone wirklich kälter wäre als in ihrer Umgebung, wie könnte sie dann aufsteigen? fragt der Autor in „Science“ und meint desshalb, dass man den Beobachtungen, die so etwas ergeben, nicht trauen dürfe, sondern sie

besser bei Seite lassen soll. Das ist aber wieder ganz gegen die Methode der inductiven Wissenschaften. Wenn die widersprechenden Beobachtungen oder Thatsachen nicht ersichtlich unrichtig sind, so muss sich unser Zweifel in erster Linie auf die volle Richtigkeit der Theorie und nicht auf die Beobachtungen werfen; und dies umso mehr, wenn, wie im vorliegenden Falle, die Beobachtungen auch eine innere physikalische Wahrscheinlichkeit für sich haben. Man muss dann eben prüfen, ob das Aufsteigen der Luft im Inneren unserer Cyclonen nicht einen anderen Grund haben könne, als jenen, den die Convectionstheorie annimmt. Eigenthümlicher Weise hat sogar der Autor selbst auf einen solchen hingewiesen, indem er meint, dass die unteren kühleren Schichten bis zu 3000 *m* Mächtigkeit durch kräftige Wirbel in den höheren Schichten in Rotation versetzt und zum Aufsteigen gebracht werden können. Über die Entstehung derartiger Wirbel ohne Zuhilfenahme der Convectionstheorie sind in der That schon mit guten Gründen unterstützte Ansichten aufgestellt worden.

In den Artikeln in „Science“ wird das „unstable equilibrium“ der Atmosphäre, das der Bildung der Cyclonen vorausgeht und ihrer Fortexistenz zu Grunde liegt, des Öfteren mit besonderem Nachdrucke hervorgehoben. Die Cyclone soll auf ihrer ganzen Bahn dieses unstabile Gleichgewicht vorfinden.

Wie diese Annahme mit unseren Kenntnissen über die thatsächlich bestehende verticale Temperaturvertheilnng in der Atmosphäre in Übereinstimmung zu bringen ist, ist mir ganz unverständlich. Als Postulat der Theorie wird eben diese Annahme, welche in dem geforderten Umfange sowohl den Ergebnissen der Beobachtungen auf Berggipfeln, sowie jenen bei Ballonfahrten gänzlich widerspricht, ohne weitere Prüfung als thatsächlich vorhanden hingestellt.

Das „unstable equilibrium“ wird jetzt gar zu häufig als Erklärungsgrund meteorologischer Erscheinungen angenommen, es ist in der That überall dort vorhanden, wo man es braucht. Nach den Beobachtungen scheint jedoch in Wirklichkeit ein thermisch (und das ist ja hier überall gemeint) instabiler Gleichgewichtszustand der Atmosphäre nicht häufig und stets nur local auf geringe Erstreckungen hin, vorzukommen; im Winter der

mittleren und höheren Breiten aber schon gar nicht. Ich meine dabei nicht bloss den Zustand des indifferenten Temperaturgleichgewichtes in trockener Luft, sondern auch in Beziehung auf aufsteigende feuchte Luft.

Loomis hat aus 20 monatlichen Beobachtungen auf Pikes Peak und zu Denver City unter 343 Fällen nur 39 Fälle eines nicht stabilen Temperaturgleichgewichtes gefunden, und davon kommen nur 7 Fälle auf den Winter. Auch dieses Ergebniss wird in „Science" als auf blossen „surface observations" beruhend und desshalb nichts beweisend kurz abgewiesen. Und doch ist im vorliegenden Falle die grössere Wahrscheinlichkeit dafür, dass Loomis noch zu viele Fälle des nichtstabilen Temperaturgleichgewichtes hat finden müssen. Denver City liegt auf einer trockenen Hochebene in einem sehr heiteren sonnigen Klima, wodurch die Temperatur unten öfter abnorm gesteigert werden muss, während auf dem luftigen Gipfel des Pik, 2700 *m* höher, die Erwärmung durch Insolation gering und locale Abkühlungen durch Wolkenbildung häufig sein müssen. Ohne auf das Ergebniss dieser Untersuchungen von Loomis ein besonderes Gewicht zu legen, wird man zugeben müssen, dass es in derselben Richtung aussagt, wie die meisten andern Beobachtungen, die in gleicher Richtung untersucht worden sind.

Einige weitere Thatsachen, welche gegen die Convectionstheorie in ihrer Anwendung auf unsere Stürme sprechen.

Ich habe früher hervorgehoben, dass die von mir nachgewiesenen Beobachtungsergebnisse über die relativ niedrige Temperatur in unseren Cyclonen dadurch noch eine grössere Bedeutung für die Theorie derselben erlangen, dass es überdies eine ganze Reihe anderer Thatsachen gibt, welche gleichfalls gegen die Convectionstheorie sprechen. Ich will hier einige dieser Thatsachen anführen, wobei auf eine Vollständigkeit noch gar kein Anspruch erhoben werden kann.

Vorausschicken möchte ich ein Bedenken, welches mir schon in den räumlichen Verhältnissen unserer Stürme begründet zu sein scheint und vom Standpunkte der Convectionstheorie kaum beseitigt werden dürfte. Wie kann man so ausserordentlich flache

Luftscheiben, wie die grossen Cyclonen der aussertropischen Breiten es sind, bloss durch Auftrieb entstehen und fortwandern lassen! Unsere Wirbel haben häufig einen mehrere hundermal grösseren horizontalen als verticalen Durchmesser.[1] Ein Schornstein zieht bekanntlich nur, wenn seine Höhe vielmal grösser ist als sein innerer Durchmesser. Bei unseren Wirbeln ist aber das Verhältniss in extremster Weise ins Gegentheil verkehrt. Wie solche ausserordentlich flache Luftscheiben nur durch die inneren Kräfte, d. i. durch die bei localen Wasserdampfcondensationen innerhalb derselben frei werdende Wärme sich in der Atmosphäre fortbewegen können, scheint mir schwer verständlich. Es ist ja die ganze Höhe der Atmosphäre, soweit selbe für die Condensationstheorie in Betracht kommen kann (oberhalb 8—10 *km* Seehöhe ist ja fast kein Wasserdampf mehr vorhanden), äusserst gering gegenüber dem horizontalen Durchmesser unserer Wirbel. Ich weiss nicht, dass die Convectionstheorie diese Schwierigkeit schon ernstlich ins Auge gefasst hat. Für jene Theorien, welche die Wirbel in Zusammenhang bringen mit Störungen in den allgemeinen Circulationsströmungen der Atmosphäre, besteht diese Schwierigkeit nicht.

Eine Thatsache, welche in auffallendem Widerspruch mit der reinen Convectionstheorie unserer Stürme steht, liegt in der jährlichen Periode der Häufigkeit und Intensität derselben.

Wenn die Convectionstheorie auf die Mehrzahl unserer Stürme wirklich anwendbar wäre, wie könnte es geschehen, dass diese Stürme gerade im Winterhalbjahr ihre grösste Intensität und Häufigkeit erreichen, also zu jener Jahreszeit, wo die Bedingungen sowohl zu ihrer Entstehung, wie zu ihrer Fortexistenz am allerungünstigsten sind. Im Winter ist der Wasserdampfgehalt der Luft gering und das thermische Gleichgewicht der Atmosphäre äusserst stabil. Über den Continenten sind die untersten Schichten oft längere Zeit hindurch die kältesten, die Temperatur nimmt nach oben zu. Die Wärmeabnahme mit der Höhe ist im Winter sehr gering, geringer als in aufsteigenden Luftströmungen bei dem dann herrschenden absoluten Wasserdampfgehalt der

[1] Doberck nimmt selbst bei den ostasiatischen Typhonen einen Durchmesser von mindestens 1000 Seemeilen bei kaum 4 Seemeilen Höhe an.

Atmosphäre. Wie kann man annehmen, dass unter solchen Verhältnissen die atmosphärischen Wirbel der Convectionstheorie bis ins Innere von Sibirien vordringen, wo die Lufttemperaturen, die sie dort antreffen, —30 bis —40° sind und der Wasserdampfgehalt der Luft fast auf Null herabgesunken ist.

Es ist eine unvermeidliche Consequenz der Convectionstheorie, wie sie namentlich schroff in den citirten Artikeln in „Science" vertreten wird, dass die Cyclonen im Sommerhalbjahr ihre grösste Intensität und Häufigkeit erreichen müssten, wo der Wasserdampfgehalt der Luft am grössten, die Erwärmung der untersten Luftschichten am lebhaftesten ist und die Wärmeabnahme mit der Höhe am raschesten erfolgt.

In der That sind jene Erscheinungen, auf welche wohl mit Recht die Convectionstheorie Anwendung finden kann, die „Wärmegewitter" und die Cyclonen der Tropen, auf die warme Jahreszeit beschränkt. Die tropischen Cyclonen erreichen das Maximum ihrer Häufigkeit zur Zeit, wo die Temperatur des Meeres am höchsten ist (so die westindischen und die Mauritiuscyclonen, dessgleichen die ostasiatischen Typhone), oder eine allgemeine gleichmässige Druckvertheilung und das Fehlen vorherrschenden Luftströmungen die Entwicklung wie das Fortschreiten solcher Wirbel, welche ihre treibenden Kräfte zum grösseren Theile vielleicht wirklich in sich selbst haben, am meisten begünstigt (Cyclonen der Bai von Bengalen). Auch die „Wärmegewitter" oder Gewitterwirbel unseres Sommers treten bei gleichmässiger Druckvertheilung, schwachen Winden, kräftiger Erwärmung der unteren Luftschichten und hohem Wasserdampfgehalt der Luft am häufigsten und intensivsten auf.

Die Stürme der gemässigten Breiten haben überdies noch eine andere Eigenthümlichkeit, ausser ihrer maximalen Entwicklung in der kältesten Jahreszeit, der Periode des stabilsten thermischen Gleichgewichtes der Atmosphäre, welche mit der Convectionstheorie in Widerspruch steht, d. i. die Tendenz, kurz hinter einander die gleichen Bahnen einzuschlagen. Auf diese Eigenthümlichkeit hat schon Köppen (Met. Zeitschrift, 1874, Bd. IX, S. 380) aufmerksam gemacht, und man braucht nur die täglichen Wetterkarten einigermassen aufmerksam zu betrachten, so findet man auffallende Beispiele in Fülle dafür. Auch Doberck

sagt: „Es ist eine wohlbekannte Thatsache, dass Luftdruckdepressionen von solchen Gegenden angezogen werden, über welche soeben eine Depression hinweggezogen ist.“ („The law of storms in the Eastern Seas.“)

Das ist nun ganz entgegengesetzt dem Verhalten, welches die wahren Cyclonen der Convectionstheorie zeigen und zeigen müssen. Eine Cyclone gleicht über jenen Theilen der Erdoberfläche, über welche sie hingezogen ist, die Temperatur zwischen oben und unten aus. Der Condensationsprocess erwärmt die höheren Schichten, kühlt die tieferen ab, macht das Gleichgewicht der Atmosphäre stabiler. Zugleich ist der Wasserdampfgehalt der unteren Luftschichten aufgebraucht, an derselben Stelle kann nicht sofort wieder durch blosse Convectionsströmungen neuerdings ein Niederschlag eingeleitet werden. Die Cyclonen der Convectionstheorie müssen also jene Stellen der Erdoberfläche vermeiden oder auf denselben erlöschen, wo kurz vorher schon eine Cyclone in Thätigkeit war, und die in den unteren Schichten der Atmosphäre als hohe Temperatur und grösseren Wasserdampfgehalt der Luft aufgespeicherte latente Energie schon ausgelöst worden ist.

Diese Eigenthümlichkeit zeigen nun auch in der That in auffallender Weise die „Wärmegewitter“ unseres Sommers und erweisen sich hiedurch als Erscheinungen, auf welche die reine Convectionstheorie volle Anwendung findet.

Hingegen weist der Umstand, dass die Cyclonen unserer Breiten gerne öfter hinter einander auf derselben Bahn sich folgen, darauf hin, dass die Convectionstheorie auf sie keine oder nur untergeordnete Anwendung hat, und dass die Kräfte, von denen ihre Entstehung und Fortpflanzung in erster Linie abhängen, nicht in ihnen, sondern ausserhalb ihnen zu suchen sind. Es sind Verhältnisse der allgemeinen Vertheilung des Luftdruckes und Störungen der allgemeinen atmosphärischen Circulation, auf welche ihre Entstehung und ihr Fortschreiten zurückgeführt werden muss.

Wenn man die Entstehung und die Fortbewegung der Cyclonen der gemässigten und hohen Breiten mit der allgemeinen Circulation der Atmosphäre in Beziehung bringt, dann erklärt sich ganz von selbst ihre grössere Häufigkeit und Intensität im

Winterhalbjahr, sowie alle jene Eigenthümlichkeiten, welche einer Anwendung der reinen Convectionstheorie auf dieselben widersprechen. Dass auch bei Wirbeln dieses Ursprunges die Condensation des Wasserdampfes eine grössere oder geringere secundäre Rolle spielt, daran wird wohl kein Physiker zweifeln.

Der Einwurf, der in „Science" (Vol. XVII, p. 10, January 2, 1891) gegen meine Ansicht gemacht wird, dass der gesteigerte obere Gradient in jener Hemisphäre, in welcher Winter herrscht, die Cyclonenthätigkeit daselbst erhöhen muss, kann nur auf einem Missverständniss beruhen. So lange wir den ideellen Zustand der Luftcirculation zwischen Pol und Äquator, wie er in der Theorie behandelt wird, im Auge haben, gibt es allerdings keine Cyclonen, ausser der grossen Cyclone um den Pol, und der gesteigerte obere Gradient steht mit der gesteigerten Geschwindigkeit der westöstlichen Luftbewegung im Gleichgewicht und kann weiter nichts leisten. Das ist auch unsere Ansicht. Aber der Autor in „Science" denkt dabei nur an den einfachen Fall, den die Theorie behandelt, aber nicht an die Wirklichkeit. Der stationäre Zustand der Luftcirculation besteht in der Weise, wie ihn die Theorie annehmen muss, in Wirklichkeit nie. Das Temperaturgefälle und der obere Gradient sind nicht allein unter verschiedenen Meridianen verschieden, sie verändern sich auch in der Zeit. Dessgleichen bilden die grossen Temperaturunterschiede und deren zeitliche Verschiebungen in der Nähe der Erdoberfläche in den höheren Breiten der Winterhemisphäre, die örtlichen Retardationen und Beschleunigungen der oberen Strömungen, die durch sie hervorgerufen werden, die verschiedenen Reibungswiderstände etc. eine fortwährende veränderliche Quelle von Störungen, durch welche in den oberen heftig kreisenden Strömungen sich Wirbel bilden müssen, die dann auch die unteren Luftschichten in Bewegung setzen, und zwar auf dem vom Autor selbst angegebenen Wege. Wie kann man annehmen, dass die atmosphärische Circulation ganz ohne örtliche Störungen abläuft, bei den vielfältigen Veranlassungen, welche durch die zeitlich und örtlich wechselnden Temperaturgradienten und die verschiedenen Reibungswiderstände gesetzt werden. Wenn nun, wie der Autor selbst anderswo gezeigt hat, der Temperaturgradient zwischen Pol und Äquator auf der nörd-

lichen Hemisphäre im Jänner doppelt so gross ist wie im Juli, und demgemäss auch im Jänner die westöstliche Componente der oberen Luftcirculation eine zwischen zwei- und viermal grössere Geschwindigkeit hat als im Juli, so müssen auch, wenn Störungen des dynamischen Gleichgewichtes eintreten, die dabei ausgelösten und in Wirksamkeit tretenden Kräfte im Winter in gleichem Maasse grösser sein. Der im Winter viel steilere, polwärts gerichtete obere Gradient steht allerdings im normalen stationären Zustande der Luftcirculation zwischen Äquator und Pol mit den dabei auftretenden Fliehkräften im Gleichgewicht. Die in diesem Zustande potentielle Energie desselben geht aber sogleich zum Theil in actuelle Energie über, wenn örtliche Störungen in der Luftcirculation eintreten. Die im Winter theoretisch auf eine zwei- bis viermal grössere Geschwindigkeit gesteigerten westöstlichen oberen Strömungen müssen viel leichter dynamische Gleichgewichtsstörungen hervorrufen als die schwächeren des Sommers. Herr Möller hat erst kürzlich darauf hingewiesen, dass die heftig bewegten oberen Luftschichten öfter einen labilen dynamischen Gleichgewichtszustand hervorrufen müssen, und geradezu den grösseren Theil der Cyclonen und Anticyclonen unserer Breiten auf diese Entstehungsursache zurückgeführt.[1] Das ist in der That die Richtung, in welcher auch nach meiner Ansicht sich am leichtesten ein Verständniss der grossen atmosphärischen Störungen in den mittleren und höheren Breiten wird erzielen lassen. Es ist fast unnöthig, hier auch auf die neueren Arbeiten des Herrn von Helmholtz auf diesem Gebiete hinzuweisen, weil man wohl annehmen kann, dass jedermann, der sich vornehmlich mit der Theorie der atmosphärischen Bewegungen beschäftigt, dieselben beachtet haben muss. In Frankreich hat in letzter Zeit H. Lasne den dynamischen (im Gegensatz zum thermischen) Ursprung der Cyclonen mit Geschick vertreten.[2]

---

[1] Meteorologische Zeitschrift, Bd. XXVI, 1891, S. 72. Eine mehr populäre, sehr lesenswerthe klare Darstellung der atmosphärischen Circulation mit ihren Störungen hat Herr Dr. W. Köppen gegeben in der Zeitschrift „Humboldt", Decemberheft 1888.

[2] Man sehe: Congrès Météorologique International, tenu à Paris 1889. II. Mémoires. H. Lasne: Sur les mouvements gyratoires de l'atmosphère,

Man kann also keineswegs, wie es in „Science“ geschieht, behaupten, dass es ausser der Convectionstheorie keine Theorie der Cyclonen gibt, welche auf einer mathematisch-physikalischen Basis beruht, und dass alle von derselben abweichenden Ansichten über die Natur unserer Stürme nur vage empirische Einfälle seien, die keine Beachtung verdienen, und selbst wo sie durch Beobachtungen gestützt werden, dennoch abzuweisen wären.[1]

Ich habe im Vorhergehenden nur einige wenige, im Zusammenhange mit dem Gegenstande der vorliegenden Arbeit befindliche Instanzen angeführt, welche mit Entschiedenheit gegen die reine Convectionstheorie in ihrer Anwendung auf unsere Stürme sprechen. Man kann schon daraus ersehen, dass in der That der von mir geführte Nachweis über die relativ niedrigen Temperaturen im Inneren unserer Barometerminima nur Ein Glied in einer längeren Kette von Instanzen ist, welche gegen die Convectionstheorie unserer Stürme vorgeführt werden können. Ich habe dabei gar keinen Bezug genommen auf jene zahlreichen derselben widersprechenden Thatsachen, welche das Studium der täglichen Wetterkarten liefert, von welchen Herr Helm-Clayton, ein praktischer Meteorologe, in „Science“ einige angeführt hat. Ich könnte auch auf das Werk[2] eines sehr erfahrenen praktischen Meteorologen, Hon. Ralph Abercromby, hinweisen, das, soweit es theoretische Ansichten über die Ursachen der Cyclonen und Anticyclonen durchblicken lässt, ganz auf unserem Standpunkt steht und manchen Beweis für denselben enthält.

Wir wollen mit dem Geständniss schliessen, dass wir trotz der Einwendungen, die wir gegen die Erklärung unserer Stürme durch die reine Convectionstheorie zu machen uns genöthigt

---

p. 144. Im Schosse der französischen meteorologischen Gesellschaft wurde in der Sitzung vom 4. November 1890 bemerkt, dass die Ansicht, die Cyclonen unserer Breiten seien nur Folgeerscheinungen der allgemeinen Circulation der Atmosphäre, in Frankreich die herrschende sei, und dieselbe wurde geradezu als französischen Ursprungs bezeichnet. Annuaire de la Soc. mét. de France. 38e Année, 1890, p. 279.

[1] So etwas wird in der That in „Science“ (XVII. p. 38. Jan. 16, 1891) gefordert.

[2] Weather. London 1887.

gesehen haben, doch gerne anerkennen, dass diese Theorie für eine sehr nahe verwandte Gruppe von Erscheinungen (die echten Cyclonen der Tropen, die Wärmegewitter unseres Sommers, zum Theile auch die Tromben und Tornados) in der That eine „very beautiful and satisfactory theory" ist, der in unserer Wissenschaft stets ein hervorragender Platz wird eingeräumt bleiben müssen. Dessgleichen sind wir weit davon entfernt, leugnen zu wollen, dass auch bei allen anderen cyclonalen Luftbewegungen die Convectionstheorie etwas mitzureden hat, namentlich bei den atmosphärischen Störungen im Sommer, sie mögen in erster Linie was immer für einen Ursprung haben.

Anhang.

Ableitung von Luftdruck- und Temperaturmitteln für den Sonnblickgipfel für die Normalperiode 1851—1880 (30 Jahre).

Da nun schon $4^1/_2$ Jahrgänge meteorologischer Beobachtungen vom Sonnblickgipfel vorliegen und man öfter Mittelwerthe für diesen Punkt benöthigt, die mit denen der übrigen Stationen unserer Alpenländer vergleichbar sind, so habe ich es hier unternommen, neuerdings solche abzuleiten, welche schon viel sicherer sind als die von mir bei anderen Gelegenheiten aus kaum mehr als einem und zwei Beobachtungsjahren berechneten Werthe.

Luftdruckmittel. Als Vergleichsstationen dienten Schafberg und Obir. Aber auch für diese mussten erst neue 30jährige Mittel abgeleitet werden. Es geschah dies durch Differenzen gegen den St. Bernhard. Vom Schafberg liegen 20jährige Luftdruckmittel 1871—1890 vor, vom Obir nur eilfjährige, 1880 bis 1890. Schafberg wurde nun nach St. Bernhard auf die Periode 1851—1880 reducirt, was ja durch 20jährige correspondirende Beobachtungen schon sehr sicher geschehen konnte; Obir hierauf nach Schafberg und St. Bernhard, wobei den Reductionen nach Schafberg, als der näheren Station, das doppelte Gewicht gegeben wurde bei Ableitung der definitiven Werthe. Die Barometercorrectionen wurden schliesslich an die Mittelwerthe angebracht, aber nicht die Schwerecorrection. Dies gilt auch für den Sonnblick.

Die Luftdruckmittel des Sonnblick wurden hierauf durch Differenzen gegen Schafberg und Obir auf die Periode 1851 bis 1880 reducirt. Die Differenzen der Jahresmittel zeigen folgenden bemerkenswerthen Gang:

	1887	1888	1889	1890
Obir—Sonnblick	74·42	74·86	74·43	74·37
Schafberg—Sonnblick	94·52	94·85	94·62	94·53.

Das Jahr 1888 auf dem Sonnblick zeigt einen nach Obir um 0·45 *mm*, nach Schafberg um 0·29 *mm* zu niedrigen Luftdruck. In der That meldete der Beobachter im Sommer 1888, dass ihm durch Touristen das Barometer beschädigt worden sei, worauf im August 1888 dasselbe umgetauscht wurde. Die Änderung dürfte allmählig erfolgt sein. Ich corrigirte daher das Jahr 1888 mit +0·37 *mm* und die Monate proportional dem Abstande vom August. Hier sieht man wieder, wie vortheilhaft das Ableiten der individuellen Differenzen der Monat- und Jahresmittel des Luftdruckes ist, und wie sicher aus wenigen Jahren auf die normale Differenz geschlossen werden kann.

Schafberg gibt als 30jähriges Luftdruckmittel für Sonnblick 519·86, Obir 519·92. Auch die Monatsmittel stimmen sehr befriedigend.

Temperatur. Die Reduction der Temperaturmittel des Sonnblick auf die Periode 1851—1880 erfolgte durch Differenzen gegen Schafberg, Obir und Säntis. Auch hier mussten vorher neue 30jährige Mittel für Schafberg, Obir und Säntis abgeleitet werden. Für Schafberg wurden Differenzen gegen St. Bernhard, dann in zweiter Linie gegen Ischl und Alt-Aussee verwendet; für Obir Differenzen gegen Schafberg, Laibach und Hüttenberg; letzterem wurde nur halbes Gewicht beigelegt.

Säntis wurde nach St. Bernhard reducirt; ich konnte die Beobachtungen vom September 1882 bis December 1890 benützen, also $8^1/_3$ Jahre. Die Differenzen sind verhältnissmässig ziemlich variabel. Schliesslich wurde dann Sonnblick nach diesen drei Stationen reducirt, wobei den Reductionen nach den entfernteren und weniger sicheren Stationen Säntis und Obir nur das halbe Gewicht beigelegt wurde. Die Mittelwerthe sind dann auf wahre Mittel nach den stündlichen Beobachtungen corrigirt worden.

Es mag auffallen, dass die für den Sonnblick gefundenen Normalmittel, in allen Monaten fast, wärmer sind als die Mittel der Periode October 1887 bis März 1891. Ich selbst war davon betroffen und versicherte mich durch folgende Vergleiche, dass nicht die Reductionsmethode daran Schuld trage. Die Temperaturabweichungen der Periode October 1887 bis December 1890 (Jänner, Februar 1891 von St. Bernhard lagen mir noch nicht vor) vom 30jährigen Mittel 1851—1880 sind:

Mittlere Temperaturabweichungen St. Bernhard (October 1887 bis December 1890).

Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni
+0°8	—2°3	—0°9	—1°6	—0°7	+0°3
Juli	**August**	**Sept.**	**Oct.**	**Nov.**	**Dec.**
—1°4	—0°9	—0°8	—1°6	+0°6	—1·0.

Durch Anbringen dieser Abweichungen mit entgegengesetzten Zeichen an die correspondirenden Temperaturmittel des Sonnblick erhält man fast dieselben Normalmittel, wie ich sie auf anderem Wege gefunden habe. Die geringen Unterschiede erklären sich durch die grosse Entfernung der Station St. Bernhard, die nahe dem äussersten Südwesten der Alpenkette liegt.

Die Jahresmittel zeigen folgende Abweichungen, die ich gleich zur Reduction jener des Sonnblick benützen will:

	1887	1888	1889	1890
St. Bernhard, Temperaturabweich..	—1°0	—0°7	—1°0	—0°9
Sonnblick, beob. Jahrestemperatur..	—7·5	—6·8	—7·1	—7·0
Sonnblick reducirt auf 1851—1880	—6·5	—6·1	—6·1	—6·1

Die mittlere Jahrestemperatur des Sonnblick für die Periode 1851—1880 folgt hieraus zu —6°2, meine Reduction nach den näheren Stationen Schafberg, Obir, Säntis gibt —6°3, welchen Werth man demnach als sehr verlässlich betrachten darf.

Ich habe schliesslich die mittleren Temperaturdifferenzen Schafberg—Sonnblick in die Tabelle aufgenommen, sowie die Wärmeabnahme pro 100 *m*, die daraus sich ergibt. Die Werthe der letzteren sind mit den noch nicht auf Zehntelgrade abgerundeten Temperaturdifferenzen berechnet worden. In dem jähr-

lichen Gange dieser Zahlen fällt die geringe Jahresschwankung auf. Die Erklärung für dieselbe liegt darin, dass hier zwei Gipfelstationen mit einander verglichen sind, bei denen die directen Wirkungen der Insolation und Wärmeausstrahlung nur von geringem Einflusse auf die beobachtete Luftwärme sind. Übrigens dürfte der Schafberggipfel im Sommer doch noch etwas wärmer sein als die freie Atmosphäre, so dass in Wirklichkeit die Temperaturabnahme mit der Höhe im Sommerhalbjahr noch kleiner und die Jahresschwankung derselben noch geringer sein mag. Der Einfluss kann aber nur gering sein, sonst müsste das Maximum der Wärmeabnahme etwa auf den Juli fallen und nicht auf den Mai, wo der Schafberggipfel noch zumeist in Schnee gehüllt ist, und es könnte nicht der Juli eine geringere Temperaturänderung gegen den Sonnblickgipfel ergeben als der April.

Luftdruckmittel.[1] Periode 1851—1890.

	Sonnblick	Obir	Schafberg
Jänn.	516·4	592·3	612·5
Febr.	15·6	91·7	11·9
März	14·7	90·2	10·3
April	18·1	93·0	12·7
Mai	20·6	94·8	14·4
Juni	23·7	97·3	16·9
Juli	25·4	98·9	18·1
Aug.	25·2	98·8	18·0
Sept.	24·4	98·5	17·6
Oct.	21·2	95·9	15·3
Nov.	17·2	92·3	12·0
Dec.	16·6	92·2	12·2
Jahr	519·9	594·6	614·3

Sonnblick-Temperaturmittel. $^1/_4$ (7, 2, 9, 9).

	1886	1887	1888	1889	1890	1891	Mittel
Jänn.	—	—12·6	—14·6	—13·5	—10·6	—16·3	—13·5
Febr.	—	—15·7	—15·4	—17·5	—13·6	—13·5	—15·1
März	—	—10·7	—13·0	—14·2	—11·4	—12·0	—12·3
April	—	— 9·6	— 9·4	—10·1	— 9·1	—	— 9·5
Mai	—	— 6·7	— 4·2	— 1·3	— 3·2	—	— 3·8
Juni	—	— 2·0	— 0·5	0·9	— 3·1	—	— 1·2
Juli	—	2·8	— 0·9	0·2	0·3	—	0·6
Aug.	—	0·4	0·0	0·3	2·0	—	0·7
Sept.	—	— 1·6	— 0·2	— 4·2	— 3·3	—	— 2·3
Oct.	— 3·4	— 9·1	— 6·5	— 4·7	— 7·1	—	— 6·2
Nov.	— 9·3	— 9·2	— 7·5	— 8·0	—10·8	—	— 9·0
Dec.	—13·2	—15·5	— 9·0	—12·8	—14·1	—	—12·9
Jahr	—	— 7·5	— 6·8	— 7·1	— 7·0	—	— 7·0

[1] Corrigirt, aber ohne Schwerecorrection.

Wahre Temperaturmittel für die Periode 1851—1890.

	Schafberg 1776 m	Obir 2044 m	Säntis 2470 m	St. Bernhard 2476 m	Sonnblick 3105 m	Sonnblick reducirt nach (ohne Correction)		Schafberg-Sonnblick 1330 m	Temperaturabnahme pro 100 m
						Säntis u. Obir	Schafberg		
Jänn.	—5°1	—7°0	—8°1	—8°3	—12°9	—13°0	—12°9	7°8	0°59
Febr.	—5·0	—6·8	—8·0	—8·2	—13·0	—12·9	—12·9	8·0	·60
März	—3·7	—5·5	—6·9	—7·1	—11·8	—11·7	—11·8	8·1	·61
April	0·4	—1·5	—2·8	—3·0	— 8·0	— 7·8	— 8·2	8·6	·64
Mai	4·2	2·4	0·5	0·5	— 4·6	— 4·3	— 4·7	8·9	·67
Juni	7·8	6·7	3·4	4·0	— 1·0	— 1·0	— 0·9	8·7	·66
Juli	9·8	9·2	5·7	6·8	1·4	1·4	1·4	8·3	·63
Aug.	9·6	9·1	5·5	6·6	1·5	1·5	1·5	8·1	·61
Sept.	7·2	6·2	3·2	4·0	— 1·0	— 1·1	— 0·8	7·9	·60
Oct.	3·3	2·0	— 0·5	— 0·2	— 4·6	— 4·7	— 4·5	7·7	·58
Nov.	—2·0	—3·4	— 5·5	— 5·6	— 9·7	— 9·7	— 9·6	7·6	·57*
Dec.	—4·8	—6·5	—7·7	— 7·9	—12·4	—12·4	—12·5	7·6	·57*
Jahr	1·8	0·4	—1·8	—1·5	— 6·3	— 6·3	— 6·3	8·1	·61

Mit Hilfe der correspondirenden corrigirten Luftdruckmittel der vier Jahrgänge 1887—1890 habe ich auch die Seehöhe des Sonnblickgipfels neuerdings berechnet. Die Resultate einer früheren Berechnung mit Hilfe der Jahresmittel von 1889 der Stationen Ischl und Lienz, deren Seehöhen durch ein Nivellement genau bekannt ist, füge ich bei (das Jahr 1888 ist wegen Beschädigung des Barometers auf dem Sonnblick nicht gut zu verwenden, das Jahr 1890 nicht wegen Unterbrechung der Beobachtungen zu Lienz).

Vergleichsstation	Seehöhe	Höhendifferenz	Sonnblickgipfel
Schafberggipfel	1776·1	1327·0	3103·1 *m*
Obir	2044	1064·7	3108·7
Säntis	2464 [1]	645·5	3109·9
Ischl—Lienz	573·2	2531·2	3104·4

[1] Über der Adria bei Triest wie die anderen Stationen.

Ich möchte dem ersten Resultate (nach Schafberggipfel) das doppelte Gewicht beilegen und erhalte dann den Mittelwerth 3105·8 *m*; gibt man den beiden letzteren Resultaten (Säntis sehr entfernt, Ischl—Lienz nur ein Jahr) bloss halbes Gewicht, so wird das Mittel 3105·5 *m*, da das Resultat dieser barometrischen Höhenbestimmung des Sonnblickgipfels jedenfalls um etliche Meter unsicher bleiben muss, so möchte ich als Seehöhe desselben 3105 *m* annehmen, um schon durch die Abrundung auf 5 die Unsicherheit der Einheiten des Meter anzudeuten.[1]

[1] In der vorhergehenden Abhandlung selbst ist die Seehöhe noch zu rund 3100 *m* angenommen.

Über das Zerstäuben von Eisendraht durch den elektrischen Entladungsschlag

von

Albert v. Obermayer,
c. M. k. Akad.

(Mit 1 Tafel.)

Bei einer früheren Gelegenheit[1] habe ich einige Photographien von elektrischen Entladungserscheinungen vorgelegt, welche im Vereine mit Herrn Hauptmann A. Freiherrn v. Hübl gewonnen wurden. Die Erscheinungen beim Zerstäuben von Eisendrähten zu fixiren ist uns damals nicht gelungen, da die Capacität der angewendeten Batterie zu gering war.

Seit jener Zeit ist die Batterie auf 24 Flaschen ergänzt worden, von denen je sechs eine Capacität von nahe 100 *m* haben. Zu den vorliegenden Versuchen wurden die Flaschen in zwei Gruppen, zu zwölf nebeneinander verbundene Flaschen, hintereinander geschaltet, so dass die Capacität der Batterie 100 *m* beträgt. Es sind damit Schlagweiten bis zu 11 *cm* möglich, ohne dass die Funken über die Flaschenränder schlagen.

Zur Ladung der Batterie diente die grosse, vierscheibige Influenzmaschine,[2] die mir in liebenswürdigster Weise vom k. und k. technischen Militärcomité und dem Herrn Ingenieur F. Fischer zur Verfügung gestellt wurde.

Der angewendete Eisendraht hatte 0·2 *mm* Durchmesser. Nebst dem Eisendrahte war in den Schliessungskreis mit Hilfe

---

[1] Diese Sitzungsber., Bd. XCVIII, S. 419.

[2] Ebenda, S. 420.

eines Funkenmessers eine 5 — 9 *cm* lange Luftstrecke eingeschaltet. Die Eisendrähte selbst waren 5—7 *cm* lang.

Die photographische Aufnahme geschah mittelst meines Dallmayer'schen Rapid-Rectilineares von 4·7 *cm* Öffnung und 32·5 *cm* Brennweite, auf Platten 9/12 *cm*, in nahe natürlicher Grösse. Meine Reisecamera wurde durch eine, auf das Objectivbrett geschraubte Röhre auf die richtige Länge gebracht.

Wie die photographischen, in $^3/_4$ der natürlichen Grösse wiedergegebenen Bilder auf beifolgender Tafel zeigen, sind im Zerstäuben drei verschiedene Stadien zu unterscheiden.

1. Bei langem Drahte und kürzerer Funkenstrecke zerreisst der Draht in mehr oder minder grosse Stücke die hinweggeschleudert werden. Sind die Stücke nahe weissglühend, dann zeichnen sich ihre Bahnen auf der photographischen Platte auf. In Fig. 1 ist ein solcher Vorgang wiedergegeben. An dem zackigen Rande einer der Flugparabeln ist zu erkennen, dass das Partikelchen in lebhafter Rotation begriffen war.

2. Bei kurzem Drahte und längerer Luftstrecke gelingt manchmal eine Zerstäubung wie in Fig. 2.

3. Bei kurzem Drahte und grosser Luftstrecke scheint der moleculare Zusammenhang gelöst zu werden, und es entsteht eine, durch ihr wolkenartiges Ansehen charakteristische Lichterscheinung, Fig. 3.

Ein Funke, welcher zwischen kurzen, die Elektroden bildenden Eisendrahtstücken übergeht, gibt bei hinreichender Mächtigkeit das in Fig. 4 dargestellte Bild, welches dasselbe wolkenartige Ansehen wie Fig. 3 aufweist.

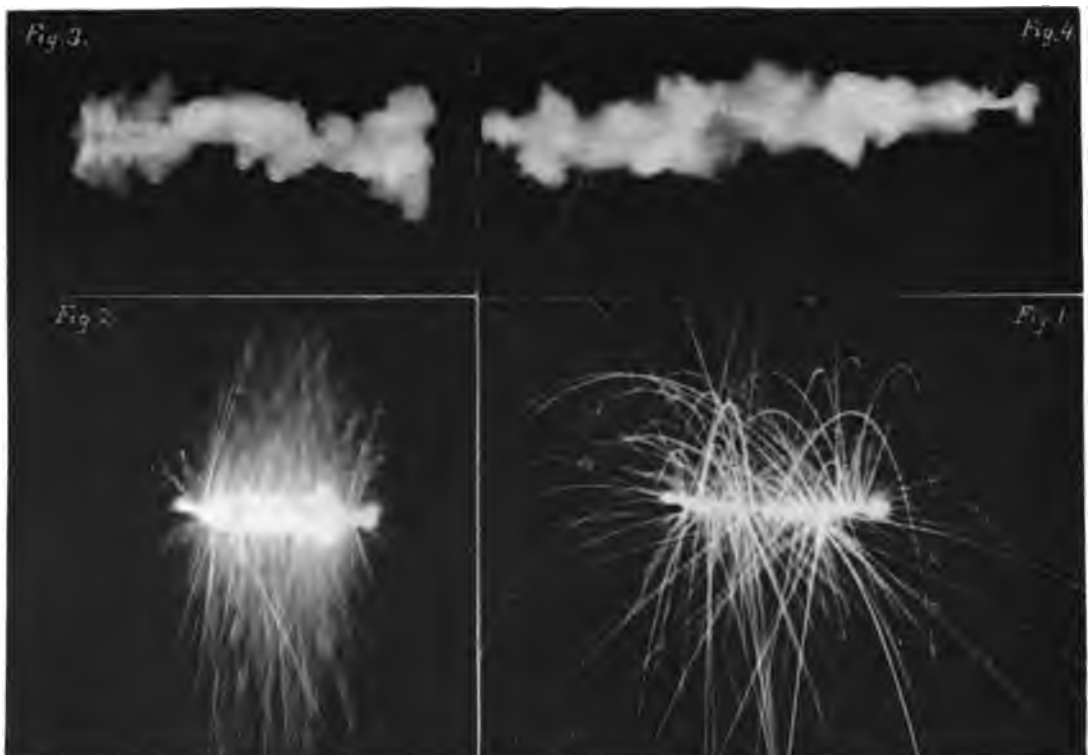


Fig. 3.
Fig. 4
Fig. 2.
Fig. 1

IX. SITZUNG VOM 16. APRIL 1891.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October-December 1890) der Abtheilung III, XCIX. Bd. der Sitzungsberichte vor.

Ferner legt der Secretär eine Abhandlung von Dr. J. Horbaczewski, Professor an der k. k. böhmischen Universität in Prag, vor, betitelt: „Beiträge zur Kenntniss der Bildung der Harnsäure und der Xanthinbasen, sowie die Entstehung der Leucotytosen im Säugethierorganismus". (Nach Versuchen, die zum Theile von den Herren Sadowenj, Mrazek und Formanek ausgeführt wurden.)

Der Secretär legt weiters ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität von Prof. Wilhelm Roux, Vorstand des k. k. anatomischen Institutes der Universität in Innsbruck, vor, welches die Aufschrift führt: „Manuscript des Prof. Wilhelm Roux in Innsbruck vom 11. April 1891, der kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien zur gefälligen Aufbewahrung übersandt am 12. April d. J., zu eröffnen auf nur vom Verfasser unterzeichnetes Ersuchen. W. Roux, Innsbruck."

Das w. M. Herr Prof. Dr. J. Wiesner überreicht eine von Herrn Prof. E. Ráthay ausgeführte Arbeit über die Einwirkung des Blitzes auf die Weinrebe.

Das w. M. Prof. Dr. Fr. Brauer übergibt den II. Theil seiner mit Herrn Julius Edlen v. Bergenstamm unternommenen Vorarbeiten zu einer Monographie der Muscaria schizometopa,

welcher zugleich den V. Abschnitt der Zweiflügler des kaiserl. Museums zu Wien bildet.

Das w. M. Prof. Dr. Adolf Lieben überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. Skraup in Graz, betitelt: „Über die Umwandlung der Maleïnsäure in Fumarsäure".

Ausserdem überreicht Prof. Lieben eine zweite Mittheilung desselben Verfassers: „Zur Theorie der Doppelbindung".

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr überreicht die zweite Mittheilung seiner Arbeit: „Über Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlechte Eins".

Über Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlechte Eins

(II. Mittheilung)[1]

von

Emil Weyr,

w. M. k. Akad.

1. Unter den Flächen eines Büschels $n$ter Ordnung gibt es $4(n-1)^3$ Flächen mit einem Doppelpunkte (Knoten). Wenn die gemeinschaftliche Schnittcurve der Flächen (die Grundcurve des Büschels) einen Doppelpunkt besitzt, so vertritt er zwei von jenen $4(n-1)^3$ Knotenpunkten. Die sämmtlichen durch R_6 gehenden F_3 bilden ein Büschel, dessen Grundcurve aus R_6 und den drei Quadrisecanten $Q_1 Q_2 Q_3$ besteht. Jeder der vier Schnittpunkte a_{ix} ($x = 1, 2, 3, 4$) von R_6 mit Q_i zählt somit für zwei von den 32 Knotenpunkten, welche das F_3-Büschel enthalten muss. Jeder dieser zwölf Punkte a_{ix} ist Doppelpunkt für eine durch R_6 hindurchgehende cubische Fläche. Ausser diesen zwölf F_3 mit Knotenpunkten auf den Q-Geraden (vergl. I. Mittheilung, Art. 18), von denen jede doppelt zu zählen ist, werden somit noch acht Flächen F_3 existiren, welche Knotenpunkte besitzen und R_6 enthalten.

2. Von diesen acht Flächen können wir die Entstehung von vier in folgender Weise angeben.

Das durch die drei Q-Geraden bestimmte Hyperboloid besitzt mit jeder F_3 des Büschels die drei N-Geraden gemeinschaftlich; da nun die F_3 durch eine der N-Geraden, welche (alle Q schneidend) beliebig gewählt werden kann, eindeutig bestimmt erscheint, so bilden die N-Tripel, welche auf den einzelnen F_3 des Büschels

[1] Siehe diese Berichte, Bd. XCIX, S. 932.

liegen, eine (rationale) cubische Involution auf jenem Hyperboloide. Diese Involution wird vier Doppelelemente besitzen. D. h. es gibt vier F_3 des Büschels (jenen vier Doppelelementen entsprechend), von denen jede zwei unendlich nahe (zu einander windschiefe) Gerade enthält. Eine solche Fläche besitzt jedoch einen Knotenpunkt, welcher auf den vereinigten zwei Geraden gelegen ist.

3. Die sämmtlichen in dem Büschel der F_3 auftretenden Knotenpunkte kann man in zwei Classen eintheilen. In solche, welche auf dem Hyperboloide H liegen, welches durch die drei Quadrisecanten Q bestimmt ist und in solche, welche dem H nicht angehören. Die auf H liegenden Knotenpunkte sind wieder zweierlei Art; solche, welche auf einer der Geraden Q_1, Q_2, Q_3 liegen und solche, welche nicht Punkte dieser Geraden sind. Wenn der Knotenpunkt $\varkappa$ einer durch R_6 gehenden F_3 der Curve $(R_6 Q)$ angehört, so muss er ein Doppelpunkt der Curve sein, weil diese Curve der Schnitt jener den Knotenpunkt $\varkappa$ besitzenden F_3 mit irgend einer anderen Fläche des Büschels ist. Solcher Knotenpunkte $\varkappa$ gibt es also nur 12; es sind die Schnittpunkte von R_6 mit den drei Quadrisecanten Q, und zwar zählt jeder doppelt.

Es sei nun F_3 jene durch R_6 gehende cubische Fläche, welche einen der zwölf Punkte, in denen R_6 von den drei Quadrisecanten getroffen wird, zum Knotenpunkte hat; derselbe sei etwa auf Q_1 gelegen, er heisse $\varkappa$, während a, b, c die drei übrigen Schnittpunkte von R_6 mit Q_1 sein mögen. Da R_6 aus $\varkappa$ projicirt einen Kegel fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins liefert, welcher Q_1 zur dreifachen Erzeugenden hat, so muss er noch zwei Doppelerzeugende besitzen. Es gehen also durch $\varkappa$ zwei Gerade, welche R_6 ausser in $\varkappa$ noch zweimal treffen; es seien $a'b'$, respective $a''b''$, diese Treffpunkte. Die Geraden $\varkappa abc$, $\varkappa a'b'$, $\varkappa a''b''$ gehören F_3 an, weil jede mit F_3 mehr als drei Punkte gemeinsam hat.

Wenn eine cubische Fläche einen Knotenpunkt $\varkappa$ erhält, so schneiden sich in demselben sechs der Fläche angehörige gerade Linien, von denen jede zwei windschiefe von den 27 Geraden der Fläche absorbirt,[1] so dass noch weitere 15 Gerade auf einer

[1] Siehe Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung. Leipzig 1867, S 351.

solchen Fläche auftreten. Von den sechs durch $\varkappa$ gehenden Geraden von F_3 haben wir bereits drei. Die Geraden $\varkappa a'b'$, $\varkappa a''b''$ sind zwei Trisecanten, welche die Trisecante abc in einem von a, b und c verschiedenen Punkte (in $\varkappa$) schneiden. Wenn wir also die Trisecante abc mit T_1 bezeichnen, so werden $\varkappa a'b'$, $\varkappa a''b''$ mit t_2, t_3 zu bezeichnen sein (siehe I. Mittheilung, Art. 17). Die Quadrisecante Q_1 erscheint so vereinigt mit der zu ihr windschiefen Trisecante T_1.

Die Ebene $(T_1 t_2)$ enthält die Nichtsecante N_3, und die Ebene $(T_1 t_3)$ enthält die Nichtsecante N_2. Die durch $\varkappa$ zu Q_2 und Q_3 gelegte Transversale gehört F_3 an, weil sie mit der Fläche vier Punkte gemein hat, und da sie auch eine Erzeugende des Hyperboloides H ist, so ist es die dritte Nichtsecante N_1. Die Ebene $N_1 Q_2$ schneidet R_6 in einem Punkte, welcher, mit $\varkappa$ verbunden, eine der F_3 angehörige (weil mit F_3 vier Punkte gemein habende) Gerade liefert; dasselbe gilt von der Ebene $N_1 Q_3$. Die erste von diesen beiden Geraden verbindet $\varkappa$ mit einem zweiten Curvenpunkte, ist also eine Bisecante, und zwar jene, welche N_1 und Q_2 schneidet, und das ist B_{21} (siehe die Tabelle auf S. 16 und 17 der I. Mittheilung); aus demselben Grunde ist die andere dieser beiden Geraden B_{31}.

Nun haben wir alle sechs durch $\varkappa$ gehenden Geraden der cubischen Fläche F_3: $Q_1 = T, t_2, t_3, N_1, B_{21}, B_{31}$. Die übrigen 15 von ihnen und von einander verschiedenen Geraden von F_3 liegen in den 15 Ebenen, welche jene sechs Gerade paarweise verbinden.

In der Ebene $(T_1 t_2)$ liegt N_3; in der Ebene $(T_1 t_3)$ liegt N_2. In der Ebene $(T_1 B_{21})$ liegt E_2, in $(T_1 B_{31})$ liegt E_3. In $(Q_1 N_1)$ liegt B_{11}, und da $Q_1 \equiv T_1$, so ist N_1 auch die dritte in der Ebene $(T_1 B_{11})$ gelegene Gerade; die in $(T_1 B_{11})$ liegende dritte Gerade von F_3 ist aber E_1 so dass also $N_1 \equiv E_1$. Die Gerade B_{21} erscheint somit als dritte Gerade in der Ebene $(E_1 Q_2)$; dies ist jedoch nach dem zu Grunde liegenden Schema auf S. 16 und 17 der I. Mittheilung die Gerade e_3, so dass also $B_{21} \equiv e_3$. Aus ganz analogen Gründen ist $B_{31} \equiv e_2$.

In der Ebene $(t_2 t_3)$ muss eine einpunktige Secante von R_6 liegen, welche zugleich Gerade der F_3 ist; da jede einpunktige Secante zwei Q-Gerade schneiden muss, die in Rede stehende jedoch Q_1 offenbar nicht schneiden kann, so muss sie Q_2 und Q_3

schneiden, und dies ist dem Schema gemäss entweder E_1 oder e_1. Nun muss aber diese Gerade, weil in der Ebene $(t_2 t_3)$ liegend, die Geraden t_2 und t_3 schneiden, folglich ist es e_1.

Es liegt also in der Ebene $(t_2 t_3)$ die Gerade e_1.

In der Ebene $(t_2 N_1)$ muss eine Trisecante liegen, und zwar nach dem Schema offenbar T_3; ebenso liegt in der Ebene $(t_3 N_1)$ die Trisecante T_2.

In der Ebene $(B_{21} B_{31})$ muss eine Trisecante liegen; nun werden B_{21} und B_{31} gleichzeitig nur von den Trisecanten t_1 und T_1 geschnitten, da aber T_1 in der Ebene $(B_{21} B_{31})$ nicht liegen kann, so liegt in der Ebene $(B_{21} B_{31})$ die Trisecante t_1.

In $(B_{21} N_1)$ liegt Q_2, in $(B_{31} N_1)$ liegt Q_3.

In der Ebene $(t_2 B_{31})$, welche identisch ist mit $(t_2 e_2)$, liegt B_{22}.

In der Ebene $(t_2 B_{21}) \equiv (t_2 e_3)$ liegt B_{32}.

In $(t_3 B_{31}) \equiv (t_3 e_2)$ liegt B_{23} und in $(t_3 B_{21}) \equiv (t_3 e_3)$ liegt B_{33}.

Nun haben wir alle 15 Gerade der Fläche F_3, von denen keine durch x hindurchgeht; die übrigen 12 Geraden von F_3 sind paarweise vereinigt und gehen durch den Knotenpunkt x, und zwar sind vereinigt: N_1 mit E_1, e_2 mit B_{31}, e_3 mit B_{21}, Q_1 mit T_1. Ferner ist vereinigt t_2 mit B_{13} und t_3 mit B_{12}; denn es ist t_2 die dritte Gerade in der Ebene $(B_{22} B_{31})$ und daher identisch mit B_{13}, und da t_3 die dritte Gerade in $(B_{33} B_{21})$ ist, so muss sie nach dem Schema mit B_{12} identisch sein.

4. Wenn der Knotenpunkt x' einer durch R_6 gehenden F_3 wohl auf dem durch die drei Quadrisecanten $Q_1 Q_2 Q_3$ bestimmten Hyperboloide H liegt, aber keiner dieser Quadrisecanten angehört, so wird die durch x' gehende, die drei Q schneidende Erzeugende von H eine Gerade von F_3 sein, und zwar eine N-Gerade; die anderen zwei N-Geraden können nicht beide von der durch x' gehenden verschieden sein. Denn wenn dies der Fall wäre, so hätte die durch x' gehende, mit den Q zu demselben Systeme gehörende Erzeugende von H mit F_3 vier Punkte gemeinschaftlich, würde also ganz der F_3 angehören, so dass H mit F_3 vier Erzeugende eines Systems gemeinsam hätte, was nicht möglich ist, weil sonst F_3 zerfallen müsste in H und eine Ebene. Von den drei N-Geraden, welche H mit F_3 gemeinsam hat, fallen folglich zwei zusammen in jener, die durch den Knotenpunkt x' geht; es liegt

also x' auf einer Doppelerzeugenden jener cubischen Erzeugenden-involution, welche das F-Büschel auf H bestimmt.

Umgekehrt kann man zeigen, dass jede Doppelerzeugende jener cubischen Involution zu einem auf ihr gelegenen Knotenpunkte x' Veranlassung gibt, so dass den vier Doppelelementen der cubischen Involution entsprechend vier durch R_6 gehende F_3 mit Knotenpunkten x' auftreten werden.

Um nämlich die beiden Trisecanten $t_2 t_3$ von R_6 zu finden, welche eine gegebene Trisecante T_1 schneiden, hat man (I. Mittheilung, Art. 8) durch T_1 an H die beiden Tangentialebenen zu legen; jede von ihnen enthält eine der beiden Trisecanten. Diese beiden Tangentialebenen erhält man, wenn H mit T_1 in den Punkten a, b zum Durchschnitte gebracht wird, und wenn man durch a, b die Erzeugenden N_2, N_3 von H legt, welche die Q schneiden, so sind die Ebenen $(T_1 N_2)$, $(T_1 N_3)$ die gesuchten. Zugleich sind N_2, N_3 zwei von den drei N-Geraden, welche der durch R_6 und T_1 bestimmten F_3 angehören. Fallen $N_2 N_3$ zusammen, ein Doppelelement der mehrerwähnten cubischen Involution bildend, so ist T_1 Tangente von H in $a \equiv b$, und weil die beiden Ebenen $(T_1 N_2)$, $(T_1 N_3)$ zusammenfallen, so werden auch die beiden Trisecanten $t_2 t_3$, welche T_1 schneiden, unendlich nahe zu einander rücken. Ist N_1 die dritte, das Doppelelement $N_2 N_3$ zu einem Tripel der cubischen Involution ergänzende Erzeugende von H, so wird t_2 von N_1 und N_3 (von letzterer etwa in m), und t_3 wird von N_1 und N_2 (von letzterer etwa in n) geschnitten. Die durch T_1 und R_6 gehende F_3 enthält auch $t_2 t_3$ $N_1 N_2 N_3$ und wird ausserdem noch die drei Trisecanten $T_2 T_3 t_1$ enthalten. Da sowohl t_2, t_3 unendlich nahe sind, als auch N_2, N_3, so sind auch m, n zwei unendlich nahe Punkte, und weil T_3 sowohl t_2 als auch N_1 schneidet, so wird der Schnittpunkt n' von T_3 und N_2 ein zu n unendlich naher Punkt sein, und ebenso muss der Schnitt m' von T_2 und N_3 unendlich nahe zu m sein. Und weil T_2 und T_3 die t_1 schneiden und t_1 auch die unendlich nahen Geraden $N_2 N_3$ trifft, so müssen auch T_2 und T_3 unendlich nahe zusammenrücken. Der Punkt, in welchem $m n m' n'$ vereinigt sind, ist folglich ein Knotenpunkt von F_3, weil durch ihn drei Gerade $N_2 t_2 T_2$ von F_3 hindurchgehen. Es gehen also durch diesen Knotenpunkt die drei binären Geraden $N_2 \equiv N_3$, $T_2 \equiv T_3$, $t_2 \equiv t_3$. In

der Ebene $(T_2 t_2)$ liegt die Gerade N_1, in $(N_2 T_2)$ liegt t_1 und in $(N_2 t_2)$ liegt T_1. Durch jeden Punkt des Raumes gehen im Ganzen neun Bisecanten von R_6; die durch den Knotenpunkt gehenden zwei Trisecanten $T_2 t_2$ vertreten sechs von diesen Bisecanten, so dass durch ihn noch drei Bisecanten von R_6 gehen werden, welche der F_3 angehören müssen, weil jede mit F_3 vier Punkte gemeinschaftlich hat. Jede von diesen Bisecanten muss eine Q-Gerade treffen, und keine zwei können dieselbe Q-Gerade treffen, weil sonst in einer durch diese Q-Gerade gehenden Ebene zwei Bisecanten liegen würden, was unmöglich ist. Diejenige, welche Q_1 trifft, ist die dritte Gerade in der Ebene $(Q_1 N_2) \equiv (Q_1 N_3)$, und somit ist sie sowohl B_{12} als auch B_{13}; ebenso ist jene, welche Q_2 trifft, sowohl B_{22} als auch B_{23}, und endlich ist die dritte, welche Q_3 trifft, sowohl B_{32} als auch B_{33}. Es gehen also durch x' auch die drei binären Geraden $B_{12} \equiv B_{13}$, $B_{22} \equiv B_{23}$, $B_{32} \equiv B_{33}$.

In den Ebenen $(N_1 Q_1)$, $(N_1 Q_2)$, (N_1, Q_3) liegen die Bisecanten B_{11}, B_{21}, B_{31}. In den sechs Ebenen, welche T_2 und t_2 mit den drei durch x' gehenden Bisecanten verbinden, liegen die sechs einpunktigen Secanten e, E. Jede einpunktige Secante muss zwei Q-Gerade treffen. In der Ebene $(T_2 B_{12})$ liegt eine einpunktige Secante, welche Q_1 nicht trifft (weil sonst durch den Schnitt von Q_1 und B_{12} drei Gerade gingen); es kann dies also nur e_1 oder E_1 sein. Weil aber diese fragliche Gerade auch T_3 trifft, so wird es E_1 sein; es liegt also in der Ebene $(T_2 B_{12})$ die Gerade E_1. Ebenso erkennt man, dass in $(T_2 B_{22})$, respective $(T_2 B_{32})$, die Geraden E_2, respective E_3, liegen, ferner in den Ebenen $(t_2 B_{12})$, $(t_2 B_{22})$, $(t_2 B_{32})$ die Geraden e_1, e_2, e_3. Hiemit sind alle Geraden der Fläche F_3 erschöpft.

5. Wir haben endlich noch solche F_3 durch R_6 zu betrachten, welche nicht auf dem Hyperboloide H liegende Knotenpunkte x'' besitzen. Wir werden später sehen, dass es vier solche Flächen gibt und wollen hier nur die Anordnung der Geraden einer solchen F_3 näher untersuchen.

Legt man durch x'' zu je zwei Q-Geraden eine Transversale, so wird dieselbe, weil mit F_3 vier Punkte gemeinsam habend, ganz auf F_3 liegen. Da jede von diesen drei Geraden zwei Q-Gerade schneidet, so können es nur einpunktige Secanten sein, und da jede durch den Knotenpunkt x'' gehende Flächengerade

zwei zusammenfallende windschiefe Gerade vertritt, so wird die durch x'' zu Q_2, Q_3 gelegte Transversale die beiden einpunktigen Secanten $E_1 \equiv e_1$ darstellen; ebenso ist $E_2 \equiv e_2$ die durch x'' zu Q_1, Q_3 gelegte Transversale und $E_3 \equiv e_3$ die durch x'' zu Q_1, Q_2 gelegte Transversale.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen im Ganzen neun Bisecanten von R_6 hindurch; die durch x'' gehenden müssen der Fläche F_3 angehören, weil jede mit ihr vier Punkte gemeinschaftlich hat; keine von ihnen kann mit einer der drei E-Geraden identisch werden, weil dies ja einpunktige Secanten sind. Anderseits gehen durch einen Knotenpunkt einer F_3 nur sechs Flächengerade; drei von ihnen haben wir bereits in E_1, E_2, E_3, so dass sich die sechs durch x'' gehenden Bisecanten auf drei Gerade reduciren müssen. Durch das Zusammenfallen zweier Bisecanten entsteht eine Trisecante, welche aber dann drei durch den Punkt gehende Bisecanten vertritt. Es werden also die neun durch x'' gehenden Bisecanten durch drei durch x'' gehende Trisecanten von R_6 dargestellt sein, und x'' erscheint somit als der Durchschnitt dreier Trisecanten.

„Jeder dem Hyperboloide H nicht angehörige Knotenpunkt einer durch R_6 gehenden Fläche dritter Ordnung ist der Schnittpunkt dreier Trisecanten der Curve."

Da auch die letzten drei Geraden binäre Gerade von F_3 sein müssen, so haben wir sie mit $T_1 \equiv t_1$, $T_2 \equiv t_2$, $T_3 \equiv t_3$ zu bezeichnen.

In den Ebenen $(T_2 T_3)$, $(T_3 T_1)$, $(T_1 T_2)$ liegen die drei Nichtsecanten N_1, N_2, N_3; und endlich liegen in den neun Ebenen $(E_i T_\varkappa)$ die neun Bisecanten $B_{i\varkappa}$ (siehe das Schema in der I. Mittheilung).

Dass es vier Flächen F_3 durch R_6 gibt, welche nicht auf H gelegene Knotenpunkte x'' besitzen, folgt eigentlich schon aus der Zahl der Knotenpunkte des F_3-Büschels; im Ganzen müssen 32 Knoten auftreten, und da die 12 Schnittpunkte von R_6 mit den drei Q-Geraden 24 Knoten vertreten und auf jedem Doppelelemente der cubischen Erzeugendeninvolution auf H ein Knoten liegt, so bleiben noch vier Knoten übrig, welche dem Hyperboloide H nicht angehören.

6. Die zwölf auf Q_1, Q_2, Q_3 liegenden Punkte von R_6, welche nach Früherem als Knotenpunkte von durch R_6 gehenden F_3 auftreten, kann man als durch R_6 schon gegeben betrachten und aus ihnen dann die 21 Geraden jeder dieser F_3-Flächen ableiten.

Zu den beiden Quadrupeln der übrigen acht Knotenpunkte und damit auch zu den zugehörigen acht F_3 kann man in folgender Art gelangen.

Es sei wie früher $\varkappa$ einer der zwölf Punkte von R_6, welche auf den drei Q-Geraden liegen; z. B. einer der vier Schnittpunkte von R_6 mit Q_1. Die durch R_6 gehende F_3, welche $\varkappa$ zum Knotenpunkte hat, wird das Hyperboloid H ausser in den drei Q-Geraden noch in drei Geraden $N_1 N_2 N_3$ schneiden. Die erste von diesen drei Geraden, N_1, ist die durch $\varkappa$ zu Q_2, Q_3 gelegte Transversale. Wenn t_2, t_3 die beiden durch $\varkappa$ gehenden Trisecanten sind (welche R_6 ausser in $\varkappa$ noch in je zwei Punkten treffen), so muss N_2 in der Ebene $Q_1 t_2$ und N_3 in der Ebene $Q_1 t_3$ liegen. Wenn man also Q_2 und Q_3 mit der Ebene $Q_1 t_2$ schneidet und diese beiden Schnittpunkte verbindet, so hat man N_2; ebenso verbindet N_3 die Schnitte von Q_2, Q_3 und der Ebene $Q_1 t_3$. Die Tripel N_1, N_2, N_3, welche den einzelnen durch R_6 gehenden F_3 angehören, bilden auf H eine cubische Involution, für welche wir (den 12 $\varkappa$ entsprechend) zwölf Tripel in der eben angegebenen Weise construiren können. Durch irgend zwei dieser Tripel ist die Involution bestimmt. Es seien D_1, D_2, D_3, D_4 ihre vier Doppelemente, so liegt auf jeder dieser vier Geraden ein Knotenpunkt $\varkappa'$, und haben wir früher gezeigt, dass durch $\varkappa'$ zwei Trisecanten $t \equiv t_3$, $T_2 \equiv T_3$ und drei Bisecanten $B_{12} \equiv B_{13}$, $B_{22} \equiv B_{23}$, $B_{32} \equiv B_{33}$ hindurchgehen, von denen die erste Q_1, die zweite Q_2 und die dritte Q_3 schneidet. Es sind also z. B. B_{12}, Q_2 und D_1 drei in einer Ebene liegende Gerade; man wird also B_{12} erhalten, wenn man R_6 mit der Ebene $Q_1 D_1$ schneidet und die zwei Schnittpunkte (welche ausser den vier auf Q_1 liegenden auftreten) mit einander verbindet. Ebenso ergibt sich B_{22}, respective B_{32}:

„Die drei Ebenen $Q_1 D_i$, $Q_2 D_i$, $Q_3 D_i$ [wobei $D_i (i = 1, 2, 3, 4)$ ein Doppelelement der cubischen auf H auftretenden Erzeugendeninvolution ist] bestimmen auf R_6 drei Punktepaare, deren drei Verbindungsgeraden sich in einem Punkte $\varkappa_i'$ von D_i schneiden. Die vier

Punkte x_i' sind Knotenpunkte für vier cubische durch R_6 gehende Flächen."

7. Um zu den vier Knotenpunkten x'' zu gelangen, welche dem Hyperboloide H nicht angehören, betrachten wir das Flächenbüschel F_3; jede Fläche desselben enthält die sechs Geraden E_i, e_i $(i = 1, 2, 3)$, welche einpunktige Secanten von R_6 sind und jene zwei Q schneiden, die den Index i nicht tragen. Durch irgend eine einpunktige Secante, welche zwei der Q-Geraden trifft, ist die sie enthaltende F_3 des Büschels vollkommen bestimmt und somit auch jene zweite einpunktige Secante, welche dieselben zwei Q-Geraden schneidet. Die Paare $E_i\, e_i$ bilden somit auf einer Fläche vierter Ordnung vom Geschlechte Eins (I. Mittheilung, Art. 19) eine Paarinvolution J_1^2, und ebenso werden die beiden Punkte (E_i), (e_i), in denen die Geraden E_i, e_i der R_6 begegnen, auf dieser Curve eine J_1^2 bilden. Diese J_1^2 hat vier Doppelpunkte (sie ist offenbar fundamental für die R_6), und es wird somit auch viermal vorkommen, dass die Geraden E_i und e_i identisch werden. Dies geschieht aber, wie wir gesehen haben, für jede Fläche, welche einen Knotenpunkt x'' besitzt, da in diesem Falle $E_1 \equiv e_1$, $E_2 \equiv e_2$, $E_3 \equiv e_3$ wird und diese Geraden durch x'' gehen (siehe Art. 5). Wenn man also durch die vier Doppelpunkte der J_1^2 zu den beiden Q-Geraden, welche den Index i nicht tragen, Transversalen legt, so liegt auf jeder einer der vier Knotenpunkte x''. Den Werthen $i = 1, 2, 3$ entsprechend erhält man drei Paarinvolutionen J_1^2 mit dreimal vier, d. i. zwölf Doppelpunkten und somit auch zwölf Gerade (von denen jede zwei Q-Gerade trifft), die viermal zu je dreien durch einen Knotenpunkt hindurchgehen.

Die Paarinvolutionen, von denen gesprochen wurde, können in folgender Weise bestimmt werden. Jede Paarinvolution J_1^2 auf einem Träger vom Geschlechte Eins ist durch ein Elementenpaar bestimmt.

Um z. B. die J_1^2, welche durch die Punktepaare auf E_1, e_1 gebildet wird, zu erhalten, haben wir nur ein solches Geradenpaar zu construiren; dazu eignet sich irgend eine der vier F_3, welche Knotenpunkte x auf der Geraden Q_1 besitzen. Es sei x einer der vier Schnittpunkte von Q_1 mit R_6 und zugleich Knotenpunkt der Fläche F_3, für welche wir das Paar E_1, e_1 kennen; es ist nämlich nach Art. 3 die durch x zu Q_2, Q_3 gelegte Transversale die Gerade

E_1, während e_1 in der Ebene $t_2 t_3$ liegt, wenn t_2, t_3 die beiden durch x gehenden Trisecanten sind (welche R_6 ausser in x noch je zweimal schneiden). Die dem Index $i = 1$ entsprechende J_1^2 ist also bestimmt, wenn man dem Punkte x (als Schnittpunkt von R_6 mit E_1) den letzten Schnittpunkt von R_6 mit der Ebene $t_2 t_3$ (als Schnittpunkt von R_6 mit e_1) als entsprechenden Punkt zuordnet. Zugleich haben wir den Satz:

„Durch jeden der vier Schnittpunkte a, b, c, d einer Quadrisecante mit der Curve R_6 gehen zwei Trisecanten, deren Ebene die Curve in dem Punkte a', b', c', d' respective schneiden möge; die vier Punktepaare aa') bb', cc', dd' gehören einer und derselben Paarinvolution auf R_6 an. So erhält man den drei Quadrisecanten entsprechend drei (fundamentale) Paarinvolutionen. Legt man durch die vier Doppelpunkte jeder dieser Involutionen die Transversalen zu den beiden Quadrisecanten, denen die betreffende Involution nicht entspricht, so erhält man zwölf Gerade, welche viermal zu je dreien durch vier Punkte x'' hindurchgehen. Diese Punkte x'' sind Knotenpunkte von vier durch R_6 hindurchgehenden Flächen dritten Grades."

X. SITZUNG VOM 23. APRIL 1891.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über die Oxydation der Natriumalkoholate durch den Sauerstoff der Luft", von Herrn Franz v. Hemmelmayr in Prag.
2. „Über eine geometrische Darstellung in der Theorie der linearen Formen", von Herrn Emil Waelsch, Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.
3. „Vollständige Lösung des imaginären Problems" von Herrn F. J. Popp, wirklichen Lehrer zu Deutsch-Giesshübl (Böhmen).
4. „Über Functionen, welche gewissen Functionalgleichungen genügen", II., von Herrn Dr. W. Wirtinger, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

Herr Dr. J. Puluj, Prof. an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag, übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Über periodisch veränderliche elektromotorische Kräfte, welche in einem Leiter mit Selbstinduction nur in einer Richtung wirken".

Das w. M. Herr Hofrath Dr. C. Claus überreicht eine Abhandlung von stud. phil. Rudolf Ritter v. Stummer-Traunfels, betitelt: „Vergleichende Untersuchungen über die Mundwerkzeuge der Thysanuren und Collembola".

Das w. M. Herr Prof. J. Wiesner überreicht eine im pflanzenphysiologischen Institute der k. k. Wiener Universität von Herrn

G. Protits ausgeführte Arbeit, betitelt: „Vergleichend-anatomische Untersuchung über die Vegetationsorgane der Kerrieen, Spiraeen und Potentilleen".

Der Vorsitzende Herr Prof. J. Stefan überreicht eine Mittheilung: „Über Wheatstone's Bestimmung der Geschwindigkeit der Elektricität".

Derselbe überreicht ferner eine von Herrn Dr. Gustav Jäger verfasste Abhandlung: „Über das Gesetz der Oberflächenspannung von Lösungen".

Herr Dr. Friedrich Bidschof, Assistent an der k. k. Universitätssternwarte zu Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Bestimmung der Bahn des Kometen 1890 II".

Über den magnetischen Arbeitswerth von Substanzen veränderlicher Magnetisirungszahl, insbesondere von Eisen

von

Dr. **Gottlieb Adler**,

Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. April 1891.)

Die vorliegende Abhandlung stellt sich die Aufgabe, den Ausdruck für den Arbeitswerth der magnetischen Polarisation von Substanzen veränderlicher Magnetisirungszahl herzuleiten und zur Beschreibung einer Reihe von Erscheinungen zu verwenden, dabei, abweichend von der Übung englischer Autoren, lediglich die Begriffe magnetische Kraft H und magnetisches Moment J benützend.

Sie gelangt in §. 1 auf Grund eines von Thomson zuerst angewandten Gedankenganges, in §. 2 auf anderem Wege zum nachstehenden Ausdrucke für den Arbeitswerth der magnetischen Polarisation

$$W = -\frac{1}{2}\int J_1 H_1 \cos(J_1, H_1)\, dv - \int J_1^2 \left(\frac{1}{2k_1} - \int_0^{J_1} \frac{d\vartheta}{k}\right) dv, \quad \text{I)}$$

wo die Integration über alle Volumelemente dv des magnetischen Körpers sich erstreckt.

Hierin bezeichnet H die Intensität der ursprünglich an der bezüglichen Stelle herrschenden Magnetkraft, J_1 das daselbst schliesslich erzielte magnetische Moment, (J, H) den Winkel zwischen den Richtungen beider, endlich $k_1 = \frac{J_1}{H_1}$ den dem schliesslich erreichten magnetischen Momente entsprechenden Werth der Magnetisirungszahl. Letztere ist hiebei, dem Vorgange

Stefan's folgend, als Function des magnetischen Moments aufgefasst und k bezeichnet ihren Werth, wie er in jenem Augenblicke des Magnetisirungsvorganges statthat, in welchem das magnetische Moment den Bruchtheil ϑJ_1 seines schliesslichen Betrages J_1 besitzt.

Der Energieausdruck I tritt als quadratische Function des magnetischen Moments J auf, somit in jener Form, in der die kinetische Energie in der Dynamik uns entgegenzutreten pflegt. In dieser Form hat J. J. Thomson in seinen „Anwendungen der Dynamik auf Probleme der Physik" den magnetischen Arbeitswerth vermuthet und zu bestimmen gesucht, wobei lediglich eine, wie in §. 3 gezeigt wird, unstatthafte Verallgemeinerung ihn zu einem unrichtigen Energieausdrucke gelangen lässt.

Für Substanzen unveränderlicher Magnetisirungszahl ist $k = k_1$, und für sie verschwindet also der zweite Posten in Formel (I). Dieser stellt also im Allgemeinen den Einfluss dar, den die Veränderlichkeit der Magnetisirungszahl für den Betrag des magnetischen Arbeitswerthes besitzt. §. 4 discutirt diesen Einfluss auf Grund des experimentell festgestellten Verlaufes der Magnetisirungszahl.

§. 5 untersucht die von Warburg und Ewing eingehend studirte Hysteresis, eine namentlich bei Eisen auftretende Eigenthümlichkeit, die darin besteht, dass die Magnetisirungszahl $\frac{J}{H}$ für denselben Betrag des magnetischen Moments, ϑJ, bei aufsteigender Magnetisirung einen anderen Werth k hat, als bei absteigender, wo er k' ist. Es hat dies zur Folge, dass bei Ausführung eines vollständigen Kreisprocesses mit der fraglichen Substanz pro Volumeinheit ein Energiebetrag

$$D = 2J_1^2 \int_0^1 \vartheta \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k'}\right) d\vartheta$$

dissipirt wird, der als äquivalente Wärme zu Tage tritt.

Die Aufstellung und Discussion eines Ausdruckes für den Arbeitswerth des remanenten Magnetismus bildet den Inhalt von §. 6.

Bei Herleitung des Arbeitswerthes W war die Constanz der Temperatur stillschweigend, aber wesentlich vorausgesetzt

worden. Berücksichtigt man jedoch, dass die Magnetisirungszahl k auch Function der Temperatur ist, so ergibt sich, dass W die Bedeutung der mechanisch verwerthbaren oder gemäss der Helmholtz'schen Fassung der Thermodynamik die der „freien" Energie besitzt. Eine ungemein einfache Anwendung der in letzterer aufgestellten Sätze führt vom Ausdrucke der freien zu jenem der Totalenergie U der magnetischen Polarisation. Eine einfache Discussion ergibt als die physikalische Bedeutung letzterer, dass sie jene Wärmemenge ist, die zur Aufhebung der magnetischen Polarisation der Substanz erforderlich ist.

Schliesslich verwendet die Abhandlung diese Sätze, um aus ihnen den Nutzeffect des thermomagnetischen Motors abzuleiten.

§. 1.

Ein erster Weg, die Energie magnetisch polarisirter Körper zu berechnen, ist auf einen Thomson'schen Gedankengang gegründet; es besteht dieser darin, die Energie zu berechnen als Gesammtbetrag der mechanischen Arbeit, welche gegen die sämmtlichen wirksamen Magnetkräfte, die ursprünglichen sowohl, wie die durch die Polarisirung geweckten, geleistet werden muss, um die Polarisirung, von Null beginnend, in ihrem schliesslichen Betrage zu erzielen.

Es bezeichnen E, F, G die nach den rechtwinkeligen Coordinatenaxen genommenen Componenten der ursprünglichen, im Felde herrschenden Magnetkraft H; $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die nach denselben Axen genommenen Componenten jener Magnetkraft $\mathfrak{R}$, die durch die auf der Oberfläche und im Innern des magnetischen Körpers in Folge der Polarisirung auftretenden freien Magnetismen wachgerufen werden, endlich J_1 die Intensität des magnetischen Moments, das unter Wirksamkeit dieser Kräfte schliesslich in der Volumseinheit erzielt wird, A_1, B_1, C_1 dessen Componenten. Dann sind diese letzteren mit ersteren Grössen durch die Gleichungen verknüpft

$$A_1 = k_1(E_1 + \mathfrak{X}_1);\ B_1 = k_1(F_1 + \mathfrak{Y}_1);\ C_1 = k_1(G_1 + \mathfrak{Z}_1), \qquad 1)$$

wo k_1 den dem schliesslich erzielten magnetischen Moment entsprechenden Werth der — veränderlichen — Magnetisirungszahl k bezeichnet.

Schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$E_1 + \mathfrak{X}_1 - \frac{A_1}{k_1} = 0; \quad F_1 + \mathfrak{Y}_1 - \frac{B_1}{k_1} = 0; \quad G_1 + \mathfrak{Z}_1 - \frac{C_1}{k_1} = 0, \quad 2)$$

so können wir die Gleichgewichtsbedingung magnetisch polarisirter Körper auch dahin formuliren, dass im schliesslichen Zustande die ursprüngliche Magnetkraft H_1 und die durch die freien Magnetismen geweckte Kraft $\mathfrak{R}$ mit einer Kraft $-\frac{J_1}{k_1}$ sich das Gleichgewicht halten, die ich nach dem Vorgange Stefan's[1] als die magnetische Molecularkraft bezeichne.

Der Berechnung des Energiewerthes liegt folgende Formel zu Grunde. Um unter der Wirkung einer Magnetkraft K einen unendlich kleinen Elementarmagnet zu erzeugen dadurch, dass man die beiden, ursprünglich an dem einen Ende desselben vereinigten und daher neutralisirten, magnetischen Massen $+m$ und $-m$ in ihre um dn der Länge und Richtung nach von einander entfernten Lagen bringt, ist eine Arbeit aufzuwenden

$$dW = -mK\cos(K, n)\,dn = -KdJ\cos(K, J), \qquad 3)$$

wo dJ das erzeugte magnetische Moment mdn und (K, J) den Winkel zwischen ihrer Richtung und der der wirksamen Kraft K bezeichnet.

Wir denken uns nun, dem Thomson'schen Gedankengange folgend, den Vorgang der magnetischen Polarisirung als einen successiven, von Null beginnend, zum schliesslichen Betrage J_1 ansteigend. In jenem Augenblicke des so gedachten Polarisirungsvorganges, in welchem das magnetische Moment in allen Volumelementen des Körpers denselben Bruchtheil θJ_1 seines schliesslichen Betrages J_1 erreicht hat, haben dann von den in der Gleichung 2) vorkommenden Kräften H_1 seinen unveränderten Werth; $\mathfrak{R}$, da es von den bei der Polarisirung auftretenden freien Magnetismen herrührt und mit letzteren proportional ist, hat dann gleichfalls den Bruchtheil $\theta\mathfrak{R}_1$ seines schliesslichen Werthes erreicht, die magnetische Molecularkraft endlich hat gleichzeitig den Werth $\frac{\theta J_1}{k}$, wo k den dem momentan herrschenden magneti-

[1] Siehe Stefan, Diese Ber., Bd. 69, Abth. II, S. 185—196.

schen Moment θJ_1 entsprechenden Werth der Magnetisirungszahl bezeichnet, diese dem Vorgange Stefan's folgend als Function des magnetischen Moments gedacht.

Die Berechnung der Arbeit nun, die gegen die Wirksamkeit all' dieser Kräfte zu leisten ist, um das magnetische Moment zunächst von θJ_1 auf $(\theta+d\theta)J_1$ zu steigern, soll unter Zugrundelegung von 3) für die einzelnen Componenten einzeln berechnet werden.

So ergibt sich gemäss 3) die gegen die X-Componenten jener Kräfte zu leistende Arbeit um θA_1 auf $(\theta+d\theta)A_1$ zu steigern als

$$dW_1 = -\int\left(E_1+\theta\mathfrak{X}_1+\frac{\theta A_1}{k}\right)d\theta.A_1dv,$$

wo die Integration über alle Volumelemente dv magnetisirbarer Substanz sich erstreckt. Zur Erzielung des schliesslichen Betrages der Magnetisirungscomponente A ist somit die Arbeit nothwendig

$$\begin{aligned} W_1 &= -\int\int_0^1\left(E_1+\theta\mathfrak{X}_1+\frac{\theta A_1}{k}\right)A_1d\theta.dv \\ &= -\int\left[A_1E_1+\frac{A_1\mathfrak{X}_1}{2}-A_1^2\int_0^1\frac{\theta d\theta}{k}\right]dv \end{aligned}$$

oder unter Berücksichtigung der Gleichung 2)

$$W_1 = -\int\left[\frac{A_1E_1}{2}+\frac{A_1^2}{2k_1}-A_1^2\int_0^1\frac{\theta d\theta}{k}\right]dv.$$

Durch Addition der analog für die auf die Y- und Z-Componenten entfallenden Theilbeträge der aufzuwendenden mechanischen Arbeit, W_2 und W_3 ergibt sich der Arbeitswerth der vollzogenen Polarisirung der magnetischen Substanz

$$W = -\int\left[\frac{1}{2}(A_1E_1+B_1F_1+C_1G_1)+J_1^2\left(\frac{1}{2k_1}-\int_0^1\frac{\theta d\theta}{k}\right)\right]dv \quad \text{I)}$$

§. 2.

Zum Ausdrucke für den Arbeitswerth eines magnetisch polarisirten Körpers führt noch ein zweiter Weg, jener, dieselbe zu berechnen als Gesammtbetrag der mechanischen Arbeit, die

aufzuwenden ist, um den Körper, seine Configuration als starr betrachtet, aus der Unendlichkeit an die bezügliche Stelle des Magnetfeldes gegen die Wirkung der Kräfte desselben zu bringen.

Bezeichnen E, F, G, wie vorhin, die nach den Coordinatenaxen genommenen Componenten der äusseren Magnetkraft H, so ist die mechanische Kraftwirkung, die diese auf einen Elementarmagnet von der Intensität

$$dJ = m\,dn,$$

wo m die Polstärke, dn die Poldistanz bezeichnet, ausübt, gegeben durch die Differenz der auf jeden der beiden Pole einzeln ausgeübten Kraftwirkungen, also

$$P = -\left[m\frac{\partial E}{\partial x}dx + m\frac{\partial F}{\partial y}dy + m\frac{\partial G}{\partial z}dz\right] \qquad 4a)$$

oder unter Einführung der auf die Coordinatenaxen entfallenden Componenten des magnetischen Moments

$$P = -\left[\frac{\partial E}{\partial x}dA + \frac{\partial F}{\partial y}dB + \frac{\partial G}{\partial z}dC\right]. \qquad 4)$$

Um also das Volumelement dv eines magnetischen Körpers von einer Stelle des Magnetfeldes, die durch den Werth H der ursprünglichen Magnetkraft charakterisirt ist, nach einer anderen zu bringen, wo diese $H+dH$ beträgt, ist eine gegen diese äussere Magnetkraft zu leistende Arbeit nothwendig gegeben als

$$\begin{aligned} dw &= -\left[A\frac{\partial E}{\partial x}dx + B\frac{\partial F}{\partial y}dy + C\frac{\partial G}{\partial z}\partial z\right]dv \\ &= -\left[J\cos(H, J)\,dH\right]dv, \end{aligned} \qquad 5)$$

wo J, beziehungsweise A, B, C, die der bezüglichen Lage entsprechenden Werthe der magnetischen Polarisirung bezeichnen.

Bei der oben definirten Verrückung des ganzen magnetisch polarisirten Körpers ist somit — da in Folge der festgesetzten Unveränderlichkeit seiner Configuration die übrigen durch Gleichung 2) definirten Magnetkräfte hiebei keine Arbeit leisten — die Gesammtzunahme des Arbeitswerthes

$$dW = -\int \left[A \frac{\partial E}{\partial x} dx + B \frac{\partial F}{\partial y} dy + C \frac{\partial G}{\partial z} dz \right] dv$$

$$= -\int [J \cos (J, H)\, dH]\, dv\,, \qquad 5a)$$

wo die Integration über alle Volumelemente des magnetisch polarisirten Körpers sich erstreckt.

Nehmen wir nun weiters an, dass die Bewegung des magnetischen Körpers aus der Unendlichkeit in seine schliessliche Lage im Magnetfelde so langsam vor sich geht, dass die Componenten des magnetischen Moments J in jedem Augenblicke des bezeichneten Vorganges sich stets in jenen Werth einordnen, der ihnen durch die Gleichungen 2) vorgezeichnet ist, dann ist nur[1] der durch $5a$) gegebene Arbeitsbetrag in Rechnung zu ziehen und der Gesammtarbeitswerth des magnetisch polarisirten Systems in seiner schliesslichen Lage im Magnetfelde ist gegeben durch

$$W = -\int\int_0^{H_1} J \cos (J, H)\, dH dv\,, \qquad II)$$

wo die innere Integration nach H auszuführen ist von dem in unendlicher Distanz herrschenden Werthe Null bis zu dem an der schliesslich eingenommenen Feldstelle geltenden Werthe H_1, und J den H jeweilig zugeordneten Werth der magnetischen Polarisirungsintensität bezeichnet.

Der Ausdruck II für den Arbeitswerth ist zuerst von Warburg[2] aufgestellt worden.

Unterwirft man den Ausdruck II einer partiellen Integration, so ergibt sich

$$W = -\int [A_1 E_1 + B_1 F_1 + C_1 G_1]\, dv + \int \left[\int_0^1 E dA + F dB + G dC \right] dv$$

$$= -\int J_1 H_1 \cos (H_1, J_1)\, dv + \int\int_0^{J_1} H \cos (H, J)\, dJ dv. \qquad II b)$$

---

[1] Die Einordnung des J in seine jeweilig neuen Werthe vollzieht sich dann nach §. 1 ohne Aufwand äusserer Arbeit, weil zu Beginn wie zu Ende derselben die Gesammtsumme der wirksamen Kräfte gemäss Gleichung 2) gleich Null ist.

[2] Siehe Warburg, Wiedem. Annalen, 1881, Bd. 13, S. 141.

Durch diese Umformung erscheint J als die unabhängig Variable und dies erleichtert die Vergleichung des Ausdruckes II für den Arbeitswerth mit dem in §. 1 abgeleiteten I.

Ersetzt man nämlich im zweiten Posten von II*b*) E, F, G durch ihre aus 2) des §. 1 folgenden Werthe, so ergibt sich, indem wir die Umformung an einem der drei Integrale vollziehen,

$$\int\left[\int_0^{A_1} E\,dA\right] dv = \iint_0^{A_1} \frac{A}{k}\,dA\,dv - \iint_0^{A_1} \mathfrak{X}\,dA\,dv.$$

Zum Zwecke der Ausführung dieser Integrationen denken wir uns wie in §. 1 die Integrationsvariable J als θJ_1 geschrieben, wo J_1 den schliesslichen — oberen Grenz- — Werth von J darstellt, die neue Integrationsvariable θ also zwischen den Grenzen 0 und 1 variirt.

Es ist dann einem bestimmten Werthe von θ ein Zustand des magnetisch polarisirten Körpers zugeordnet, in dem die Intensität seiner Magnetisirung für alle Volumelemente denselben Bruchtheil θJ_1 ihres schliesslichen Betrages J_1 besitzt. Die von dieser Polarisirung herrührende und ihr dem Betrage nach proportionale Magnetkraft $\mathfrak{R}$, beziehungsweise deren Componenten, besitzen dann gleichzeitig Werthe, die derselbe Bruchtheil $\theta\mathfrak{X}_1, \theta\mathfrak{Y}_1, \theta\mathfrak{Z}_1$ ihrer schliesslichen Beträge sind. Es ist somit im Besonderen

$$\int\left[\int^{A_1} E\,dA\right] dv = A_1^2 \int_0^1 \frac{\theta\,d\theta}{k} - \frac{A_1\,\mathfrak{X}_1}{2}.$$

Durch Addition dieses Ausdruckes mit den beiden anderen, entsprechend umgeformten ergibt sich so

$$\iint_0^{J_1} H\cos(H,J)\,dJdv =$$
$$= -\frac{1}{2}\int(A_1\mathfrak{X}_1 + B_1\mathfrak{Y}_1 + C_1\mathfrak{Z}_1)\,dv + \int J_1^2 \int_0^1 \frac{\theta\,d\theta}{k}\,dv \qquad \text{III)}$$

und für den Arbeitswerth der magnetischen Polarisirung

$$W = -\int[A_1E_1 + B_1F_1 + C_1G_1]\,dv - \frac{1}{2}\int[A_1\mathfrak{X}_1 + B_1\mathfrak{Y}_1 + C_1\mathfrak{Z}_1]\,dv$$
$$+ \int\left[\int_0^{J_1} \frac{J\,dJ}{k}\right] dv, \qquad \text{II}b)$$

wo für die Ausführung der Integration im dritten Posten von II*b*) die Magnetisirungszahl k als Function des magnetischen Moments anzusehen ist.

Durch Zusammenziehung der beiden ersten Posten im Ausdrucke II ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichungen 2) des §. 1

$$W = -\frac{1}{2}\int H_1 J_1 \cos(J,H)\,dv + \int J_1^2\left[\int_0^{J_1}\frac{\vartheta\,d\vartheta}{k} - \frac{1}{2k_1}\right]dv \quad \text{I),}$$

identisch mit dem im §. 1 auf anderem Wege abgeleiteten Arbeitswerthe.

§. 3.

Der Ausdruck I für die potentielle Energie W des magnetisch polarisirten Körpers stellt sich in einer Form dar, in welcher nach Hamilton's allgemeinen Gleichungen der Dynamik uns die kinetische Energie entgegenzutreten pflegt, nämlich als quadratische Function jener Variabeln, die gemäss Hamilton's allgemeiner Fassung des Coordinatenbegriffes als „Geschwindigkeiten" anzusehen sind; als diese Grösse erscheint im Energieausdrucke I) das magnetische Moment J_1. Es ist dies ganz conform der Ampère'schen Theorie des Magnetismus, dergemäss das magnetische Moment als Stromintensität aufzufassen ist, welch' letztere, wie Maxwell[1] eingehend dargelegt hat, als „Geschwindigkeit" im Hamilton'schen Sinne angesehen werden kann.

J. J. Thomson hat in seinem Buche (Anwendungen der Dynamik auf Probleme der Physik und Chemie, §§. 33 und 34) direct versucht, auf Grund dieser Hamilton'schen Auffassung die magnetische Energie als $AJ_1^2+BJ_1$ anzusetzen und die Coëfficienten A und B zu bestimmen. Der Umstand jedoch, dass Thomson hiebei die Magnetkraft H des ursprünglichen Magnetfeldes und die magnetische Totalkraft $\mathfrak{R}+H=\frac{J}{k}$ mit einander verwechselt,[2] lässt ihn zu einer vom Ausdrucke I abweichenden, unrichtigen, Formel für den Arbeitswerth gelangen.

---

[1] Siehe Maxwell, Lehrbuch der Elektr., Bd. II, Cap. V und VI.

[2] Nur für sehr schwach magnetisirbare Substanzen ist diese Vernachlässigung von $\mathfrak{R}$ und die daraus resultirende Gleichstellung

Das gleiche Übersehen beeinflusst den von Janet[1] aufgestellten und wahrscheinlich auch den von ihm citirten Duhem'schen Energieausdruck.

§. 4.

Ist die Magnetisirungszahl für die magnetisch polarisirte Substanz constant, $k = k_1$, so verschwindet, wie unmittelbar ersichtlich, im Energieausdrucke I) der mit J_1^2 multiplicirte Klammerausdruck, und der Arbeitswerth reducirt sich auf den in einer früheren Abhandlung[2] für Substanzen constanter Magnetisirungszahl direct abgeleiteten Ausdruck

$$W' = -\frac{1}{2}\int (AE+BF+CG)\,dv = -\frac{1}{2}\int JH\cos(J,H)\,dv. \quad \text{I}a)$$

Der mit J_1^2 multiplicirte Zusatzposten

$$\Delta = J_1^2\left[\int_0^{J_1}\frac{\vartheta\,d\vartheta}{k} - \frac{J}{2k_1}\right]$$

stellt somit den Einfluss der Veränderlichkeit der Magnetisirungszahl auf den Arbeitswerth dar, und die Discussion desselben ist an der Hand des Wertheverlaufes der Magnetisirungszahl k, als Function des magnetischen Moments aufgefasst, sehr leicht zu führen. Dieser Verlauf ist nun, wie aus nachstehender, Ewing's Untersuchungen entnommenen Tabelle ersichtlich ist, für Eisen[3] der folgende:

Die Magnetisirungszahl k beginnt für unendlich kleine Werthe von J mit einem endlichen Werthe, steigt sodann stetig bis zu einem Maximalwerthe, der ungefähr dann eintritt, wenn

---

$H = \frac{J}{k}$ im Allgemeinen gestattet. Daher ist auch beispielsweise die von J. J. Thomson auf Seite 57 (l. c.) für die mechanische Kraft, die auf die magnetische Substanz wirksam ist, allgemein aufgestellte Formel identisch mit jener, welche Maxwell (l. c., II. Bd., S. 70) als lediglich für schwach magnetische Körper giltig ableitet.

[1] Journ. de phys. 8.

[2] Siehe diese Ber., Bd. 92, Abth. II, 1885.

[3] Ein ganz ähnlicher ist der Wertheverlauf der Magnetisirungszahl bei Nickel und Kobalt.

das magnetische Moment $^1/_3$ des erreichbaren Maximums angenommen hat und nimmt sodann stetig ab, für den bei der Sättigungsgrenze erreichten Maximalbetrag des magnetischen Moments von 1600 C. G. S. Einheiten mit dem Werthe 20 ungefähr schliessend.

Es ist somit k als Function des magnetischen Moments für das ganze Wertheintervall, das dieses durchlaufen kann, eindeutig[1] bestimmt, mit Ausschluss des Sättigungspunktes selbst, in dem k mit weiterer Steigerung der Magnetisirungskraft H unbegrenzt abnimmt, also als Function des Moments unbestimmt wird.

Hieraus resultirt für den in Folge der Veränderlichkeit der Magnetisirungszahl zu I a) hinzutretenden Zusatzposten Δ des Arbeitswerthes der nachstehende Wertheverlauf.

In jenem ersten Werthebereiche des magnetischen Moments, für welchen k zunehmende Werthe besitzt, ist Δ, wie unmittelbar ersichtlich, positiv, der Arbeitswerth W der magnetischen Polarisirung somit dem absoluten Betrage nach kleiner, als er es bei derselben magnetischen Anordnung, aber bei unveränderlicher Magnetisirungszahl wäre. Δ nimmt mit wachsenden Werthen von J zu, bis es sein Maximum für jenen Werth des magnetischen Moments annimmt, für welchen k ein Maximum ist. Wächst das magnetische Moment über diesen Werth hinaus, dann wird Δ abnehmen, endlich Null werden und für noch grössere Werthe des magnetischen Moments negativ werden, den Arbeitswerth der magnetischen Polarisation also dem absoluten Betrage nach vergrössern; namentlich wird letzteres für jenen Werthebereich des magnetischen Moments eintreten, wo dieses dem Maximum sich nähert. Bei weiterer Steigerung der Magnetisirungskraft H nach erreichter Sättigungsgrenze stellt den Wertheverlauf des Arbeitswerthes W von den oben aufgestellten Ausdrücken am vortheilhaftesten

$$W = -\int H_1 J_1 \cos(H_1 J_1)\, dv - \int \left\{ \frac{1}{2} J_1 \mathfrak{R}_1 \cos(J_1, \mathfrak{R}_1) - \int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k} \right\} dv \quad \text{II } b)$$

dar, weil der zweite Posten nach Erreichung des Maximalwerthes von J_1 nur mehr als constante Grösse in Anschlag zu bringen ist.

[1] Es wäre dies nicht mehr der Fall, wenn das magnetische Moment nach Erreichung des Maximalwerthes bei weiterer Steigerung der Magnetisirungskraft zu kleineren Werthen zurückkehren würde. Diese von Maxwell (l. c., §. 844) discutirte Eventualität ist durch die bisherigen Experimentaluntersuchungen nicht bestätigt worden.

Sehr leicht ist der Wertheverlauf des Zusatzpostens

$$\Delta = \left[\int_0^{J_1} \frac{JdJ}{k} - \frac{J_1^2}{2k_1}\right]$$

an der Hand einer graphischen Darstellung zu übersehen, in welcher die Werthe der magnetischen Molecularkraft J/k als Function des magnetischen Moments J auf Grund der nachstehenden, von Ewing[1] für weiches Eisen festgestellten Tabelle verzeichnet sind.

J	k	$\frac{J}{k}$	J	k	$\frac{J}{k}$
4	29	0·013	673	245	2·75
10	30	0·33	702	244	2·88
16	38	0·421	764	242	3·15
24	41	0·59	842	235	3·58
33	47	0·7	926	220	4·21
62	63	1	1020	177	5·8
91	79	1·14	1050	163	6·45
140	108	1·4	1070	149	7·14
195	135	1·5	1110	129	8·54
280	177	1·58	1130	110	10·3
364	207	1·8	1150	97	11·89
468	232	2	1190	68	17·5
507	237	2·1	1195	51	23·44
549	241	2·3	1230	34	36·2
614	245	2·5			

In nachstehender Figur ist nämlich der erste Posten von Δ: $\int_0^{J_1} \frac{JdJ}{k}$ dargestellt als jener Flächeninhalt, der von dem J_1 entsprechenden Curvenstücke OM, der Ordinate in seinem Endpunkte und der Abscissenaxe begrenzt ist; $\frac{J_1^2}{2k_1}$ ist hingegen der Flächenraum, den der zum Punkte M gezogene Radiusvector, die Ordinate und die Abscissenaxe einschliessen. Δ als Differenz beider Grössen erscheint also als der Flächenraum, den das J_1 zugehörige Curvenstück mit dem zu seinem Endpunkte gezogenen

[1] Ewing, Phil. transact., vol. 176, p. 548.

Radiusvector begrenzt, positiv gerechnet, wenn derselbe oberhalb, negativ, wenn derselbe unterhalb des Radiusvectors gelegen ist. Nun hat die Curve J/k für jenen Werth von J, für den k ein Maximum ist, einen Inflexionspunkt; bis zu diesem Punkte verläuft sie convex und Δ ist positiv; wächst J weiter, vermindert sich dieser positive Werth, Δ geht durch Null und wird sehr bald negativ mit sehr rasch zunehmenden Beträgen, den absoluten Betrag des Arbeitswerthes W über denjenigen steigernd, der durch dieselbe magnetische Vertheilung bei unveränderlicher Magnetisirungszahl repräsentirt wäre.

§. 5.

Unterwirft man ein Eisenstück einer Reihe langsam aufeinander folgender magnetisirender Kräfte, indem man diese mit einem gewissen Werthe H_1 beginnen, sodann bis zu Null abnehmen, weiters im entgegengesetzten Sinne bis $-H_1$ ansteigen und endlich wieder durch Null gehend zum Ausgangswerthe H_1 zurückkehren lässt, so gelingt es durch eine solche Aufeinanderfolge magnetischer Kraftwirkungen, das Eisen in den ersterlangten Zustand seiner Magnetisirung, J_1, zurückzuversetzen, mit demselben also einen vollständigen Kreisprocess zu vollführen.

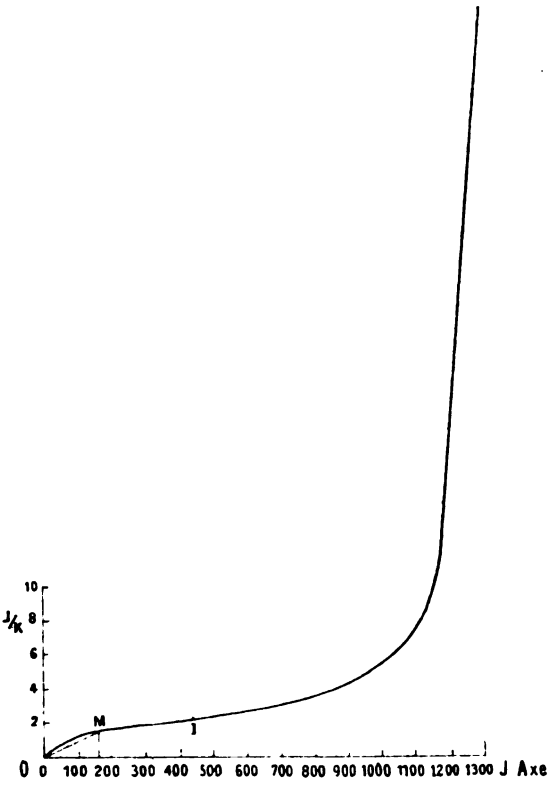


Fig. 1.

Beobachtet man nun die Werthe, welche der inducirte Magnetismus J in jedem Augenblicke des geschilderten, sehr langsam sich vollziehenden, Processes annimmt, so ergibt sich, dass beim Abnehmen der magnetisirenden Kraft der einem bestimmten Betrage H derselben entsprechende Werth des zugehörigen magnetischen Moments J, wie in Folge einer Trägheitswirkung grösser ist als jener, der bei aufsteigendem Verlaufe der Magnetkraft demselben H zugeordnet ist. Diese von Warburg[1] zuerst eingehend untersuchte Erscheinung ist von Ewing[2] als statische Hysteresis bezeichnet worden.

Wie aus dem Ausdrucke II) des Arbeitswerthes unmittelbar ersichtlich ist, hat diese Hysteresis den Effect, dass, wenn das Eisen durch den eben beschriebenen Kreisprocess in denselben magnetischen Zustand — dieselben Werthe von J und H — zurückgebracht ist, ein Restbetrag von Energie verbleibt, gegeben durch das Kreisintegral

$$D = -\int J \cos(J, H)\, dH. \qquad \text{IV)}$$

D stellt also die bei Ausführung des Kreisprocesses dissipirte Energie dar, die als äquivalente Wärme zu Tage tritt.

Aus Gleichung III) des §. 2 ist unmittelbar zu ersehen, dass, sobald es um einen vollständigen Kreisprocess sich handelt,

$$-\int J \cos(J, H)\, dH = \int H \cos(J, H)\, dJ$$

ist; es können somit beide Ausdrücke in vollkommen gleichberechtigter Weise[3] zur Beschreibung magnetischer Kreisprocesse verwendet werden; aus dem zweiten dieser Ausdrücke ist jedoch mit grösster Deutlichkeit ersichtlich, dass für den Betrag dissipirter Energie alle Vorgänge, die seit Erreichung des Maximalmoments bis zum Sinken des magnetischen Moments unter den Sättigungswerth sich abspielen, gänzlich irrelevant sind.

---

[1] Siehe Warburg, Wied. Ann., 13, 1881 und 20, 1883.

[2] Siehe Ewing, Researches in Magnetism. phil. transact., 1885, t. 176, p. 549, 550.

[3] Siehe diesbezüglich Wassmuth, diese Ber., Bd. 94, Abth II, S. 290 und Warburg, diese Ber., Bd. 96, Abth. II, S. 1256—1257.

Ein dritter Ausdruck für den Betrag dissipirter Energie ergibt sich unter Zugrundelegung des Ausdruckes I) für den Arbeitswerth; aus ihm resultirt als Betrag der bei Ausführung eines vollständigen Kreisprocesses in je 1 cm^3 polarisirter Substanz dissipirten Energie

$$D = 2J_1^2\left[\int_0^1 \vartheta\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k'}\right) d\vartheta\right]. \qquad \text{IV}b)$$

Hierin bezeichnet k den Werth, welchen das Verhältniss $\frac{J}{H}$ bei Aufsteigen, k' jenen, den dasselbe bei Absteigen der magnetisirenden Kraft H besitzt, beidemal in jenem Augenblicke, wo das magnetische Moment J denselben Bruchtheil ϑJ_1 des grössten bei Ausführung des Processes erreichten Werthes J_1 besitzt.

Aus dieser Formel ist ersichtlich, inwieferne Joule,[1] der die ersten Untersuchungen über die Erwärmung des Eisens beim Ummagnetisiren durchgeführt hat, zum Ausspruche berechtigt war, dass die bei diesen Processen entwickelte Wärmemenge dem Quadrate des erzielten magnetischen Moments proportional sei.

Aus den eben angeführten Formeln ist unmittelbar ersichtlich, dass auch für Substanzen unveränderlicher Magnetisirungszahl bei Ausführung eines Kreisprocesses eine Zerstreuung von Energie — und somit eine dieser äquivalente Erwärmung — auftreten könnte, wenn in Folge einer thatsächlichen Trägheitswirkung die Werthe des bei Anwendung einer bestimmten Magnetkraft H erzielten magnetischen Moments J einerseits bei Ansteigen der Magnetkraft hinter jenen Werthen zurückblieben, die ihnen durch die Gleichungen 1) des §. 1 zugewiesen sind, hingegen bei Absteigen der Magnetkraft auf grösseren als diesen Werthen verharrten.

Auf diese Ursache scheint die bei Diëlektricis beobachtete Erwärmung,[2] wenn sehr rasche Umkehrungen ihrer diëlektrischen Polarisation vorgenommen wurden, hinzuweisen.

---

[1] Joule, Phil. mag., 1843, t. 23.

[2] Siehe Wiedemann, Lehrb. der Elektricität, Bd. II, §. 60 und IV_2, S. 1271. — Naccari u. Bellati, Atti di Torino, 1882, t. 17.

Auch für die magnetische Polarisation wurde der Effect einer solchen thatsächlichen Trägheitswirkung von Hopkinson, Ewing[1] und Anderen für den Fall erwartet, dass man die Polwechsel in sehr rascher Aufeinanderfolge eintreten liesse, und gerade diese Vermuthung scheint Ewing geleitet zu haben, als er für die oben eingehend besprochene Eigenschaft des Eisens den Namen statische Hysteresis einführte. Neueste, direct nach dieser Hinsicht durch Tanakadaté[2] angestellte Versuche haben jedoch ergeben, dass bei Vornahme von 20—400 Polwechseln in der Secunde die Geschwindigkeit der Umkehrung der Polarisation ohne Einfluss sei auf den Betrag der bei je einer solchen dissipirten und als Wärme zu Tage tretenden Energie.

Zur Illustration der Beträge letzterer möchte ich nachstehend einige Zahlen anführen, die auf experimentelle Ergebnisse von Ewing und Tanakadaté sich gründen. Es ist bei ihrer Gewinnung angenommen, dass die bezüglichen Eisensorten sehr nahe an die Sättigungsgrenze magnetisirt worden und weiterhin, dass die für je 10.000 Ergs dissipirter Energie pro 1 cm^3 Eisen auftretende Wärmemenge die Temperatur desselben um 0·000284° C. erhöht. Dann ergibt sich, dass für je eine Doppelumkehrung der magnetischen Polarisation — wie sie beispielsweise für die einzelnen Theile des Eisenringes in einer Dynamomaschine bei je einer vollen Umdrehung stattfindet — der Betrag der durch die hiebei dissipirte Energie bewirkten Temperaturerhöhung

für sehr weiches Eisen	$0{\cdot}524.10^{-8}$° C.
„ Stahldraht	$1{\cdot}988.10^{-3}$
„ Pianoforte-Stahldraht	$3{\cdot}294.10^{-3}$
„ Wolframstahl	$5{\cdot}68\ .\ 10^{-3}$

beträgt.

§. 6.

Der Arbeitswerth des remanenten Magnetismus ist aus dem Energieausdrucke

$$W = \int \left[-J_1 H_1 \cos(H_1 J_1) + \int_0^{J_1} H \cos(J, H)\, dJ \right] dv \qquad \text{II}b)$$

[1] Siehe Ewing, Phil. trans., 176, p. 554 und 569.

[2] Siehe Tanakadaté, Phil. mag., 1889, V. ser., t. 28, p. 217.

mit Leichtigkeit zu erkennen. Es stellt nämlich II *b*) die Arbeit dar, die aufgewendet werden muss, die magnetischen Körper aus der Unendlichkeit an die bezügliche Feldstelle zu bringen und auf diese Weise die letzterer entsprechende magnetische Polarisation zu erlangen. Nehmen wir nun als einen extremen Fall den an, dass der Körper den Zustand der so erlangten Polarisation bei seiner Entfernung aus dem Magnetfelde unverändert behält — schreiben wir ihm also eine unendlich grosse Coërcitivkraft zu — so ist, da während des Entfernungsvorganges $dJ = 0$ sein soll, zur Entfernung in unendliche Distanz die Arbeit erforderlich

$$W = \int J_1 H_1 \cos(H_1 J_1)\, dv .$$

Es stellt daher

$$W_m = \iint_0^{J_1} H \cos(J, H)\, dJ\, dv$$

den Arbeitswerth des remanenten Magnetismus dar, eine Grösse, die von einigen Autoren auch als Magnetisirungsarbeit bezeichnet worden ist. Wie aus Gleichung III) des §. 2 zu erkennen, ist dieser Ausdruck auch

$$W_m = -\frac{1}{2}\int \mathfrak{R}_1 J_1 \cos(\mathfrak{R}_1, J_1)\, dv + \int\int_0^{J_1} \frac{J_1 dJ_1}{k}\, dv ,$$

also in einer Form darstellbar, in der H, welches das specielle zur Erzeugung des Magneten verwendete Feld charakterisirt, eliminirt erscheint und nur Grössen, die auf ersteren selbst sich beziehen, wie z. B. die von seinen freien Magnetismen herrührende Kraft $\mathfrak{R}_1$ erscheinen.

Untersuchen wir nunmehr den reellen Fall, dass die magnetische Substanz von dem für ihre schliessliche Configuration sich ergebenden magnetischen Moment J_1 bei Entfernung aus dem Magnetfelde nur den Theilbetrag J_r festzuhalten vermag, dann ist bei der Einführung ins Magnetfeld die Arbeit zu leisten

$$W = \int \left\{ -J_1 H_1 \cos(J_1, H_1) + \int_0^{J_1} H \cos(J, H)\, dJ \right\} dv =$$

$$= \int \left\{ -J_1 H_1 \cos(J_1, H_1) + \int_0^{J_r} H \cos(H, J)\, dJ + \int_{J_r}^{J_1} H \cos(H, J)\, dJ \right\} dv .$$

Anderseits ist zur Entfernung aus dem Magnetfelde bis in unendliche Distanz von diesem die Arbeit aufzuwenden

$$W' = \int \left\{ J_1 H_1 \cos(J_1, H_1) + \int_{J_1}^{J_r} H' \cos(J', H')\, dJ' \right\} dv,$$

wo die gestrichenen Buchstaben auf die bei absteigender Magnetisirung einander zugeordneten Werthe von J und H sich beziehen. Somit verbleibt ein Restbetrag von Energie

$$W_R = \int \left\{ \int_0^{J_r} H \cos(H, J)\, dJ + \right.$$
$$\left. + \left[\int_{J_r}^{J_1} H \cos(H, J)\, dJ + \int_{J_1}^{J_r} H' \cos(H', J')\, dJ \right] \right\} dv.$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist aber nichts anderes als $\int H \cos(J, H)\, dJ$ ausgedehnt über einen vollständigen, mit der Substanz ausgeführten Kreisprocess, welcher diese aus dem durch H_r und J_r charakterisirten magnetischen Zustande zuerst durch aufsteigende, sodann durch absteigende Magnetisirung zum Ausgangszustande zurückführt. Gemäss den Betrachtungen des §. 5 erscheint dieser Theil von W_R zur Gänze in Wärme verwandelt.

Der erste Posten von W_R

$$W_r = \int\int_0^{J_r} H \cos(H, J)\, dJ dv$$

stellt daher den in der magnetischen Substanz in Form ihres remanenten Magnetismus aufgespeicherten Arbeitsvorrath dar.

Nach den Gleichungen III) des §. 2 ist W_r auch in der Form darstellbar

$$W_r = -\frac{1}{2} \int J_r \mathfrak{R}_r \cos(J_r, \mathfrak{R}_r)\, dv + \int\int_0^{J_r} \frac{J dJ}{k} dv,$$

und in dieser Gestalt enthält W_r nur mehr auf die magnetisch polarisirte Substanz allein Bezug habende Grössen und kann als „innere Energie" derselben durch directe[1] Betrachtungen abgeleitet werden.

[1] Betti, Lehrb. der Potentialtheorie, deutsch von Mayer. Cap. III, §. 6.

Von den beiden Posten, in welche der Ausdruck W_r zerfällt, ist nur der erste mechanisch verwerthbare Energie, ein Arbeitsvorrath, der durch Polarisirung und mechanische Anziehung anderer magnetischer Substanzen Arbeit leisten kann; er ist wesentlich positiv, da die von den freien Magnetismen herrührende Kraft $\mathfrak{R}_r$ mit der Richtung des magnetischen Moments J_r stets einen stumpfen Winkel einschliesst, wesshalb Maxwell[1] sie auch als die demagnetisirende Kraft bezeichnet. Für Ringe und näherungsweise auch für im Verhältnisse zu ihrem Durchmesser sehr lange, in ihrer Längsaxe magnetisirte Drähte, verschwindet $\mathfrak{R}_r$ und damit dieser erste Posten des Arbeitsvorrathes W_r.

Anderseits wird für denselben Werth des remanenten magnetischen Moments, J_r, der mechanisch verwerthbare Theil des in demselben aufgespeicherten Arbeitsvorrathes umso grösser sein, je grösser $\mathfrak{R}_r$ ist; eine normal zu ihrer Oberfläche magnetisirte Scheibe[2] wird von dem in ihrer remanenten Magnetisirung enthaltenen Arbeitsvorrathe den grössten Bruchtheil in mechanisch verwerthbarer Form besitzen. Indess ist sehr wohl zu beachten, dass der Betrag des remanenten magnetischen Moments J_r wesentlich von der Grösse der Magnetkraft $\mathfrak{R}$ abhängt, insoferne, als diese den wesentlichsten Theil jener demagnetisirenden Kraft darstellt, welche nach Aufhören der Magnetkraft H_1 die durch diese erzeugte Polarisation J_1 zu zerstören[3] strebt.

Der zweite Posten im Ausdrucke von W_r, der im Wesentlichen die gegen die in J/k mitinbegriffenen Coërcitivkräfte geleistete Arbeit enthält, scheint sich bei Vernichtung des remanenten Magnetismus zur Gänze in Wärme umzusetzen, die, sei es im Magneten selbst, sei es in einem denselben umgebenden Stromkreise zu Tage tritt.

---

[1] Maxwell, Lehrb. d. Elektric., II. Bd., S. 85.

[2] Maxwell, l. c., S. 85.

[3] Es tritt dies überaus anschaulich in dem raschen Schwinden des remanenten Magnetismus beim Abreissen des Ankers eines Hufeisenmagnets zu Tage; hiebei wird nämlich das magnetische System aus einem geschlossenen, in welchem $\mathfrak{R} = 0$ ist, in ein offenes verwandelt, in dem $\mathfrak{R}$ durch die an den Trennungsflächen auftretenden freien Magnetismen zu endlichen Werthen gelangt.

§. 7.

Die Betrachtungen, die uns im §. 2 zum Arbeitswerthe W als dem Betrage der mechanischen Arbeit führten, die aufgewendet werden muss, um die magnetisch polarisirbare Substanz aus unendlicher Distanz an die bezügliche Stelle des Magnetfeldes zu bringen, hatten zur stillschweigenden, aber wesentlichen Voraussetzung die, dass bei dieser Überführung die Temperatur des Systems nicht sich ändert; benützt war diese Voraussetzung insofern worden, als die Magnetisirungszahl k als lediglich vom magnetischen Moment J, nicht auch von der Temperatur abhängig angesehen wurde.

W stellt also die potentielle Energie des Systems „für alle in constant bleibender Temperatur sich vollziehenden Vorgänge" dar, ist also das, was Helmholtz[1] als die freie Energie des Systems bezeichnet. Unter Berücksichtigung der Abhängigkeit des k von der Temperatur kann man leicht vom Ausdrucke W zu dem der Totalenergie des U Systems gelangen. Es ist

$$W = U - TS, \tag{1}$$

wo T die absolute Temperatur, S den zugehörigen Werth der Entropie bezeichnet.

Über den Zusammenhang dieser Grössen untereinander gibt Helmholtz die folgenden allgemein giltigen Relationen an.

Lässt sich eine die Configuration des Systems eindeutig bestimmende Variable x — also eine Coordinate im allgemeinen Sinne — finden, derart, dass die das System nach derselben angreifende mechanische Kraft P darstellbar ist als

$$P = \frac{\partial W}{\partial x}, \tag{1a}$$

bezeichnet man mit dQ die dem System bei einer Änderung seines Zustandes zugeführte Wärmemenge, setzt also

$$dQ = X dx + Y dT \tag{2}$$

— die gleichzeitig eintretende Änderung der Entropie ist dann

[1] Siehe Helmholtz, Ges. Abhandl., II. Bd., S. 968, Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge.

bekanntlich $dS = \frac{dQ}{T}$ — dann sind alle diese Grössen aus der freien Energie W ableitbar mit Hilfe der allgemein giltigen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X &= -T\frac{\partial^2 W}{\partial x\, dT} \\ Y &= -T\frac{\partial^2 W}{\partial T^2} \\ S &= -\frac{\partial W}{\partial T} \\ U &= W - T\frac{\partial W}{\partial T} \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Für den vorliegenden Fall ist die Fundamentalbedingung erfüllt, wenn wir auf Grundlage eines Stefan'schen[1] Gedankenganges als die die Lage des Systems im Magnetfelde definirende Grösse x die magnetische Intensität an der bezüglichen Feldstelle, H_1 selbst, wählen. Denn da einerseits

$$W = -\int \left\{ \int_0^{H_1} J \cos(H, J)\, dH \right\} dv$$

ist, anderseits gemäss 4) des §. 1 die das System angreifende mechanische Kraft

$$P = -\int \{ J_1 \cos(J_1 H_1)\, dH_1 \}\, dv$$

ist, so ist in der That Bedingung 1 a) erfüllt,

$$P = \frac{\partial W}{dH_1}.$$

Hienach ergeben die Gleichungen 3) folgende Resultate: X, welches jene Wärmemenge bezeichnet, die dem Systeme von aussen her zugeführt werden muss, um bei seinen Bewegungen im Magnetfelde von Orten niederer zu solchen höherer Magnetkraft seine Temperatur constant zu erhalten, beträgt pro Volumeinheit

$$X = T\frac{\partial [J_1 \cos(J, H)]}{dT}.$$

[1] Siehe Stefan, Über thermomagnetische Motoren, diese Berichte, Bd. 97, Abth. II. a., 1888, S. 74.

Y, welches den Betrag der Vermehrung der specifischen Wärme der Substanz in Folge ihrer magnetischen Polarisation angibt,

$$Y = -T\frac{\partial^2 W}{\partial T^2},$$

beide Formeln identisch mit den von Stefan[1] aufgestellten.

Die Entropie des magnetisch polarisirten Systems ist $S = -\frac{\partial W}{\partial T}$, und somit ergibt die letzte der Gleichungen 3) für die Totalenergie desselben den Ausdruck

$$U = W - T\frac{\partial W}{dT}$$

$$= -\int^{H_1} J\cos(J,H)\,dH + \int_0^{H_1} T\frac{\partial[J_1\cos(J,H)]}{\partial T}\,dH, \qquad \text{V)}$$

bezogen auf die Volumseinheit.

Die physikalische Bedeutung der Totalenergie U und ihre Beziehung zum Arbeitswerthe W legt die folgende Überlegung mit Leichtigkeit klar. Bezeichnet T die Temperatur der magnetischen Substanz, T_1 jene, bei welcher sie ihre Magnetisirbarkeit verliert, so ist

$$Q = \int_T^{T_1} Y\,dT = -\int_T^{T_1} T\frac{\partial^2 W}{\partial T^2}\,dT$$

jene Wärmemenge, die der Volumseinheit der Substanz zugeführt werden muss, um die magnetische Polarisation derselben zu vernichten.

Die Ausführung einer einfachen partiellen Integration ergibt weiterhin

$$Q = -\left[T\frac{\partial W}{\partial T}\right]_T^{T_1} + \int_T^{T_1}\frac{\partial W}{\partial T}\,dT$$

$$= W_{T_1} - T_1\frac{\partial W_T}{\partial T_1} - W_T + T\frac{\partial W_T}{\partial T} = U_{T_1} - U.$$

Es ist also die Totalenergie U bis auf eine Constante durch jene Wärmemenge gegeben, die zur Aufhebung der magnetischen Polarisation erforderlich ist.

[1] Siehe Stefan, l. c., S. 75.

Letztere zu bewerkstelligen haben wir demnach zwei Wege: Erstens den, die Substanz durch mechanische Arbeit aus dem Magnetfelde bis in unendliche Distanz von demselben zu schaffen; dazu ist, wenn die Temperatur hiebei constant erhalten wird, die mechanische Arbeit vom Betrage W erforderlich. Zweitens den, die Substanz auf jene Temperatur zu bringen, in der sie ihre Magnetisirbarkeit gänzlich einbüsst; dazu ist eine Wärmemenge nothwendig, deren Betrag im mechanischen Äquivalente U ist.

Der thermomagnetische Motor, wie er von Edison und Stefan construirt worden, basirt auf dem Grundgedanken, die Substanz durch Aufwendung der Wärme U aus dem Magnetfelde ohne Arbeitsaufwand herauszuschaffen und abgekühlt in dasselbe zurückkehren zu lassen, wobei sie die mechanische Arbeit W leistet.

Nach dem eben Gezeigten ist klar, dass hiebei der Energiebetrag

$$S_T - S_{T_1} = T_1 \left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_1 - T \frac{\partial W}{\partial T}$$

als Wärme verbleibt, also nicht in mechanische Arbeit verwandelbar ist. Dieser Betrag ist somit für den Nutzeffect des thermomagnetischen Motors entscheidend, und es ist klar, dass derselbe wesentlich von dem specifischen Verhalten der in Anwendung gebrachten Substanz abhängen wird.

Um ein Beispiel herauszugreifen, so ist für weiches Eisen jene absolute Temperatur, bei der es seine Magnetisirbarkeit verliert, eine sehr hohe, $T_1 = 1058°$. Überdies ist die Abnahme der Magnetisirbarkeit des Eisens gegen diese Temperatur hin eine rapide, sie drängt sich nach Hopkinson[1] zum grössten Theile in ein Temperaturintervall von etwa 15° zusammen, wodurch $\left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_1$ einen sehr hohen Betrag besitzt.

Somit wäre für Eisen $T_1 \left(\frac{\partial W}{\partial T}\right)_1$ ausserordentlich gross und dementsprechend der Nutzeffect eines Eisen verwendenden thermomagnetischen Motors nur sehr klein zu erwarten.

---

[1] Proc. roy. soc. of London, 1890.

Anderseits hat Hopkinson in jüngster Zeit (21) verschiedene Nickel-Eisenlegirungen auf die Abhängigkeit ihrer Magnetisirbarkeit von der Temperatur untersucht und eine so ungemeine Mannigfaltigkeit ihres diesbezüglichen Verhaltens gefunden, dass die Eruirung einer Substanz, die beim thermomagnetischen Motor verwendet, diesem einen hohen Nutzeffect gibt, als sehr wahrscheinlich erscheint.

Das Gesetz der Oberflächenspannung von Lösungen

von

Dr. Gustav Jäger.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

Die verschiedenen Gesetzmässigkeiten, welche man in jüngster Zeit an den Eigenschaften der Lösungen entdeckte, sowie die Ergebnisse meiner eigenen Untersuchungen über die Bedeutung der Capillaritätsconstanten für die Theorie der Flüssigkeiten bewogen mich, die Capillaritätserscheinungen der Lösungen näher zu studiren.

Am wichtigsten für die Theorie der Lösungen sind wohl die Gesetze der molecularen Gefrierpunkts- und Dampfspannungserniedrigung und des osmotischen Druckes. Wir werden im Laufe der Abhandlung noch zu analogen Gesetzen gelangen, welche sich auf die Capillaritätsconstante und deren Temperaturcoëfficienten beziehen.

Folgende einfache Betrachtung soll uns dazu führen. Ein Cylinder, dessen Bodenfläche eine halbdurchlässige Wand bildet, sei mit einer Lösung gefüllt, auf welcher ein Kolben mit einem gewissen Drucke lastet. Ist die äussere Seite der halbdurchlässigen Wand mit dem Lösungsmittel in Berührung, so herrscht Gleichgewicht, d. h. es wird Flüssigkeit durch die Bodenfläche weder ein- noch austreten, wenn der Druck des Kolbens gleich dem osmotischen Drucke ist. Der geringste Überdruck wird daher genügen, um Flüssigkeit aus der Lösung ins Lösungsmittel übertreten zu lassen. Ist p der osmotische Druck, dv das Volumen der durchgepressten Flüssigkeit, so ist die dabei zu leistende Arbeit pdv;

nehmen wir ferner an, die Menge der Lösung im Cylinder sei so gross, dass die Concentration, mithin auch p beim Übergange der Masseneinheit Flüssigkeit aus der Lösung ins Lösungsmittel als constant angenommen werden kann, so ist die dazu erforderliche Arbeit

$$A = pv, \qquad 1)$$

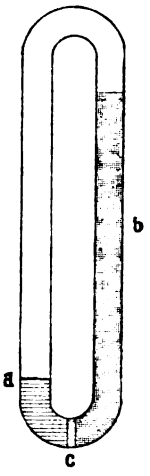
wenn v das specifische Volumen des Lösungsmittels bedeutet.

So oft eine Molekel des Lösungsmittels oder der Lösung sich in Dampf verwandelt, hat sie eine gewisse Arbeit zur Überwindung der Capillarkräfte zu leisten. Dieselbe sei für das Lösungsmittel a, für die Lösung a'; es ist dann, wie wir gleich zeigen werden, jene Arbeit, welche eine Molekel direct beim Übertritte aus der Lösung durch die halbdurchlässige Wand ins Lösungsmittel leisten muss, $a' - a$. Sollte man glauben, dieses Resultat bedürfe nicht erst eines Beweises, so irrt man. Lösungsmittel und Lösung stehen unter einem sehr grossen inneren Drucke, der für beide Flüssigkeiten, insofern wir, wie es jetzt immer geschehen soll, nur verdünnte Lösungen in Betracht ziehen, von ziemlich gleicher Grösse ist. Es wird daher sowohl das Lösungsmittel, als auch die Lösung in allen Theilen bis zur gemeinschaftlichen Berührungsfläche dieselbe Dichte besitzen. Mit der freien Flüssigkeitsoberfläche verhält es sich jedoch anders. Bei dem grossen Unterschiede, welcher hier zwischen dem inneren Drucke der Flüssigkeit und dem Dampfdrucke herrscht, bleibt die Dichte der Flüssigkeit nicht bis zur Oberfläche constant, sondern es findet zwischen Flüssigkeits- und Dampfdichte ein allmäliger Übergang statt.[1] Es ist daher durchaus nicht dasselbe, ob die Molekel direct durch die halbdurchlässige Wand aus der Lösung ins Lösungsmittel übertritt oder den Weg durch die freien Oberflächen nimmt. Wir können jedoch leicht beweisen, dass die auf beiden Wegen zu leistende Arbeit immer dieselbe ist.

Denken wir uns ein O-förmiges, in sich selbst geschlossenes Rohr (s. d. Fig.), welches in seinem unteren Buge eine halbdurchlässige Wand c besitzt. Im Schenkel a befinde sich das Lösungsmittel, im Schenkel b die Lösung, das osmotische Gleichgewicht sei hergestellt. Ist die mittlere Energie einer Molekel im Dampfe

[1] Siehe J. Stefan, Wied. Ann., XXIX, S. 660 ff.

E, so ist sie im Lösungsmittel $E+e+a$, in der Lösung $E+e+a'$. Dabei entspricht e der Arbeitsleistung, welche durch innere Veränderungen der Molekel benöthigt wird. Wäre nun die Arbeit, welche die Molekel beim Durchgange durch die halbdurchlässige Wand zu leisten hat, nicht gleich $a'-a$, sondern grösser oder kleiner, so würde die mittlere Energie einer Molekel sowohl im Lösungsmittel als in der Lösung nicht gleich jener in der Nähe der freien Oberfläche, sondern ebenfalls entsprechend grösser oder kleiner sein. Der Erfolg wäre also eine beständige Temperaturdifferenz in den verschiedenen Theilen der Lösung und des Lösungsmittels, so dass wir hier eine unversiegbare Quelle lebendiger Kraft hätten, was nach dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft nicht anzunehmen ist. Es ist mithin thatsächlich die Arbeit einer Molekel beim Übergange aus der Lösung ins Lösungsmittel gleich $a'-a$, die Arbeit beim Übergange der Masseneinheit gleich $\frac{a'-a}{m}$, wenn m die Masse einer Molekel ist. Wir können demnach die Gleichung 1) schreiben



$$\frac{a'-a}{m} = pv. \qquad 2)$$

Unter der Capillaritätsconstanten α verstehen wir nichts anderes als die Arbeit, welche zur Vergrösserung der freien Oberfläche der Flüssigkeit um die Flächeneinheit geleistet werden muss. Bei vollständig analogen Flüssigkeiten, wie wir es vom Lösungsmittel und einer verdünnten Lösung annehmen können, werden daher die Capillaritätsconstanten den Arbeiten a und a' proportional sein; wir können daher für das Lösungsmittel $\frac{a}{m} = k\alpha$, für die Lösung entsprechend $\frac{a'}{m} = k\alpha'$ setzen, wenn k eine Constante. Daraus folgt für die Gleichung 2)

$$\frac{a'-a}{m} = k(\alpha'-\alpha) = pv. \qquad 3)$$

Für verdünnte Lösungen können wir v constant annehmen, woraus folgt, dass $\alpha'-\alpha$, das ist die Zunahme der Capillaritäts-

constanten mit der Concentration der Lösung, proportional dem osmotischen Drucke ist. Dieser ist aber proportional der Concentration der Lösung und ist bei gleichviel Molekeln des Gelösten für alle Körper eine constante Grösse. Dasselbe gilt demnach auch für die Änderung der Capillaritätsconstanten; dieselbe wächst proportional der Concentration, und es ist in ein und demselben Lösungsmittel die moleculare Zunahme der Capillaritätsconstanten für alle gelösten Substanzen eine constante Grösse.

Für die Elektrolyten haben wir nicht dieses einfache Gesetz, sondern es ergibt sich bei ihnen der osmotische Druck grösser, als nach dem genannten Gesetze zu erwarten steht. Diese Ausnahmen finden ihre Erklärung in der theilweisen Dissociation der einzelnen Bestandtheile des Elektrolyten in der Lösung. Um daher den wirklichen osmotischen Druck zu finden, hat man den nach der Regel berechneten noch mit einem Factor i zu multipliciren, welcher als Mass der Dissociation angesehen werden kann. Dasselbe hat zu geschehen, wenn man für Lösungen von Elektrolyten die moleculare Zunahme der Capillaritätsconstanten richtig erhalten will.

Trotz der zahlreichen Bestimmungen der Capillaritätsconstanten von Lösungen, welche wir bereits besitzen, hielt ich es dennoch für sehr nothwendig, von Neuem eine Reihe von Messungen vorzunehmen. Unser Gesetz bezieht sich nämlich bloss auf verdünnte Lösungen, ausserdem ist die Zunahme der Cohäsion mit der Concentration der Lösung sehr klein. Sie beträgt bei Nichtelektrolyten für ein Grammäquivalent im Liter noch nicht 1%; eine derartige Lösung können wir aber schon nicht mehr eine verdünnte nennen. Um daher obiges Gesetz zu prüfen, bedarf es sehr genauer Messungen. Diese Genauigkeit glaube ich mit Hilfe jener Methode erreicht zu haben, welche ich in der Abhandlung: „Über die Abhängigkeit der Capillaritätsconstanten von der Temperatur und deren Bedeutung für die Theorie der Flüssigkeiten“[1] ausführlich beschrieben habe. Bei vorsichtiger Behandlung des Apparates erhielt ich Werthe, welche im Maximum um etwa zwei Promille unter einander abweichen. In der Regel

[1] Wien. Ber. C. S. 245 ff.

wurden zehn derartige Messungen an jeder Lösung vorgenommen und der Mittelwerth sämmtlicher zur Rechnung benützt. Alle Untersuchungen wurden nahe bei 13·5° gemacht und sodann auf diese Temperatur reducirt. Die Reduction wurde sowohl für das specifische Volumen als auch für die Capillaritätsconstante der Lösung mit Hilfe der entsprechenden Temperaturcoëfficienten des Wassers vorgenommen. Man kann sich dies gestatten, da die bewussten Coëfficienten sowohl für die Lösung als das Lösungsmittel wenig von einander abweichen und die so gemachten Fehler keinen bemerkenswerthen Einfluss haben.

Im Folgenden habe ich das gesammte Beobachtungsmaterial zusammengestellt. Dabei bedeutet h den Höhenunterschied der beiden Enden der Capillarröhren in einem willkürlichen Masse, M das Moleculargewicht des Gelösten, s das specifische Gewicht, v das specifische Volumen, beides bezogen auf Wasser von 4° als Einheit, $\mathfrak{A}$ ist die Zahl der Grammmolekeln im Liter der Lösung, α die Capillaritätsconstante (c.-g.-s.). Letztere wurde nach der in der oben erwähnten Abhandlung abgeleiteten Formel

$$\alpha = 1 \cdot 777 \frac{h}{v + 0 \cdot 1882}$$

berechnet.

Wasser.

h		
48·84, 48·86		
48·82, 48·87	$s = 0 \cdot 9994$	
48·86, 48·45	$v = 1 \cdot 0006$	(13·5°)
48·87, 48·88	$\alpha = 73 \cdot 035$	
48·89, 48·86		
Mittel.. 48·860 (13·5°)		

Chlornatrium, $M = 58 \cdot 5$.

h	19·9% NaCl		h	10·4% NaCl	
46·15, 46·12	$\mathfrak{A} = 3 \cdot 91$		47·38, 47·37	$\mathfrak{A} = 1 \cdot 96$	
46·11, 46·14	$s = 1 \cdot 1495$ (12·1°)		47·34, 47·33	$s = 1 \cdot 0756$ (13·5°)	
46·13, 46·14	$s = 1 \cdot 1493$	(13·5°)	47·36, 47·31	$s = 1 \cdot 0757$	(13·1°)
46·18, 46·14	$v = 0 \cdot 8701$		47·28, 47·37	$v = 0 \cdot 9297$	
46·18	$\alpha = 77 \cdot 479$		47·32	$\alpha = 75 \cdot 251$	
Mittel 46·143 (13·5°)			Mittel 47·340 (13·1°)	$\alpha = 75 \cdot 179$ (13·5°)	

Chlorkalium, $M = 74{\cdot}6$.

h	20·5% KCl	h	10·3% KCl
45·41, 45·38	$\mathfrak{A} = 3{\cdot}13$	47·21, 47·19	$\mathfrak{A} = 1{\cdot}47$
45·45, 45·38	$s = 1{\cdot}1396$ (11·4°)	47·29, 47·20	$s = 1{\cdot}0678$ (11·9°)
45·35, 45·36	$s = 1{\cdot}1395$	47·27, 47·28	$s = 1{\cdot}0677$
45·39, 45·44	$v = 0{\cdot}8775$ (11·9°)	47·29, 47·22	$v = 0{\cdot}9366$ (12·6°)
45·47, 45·43	$\alpha = 75{\cdot}712$	47·20, 47·29	$\alpha = 74{\cdot}638$
	$\alpha = 75{\cdot}423$ (13·5°)		$\alpha = 74{\cdot}513$ (13·5°)
Mittel 45·406 (11·9°)		Mittel 47·244 (12·6°)	

Chlorammonium, $M = 53{\cdot}5$.

h	22·4% NH_4Cl	h	11·3% NH_4Cl
49·68, 49·66	$\mathfrak{A} = 4{\cdot}46$	49·30, 49·24	$\mathfrak{A} = 2{\cdot}19$
49·65, 49·64	$s = 1{\cdot}0664$ (13·7°)	49·25, 49·24	$s = 1{\cdot}0346$ (12·4°)
49·59, 49·66	$s = 1{\cdot}0665$	49·28, 49·32	$s = 1{\cdot}0345$
49·60, 49·66	$v = 0{\cdot}9377$ (13·3°)	49·32, 49·24	$v = 0{\cdot}9667$ (12·7°)
49·61, 49·62	$\alpha = 78{\cdot}343$	49·25	$\alpha = 75{\cdot}813$
	$\alpha = 78{\cdot}306$ (13·5°)		$\alpha = 75{\cdot}668$ (13·5°)
Mittel 49·637 (13·3°)		Mittel 49·271 (12·7°)	

Chlormagnesium, $M = 59{\cdot}8$.

h	19·6% $MgCl_2$	h	12·3% $MgCl_2$
46·40, 46·46	$\mathfrak{A} = 2{\cdot}37$	46·95, 47·05	$\mathfrak{A} = 1{\cdot}41$
46·40, 46·43	$s = 1{\cdot}1507$ (14·0°)	47·00, 47·01	$s = 1{\cdot}0933$ (12·7°)
46·42, 46·40	$s = 1{\cdot}1509$	46·98, 47·02	$s = 1{\cdot}0932$
46·39, 46·37	$v = 0{\cdot}8689$ (13·4°)	47·00, 47·01	$v = 0{\cdot}9148$ (13·1°)
46·36, 46·45	$\alpha = 78{\cdot}012$	46·99, 47·04	$\alpha = 75{\cdot}727$
	$\alpha = 77{\cdot}994$ (13·5°)		$\alpha = 75{\cdot}654$ (13·5°)
Mittel 46·408 (13·4°)		Mittel 47·005 (13·1°)	

Natriumnitrat, $M = 85{\cdot}1$.

h	24·6% $NaNO_3$	h	12·4% $NaNO_3$
43 89, 43·87	$\mathfrak{A} = 3{\cdot}41$	46·59, 46·54	$\mathfrak{A} = 1{\cdot}58$
43·82, 43·85	$s = 1{\cdot}1777$ (12·4°)	46·55, 46·54	$s = 1{\cdot}0844$ (13·2°)
43·85, 43·86	$s = 1{\cdot}1777$	46·52, 46·54	$s = 1{\cdot}0845$
43·89, 43·83	$v = 0{\cdot}8491$ (12·6°)	46·52, 46·51	$v = 0{\cdot}9221$ (12·8°)
43·90, 43·82	$\alpha = 75{\cdot}105$	46·53, 46·52	$\alpha = 74{\cdot}480$
	$\alpha = 74{\cdot}942$ (13·5°)		$\alpha = 74{\cdot}355$ (13·5°)
Mittel 43·858 (12·6°)		Mittel 46·536 (12·8°)	

Natriumcarbonat, $M = 106 \cdot 1$.

h	$10 \cdot 3\%$ Na_2CO_3
$45 \cdot 78$, $45 \cdot 86$	$\mathfrak{A} = 1 \cdot 08$
$45 \cdot 82$, $45 \cdot 78$	$s = 1 \cdot 1078$ $(11 \cdot 5°)$
$45 \cdot 81$, $45 \cdot 86$	$s = 1 \cdot 1078$
$45 \cdot 81$, $45 \cdot 78$	$v = 0 \cdot 9027$ $(11 \cdot 4°)$
$45 \cdot 79$, $45 \cdot 84$	$\alpha = 74 \cdot 628$
	$\alpha = 74 \cdot 255$ $(13 \cdot 5°)$
Mittel.. $45 \cdot 813$ $(11 \cdot 4°)$	

Zucker, $M = 342$.

h	$35 \cdot 2\%$ $C_{12}H_{22}O_{11}$	h	$25 \cdot 2\%$ $C_{12}H_{22}O_{11}$
$43 \cdot 58$, $43 \cdot 47$	$\mathfrak{A} = 1 \cdot 20$	$45 \cdot 16$, $45 \cdot 13$	$\mathfrak{A} = 0 \cdot 82$
$43 \cdot 56$, $43 \cdot 53$	$s = 1 \cdot 1602$ $(13 \cdot 8°)$	$45 \cdot 18$, $45 \cdot 14$	$s = 1 \cdot 1059$ $(13 \cdot 5°)$
$43 \cdot 48$, $43 \cdot 50$	$s = 1 \cdot 1604$	$45 \cdot 11$, $45 \cdot 12$	$s = 1 \cdot 1060$
$43 \cdot 56$, $43 \cdot 52$	$v = 0 \cdot 8618$ $(12 \cdot 7°)$	$45 \cdot 13$, $45 \cdot 13$	$v = 0 \cdot 9042$ $(13 \cdot 1°)$
$43 \cdot 50$, $43 \cdot 50$	$\alpha = 73 \cdot 652$	$45 \cdot 07$, $45 \cdot 14$	$\alpha = 73 \cdot 414$
	$\alpha = 73 \cdot 511$ $(13 \cdot 5°)$		$\alpha = 73 \cdot 346$ $(13 \cdot 5°)$
Mittel $43 \cdot 520$ $(12 \cdot 7°)$		Mittel $45 \cdot 131$ $(13 \cdot 1°)$	

Da unsere Lösungen noch nicht jenen Verdünnungsgrad besitzen, bei welchen die abgeleiteten Gesetze ihre volle Geltung haben, so ist es vorerst natürlich, dass sich eine lineare Zunahme der Capillaritätsconstanten mit der Concentration nur angenähert zeigt; es würde demnach die daraus berechnete moleculare Zunahme nicht den wirklichen Werth ergeben. Ich stelle daher die Zunahme ζ durch eine Gleichung von der Form

$$\zeta = \mu q + \nu q^2$$

dar. μ und ν sind zwei Constanten, und zwar ist μ die moleculare Zunahme, wenn q die Zahl der gelösten Äquivalente bezeichnet.

Nach unserem Gesetze muss nun μ, dividirt durch jenen Factor i, welcher von der Dissociation herrührt, für alle Substanzen eine constante Grösse sein. Die Werthe der i entnahm ich Arrhenius' Angaben, wie sie aus den Gefrierpunktserniedrigungen der Lösungen folgen.[1]

[1] Zeitschr. f. phys. Chemie, I, S. 631 ff.

In folgender Tabelle sind sämmtliche Resultate zusammengestellt:

	μ	ν	i	$\frac{\mu}{i}$
NaCl	1·05	0·021	1·90	0·55
KCl	1·22	—0·146	1·82	0·67
NH_4Cl	1·22	—0·009	1·88	0·65
$MgCl_2$	1·51	0·25	2·64	0·57
$NaNO_3$....	1·07	—0·15	1·82	0·59
Na_2CO_3...	1·13	—	2·18	0·52
$C_{12}H_{22}O_{11}$.	0·35	0·044	1·00	0·35

Sehen wir von der Zuckerlösung ab, so ist die Übereinstimmung der verschiedenen $\frac{\mu}{i}$ eine sehr befriedigende. Es sind die Abweichungen ähnlicher Art, wie jene, welche die Methode der molecularen Erniedrigung der Dampfspannung und des Gefrierpunktes ergibt. Es haben diese Abweichungen auch nichts Befremdliches, wenn man bedenkt, dass der Grad der Dissociation, mithin auch der Factor i, keine constante Grösse ist, sondern mehr oder weniger von der Temperatur und der Concentration der Lösung beeinflusst wird. Was die Zuckerlösung betrifft, so dürfen wir darin keine Ausnahme erblicken, indem wegen des grossen Moleculargewichtes des Zuckers die Zunahme der Cohäsion mit der Concentration so gering ist, dass kleine Beobachtungsfehler schon einen sehr erheblichen Einfluss auf das Resultat haben.

Das Gewicht, welches einem jeden $\frac{\mu}{i}$ zukommt, ist wegen der ziemlich gleich grossen Concentration der untersuchten Lösungen dem μ direct und dem Moleculargewichte verkehrt proportional. Ziehen wir dies in Rechnung, so ergibt sich als Mittel

$$\frac{\mu}{i} = 0{\cdot}59 \ (13{\cdot}5°).$$

Wir wollen nun unsere Resultate mit jenen Anderer vergleichen. Quincke[1] zieht aus seinen umfangreichen Untersuchungen im Wesentlichen folgende Schlüsse. Es ist die wirk-

[1] Pogg. Ann., CLX, S. 560.

liche Cohäsion (α) proportional dem Salzgehalte, ferner haben die Lösungen der Chloride dieselbe moleculare Zunahme der Cohäsion, so dass sich bei diesen Salzen die Beobachtungen an Capillarröhren nahezu durch die Gleichung

$$(\alpha) = 7\,mg,\,35 + 0\cdot1783\,y,$$

die Beobachtungen an flachen Luftblasen nahezu durch die Gleichung

$$\alpha = 8\,mg,\,30 + 0\cdot1870\,y$$

darstellen lassen, wobei y die Zahl der Äquivalente bedeutet, welche in 100 Äquivalenten Wasser gelöst sind. Rechnen wir diese Zahlen in absolutes Mass (c.-g.-s.) um, so ergibt dies

$$(\alpha) = 72\cdot0 - 0\cdot97\,q, \qquad \alpha = 81\cdot4 - 1\cdot02\,q.$$

Es ist also bei Quincke der Werth von μ etwas kleiner als der unserige. Dies findet seinen Grund lediglich darin, dass die untersuchten Lösungen nicht hinreichend verdünnt waren. Im Übrigen müssen wir die Messungen Quincke's mit Rücksicht auf seine Messmethoden ausgezeichnet nennen. Dass er überhaupt obige Beziehung fand, rührt daher, dass der Grad der Dissociation bei den meisten Chloriden ziemlich derselbe ist, so dass sich der Factor i für die verschiedenen Salze nur wenig ändert; gleichzeitig erklärt dies auch, warum nur für die Chloride diese Beziehung gefunden wurde und nicht auch für andere Substanzen. Dazu kommt noch, dass die Chloride das kleinste Moleculargewicht haben, mithin die Cohäsion mit dem Procentgehalte der Lösung viel rascher wächst, als bei Salzen von grossem Moleculargewichte, so dass bei letzteren die Beobachtungsfehler das Resultat in viel beträchtlicherem Masse stören.

P. Volkmann[1] folgert aus seinen Messungen: „Mit Ausnahme von Chlorammonium nimmt die specifische Cohäsion a^2 mit zunehmendem Salzgehalte ab. Im Allgemeinen nimmt bei grösserem Salzgehalte a^2 langsamer ab als bei geringerem, ja bei $MgCl_2$ und K_2CO_3 nimmt bei sehr hohem Salzgehalte a^2 wieder zu". Bedenkt man, dass a^2 weiter nichts ist, als ein der

[1] Wied. Ann., XVII, S. 378 ff.

Steighöhe proportionaler Werth, so müssen sich diese Folgerungen angenähert auch bei unserer Methode ergeben, wenn wir für die Steighöhe den Höhenunterschied der beiden Röhrenenden h einführen. In der That zeigen unsere Resultate, dass mit Ausnahme des Chlorammonium allen Lösungen ein kleineres h zukommt als dem reinen Wasser. Nach Volkmann nimmt ferner die wirkliche Cohäsion α durchwegs mit zunehmendem Salzgehalte zu, und zwar ist die Zunahme dem Salzgehalte (der Anzahl Salzäquivalente y, die mit 100 Äquivalenten Wasser in der Salzlösung verbunden sind) nahezu proportional. Die Zunahme x beträgt für ein Äquivalent

$NaCl$	KCl	NH_4Cl	$MgCl_2$	$NaNO_3$	Na_2CO_3
0·181	0·160	0·131	0·197	0·111	0·112 (*mg*)
0·99	0·87	0·71	1·07	0·61	0·61 (c.-g.-s.)
1·05	1·22	1·22	1·51	1·07	1·13

In der 3. Reihe dieser Tabelle sind Volkmann's Zahlen auf die von uns gebrauchten Masseinheiten umgerechnet, die 4. Reihe enthält unsere eigenen Resultate. Auch hier erweisen sich, ebenso wie im Vergleiche zu Quincke's Messungen, unsere Werthe grösser, und zwar aus ebendenselben Gründen wie dort.

In seiner Abhandlung „Über die Steighöhe der Lösungen in Capillarröhren und über das allgemeine Gesetz dieser Erscheinung" stellt M. Goldstein[1] folgenden Satz auf: „Ist H die Steighöhe des Wassers, h die Steighöhe der Lösung, M das Moleculargewicht der gelösten Substanz, i der van't Hoff'sche Coëfficient und C eine Constante, die sich mit dem Procentgehalte der gelösten Substanz ändert, so ist

$$\frac{H-h}{HM} i = C.$$

Zum Belege dafür sind folgende Daten angegeben. Bei einem Gehalte von 17·776% war $10000 \frac{H-h}{HM} i$ für

$NaCl$	13·35	$SrCl_2$	13·78
KCl	13·24	$BaCl_2$	13·77
$MgCl_2$	13·26	$CoCl_2$	13·95
$CaCl_2$	13·36	$CdCl_2$	13·87

[1] Zeitschr. f. phys. Chemie, V, S. 233 ff.

Dass obige Beziehung kein allgemeines Gesetz, sondern lediglich eine für eine beschränkte Reihe von Chloriden giltige Formel ist, geht einerseits aus den von uns gemachten theoretischen Betrachtungen, anderseits aus den directen Beobachtungen hervor. Ich führe hier nur das Chlorammonium an, welches sowohl nach Quincke's, Volkmann's als nach meinen eigenen Messungen eine grössere Steighöhe hat als das reine Wasser, mithin mit obiger Formel in auffallendem Widerspruche steht. Dasselbe ist von der Beziehung zu sagen, welche J. Traube in seiner Abhandlung „Capillaritätserscheinungen in Beziehung zur Constitution und zum Moleculargewicht“[1] aufstellt. Dieselbe lautet: „Die Steighöhenunterschiede der Lösungen je eines Körpers in verschiedenen, aber entsprechend gleichen Concentrationen verhalten sich wie die Moleculargewichte der gelösten Körper“. Es ist dies nur eine allgemeine Fassung der Goldstein'schen Ansicht. Übrigens betont Traube in einer späteren Abhandlung[2] ausdrücklich, dass diese Beziehung nur angenähert gilt.

Nach diesen Erörterungen halte ich es für überflüssig, noch weitere Resultate anderer Physiker anzuführen, zumal fast alle sich mehr oder weniger mit den Steighöhen, in den wenigsten Fällen aber mit der Capillaritätsconstanten befassen. Auch in der jüngst erschienenen Abhandlung von W. Ochsé: „Experimentelle Untersuchungen über den Einfluss der Concentration und der Temperatur einiger wässeriger Salzlösungen auf ihre Oberflächenspannung“[3] wird bloss der sogenannten specifischen Cohäsion Beachtung geschenkt.

Aus der einfachen Beziehung, welche zwischen der Capillaritätsconstanten und dem osmotischen Drucke besteht, können wir noch weitere Schlüsse ziehen. Für den Fall, als wir das specifische Volumen, mithin auch die Zahl der in der Volumeinheit enthaltenen Molekeln für constant ansehen, was wir wegen des geringen Ausdehnungscoëfficienten der Flüssigkeiten mit grosser Annäherung thun können, bleibt die oben aufgestellte Gleichung $\frac{a}{m} = k\alpha$ bestehen, folglich auch die Gleichung

[1] Beibl. IX, S. 229 ff.

[2] Journ. f. prakt. Chemie, N. F., 1885, S. 186.

[3] Repert. d. Phys., XXVI, S. 641.

$$\frac{a'-a}{m} = k(\alpha'-\alpha) = pv.$$

Bei constanter Concentration der Lösung gilt für den osmotischen Druck die Gleichung

$$p = p_0(1+\gamma t),$$

wenn p_0 der Druck bei der Temperatur 0°, γ der Ausdehnungscoëfficient der Gase und t die Temperatur ist. Daraus folgt

$$k(\alpha'-\alpha) = p_0(1+\gamma t)$$

oder

$$\alpha' = \alpha + \frac{p_0}{k}(1+\gamma t) = \alpha + k_0 \mathfrak{A} i(1+\gamma t),$$

wenn k_0 eine neue Constante ist. $\mathfrak{A}$ und i haben die früher erwähnte Bedeutung. Für $t = 13{\cdot}5°$ fanden wir $\alpha' = \alpha + 0{\cdot}59\,\mathfrak{A} i$, woraus sich $k_0 = 0{\cdot}56$ ergibt; also

$$\alpha' = \alpha + 0{\cdot}56\,\mathfrak{A} i(1+\gamma t). \qquad 4)$$

Zur Prüfung dieser Gleichung bestimmte ich für die meisten der früher angeführten Lösungen die Capillaritätsconstante auch für die Temperaturen 50° und 80°, doch begnügte ich mich bei diesen Untersuchungen mit dem Mittel aus je drei analogen Messungen. Im Nachstehenden folgt das gesammte Beobachtungsmaterial.

Wasser.

h			h		
45·40	$s = 0{\cdot}988$		42·54	$s = 0{\cdot}972$	
45·37	$v = 1{\cdot}012$	(50°)	42·43	$v = 1{\cdot}029$	(80°)
45·35	$\alpha = 67{\cdot}18$		42·49	$\alpha = 62{\cdot}03$	
Mittel 45·37 (50°)			Mittel 42·49 (80°)		

Chlorkalium.

h	$\mathfrak{A} = 1{\cdot}47$		h	$\mathfrak{A} = 1{\cdot}47$	
43·82	$s = 1{\cdot}060$		41·36	$s = 1{\cdot}045$	
43·88	$v = 0{\cdot}943$	(50°)	41·41	$v = 0{\cdot}957$	(80°)
43·94	$\alpha = 68{\cdot}91$		41 42	$\alpha = 64{\cdot}25$	
Mittel 43·88 (50°)			Mittel 41·40 (80°)		

Chlorammonium.

h	$\mathfrak{A} = 4 \cdot 46$		h	$\mathfrak{A} = 4 \cdot 46$	
46·73	$s = 1 \cdot 057$		43·83	$s = 1 \cdot 043$	
46·69	$v = 0 \cdot 946$	(50°)	43·81	$v = 0 \cdot 959$	(80°)
46·77	$\alpha = 73 \cdot 21$		43·86	$\alpha = 67 \cdot 91$	
Mittel 46·73 (50°)			Mittel 43·83 (80°)		

h	$\mathfrak{A} = 2 \cdot 19$		h	$\mathfrak{A} = 2 \cdot 19$	
46·14	$v = 0 \cdot 976$	(50°)	43·46	$v = 0 \cdot 991$	(80°)
46·10	$\alpha = 70 \cdot 40$		43·46	$\alpha = 65 \cdot 45$	
46·15			43·40		
Mittel 46·13 (50°)			Mittel 43·44 (80°)		

Chlormagnesium.

h	$\mathfrak{A} = 2 \cdot 37$		h	$\mathfrak{A} = 2 \cdot 37$	
44·12	$s = 1 \cdot 151$		41·17	$s = 1 \cdot 137$	
44·12	$v = 0 \cdot 869$	(50°)	41·11	$v = 0 \cdot 880$	(80°)
44·07	$\alpha = 74 \cdot 14$		41·15	$\alpha = 68 \cdot 47$	
Mittel 44·10 (50°)			Mittel 41·14 (80°)		

h	$\mathfrak{A} = 1 \cdot 41$		h	$\mathfrak{A} = 1 \cdot 41$	
43·88			41·11		
43·92	$v = 0 \cdot 917$	(50°)	41·06	$v = 0 \cdot 929$	(80°)
43·94	$\alpha = 70 \cdot 63$		41·06	$\alpha = 65 \cdot 32$	
Mittel 43·91 (50°)			Mittel 41·08 (80°)		

Natriumnitrat.

h	$\mathfrak{A} = 3 \cdot 41$		h	$\mathfrak{A} = 3 \cdot 41$	
40·92	$s = 1 \cdot 173$		38·89	$s = 1 \cdot 151$	
41·02	$v = 0 \cdot 853$	(50°)	39·00	$v = 0 \cdot 869$	(80°)
40·96	$\alpha = 69 \cdot 96$		38·88	$\alpha = 65 \cdot 43$	
Mittel 40·97 (50°)			Mittel 38·92 (80°)		

h	$\mathfrak{A} = 1 \cdot 58$		h	$\mathfrak{A} = 1 \cdot 58$	
43·44	$s = 1 \cdot 075$		40·68	$s = 1 \cdot 051$	
43·46	$v = 0 \cdot 930$	(50°)	40·69	$v = 0 \cdot 952$	(80°)
43·46	$\alpha = 69 \cdot 04$		40·63	$\alpha = 63 \cdot 41$	
Mittel 43·45 (50°)			Mittel 40·67 (80°)		

Natriumcarbonat.

h	$\mathfrak{A} = 1{\cdot}08$	
42·25	$s = 1{\cdot}095$	(50°)
42·21	$v = 0{\cdot}913$	
42·28	$\alpha = 68{\cdot}22$	

Mittel 42·25 (50°)

Zucker.

h	$\mathfrak{A} = 1{\cdot}20$	
40·42	$s = 1{\cdot}162$	(50°)
40·47	$v = 0{\cdot}861$	
40·42	$\alpha = 68{\cdot}52$	

Mittel 40·44 (50°)

h	$\mathfrak{A} = 1{\cdot}20$	
38·25	$s = 1{\cdot}147$	(80°)
38·28	$v = 0{\cdot}872$	
38·33	$\alpha = 64{\cdot}18$	

Mittel 38·29 (80°)

h	$\mathfrak{A} = 0{\cdot}82$	
41·91	$s = 1{\cdot}099$	(50°)
41·85	$v = 0{\cdot}910$	
41·96	$\alpha = 67{\cdot}74$	

Mittel 41·91 (50°)

h	$\mathfrak{A} = 0{\cdot}82$	
39·53	$s = 1{\cdot}076$	(80°)
39·40	$v = 0{\cdot}929$	
39·40	$\alpha = 62{\cdot}68$	

Mittel 39·44 (80°)

In der folgenden Tabelle sind die beobachteten mit den nach Gleichung 4) berechneten Werthen der Capillaritätsconstanten α' zusammengestellt, wobei für Wasser

$$\alpha(13{\cdot}5°) = 73{\cdot}04,\ \alpha(50°) = 67{\cdot}18,\ \alpha(80°) = 62{\cdot}03.$$

Substanz	$\mathfrak{A}$	i	t	α'(beob.)	α'(ber.)
NaCl ...	3·91	1·90	13·5°	77·48	77·42
„ ...	1·96	„	„	75·18	75·24
KCl	3·13	1·82	„	75·42	76·39
„	1·47	„	„	74·51	74·61
„	„	„	50	68·91	68·95
„	„	„	80	64·25	63·97
NH_4Cl ..	4·46	1·88	13·5	78·31	77·99
„ ..	„	„	50	73·21	72·50
„ ..	„	„	80	67·91	67·84
„ ..	2·19	„	13·5	75·67	75·46
„ ..	„	„	50	70·40	69·91
„ ..	„	„	80	65·45	65·01
$MgCl_2$ ..	2·37	2·64	13·5	77·99	76·73
„ ...	„	„	50	74·14	71·33

Substanz	$\mathfrak{A}$	i	t	α' (beob.)	α' (ber.)
MgCl	2·37	2·64	80°	68·47	66·56
„	1·41	„	13·5	75·65	75·24
„	„	„	50	70·63	69·65
„	„	„	80	65·32	64·73
$NaNO_3$....	3·41	1·82	13·5	74·94	76·70
„	„	„	50	69·96	71·30
„	„	„	80	65·43	66·53
„	1·58	„	13·5	74·36	74·74
„	„	„	50	69·04	69·09
„	„	„	80	63·41	64·11
Na_2CO_3 ...	1·08	2·18	13·5	74·26	74·42
„ ...	„	„	50	68·22	68·84
$C_{12}H_{22}O_{11}$.	1·20	1·00	13·5	73·51	73·74
„ .	„	„	50	68·52	67·98
„ .	„	„	80	64·18	62·91
„ .	0·82	„	13·5	73·35	73·52
„ .	„	„	50	67·74	67·72
„ .	„	„	80	62·68	62·62

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist eine vollkommen befriedigende. Wie zu erwarten, sind die Abweichungen umso grösser, je concentrirtere Lösungen wir in Betracht ziehen.

Wie bei allen Flüssigkeiten zeigt sich auch bei den Lösungen, dass die Änderung der Capillaritätsconstanten mit der Temperatur nach einer linearen Function erfolgt. Ist also für Wasser $\alpha = \alpha_0(1 - \varepsilon t)$, so können wir für eine Lösung

$$\alpha' = \alpha'_0(1 - \varepsilon' t) \qquad 5)$$

setzen. Im Allgemeinen werden sich α'_0 und ε' mit der Menge und Beschaffenheit der gelösten Substanz ändern. Bringen wir die eben erwähnten Gleichungen mit Gleichung 4) in Verbindung, so lässt sich leicht finden

$$\varepsilon' = \frac{\alpha_0 \varepsilon - 0{\cdot}56\,\mathfrak{A} i \gamma}{\alpha_0 + 0{\cdot}56\,\mathfrak{A} i},$$

woraus mit Vernachlässigung aller höheren Glieder folgt

$$\varepsilon' = \varepsilon - 0{\cdot}56\,\mathfrak{A} i \frac{\gamma + \varepsilon}{\alpha_0}. \qquad 6)$$

Hier haben wir das Gesetz, nach welchem sich der Temperaturcoëfficient der Capillaritätsconstanten einer Lösung mit der Concentration derselben ändert. Es ist das ebenfalls ein allgemeines, für alle verdünnten Lösungen giltiges Gesetz, welches wir folgendermassen formuliren können:

Die moleculare Erniedrigung des Temperaturcoëfficienten der Capillaritätsconstanten ist für alle gelösten Körper eine constante Grösse.

Aus den Werthen von α' bei 13·5° und 80° berechnete ich für die Gleichung 5) α'_0 und ε'. Die auf diese Weise erhaltenen Zahlen benützte ich sodann, um nach derselben Gleichung α' für die Temperatur 50° zu berechnen. Die gute Übereinstimmung, welche sich dabei zwischen Beobachtung und Rechnung zeigt, bestätigt die Berechtigung der Gleichung 5), sowie die weiter daraus gemachten Folgerungen. Die beiden letzten Spalten der folgenden Tabelle zeigen dies. Dieselbe Tabelle enthält unter ε' (beob.) die auf dem soeben erwähnten Wege gefundenen ε', unter ε' (ber.) die nach der Gleichung 6) gefundenen Zahlen. Für Wasser erhalten wir nach obigem Vorgange

$$\alpha_0 = 75{\cdot}24, \quad \varepsilon = 0{\cdot}00219.$$

Substanz	$\mathfrak{A}$	α'_0	ε'(beob.)	ε'(ber.)	α'_{50}(beob.)	α'_{50}(ber.)
KCl	1·47	76·63	0·00202	0·00207	68·91	68·89
NH_4Cl	4·46	80·39	194	182	73·21	72·59
„	2·19	77·77	198	201	70·40	70·07
$MgCl_2$	2·37	79·91	179	192	74·14	72·76
„	1·41	77·25	193	203	70·63	69·80
$NaNO_3$.....	3·41	76·87	186	192	69·96	69·71
„	1·58	76·58	215	207	69·04	68·35
$C_{12}H_{22}O_{11}$ ..	1·20	75·40	186	214	68·52	68·39
„ ..	0·82	75·48	212	215	67·74	67·47

Wie es die Theorie verlangt, sind sämmtliche beobachteten ε' kleiner als ε. Die gemessenen und berechneten Werthe stimmen ebenfalls so gut überein, als sich erwarten lässt. Während also die Cohäsion selbst mit zunehmender Concentration der Lösung wächst, nimmt der Temperaturcoëfficient derselben ab. Es scheint diese Beziehung zwischen der Capillaritätsconstanten und deren Temperaturcoëfficienten den Flüssigkeiten im Allgemeinen zuzukommen, wenigstens zeigt sich bei jenen Flüssigkeiten, welche

ich selbst untersuchte,[1] dass das Wasser mit der grössten Capillaritätsconstanten den kleinsten Temperaturcoëfficienten, der Äther mit der kleinsten Cohäsion den grössten Temperaturcoëfficienten besitzt, für die übrigen Flüssigkeiten diese beiden Grössen zwischen jenen liegen.

Nehmen wir die Flüssigkeiten für unzusammendrückbar an, so lässt sich in der Gleichung $\frac{a}{m} = k\alpha$ die Grösse k bestimmen. Ist nämlich N die Zahl der Molekeln der Masseneinheit, so ist die Zahl in der Volumeinheit gleich $\frac{N}{v}$, wenn v das specifische Volumen und die in der Oberflächeneinheit der Flüssigkeit $\left(\frac{N}{v}\right)^{2/3}$. Da α jene Arbeit ist, welche geleistet werden muss, um $\left(\frac{N}{v}\right)^{2/3}$ Molekeln aus dem Inneren der Flüssigkeit an die Oberfläche zu bringen, so $\alpha = \frac{a}{2}\left(\frac{N}{v}\right)^{2/3}$, indem die Arbeit zum Transport der Molekel aus dem Inneren an die Oberfläche halb so gross ist, als zur Überführung aus dem Inneren der Flüssigkeit in das Innere des Dampfes.[2] Daraus folgt $k = \frac{2}{m}\left(\frac{v}{N}\right)^{2/3}$. Führen wir diesen Werth von k in die Gleichung 3) ein, so

$$\frac{2}{m}\left(\frac{v}{N}\right)^{2/3}(\alpha' - \alpha) = pv.$$

Beachten wir noch, dass die Dichte der Flüssigkeit $s = \frac{1}{v}$, mithin $m = s\delta^3 = \frac{\delta^3}{v}$, wenn δ^3 das Volumen ist, welches eine Molekel einnimmt, und $mN = 1$, so lässt sich aus diesen Gleichungen leicht finden

$$\delta = \frac{2(\alpha' - \alpha)}{p}.$$

Für eine einprocentige Zuckerlösung findet Pfeffer bei 0° den osmotischen Druck von $49 \cdot 3\,cm$ Quecksilber.[3] Das Molecular-

[1] Wien. Ber., C.

[2] Siehe Stefan, Wied. Ann., XXIX, S. 657 ff.

[3] Siehe Ostwald, Grundr. d. allg. Chem., S. 131.

gewicht des Zuckers $C_{12}H_{22}O_{11}$ ist 342. Für eine Grammmolekel gelöster Substanz im Liter fanden wir $\alpha' - \alpha = \mu = 0 \cdot 59$ (13·5°). Drücken wir nun alles in absoluten Einheiten aus, und setzen wir das specifische Gewicht des Quecksilbers gleich 13·6, so wird

$$\delta = \frac{2.0 \cdot 59}{49 \cdot 3.13 \cdot 6.981.34 \cdot 2\,(1+13 \cdot 5.0 \cdot 00366)} = 50 \cdot 10^{-9}\,cm.$$

O. E. Meyer[1] gibt für den Durchmesser der Wassermolekel, wie man ihn nach den Methoden der kinetischen Gastheorie erhält, $44.10^{-9}\,cm$ an. Wir haben hier also eine ausgezeichnete Übereinstimmung der nach verschiedenen Methoden gefundenen Grössen.

Nach Stefan[2] können wir die hydrostatische Grundgleichung schreiben

$$v\,dp = dA,$$

wobei dA die Arbeit ist, welche die Kräfte leisten, wenn die Masseneinheit Flüssigkeit von einem Punkte zu einem anderen übergeht, in welchem der Druck um dp grösser ist. v ist vom Drucke abhängig, und zwar können wir für Drucke, welche nicht sehr grosse Unterschiede zeigen,

$$v = v_0[1+\zeta(p_1 - p)]$$

setzen, wenn v_0 das Volumen beim äusseren Drucke gleich Null, ζ der Compressionscoëfficient, p_1 der innere Druck und p der Gesammtdruck ist, unter welchem die Flüssigkeit steht. Wir erhalten sodann

$$v_0[1+\zeta(p_1 - p)]\,dp = dA.$$

Es sei nun p_1 der innere Druck des Lösungsmittels, p_2 jener der Lösung. Durch Integration erhalten wir dann

$$v_0 \int_{p_1}^{p_2} [1+\zeta(p_1 - p)]\,dp = \left[p_2 - p_1 - \frac{\zeta}{2}(p_2 - p_1)^2\right] = A.$$

Die Arbeit, welche beim Übergange der Masseneinheit Flüssigkeit aus dem Lösungsmittel in die Lösung die Kräfte leisten, ist

---

[1] Theorie d. Gase, S. 231.

[2] Ebenda.

$$A = \frac{a' - a}{m} = p v_0,$$

wenn wir jetzt mit p den osmotischen Druck bezeichnen. Daraus folgt

$$p_2 - p_1 - \frac{\zeta}{2}(p_2 - p_1)^2 = p.$$

Lösen wir diese Gleichung nach $p_2 - p_1$ auf, so

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{\zeta} - \sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - \frac{2p}{\zeta}}.$$

Für verdünnte Lösungen ist $\frac{1}{\zeta}$ gegen p sehr gross; wir können daher mit Vernachlässigung der höheren Glieder setzen

$$\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - \frac{2p}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta}(1 - \zeta p);$$

es ist demnach

$$p_2 - p_1 = p.$$

Für verdünnte Lösungen ist also der osmotische Druck nichts anderes als der Unterschied zwischen den inneren Drucken der Lösung und des Lösungsmittels. Je concentrirter jedoch die Lösung wird, umsomehr erweist sich

$$p_2 - p_1 > p.$$

In der Abhandlung „Zur Theorie der Dampfspannung“ [1] leitete ich auf Grund der kinetischen Theorie der Flüssigkeiten eine Formel für die Dampfspannung ab, welche im Wesentlichen durch das Glied $e^{-\frac{3a}{mc^2}}$ charakterisirt ist. Beschränkt man sich auf ein geringes Temperaturintervall, so genügt es vollständig, die Dampfspannung darzustellen durch

$$d = Ce^{-\frac{3a}{mc^2}}. \qquad 7)$$

Dabei ist C eine Constante, c^2 das mittlere Quadrat der progressiven Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln; es ist ferner

[1] Wien. Ber., XCIX (1890), S. 679 ff.

$a = a_0(1-\varepsilon t)$, $c^2 = c_0^2(1+\gamma t)$, wobei die Bedeutung der Buchstaben von früher her bekannt ist.

Lösen wir bei constanter Temperatur irgend eine Substanz in der Flüssigkeit, so wird die Dampfspannung erniedrigt, folglich muss der Ausdruck $\frac{3a}{mc^2}$ grösser werden. Dies kann sowohl durch Änderung des a, des c oder beider Grössen zugleich geschehen. Die Änderung von a kennen wir, indem a der Capillaritätsconstanten α proportional ist. Bezeichnen wir daher das a der Lösung mit a', so $a' = a(1+q\varkappa)$, wenn q die Zahl der Grammmolekeln des Gelösten im Liter und $\varkappa = \frac{\mu}{\alpha}$, da ja $\alpha' = \alpha + q\mu$ ist.

Es ist leicht einzusehen, dass auch c mit zunehmender Concentration der Lösung wachsen muss. $\frac{mc^2}{2}$ ist nämlich ein Bruchtheil der Gesammtenergie, welche in einer Molekel steckt. Wächst nun die Gesammtenergie, so wird auch $\frac{mc^2}{2}$, die kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung, wachsen, und zwar werden die Zuwächse im selben Verhältnisse stehen wie die Energien selbst. Wie wir wissen, wächst nun die Gesammtenergie einer Molekel beim Übertritte aus dem Lösungsmittel in die Lösung um den Betrag $a' - a = q\varkappa a$, folglich wird auch $\frac{mc^2}{2}$ um einen Betrag wachsen, welcher proportional $q\varkappa a$ ist. Wir erhalten also den wichtigen Satz:

Die Gesammt- sowie jede Theilenergie des Lösungsmittels wächst mit der Concentration der Lösung derart, dass für gleichviel Molekeln des Gelösten der Energiezuwachs eine constante Grösse ist.

Dabei ist natürlich wie immer zu beachten, dass bei dissociirten Substanzen nicht das Moleculargewicht M, sondern die Grösse $\frac{M}{i}$ in Rechnung zu ziehen ist. Unter Theilenergien verstehe ich hier die einzelnen Energien (potentielle Energie, kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung, kinetische Energie der Rotation u. s. w.), deren Summe die Gesammtenergie ausmacht.

Soll eine Flüssigkeit erstarren, so hat man die Gesammtenergie derselben so lange zu verringern, bis die gegenseitigen Anziehungskräfte der Molekeln eine fortschreitende Bewegung derselben unmöglich machen. Um daher eine Lösung zum Gefrieren zu bringen, hat man sie soweit unter den Schmelzpunkt des Lösungsmittels abzukühlen, dass die dadurch entzogene Energiemenge gleich ist dem durch Zusatz des Gelösten verursachten Energiezuwachse. Nach obigem Gesetze können wir die Energie der fortschreitenden Bewegung in der Lösung ausdrücken durch $\frac{mc'^2}{2} = \frac{mc^2}{2}(1+q\lambda)$, wenn λ der entsprechende Coëfficient der Energieerhöhung ist. Daraus folgt

$$\frac{\frac{mc'^2}{2} - \frac{mc^2}{2}}{\frac{mc^2}{2}} = q\lambda = \frac{\Delta}{T}, \qquad 8)$$

wenn Δ die Temperaturerniedrigung des Schmelzpunktes und T die absolute Schmelztemperatur des Lösungsmittels bedeutet. Diese Gleichung hat ihre Berechtigung, insofern sich bei gleichbleibender Constitution eines jeden Körpers die kinetische Energie desselben proportional der absoluten Temperatur ändern muss, und sie sagt nichts anderes aus, als das Gesetz der molecularen Erniedrigung des Gefrierpunktes.

In ähnlicher Weise finden wir nach Gleichung 7) für die Erniedrigung der Dampfspannung

$$\frac{d-d'}{d} = \frac{Ce^{-\frac{3a}{mc^2}} - Ce^{-\frac{3a(1+q\varkappa)}{mc^2(1+q\lambda)}}}{Ce^{-\frac{3a}{mc^2}}}.$$

Ist die Zahl der gelösten Grammmolekeln q eine kleine Grösse, so $\frac{1+q\varkappa}{1+q\lambda} = 1+q(\varkappa-\lambda)$, wonach

$$\frac{d-d'}{d} = 1 - e^{-\frac{3a}{mc^2}q(\varkappa-\lambda)} = q(\varkappa-\lambda)\frac{3a}{mc^2}, \qquad 9)$$

wenn wir die Potenz in eine Reihe entwickeln und alle höheren Glieder vernachlässigen. Bei constanter Temperatur kann sich

nur q ändern; mithin enthält diese Gleichung das Gesetz der molecularen Erniedrigung der Dampfspannung.

Für $q = 1$ ergibt das Experiment für Wasser als Lösungsmittel $\Delta = 1{\cdot}85°$, $\frac{d-d'}{d} = 0{\cdot}0185$; $\varkappa = \frac{\mu}{\alpha}$ ist bekannt. Aus den Dampfspannungen des Wassers bei 10° und 15° erhalten wir nach Gleichung 7) $\frac{3a_0}{mc_0^2} = 12{\cdot}0$, wenn wir in $\frac{3a}{mc^2} = \frac{3a_0(1-\varepsilon t)}{mc_0^2(1+\gamma t)}$ den Coëfficienten $\varepsilon = 0{\cdot}00232$ setzen. Es bietet uns demnach sowohl die Gleichung 8) als die Gleichung 9) die Möglichkeit, λ zu berechnen. Es ist nicht nöthig, unter Δ bloss die Herabsetzung des Gefrierpunktes zu verstehen, wir können es ebenso gut den Temperaturunterschied nennen, welcher zwischen Lösung und Lösungsmittel vorhanden sein muss, wenn in beiden Flüssigkeiten das Lösungsmittel dieselbe kinetische Energie besitzen soll. Unter diesem Gesichtspunkte wollen wir Alles auf die Temperatur 13·5° beziehen. Es ist dann $T = 286{\cdot}5$, $\varkappa = 0{\cdot}00808$, $\frac{3a}{mc^2} = 11{\cdot}2$. Nach Gleichung 8) erhalten wir daraus

$$\lambda = 0{\cdot}00646,$$

nach Gleichung 9)

$$\lambda = 0{\cdot}00643.$$

Wir haben also eine vorzügliche Übereinstimmung.

Während es uns gelungen ist, auf Grund einer kinetischen Moleculartheorie der Flüssigkeiten nebst einigen neuen auch die bereits bekannten Gesetzmässigkeiten abzuleiten, welche die Eigenschaften verdünnter Lösungen aufweisen, erhalten wir nicht den geringsten Aufschluss über die Rolle, welche dabei dem Gelösten zukommt. Wir haben keinen Anhaltspunkt, zu entscheiden, ob der osmotische Druck kinetischer Natur ist oder nicht.

Bestimmung der Bahn des Kometen 1890 II

von

Friedrich Bidschof.

Der zweite Komet des Jahres 1890 wurde am Morgen des 19. März von Mr. William R. Brooks, dem Astronomen des Smith Observatory zu Geneva im Staate New York, mit dem zehnzölligen Refractor dieser Sternwarte aufgefunden. Der Komet stand im Sternbild des Füllens bei $21^h\ 9^m$ Rectascension und $5°\ 35'$ nördlicher Declination; er war hell und hatte einen sternartigen Kern, sowie einen kurzen Schweif. Die Reihe der genauen Positionsbestimmungen eröffnet eine am 21. März an der Sternwarte zu Cambridge in Massachusetts angestellte Beobachtung, seitdem ist der Komet an fast allen Sternwarten der nördlichen Hemisphäre beobachtet worden. Schon die ersten, vom Verfasser vorliegender Abhandlung aus Beobachtungen vom 21., 24. und 28. März 1890 abgeleiteten Elemente, welche durch das Circular Nr. LXXI der kais. Akademie der Wissenschaften veröffentlicht wurden, gaben ein hinreichend genaues Bild der Bahn des Kometen und liessen, wie dies Prof. Dr. E. Weiss bei der Mittheilung dieser Bahnelemente in der Sitzung vom 7. April 1890 erwähnte (cfr. Anzeiger der k. Akad. der Wissensch., 1890, S. 79) eine lange Dauer der Sichtbarkeit des Gestirnes voraussehen. In Wirklichkeit wurden aber die diesbezüglich gehegten Erwartungen noch übertroffen. Der Komet, der zu Beginn seiner Sichtbarkeit dem Laufe der Zeichen folgte, wurde Anfangs April retrograd und durchlief, stets gegen Norden ziehend und an Helligkeit wachsend, die Sternbilder des Pegasus und des Schwans. Mitte Mai ging er für unsere Breiten nicht mehr unter

am 1. Juni erreichte er seine Sonnennähe, einige Tage später kam er in die Erdnähe, wobei seine Helligkeit etwa viermal grösser war als zur Zeit der Entdeckung.

Immer schnelleren Laufes durchzog er dann das Sternbild des Drachen, stand am 13. Juni zum ersten Male in Opposition (in Rectascension) zur Sonne und erreichte am 17. Juni seine nördlichste Declination bei +65° 48′. Zunehmende Entfernung von Sonne und Erde verlangsamten seinen nun nach Süden gerichteten Lauf, er durchzog die Sternbilder des grossen Bären und der Jagdhunde; Mitte August war seine theoretische Helligkeit dieselbe wie zur Zeit seiner Auffindung, doch erschien er nach der Perihelpassage an Lichtstärke gewonnen zu haben. Anfangs September wurde der Komet stationär und hatte am 11. October dieselbe Rectascension wie die Sonne, stand aber 35° nördlicher; im November wurde er zum zweiten Male retrograd und näherte sich wieder der Erde. Mit gleichbleibender Helligkeit, aber beschleunigten Laufes passirte der Komet sodann das Sternbild des grossen Bären und kam am 1. März 1891 im Sternbilde des Löwen zum zweiten Male in Opposition (in Rectascension) zur Sonne. Seitdem entfernt er sich wieder von der Erde, dürfte aber heuer noch durch einige Zeit am Abendhimmel beobachtet werden können.

Der vorstehenden Skizze des bisherigen Verlaufes der Erscheinung dieses Kometen kann man entnehmen, dass bei diesem Himmelskörper mehrere Momente zusammenwirken, welche eine lange Dauer der Sichtbarkeit ermöglichen. Ausser der dazu günstigen Lage der Bahn und der nahen Concordanz der Zeitpunkte der Sonnen- und Erdnähe des Kometen ist hiebei noch besonders der Umstand hervorzuheben, dass der Komet, obwohl er nicht dem freien Auge sichtbar wurde, doch zu den lichtstärkeren Himmelskörpern seiner Art gehört. Er wurde z. B. von Herrn Dr. Holetschek durch mehr als ein Jahr an dem sechszölligen Refractor der k. k. Universitätssternwarte zu Wien beobachtet und erschien noch im März 1891 in grösseren Fernrohren als ein auffälliges und helles Object. Erwägt man diese Umstände, so gelangt man zu der Vermuthung, dass der in Rede stehende Komet jener nicht zahlreichen, aber höchst interessanten Kometengruppe angehört, deren Glieder der in mehr als einer Opposition

der Beobachtung zugänglich sind, deren Bahnen aber von der Parabel nicht wesentlich abweichen.

Der Umstand, dass die über mächtige Instrumente verfügenden Beobachter zwei solche Kometen in jüngster Zeit nach deren Conjunction mit der Sonne wieder aufgefunden und durch längere Zeit verfolgt haben, lässt hoffen, dass es vielleicht auch bei dem Kometen 1890 II gelingen werde, ihn nach seiner zweiten Conjunction mit der Sonne wieder zu beobachten. Um diese neuerliche Auffindung zu erleichtern, ist es nothwendig, den künftigen Lauf des Himmelskörpers festzustellen, was durch die im Folgenden dargelegten Rechnungen geschehen soll.

Die vorhin erwähnten Elemente erwiesen sich, ebenso wie ein zweites vom Verfasser dieser Zeilen im April 1890 berechnetes System, bald als unzureichend; erst ein drittes Elementensystem, welches auf Beobachtungen zweier Monate gegründet war, ergab die geocentrischen Orte des Kometen so genau, dass es die gesammte bisherige Erscheinung für Beobachtungszwecke genügend darstellte und als Grundlage für eine schärfere Bestimmung der Bahn dienen konnte. Dieses System ist das folgende eklipticale:

$$\left.\begin{aligned} T &= 1890\ \text{Juni}\ 1{\cdot}5360\ \text{mittl. Zeit Berlin.} \\ \omega &= 68°54'39''2 \\ \Omega &= 320\ 20\ 32{\cdot}2 \\ i &= 120\ 33\ 5{\cdot}4 \end{aligned}\right\}\ \text{mittl. Äqu. } 1890{\cdot}0$$
$$\log q = 0{\cdot}280524$$

Die daraus sich ergebenden Äquatorcoordinaten sind:

$$x = [9{\cdot}921909]r.\sin(v+181°45'37''7);$$
$$y = [9{\cdot}960902]r.\sin(v+288\ 44\ 55{\cdot}0);$$
$$z = [9{\cdot}834574]r.\sin(v+\ 47\ \ 5\ 10{\cdot}9);$$

wobei die in eckige Klammern gesetzten Zahlen die Logarithmen der eigentlichen Coëfficienten sind. Hiemit wurden Ephemeriden gerechnet, deren Fehler für sechs Epochen ermittelt wurden, wie dies auf den folgenden Seiten dargelegt ist.

Nummer der Beobachtung	Beobachtungs- Ort	Zeit in mittlerer Berliner Zeit	Beobachtung-Rechnung $\cos\delta d\alpha$	$d\delta$	Gewicht der Beobachtung in A	δ
		I. Normalort.				
1	Cambridge Mass...	1890 März 21·9259	—0ˢ26	+0″5	1	1
2	Detroit(Ann Arbor)	22·9382	—0·37	—1·4	1	1
3	Kremsmünster	23·6598	+0·03	+1·2	1	1
4	Wien	23·6670	—0·10	—2·2	1	1
5	Padua	23·6818	+0·42	—5·0	1	1
6	Nizza	23·7073	—0·35	—1·6	1	1
7	Mount Hamilton...	24·0468	—0·03	+1·0	1	1
8	Wien	24·6385	—0·28	—4·0	1	1
9	Cambridge Mass...	24·6259	—0·04	—1·8	1	1
		II. Normalort.				
10	Wien	1890 Mai 21·4162	—0ˢ36	—0″5	1	1
11	Greenwich	21·4363	—0·80	+4·8	1	1
12	Orwell Park	21·4615	—0·76	+8·9	1	1
13	Bordeaux	21·4800	—0·99	+6·9	1	1
14	Toulouse.....	21·5571	—0·63	—3·6	1	1
15	Algier	22·4890	—1·69	—1·3	—	—
16	Rom....	22·5067	—0·11	+7·5	1	1
17	Toulouse.....	22·5349	—0·56	—2·5	1	1
18	Algier	22·5459	—0·56	+6·9	1	1
19	Algier	22·5702	—1·70	—0·5	—	—
20	Dresden	23·4423	—0·30	+8·0	2	2
21	Kremsmünster	23·5124	—0·18	+8·0	1	1
22	Hamburg.....	23·5212	—0·49	+4·0	2	2
		III. Normalort.				
23	Nikolajew.....	1890 Juli 13·3715	—2ˢ51	—21″5	1	1
24	Kasan	13·3736	—2·86	—17·6	1	1
25	Dresden	13·4689	—2·90	—24·8	1	1
26	Dresden	14·4507	—2·63	—18·8	1	1
27	Wien	15·4139	—2·19	—20·8	—	1
28	Dresden	15·4213	—2·52	—21·9	1	1
29	Wien	15·4417	—2·75	—17·5	1	1
30	Kasan	16·3966	—2·80	—18·6	1	1
31	Wien	16·4014	—2·44	—17·4	1	1
32	Wien	16·4342	—2·58	—13·8	1	1

Nummer der Beobachtung	Beobachtungs- Ort	Beobachtungs- Zeit in mittlerer Berliner Zeit	Beobachtung-Rechnung $\cos\delta d\alpha$	Beobachtung-Rechnung $d\delta$	Gewicht der Beobachtung in $\mathcal{R}$	Gewicht der Beobachtung in δ
		IV. Normalort.				
33	Bordeaux	1890 Sept. 14·3566	—3'11	—33'5	1	1
34	Greenwich	14·3766	—3·06	—43·4	1	1
35	Bordeaux	15·3495	—3·29	—24·5	1	1
36	Greenwich	15·3863	—3·76	—10·4	1	—
37	Bordeaux	16·3456	—2·94	—37·5	—	1
38	Wien	17·3138	—3·06	—34·6	1	1
39	Wien	18·3228	—3·40	—40·5	1	1
40	Wien	19·3148	—3·51	—35·9	1	1
41	Wien	20·3312	—3·76	—39·5	1	1
		V. Normalort.				
42	Bordeaux	1891 Jän. 7·5124	—6'11	—44'4	1	1
43	Bordeaux	9·5041	—6·85	—44·4	—	1
44	Bordeaux	11·4936	—5·97	—52·8	1	1
45	Bordeaux	14·5067	—6·05	—54·8	1	1
46	Hamburg.....	15·4583	—6·11	—56·7	1	1
47	Bordeaux	15·5134	—5·95	—46·2	1	1
48	Hamburg.....	16·4965	—5·84	—52·2	1	1
		VI. Normalort.				
49	München	1891 Febr. 27·3738	—6'62	— 88'5	1	2
50	Dresden	28·3749	—6·48	— 89·1	1	2
51	Bordeaux	28·3803	—6·39	—101·7	1	—
52	Bordeaux	März 1·3863	—6·47	—104·6	1	—
53	Bordeaux	3·4525	—6·38	— 95·2	1	1
54	Bordeaux	4·4080	—6·25	— 90·0	1	1
55	Bordeaux	5·3930	—6·20	—102·8	1	—
56	Wien	6·3356	—6·56	— 97·1	1	1
57	Bordeaux	6·3969	—6·29	—101·3	1	—
58	Wien	6·4818	—6·05	— 81·6	1	2
59	Wien	7·3230	—6·03	— 95·8	1	1
60	Wien	9·4006	—6·48	— 96·1	1	1

Zu den auf den zwei vorhergehenden Seiten befindlichen Verzeichnissen sind einige Bemerkungen zu machen. Zuvörderst

ist die Vertheilung der Normalorte über die Bahn und der Umfang jedes Normalortes zu besprechen. Für erstere war der Wunsch maassgebend, der neuen Ermittelung der Bahnelemente einen möglichst grossen Bogen zu Grunde zu legen und die Orte selbst auf der Bahn thunlichst gleichmässig zu vertheilen, wobei aber die Zeit vor dem Perihel etwas bevorzugt werden musste. Die Aufstellung eines Normalortes im Juli erklärt sich daraus, dass sich hier die Beobachtungen häufen, um dann rasch abzubrechen, da die Thätigkeit der Beobachter durch die Auffindung mehrerer anderer Kometen in Anspruch genommen wurde.

Die grosse Pause zwischen dem IV. und V. Ort wurde durch die Conjunction des Kometen mit der Sonne verursacht, die im October stattfand. Da die Bildung der Normalorte, wie sie hier vorgenommen wurde, keine abschliessende sein sollte, so habe ich mich darauf beschränkt, eine mässige Zahl von Beobachtungen bei jedem zu benützen. Bei diesen Beobachtungen wurden aber die Vergleichsternorte, so weit dies möglich war, nach neueren Meridianbeobachtungen angenommen, wodurch die von den Beobachtern der Kometen angegebenen Positionen oft wesentlich geändert wurden.

In die Tabelle sind mehrere Beobachtungen nicht aufgenommen worden, weil sie entweder entstellt schienen oder es mir nicht möglich war, den Ort des Vergleichsternes so genau zu bestimmen als es wünschenswerth war. Bei dem II. und III. Normalort sind die Vergleichsterne fast ausschliesslich den nördlichen Zonen Argelander's entnommen, was die Genauigkeit der Schlussposition sehr beeinflusst. Die Gewichtsvertheilung innerhalb der Normalorte wurde, wenn es sich um grössere Unterschiede handelte, so getroffen, dass Beobachtungen, die mit einem grösseren Fernrohr erhalten wurden, doppeltes Gewicht bekamen, während stark abweichende Daten ganz ausgeschlossen wurden.

Unter den ausgeschlossenen Beobachtungen sind zwei, Nr. 15 und Nr. 19, bemerkenswerth; sie sind nämlich mit Hilfe der Photographie von dem Director der Sternwarte zu Algier, Herrn Trépied, erhalten worden, zeigen aber eine constante Differenz gegen die anderen Beobachtungen. Auch in Kopenhagen hat man einen derartigen Versuch gemacht, das Ergebniss desselben war

aber nicht befriedigend. Die Beobachtungen Nr. 27 und Nr. 29, sowie Nr. 30 und Nr. 32 sind von verschiedenen Beobachtern an verschiedenen Instrumenten angestellt worden. Hinsichtlich der Greenwicher Beobachtungen Nr. 34 und Nr. 36 konnte die im letzten Novemberhefte der „Monthly notices" publicirte Verbesserung nicht mehr benützt werden; doch ist diese Correction gegenüber den Fehlern dieser Beobachtungen völlig verschwindend.

Die Beobachtung Nr. 58 ist am 27-Zöller der Wiener Sternwarte gemacht worden, während ich die übrigen Wiener Beobachtungen dieses Normalortes Herrn Dr. Holetschek verdanke, der sie am Sechszöller der Wiener Sternwarte erhielt. Besonderen Dank schulde ich dem Herrn Director der Sternwarte zu Bordeaux, Mr. Rayet, der im Vereine mit Mr. Picart und Mr. Courty den Kometen beinahe hundertmal beobachtete und mir seine Resultate sofort bekannt gab. Die beiden letzten Normaltage beruhen zum grösseren Theil auf noch nicht publicirten Beobachtungen, zu denen die Herren Dr. Bauschinger in München, Dr. Baron v. Engelhardt in Dresden und Dr. Luther in Hamburg beizutragen die Güte hatten.

Fasst man nun die Beobachtungen in der in den Tabellen angedeuteten Weise zusammen, so gelangt man, wie folgt, zur

Bildung der Normalorte.

Datum		Rectascension	Declination
1890 März 23·5	Ephemeridenort	21ʰ 9ᵐ54ˢ·07	+ 7° 4'19"·7
	Correction der Ephemeride	— 0·11	— 1·5
	Reduction auf 1890·0 ..	+ 0·35	— 2·3
	I. Normalort	21 9 54·31	+ 7 4 15·9
1890 Mai 22·5	Ephemeridenort	20 13 6·43	+49 18 54·2
	Correction der Ephemeride	— 0·77	+ 4·6
	Reduction auf 1890·0 ..	— 0·02	+ 0·2
	II. Normalort.....	20 13 5·64	+49 18 59·0

Datum		Rectascension	Declination
1890 Juli 15·5	Ephemeridenort	13ʰ 39ᵐ 29ˢ·50	+53° 53′ 15″·5
	Correction der Ephemeride	— 4·52	— 19·3
	Reduction auf 1890·0 ..	— 0·58	+ 4·4
	III. Normalort	13 39 24·40	+53 53 0·6
1890 Sept. 16·5	Ephemeridenort	13 1 18·78	+31 48 17·6
	Correction der Ephemeride	— 3·96	— 35·1
	Reduction auf 1890·0 ..	— 1·17	+ 8·0
	IV. Normalort	13 1 13·65	+31 47 50·5
1891 Jänner 12·5	Ephemeridenort	12 36 56·03	+31 0 40·3
	Correction der Ephemeride	— 7·01	— 50·2
	Reduction auf 1890·0 ..	— 2·24	+ 14·8
	V. Normalort	12 36 46·78	+31 0 4·9
1891 März 3·5	Ephemeridenort	10 46 7·55	+36 26 40·6
	Correction der Ephemeride	— 7·89	— 1 30·2
	Reduction auf 1890·0 ..	— 3·11	+ 15·3
	VI. Normalort	10 45 56·55	+36 25 25·7

Um nun ein Elementensystem zu finden, welches diesen sechs Normalorten genügt, habe ich vorerst die Methode der Variation des Verhältnisses der Distanzen benützt. Da der zweite und der dritte Normalort wegen der nicht ganz sicheren Vergleichsternorte, die bei diesen Kometenbeobachtungen benützt werden mussten, dem ersten Normalorte an Werth nachzustehen schienen, so wurde letzterer als einer der beiden Fundamentalorte angenommen. Als zweiten Fundamentalort habe ich den fünften Normalort gewählt, da er vor dem sechsten den Vorzug zu verdienen schien. Die unter diesen Voraussetzungen vorgenommene Ausgleichung ergab aber ein unbefriedigendes Resultat, indem die beste Parabel in den vier nicht völlig darzustellenden Normalorten die nachstehenden, im Sinne Beobachtung—Rechnung angesetzten Fehler übrig liess:

Normalort II	$\cos\delta d\alpha$:	— 4'6;	$d\delta$: —4'2
„ III		+ 7·7	—1·1
„ IV		+ 1·6	—0·7
„ VI.....		+12·9	—6·1.

Um eine bessere Darstellung zu gewinnen, habe ich nun den Übergang zur Methode der Variation der Distanzen gemacht, wodurch die Excentricität zu den zu bestimmenden Elementen hinzutritt, und schliesslich das nachstehende auf den Äquator, für welche Fundamentalebene die gesammten Rechnungen durchgeführt wurden, bezogene hyperbolische Elementensystem erhalten:

$$\begin{aligned} T &= 1890 \text{ Juni } 1\cdot578725 \text{ mittl. Berl. Zeit.} \\ \omega &= 47^\circ\ 6'42'0 \\ \Omega &= 306\ 25\ 55\cdot1 \quad \text{mittl. Äqu. } 1890\cdot0 \\ i &= 136\ 54\ 29\cdot2 \\ e &= 1\cdot00037259 \\ \log q &= 0\cdot280471. \end{aligned}$$

Dieses Elementensystem ergibt, wenn man sämmtliche Normalorte damit berechnet, für die übrigbleibenden Fehler die folgenden Grössen:

Normalort I	$\cos\delta d\alpha$:	0'0;	$d\delta$ = 0'0
„ II.....		—3·8	—0·3
„ III.....		+3·8	+0·1
„ IV		+0·4	—1·1
„ V.....		—0·1	0·0
„ VI		—2·2	—5·0.

Wie man, sieht werden die zwei Fundamentalorte innerhalb der Unsicherheit der Rechnung dargestellt. Die anderen Normalorte werden fast alle besser als in der parabolischen Hypothese dargestellt. Es muss aber auf mehrere Umstände aufmerksam gemacht werden, welche die zuletzt gewonnenen Resultate hinsichtlich der Beschaffenheit des Kegelschnittes, in dem sich der Komet bewegt, erheblich beeinflussen können.

Vor allem ist zu bemerken, dass bei dieser Bahnbestimmung der störende Einfluss der grossen Planeten nicht in Rechnung

gezogen wurde. Obwohl nun der Komet in Folge der Lage des von ihm beschriebenen Bogens keinem dieser Planeten nahe kam, so ist doch eine merkbare Einflussnahme derselben wahrscheinlich, da sich die hier in Rechnung gezogenen Beobachtungen über ein ganzes Jahr erstrecken. Ein weiteres in Betracht zu nehmendes Moment ist der Umstand, dass bei der zur Ableitung der Elemente verwendeten Methode die zwei Fundamentalorte vollständig dargestellt werden müssen und daher deren Fehler die Darstellung der übrigen Normalorte beeinflussen. Wenn nun auch die zwei Fundamentalorte unstreitig die besten der Normalorte sind, so ist doch nicht daran zu zweifeln, dass sie mit Fehlern behaftet sind; es ist zum Beispiel die Declination des zweiten Fundamentalortes nicht ganz sicher und ein Fehler derselben von $\pm 2''$ leicht möglich. Diese Abweichungen gehen aber, mehr oder weniger vergrössert, in die Darstellung der anderen Normalorte über. So bewirkt ein Fehler von $+1''$ in der Rectascension des ersten Fundamentalortes eine Variation von $-6'1$ in der Rectascension des zweiten und $+3'0$ in jener des dritten Normalortes, welches Grössenverhältniss durch die Reduction auf den Parallel allerdings erheblich vermindert wird. Ein Fehler von $+2''$ in der Declination des zweiten Fundamentalortes erzeugt eine Variation von $+3'2$ in der Declination des letzten Normalortes, so dass die etwas grösseren Fehler einzelner Coordinaten sich durch die Verhältnisse der Bahnbestimmung erklären lassen. In analoger Weise wirken die betonten Einflüsse auf die Elemente ein, so dass die Gestalt der Bahn erst durch eine geänderte Berechnungsweise, bei der genauere Normalorte sowie der störende Einfluss der grossen Planeten in Rechnung zu ziehen sein werden, abschliessend bestimmt werden kann. Ich habe jedoch, einem Rathe des Herrn Director E. Weiss folgend, es vorgezogen, die Ausführung dieser umfassenden Rechnungen derzeit zu unterlassen, da durch die Aufstellung obiger Elemente das Ziel der vorliegenden Arbeit, die Wiederauffindung des Kometen, ohne Schwierigkeit erreicht werden kann, so weit dies von der Genauigkeit der den Aufsuchungsephemeriden zu Grunde liegenden Elemente abhängt. Die letzteren stellen nun den Lauf des Kometen während eines Jahres genügend dar, wobei der heliocentrische Bogen des Kometen 123° umfasst, während der

Zuwachs der wahren Anomalie vom Datum des letzten Normalortes bis zum Beginne der am Schlusse dieser Abhandlung befindlichen Aufsuchungsephemeride nur 21° beträgt. Zur näheren Erläuterung des Sachverhaltes diene folgendes Täfelchen, worin Δt die Zahl der Tage zwischen dem Perihel und dem betreffenden Datum, v die wahre Anomalie, r die heliocentrische und ρ die geocentrische Distanz des Kometen und H seine theoretische Helligkeit — jene zur Zeit des ersten Normalortes als Einheit genommen — bedeutet.

	Δt	v	$\log r$	$\log \rho$	H
	d				
I. Normalort	— 70·08	— 34°47'8	0·32115	0·42572	1·00
II. „	— 10·08	— 5 19·5	0·28141	0·20842	3·27
III. „	+ 43·92	+ 22 38·2	0·29753	0·30833	1·92
IV. „	+106·92	+ 49 30·3	0·36419	0·48549	0·63
V. „	+224·92	+ 80 6·2	0·51263	0·43729	0·39
VI. „	+274·92	+ 88 6·7	0·56744	0·44722	0·29
1891 November 1·5 ...	+517·92	+109 53·8	0·76233	0·78280	0·03
1892 Februar 5·5	+613·92	+114 45·4	0·81735	0·74683	0·02

Die zwei letzten Zeilen dieser Tabelle geben die Verhältnisse zur Zeit des Beginnes der Ephemeriden und zur Zeit der bevorstehenden Opposition des Kometen (in Rectascension).

Schliesslich sind noch die Elemente auf die Ekliptik zu übertragen, wodurch man folgendes System erhält:

Komet 1890 II.

$T =$ 1890 Juni 1·578725 mittl. Berl. Zeit.

$\omega = 68°56'13''9$
$\Omega = 320\ 20\ 43·6$ } mittl. Äqu. 1890·0
$i = 120\ 33\ 23·3$

$e = 1·00037259$

$\log q = 0·280471$

Für die Äquatorconstanten ergeben sich nachstehende Werthe, wobei statt der Coëfficienten gleich deren Logarithmen angesetzt wurden:

$$x = [9{\cdot}921931]r \sin(v + 181°47'14''3);$$
$$y = [9{\cdot}960913]r \sin(v + 288\ 46\ 17{\cdot}1);$$
$$z = [9{\cdot}834529]r \sin(v + 47\ 6\ 42{\cdot}0).$$

Die mit Hilfe dieser Angaben berechneten Ephemeriden für die Zeit vom 1. November 1891 bis Ende April 1892 finden sich auf den folgenden Seiten. Hiebei sind einige Bemerkungen für jedes Monat angefügt worden, um den Beobachtern ihre Mühe zu erleichtern. Die Gegenden des Himmels, welche der Komet vom Beginn der Ephemeriden bis Anfang Februar 1892 durchzieht, sind in der Sternkarte Nr. 1 von Peters und in den Pariser Karten Nr. 29*a*, Nr. 30 und Nr. 31 zu finden.

Als Einheit der Helligkeit ist jene Helligkeit gewählt worden, welche der Komet am 3. März 1891 besass. Auf dieses Datum fällt der letzte Normalort, der in unmittelbarer Nähe der letzten Opposition des Kometen liegt. Der Komet erschien um diese Zeit in mittleren Fernrohren hell und war leicht zu beobachten; im grossen Refractor der Wiener Sternwarte hatte der Kern des Kometen am 6. März 1891 bei dunstigem Himmel die Helligkeit eines Sternes $9^{m}5$; der Schweif des Kometen war gegen Südwesten gerichtet und 30″ lang. Am 3. April 1891, als die theoretische Helligkeit 0·61 betrug, ist der Komet noch ohne Schwierigkeit am sechszölligen Refractor der Wiener Sternwarte beobachtet worden.

Der Fehler der folgenden Ephemeriden dürfte wenige Zeitsecunden nicht übersteigen und für den ganzen Verlauf der Erscheinung nahezu constant bleiben.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Differenz	Scheinbare Declination	Differenz	Log. der Entfernung ♂ von ☉	Log. der Entfernung ♂ von ⊙	Helligkeit
1891							
Nov. 0·5	10ʰ 10ᵐ 26ˢ	— 0ˢ	+12° 21′ 8	—2′9	0·7834	0·7616	0·09
1·5	10 10 26	— 1	+12 18·9	—2·8	0·7828	0·7623	
2·5	10 10 25	— 1	+12 16·1	—2·8	0·7822	0·7630	
3·5	10 10 24	— 2	+12 13·3	—2·8	0·7815	0·7636	
4·5	10 10 22	— 2	+12 10·5	—2·7	0·7809	0·7642	0·09
5·5	10 10 20	— 3	+12 7·8	—2·6	0·7802	0·7648	
6·5	10 10 17	— 4	+12 5·2	+2·6	0·7796	0·7654	
7·5	10 10 13	— 4	+12 2·6	—2·5	0·7790	0·7660	
8·5	10 10 9	— 5	+12 0·1	—2·4	0·7783	0·7666	0·09
9·5	10 10 4	— 6	+11 57·7	—2·4	0·7776	0·7672	
10·5	10 9 58	— 6	+11 55·3	—2·3	0·7770	0·7679	
11·5	10 9 52	— 7	+11 53·0	—2·3	0·7763	0·7685	
12·5	10 9 45	— 7	+11 50·7	—2·3	0·7756	0·7691	0·09
13·5	10 9 38	— 8	+11 48·4	—2·2	0·7749	0·7697	
14·5	10 9 30	— 9	+11 46·2	—2·2	0·7742	0·7703	
15·5	10 9 21	—10	+11 44·0	—2·1	0·7735	0·7709	
16·5	10 9 11	—10	+11 41·9	—2·0	0·7728	0·7715	0·09
17·5	10 9 1	—11	+11 39·9	—2·0	0·7721	0·7721	
18·5	10 8 50	—12	+11 37·9	—1·9	0·7714	0·7727	
19·5	10 8 38	—12	+11 36·0	—1·9	0·7707	0·7733	
20·5	10 8 26	—13	+11 34·1	—1·8	0·7700	0·7739	0·09
21·5	10 8 13	—14	+11 32·3	—1·8	0·7692	0·7745	
22·5	10 7 59	—14	+11 30·5	—1·7	0·7685	0·7751	
23·5	10 7 45	—15	+11 28·8	—1·6	0·7678	0·7757	
24·5	10 7 30	—16	+11 27·2	—1·6	0·7671	0·7763	0·09
25·5	10 7 14	—17	+11 25·6	—1·5	0·7663	0·7769	
26·5	10 6 57	—18	+11 24·1	—1·5	0·7656	0·7775	
27·5	10 6 39	—18	+11 22·6	—1·4	0·7649	0·7781	
28·5	10 6 21	—19	+11 21·2	—1·4	0·7642	0·7787	0·09
29·5	10 6 2	—20	+11 19·8	—1·3	0·7634	0 7793	
30·5	10 5 42	—21	+11 18·5	—1·3	0·7627	0·7799	
31·5	10 5 21	—21	+11 17·2	—1·2	0·7620	0·7805	

Reduction auf 1855·0 für 1891 November 15·5:

$$d\alpha = -1^m\,57^s;$$
$$d\delta = +10'8.$$

Als Einheit der Helligkeit ist jene des 3. März 1891 angenommen worden.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Differenz	Scheinbare Declination	Differenz	Log. der Entfernung ☿ von ☉	Log. der Entfernung ☿ von ⊙	Helligkeit
1891							
Dec. 0·5	10h 5m42s	—21s	+11°18'5	—1'3	0·7627	0·7799	0·09
1·5	10 5 21	—21	+11 17·2	—1·2	0·7620	0·7805	
2·5	10 5 0	—22	+11 16·0	—1·1	0·7613	0·7811	
3·5	10 4 38	—23	+11 14·9	—1·1	0·7605	0·7816	
4·5	10 4 15	—24	+11 13·8	—1·0	0·7598	0·7822	0·09
5·5	10 3 51	—24	+11 12·8	—1·0	0·7591	0·7828	
6·5	10 3 27	—25	+11 11·8	—0·9	0·7584	0·7834	
7·5	10 3 2	—26	+11 10·9	—0·8	0·7577	0·7870	
8·5	10 2 36	—26	+11 10·1	—0·8	0·7570	0·7846	0·09
9·5	10 2 10	—27	+11 9·3	—0·7	0·7563	0·7852	
10·5	10 1 43	—28	+11 8·6	—0·7	0·7556	0·7858	
11·5	10 1 15	—29	+11 7·9	—0·6	0·7550	0·7863	
12·5	10 0 46	—29	+11 7·3	—0·6	0·7543	0·7869	0·09
13·5	10 0 17	—30	+11 6·7	—0·5	0·7537	0·7875	
14·5	9 59 47	—31	+11 6·2	—0·5	0·7531	0·7881	
15·5	9 59 16	—32	+11 5·7	—0·4	0·7525	0·7886	
16·5	9 58 44	—32	+11 5·3	—0·4	0·7519	0·7892	0·09
17·5	9 58 12	—33	+11 4·9	—0·3	0·7513	0·7898	
18·5	9 57 39	—34	+11 4·6	—0·3	0·7507	0·7904	
19·5	9 57 5	—35	+11 4·3	—0·2	0·7501	0·7909	
20·5	9 56 30	—35	+11 4·1	—0·1	0·7495	0·7915	0·09
21·5	9 55 55	—36	+11 4·0	—0·1	0·7489	0·7921	
22·5	9 55 19	—36	+11 3·9	—0·1	0·7484	0·7927	
23·5	9 54 43	—37	+11 3·8	0·0	0·7479	0·7932	
24·5	9 54 6	—38	+11 3·8	0·0	0·7474	0·7938	0·09
25·5	9 53 28	—38	+11 3·8	+0·1	0·7469	0·7944	
26·5	9 52 50	—39	+11 3·9	+0·2	0·7464	0·7950	
27·5	9 52 11	—40	+11 4·1	+0·2	0·7460	0·7955	
28·5	9 51 31	—40	+11 4·3	+0·3	0·7456	0·7961	0·09
29·5	9 50 51	—41	+11 4·6	+0·3	0·7454	0·7967	
30·5	9 50 10	—41	+11 4·9	+0·3	0·7448	0·7973	
31·5	9 49 29	—42	+11 5·2	+0·4	0·7444	0·7978	

Reduction auf 1855·0 für 1891 December 16·5:

$$d\alpha = -1^m\,58^s;$$
$$d\delta = +10'5.$$

Als Einheit der Helligkeit ist jene des 3. März 1891 angenommen worden.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Differenz	Scheinbare Declination	Differenz	Log. der Entfernung ☿ von ☌	Log. der Entfernung ☿ von ☉	Helligkeit
1892							
Jänn. 0·5	9h 49m 29s	−42s	+11° 5′2	+0′4	0·7444	0·7978	0·09
1·5	9 48 47	−43	+11 5·6	+0·4	0·7440	0·7984	
2·5	9 48 4	−43	+11 6·0	+0·4	0·7437	0·7989	
3·5	9 47 21	−44	+11 6·4	+0·5	0·7434	0·7995	
4·5	9 46 37	−44	+11 6·9	+0·5	0·7431	0·8000	0·09
5·5	9 45 53	−45	+11 7·4	+0·6	0·7428	0·8006	
6·5	9 45 8	−45	+11 8·0	+0·6	0·7425	0·8011	
7·5	9 44 23	−46	+11 8·6	+0·7	0·7423	0·8017	
8·5	9 43 37	−46	+11 9·3	+0·7	0·7421	0·8022	0·09
9·5	9 42 51	−47	+11 10·0	+0·7	0·7419	0·8028	
10·5	9 42 4	−47	+11 10·7	+0·8	0·7417	0·8033	
11·5	9 41 17	−48	+11 11·5	+0·8	0·7416	0·8039	
12·5	9 40 29	−48	+11 12·3	+0·8	0·7415	0·8044	0·09
13·5	9 39 41	−48	+11 13·1	+0·9	0·7414	0·8050	
14·5	9 38 53	−49	+11 14·0	+0·9	0·7414	0·8055	
15·5	9 38 4	−49	+11 14·9	+0·9	0·7413	0·8061	
16·5	9 37 15	−49	+11 15·8	+0·9	0·7413	0 8066	0·09
17·5	9 36 26	−50	+11 16·7	+1·0	0·7414	0·8072	
18·5	9 35 36	−50	+11 17·7	+1·0	0·7414	0·8077	
19·5	9 34 46	−50	+11 18·7	+1·1	0·7415	0·8083	
20·5	9 33 56	−50	+11 19·8	+1·0	0·7415	0·8088	0·09
21·5	9 33 6	−51	+11 20·8	+1·1	0·7416	0·8094	
22·5	9 32 15	−51	+11 21·9	+1·1	0·7418	0·8099	
23·5	9 31 24	−51	+11 23·0	+1·1	0·7420	0·8105	
24·5	9 30 33	−51	+11 24·1	+1·1	0·7422	0·8110	0·08
25·5	9 29 42	−51	+11 25·2	+1·1	0·7424	0·8116	
26·5	9 28 51	−52	+11 26·3	+1·2	0·7427	0·8121	
27·5	9 27 59	−52	+11 27·4	+1·2	0·7430	0·8126	
28·5	9 27 7	−52	+11 28·6	+1·1	0·7433	0·8131	0·08
29·5	9 26 15	−52	+11 29·7	+1·2	0·7436	0·8137	
30·5	9 25 23	−52	+11 30·9	+1·2	0·7440	0·8142	
31·5	9 24 31	−52	+11 32·1	+1·2	0·7444	0·8148	

Reduction auf 1855·0 für 1892 Jänner 16·5:

$$d\alpha = -1^m\,59^s;$$
$$d\delta = +9'9.$$

Als Einheit der Helligkeit ist jene des 3. März 1891 angenommen worden.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Differenz	Scheinbare Declination	Differenz	Log. der Entfernung ♂ von ♁	Log. der Entfernung ♂ von ☉	Helligkeit
1892							
Febr. 0·5	9ʰ 24ᵐ 31ˢ	−52ˢ	+11° 32′ 1	+1′ 2	0·7444	0·8148	0·08
1·5	9 23 39	−52	+11 33·3	+1·2	0·7448	0·8153	
2·5	9 22 47	−52	+11 34·5	+1·2	0·7453	0·8159	
3·5	9 21 55	−52	+11 35·7	+1·2	0·7458	0·8164	
4·5	9 21 3	−51	+11 36·9	+1·2	0·7463	0·8169	0·08
5·5	9 20 12	−51	+11 38·1	+1·3	0·7468	0·8174	
6·5	9 19 21	−51	+11 39·4	+1·3	0·7474	0·8180	
7·5	9 18 30	−51	+11 40·7	+1·2	0·7480	0·8185	
8·5	9 17 39	−51	+11 41·9	+1·2	0·7486	0·8190	0·08
9·5	9 16 48	−51	+11 43·1	+1·2	0·7493	0·8195	
10·5	9 15 57	−50	+11 44·3	+1·2	0·7500	0·8201	
11·5	9 15 7	−50	+11 45·5	+1·2	0·7507	0·8206	
12·5	9 14 17	−50	+11 46·7	+1·1	0·7515	0·8211	0·08
13·5	9 13 27	−50	+11 47·8	+1·2	0·7523	0·8216	
14·5	9 12 37	−49	+11 49·0	+1·1	0·7531	0·8222	
15·5	9 11 48	−49	+11 50·1	+1·2	0·7539	0·8227	
16·5	9 10 59	−49	+11 51·3	+1·1	0·7548	0·8232	0·07
17·5	9 10 10	−48	+11 52·4	+1·1	0·7557	0·8237	
18·5	9 9 22	−48	+11 53·5	+1·1	0·7566	0·8242	
19·5	9 8 34	−47	+11 54·6	+1·1	0·7575	0·8247	
20·5	9 7 47	−47	+11 55·7	+1·1	0·7584	0·8252	0·07
21·5	9 7 0	−47	+11 56·8	+1·1	0·7594	0·8257	
22·5	9 6 13	−46	+11 57·9	+1·0	0·7604	0·8263	
23·5	9 5 27	−46	+11 58·9	+1·1	0·7614	0·8268	
24·5	9 4 41	−45	+12 0·0	+1·0	0·7624	0·8273	0·07
25·5	9 3 56	−45	+12 1·0	+1·0	0·7635	0·8278	
26·5	9 3 11	−44	+12 2 0	+1·0	0·7646	0·8283	
27·5	9 2 27	−44	+12 3·0	+1·0	0·7657	0·8288	
28·5	9 1 43	−43	+12 4·0	+0·9	0·7668	0·8293	0·07
29·5	9 1 0	−43	+12 4·9	+0·9	0·7679	0·8298	

Opposition in Rectascension zur Sonne: 1892 Februar 6.
Reduction auf 1855·0 für 1892 Februar 15·5:

$$d\alpha = -2^{m}\,0^{s};$$
$$d\delta = +9'1.$$

Als Einheit der Helligkeit ist jene des 3. März 1891 angenommen worden.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Differenz	Scheinbare Declination	Differenz	Log. der Entfernung ☿ von ♂	Log. der Entfernung ☿ von ☉	Helligkeit
1892							
März 0·5	9h 1m 0s	−43s	+12° 7′9	+4′9	0·7679	0·8298	0·07
1·5	9 0 17	−42	+12 5·8	+0·9	0·7691	0·8304	
2·5	8 59 35	−42	+12 6·7	+0·9	0·7703	0 8309	
3·5	8 58 53	−41	+12 7·6	+0·9	0·7715	0·8314	
4·5	8 58 12	−40	+12 8·5	+0·9	0·7727	0·8319	0 07
5·5	8 57 32	−40	+12 9·4	+0·8	0·7739	0·8324	
6·5	8 56 52	−39	+12 10·2	+0·8	0·7752	0·8329	
7·5	8 56 13	−39	+12 11·0	+0·7	0·7765	0·8334	
8·5	8 55 34	−38	+12 11·7	+0·7	0·7778	0·8339	0·06
9·5	8 54 56	−37	+12 12·4	+0·7	0 7791	0·8344	
10·5	8 54 19	−37	+12 13·1	+0·7	0·7804	0·8349	
11·5	8 53 42	−36	+12 13·8	+0·6	0·7818	0·8354	
12·5	8 53 6	−35	+12 14·4	+0·6	0 7832	0·8359	0·06
13·5	8 52 31	−35	+12 15·0	+0·6	0·7846	0·8364	
14·5	8 51 56	−34	+12 15·6	+0·5	0·7860	0·8369	
15·5	8 51 22	−33	+12 16·1	+0·5	0·7874	0·8374	
16·5	8 50 49	−32	+12 16·6	+0·5	0·7888	0·8379	0·06
17·5	8 50 17	−32	+12 17·1	+0·5	0·7902	0·8384	
18·5	8 49 45	−31	+12 17·6	+0·4	0·7916	0·8389	
19·5	8 49 14	−31	+12 18·0	+0·4	0·7931	0·8394	
20·5	8 48 43	−30	+12 18·4	+0·4	0·7946	0·8399	0·06
21·5	8 48 13	−29	+12 18·8	+0·4	0·7960	0·8404	
22·5	8 47 44	−28	+12 19·2	+0·3	0·7975	0·8409	
23·5	8 47 16	−28	+12 19·5	+0 3	0·7990	0·8414	
24·5	8 46 48	−27	+12 19·8	+0·3	0·8005	0·8418	0·06
25·5	8 46 21	−26	+12 20·1	+0·2	0 8020	0·8423	
26·5	8 45 55	−26	+12 20·3	+0·2	0·8035	0·8428	
27·5	8 45 29	−25	+12 20·5	+0·2	0·8050	0·8433	
28·5	8 45 4	−24	+12 20·7	+0·1	0·8065	0·8438	0·05
29·5	8 44 40	−23	+12 20·8	+0·1	0·8080	0·8443	
30·5	8 44 17	−22	+12 20·9	+0·1	0·8095	0·8448	
31·5	8 43 55	−22	+12 21·0	+0·1	0·8111	0·8453	

Reduction auf 1855·0 für 1892 März 16·5:

$$d\alpha = -2^m 1^s;$$
$$d\delta = +8'3.$$

Als Einheit der Helligkeit ist jene des 3. März 1891 angenommen worden.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Differenz	Scheinbare Declination	Differenz	Log. der Entfernung ☿ von ♁	Log. der Entfernung ☿ von ☉	Helligkeit
1892							
April 0·5	8h 43m 55s	—22s	+12°21′0	0′0	0·8111	0·8453	0·05
1·5	8 43 33	—21	+12 21 0	0·0	0·8127	0·8457	
2·5	8 43 12	—20	+12 21·0	0·0	0·8142	0·8462	
3·5	8 42 52	—20	+12 21·0	0·1	0·8157	0·8467	
4·5	8 42 32	—19	+12 20·9	—0 1	0·8173	0·8472	0·05
5·5	8 42 13	—19	+12 20·8	—0·1	0·8189	0·8477	
6·5	8 41 54	—18	+12 20·7	—0·1	0·8204	0·8482	
7·5	8 41 36	—17	+12 20·6	—0·2	0·8220	0·8487	
8·5	8 41 19	—16	+12 20·4	—0·2	0·8236	0·8492	0·05
9·5	8 41 3	—16	+12 20·2	—0·2	0·8252	0·8496	
10·5	8 40 47	—15	+12 20·0	—0·3	0·8268	0·8501	
11·5	8 40 32	—14	+12 19·7	—0·3	0·8284	0·8506	
12·5	8 40 18	—14	+12 19·4	—0·4	0·8300	0·8511	0·05
13·5	8 40 4	—13	+12 19·0	—0·4	0·8315	0·8515	
14·5	8 39 51	—12	+12 18·6	—0·4	0·8331	0·8520	
15·5	8 39 39	—11	+12 18·2	—0·4	0·8347	0·8525	
16·5	8 39 28	—10	+12 17·8	—0·5	0·8363	0·8530	0·04
17·5	8 39 18	—10	+12 17·3	—0·5	0·8378	0·8534	
18·5	8 39 8	—10	+12 16·8	—0·6	0·8394	0·8539	
19·5	8 38 58	— 9	+12 16·2	—0·5	0·8410	0·8544	
20·5	8 38 49	— 8	+12 15·7	—0·6	0·8425	0·8549	0·04
21·5	8 38 41	— 8	+12 15·1	—0·6	0·8440	0·8553	
22·5	8 38 33	— 7	+12 14·5	—0·6	0·8456	0·8558	
23·5	8 38 26	— 7	+12 13·9	—0·6	0·8472	0·8563	
24·5	8 38 19	— 6	+12 13·3	—0·6	0·8487	0·8568	0·04
25·5	8 38 13	— 5	+12 12·7	—0·6	0·8502	0·8572	
26·5	8 38 8	— 5	+12 12·1	—0·7	0·8518	0·8577	
27·5	8 38 3	— 4	+12 11·4	—0·7	0·8533	0·8582	

Reduction auf 1855·0 für 1892 April 14·5:

$$d\alpha = -2^m\,2^s;$$
$$d\delta = +7'9.$$

Als Einheit der Helligkeit ist jene des 3. März 1891 gewählt worden.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. Band. V. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie Physik, Meteorologie und der Mechanik.

XI. SITZUNG VOM 8. MAI 1891.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October bis December 1890) des Bandes 99, Abtheilung I, der Sitzungsberichte vor. Mit diesem Hefte schliesst der Druck des ganzen 99. Bandes aller drei Abtheilungen.

Das k. k. Ministerium des Innern übermittelt die von der oberösterreichischen Statthalterei vorgelegten graphischen Darstellungen über die Eisbewegung auf der Donau während des Winters 1890—91 in den Pegelstationen Aschach, Linz und Grein.

Das w. M. Herr Prof. E. Hering übersendet eine Abhandlung von Prof. Dr. Ph. Knoll an der k. k. deutschen Universität in Prag: „Über helle und trübe, weisse und rothe quergestreifte Musculatur".

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Zur Theorie der Näherungsbrüche".

Das c. M. Herr Prof. H. Weidel übersendet drei im I. Chem. Universitätslaboratorium in Wien von Dr. J. Herzig ausgeführte Arbeiten, und zwar:

1. „Zur Kenntniss des Euxanthons".
2. „Studien über Quercetin und seine Derivate. VI. Abhandlung: Die Moleculargrösse des Quercetin".
3. „Studien über Quercetin und seine Derivate. VII. Abhandlung: Fisetin".

Herr Prof. Dr. Veit Graber in Czernowitz übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Beiträge zur vergleichenden Embryologie der Insecten".

Herr Dr. J. Puluj, Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag, übersendet eine Abhandlung: „Über die Wirkungen gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduction".

Der Secretär legt ein von Prof. H. Hartl an der k. k. Staatsgewerbeschule in Reichenberg eingesendetes versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor, welches die Aufschrift führt: „Beiträge zur Construction continuirlich zeigender Fernthermometer".

Der Secretär legt zwei von Seiner Excellenz dem Herrn Marine-Obercommandanten Freih. v. Sterneck mitgetheilte eingehende Berichte des Commandanten S. M. Schiffes „Kerka", k. und k. Linienschiffs-Lieutenants Constantin v. Görtz, vor, welche die neue Vermessung der Nordküste des Golfes von Patras und die dortigen Veränderungen des Meeresbodens betreffen.

Die neuesten Hypothesen über die Rotation des Planeten Venus,

kritisch beleuchtet

von

Ferdinand Löschardt.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. März 1891.)

I.

Einer der bedeutendsten Astronomen der Gegenwart, Herr Prof. Schiaparelli, Director der Sternwarte zu Mailand, hat, nachdem er seine Aufsehen erregenden Untersuchungen über die Rotation des Mercur zum Abschlusse gebracht, es unternommen, auch die durch Cassini, Bianchini, de Vico und andere Astronomen aufgestellten Berechnungen der Rotationsdauer des Planeten Venus einer sorgfältigen und genauen Kritik zu unterziehen. In einer umfangreichen Arbeit[1] unter dem Titel: „Betrachtungen über die Art der Rotation des Planeten Venus", die er dem königl. lombardischen Institute vorlegte, spricht er seine Ansicht aus, derzufolge auch die Rotation dieses Planeten aller Wahrscheinlichkeit nach sich in einer Zeitdauer, welche seiner siderischen Umlaufszeit um die Sonne gleich ist, also in 224·7 Tagen siderisch vollziehe, oder dass Venus stets dieselbe Seite der Sonne zukehre.

Diese Ansicht glaubte sodann Herr Perrotin durch Beobachtungen in Nizza (welche derselbe der Akademie der Wissenschaften zu Paris unterbreitet und in den Comptes-rendus der Sitzung vom 27. October v. J. veröffentlicht hat) mit einer geringfügigen Modification „verificirt" zu haben.

[1] Bestehend in fünf Noten und veröffentlicht in den Rendiconti del R. Instituto Lombardo, ser. II, vol. XXIII, fasc. IV, V, VI, IX und X.

Die hohe Wichtigkeit des Gegenstandes und der Umstand, dass Herr Schiaparelli zum Schlusse seiner Abhandlung selbst auf fortgesetzte und fleissige Beobachtungen der Venusflecke dringt, von denen er „eine exacte und bestimmte Lösung des Problems von der Rotation der Venus" erwartet, veranlassen mich, dessen Lieblingsbeschäftigung ebenfalls Tagesbeobachtungen der Venus, freilich nur mit einem bescheidenen Tubus von drei Zoll Objectivöffnung, bilden, meine Beobachtungen und Ansichten über diesen Gegenstand zu veröffentlichen.

Um bestmögliche Klarheit in die Sache zu bringen, erlaube ich mir zunächst auf einige Fehlschlüsse in den Ausführungen des Herrn Schiaparelli hinzuweisen, um alsbald auf das nur wenig exacte Verificirungsvorgehen Perrotin's überzugehen und dann Einiges aus meinen eigenen, keineswegs abgeschlossenen Beobachtungen mitzutheilen, aus denen hervorgehen wird, dass über der Rotation der Venus auch nach den Arbeiten der genannten Herren noch immer zum mindesten ein grosses Fragezeichen steht.

Herr Schiaparelli basirt seine neue Hypothese von 224·7 Tagen Rotationsdauer auf seine eigenen, Ende 1877 und Anfangs 1878 gemachten Beobachtungen, aus denen wir die wichtigsten hierher setzen wollen. Er schreibt: „Ich begann diese Beobachtungen am 5. November 1877, etwa 1 Monat vor der grössten östlichen Elongation der Venus, und setzte sie fort bis zum 7. Februar 1878. Ich machte etwa 100 Zeichnungen des Planeten, oft mehrere am gleichen Tage und wandte Vergrösserungen von 210- und 322fach unseres achtzölligen Refractors an. Vom 5. November bis 7. December sah ich nur verschwommene Schatten, ähnlich denjenigen Bianchini's und de Vico's, welche in keiner Weise geeignet waren, eine Rotationsbewegung erkennen zu lassen.

„December 8. von $1^h\ 27^m$ bis $3^h\ 16^m$ war der deutlichste Fleck ein dreieckiger Schatten, etwa auf der Mitte der sichtbaren halben Scheibe. Ein anderer viel schwächerer Schatten schien in der Nähe des Nordhorns zu stehen, während der Theil der Scheibe in der Nähe des Südhorns bis auf eine Entfernung von ein Drittel Durchmesser von diesem Horne aus sich ganz hell zeigte.

„December 9. von $1^h\ 37^m$ bis $4^h\ 0^m$. Grosse Veränderung. Die Hauptspitze des gestrigen Dreiecks ist noch gegen Nord gerichtet in *m* (siehe Tafel), aber der Fleck hat sich gegen das Südhorn verlängert und nimmt fast die ganze obere Hälfte der Phase ein. Das südliche Horn zeigt einen ovalen, hellen, leuchtenden Fleck *h*, neben demselben einen anderen *k*, auch oval, aber weniger hell. Sie sind beide von ähnlichen Ellipsen umgrenzt und in gleicher Richtung orientirt. Soweit man beurtheilen kann, kann ihre wahre Gestalt auf der Oberfläche der Venus nur wenig von einer Kreisform abweichen. Die Ellipse *k* ist vollständig, von *h* steckt ein Theil im Schatten jenseits der Lichtgrenze. Die Intensität des Schattens *hm* ist eine grössere nahe dem Flecken *hk* und dann links der Linie *hm*. Der kreisförmige Rand der Scheibe ist am wenigsten hell auf der Strecke *kx*, sehr hell dagegen bei *s*. Keinerlei Veränderung ist während der $2^1/_2$ stündigen Beobachtung zu erkennen.

„December 10. $1^h\ 21^m$ bis $4^h\ 3^m$. Der Anblick der Venus ist der nämliche wie gestern. Längs der Lichtgrenze zeigt sich bei *y* eine etwas hellere Region.

Am 11. und 12. December das gleiche Ergebniss; nur hatte am ersteren Tage der Schatten *hm* zwei Linien grösster Intensität parallel neben einander und hob sich am 12. December der linke Rand des Fleckes *k* nicht mehr von dem umgebenden Grunde ab. Der Fleck ist an der linken Seite offen und verschwimmt mit der Helligkeit des Randes in *kx*.

„December 14. $1^h\ 55^m$ bis $3^h\ 52^m$. Die bei dem Flecke *k* am 12. December constatirte Veränderung wird bestätigt. Der Fleck *h* ist nur noch ein Theil eines Ovals, der Schatten *hm* ist viel schwächer geworden als vordem. Zwischen den Flecken *h* und *k* sieht man einen Schatten *p* in Gestalt einer Spitze oder eines dreieckigen Horns. Der ganze Rand ist stark erhellt ausser bei *p*.

„December 15. $0^h\ 41^m$ bis $3^h\ 28^m$. Der gleiche Anblick, der Rand ist am hellsten in *s*. Der Schatten *p* ist breit und um vieles deutlicher. Prof. Holden zu Washington hat am gleichen Tage die Spitze auch so gesehen.

„December 16. $1^h\ 27^m$ bis $3^h\ 19^m$ Alles wie am 15. Doch sieht man bei *a* eine hellere Partie.

„December 17. und 18. Der Fleck *h* ist sichtbarer als je; seit 9 Tagen sieht man ihn an der nämlichen Stelle. Er rührt sich nicht. Rotirt also der Planet nicht? Non ne capisco nulla.

„December 21. $1^h\ 15^m$ bis $4^h\ 0^m$. Die Trennung *p* tritt stärker hervor, und der Fleck *h* ist durch einen sehr leichten Schattenstrich in zwei Theile getrennt. Von dem dunkeln Streifen *hm* zweigt sich ein Arm gegen die Lichtgrenze ab.

„December 22. $0^h\ 56^m$ bis $3^h\ 16^m$. Alles wie gestern; aber der zarte Schattenstrich, welcher den hellen Fleck *h* gestern entzwei theilte, ist verschwunden; dieser ist gross und gut sichtbar, ebenso die dunkle Trennung *p*. Der Schatten *hm* ist kräftiger als je, insbesondere gegen *p* hin.

„December 23., 24., 25., 27., 28. Bestätigung der angegebenen Details. Am 24. December von $1^h\ 44^m$ bis $4^h\ 0^m$ keine Veränderung; der Planet scheint unbeweglich. Am 27. ist die dunkle Zone *hm* auch von Herrn Niesten zu Brüssel gesehen worden.

„December 30. $3^h\ 3^m$ bis $4^h\ 15^m$. Man sieht noch die helle Region *h*, welche sich stark verlängert hat und auf dem Rande einen Bogen von vielleicht 35° einnimmt. Indessen hat sie ihren Glanz verloren und ihre Eigenthümlichkeiten, welche sie von der anderen hellen Region unterscheiden. Der Streifen *hm* ist verzweigt und scheint mit der Lichtgrenze einen spitzigeren Winkel zu machen als früher.

„1878. Jänner 6. $0^h\ 26^m$ bis $3^h\ 41^m$. Der Fleck *h* existirt noch, aber er ist erheblich kleiner geworden. Der dunkle Strich *hm* ist ebenfalls feiner geworden und scheint geradlinig.

Die Beobachtungen wurden bis zum 7. Februar fortgesetzt, allein die Schmalheit der Phase machte sie immer schwieriger. Damit endigt die einzige einigermassen vollständige Reihe von Beobachtungen, welche ich gewinnen konnte.“ [1]

Zur Unterstützung seiner Beobachtungen führt dann Herr Schiaparelli noch drei fremde Zeugnisse an, nämlich 1. eine nicht edirte Zeichnung des Herrn Holden, die 1877, December 15. am grossen Refractor zu Washington zwischen $2^h\ 30^m$ bis 3^h mittlerer Ortszeit erhalten wurde, welche be-

[1] Vergl. Rendiconti, Note 4, S. 3 ff., auch „Sirius“, 1890, S. 244 ff.

weist, dass 8 Stunden nach der Mailänder Beobachtung derselbe Fleck *h* noch in Washington gesehen worden, und zwar isolirt von der übrigen Scheibe durch den darunter sichtbaren Schatten und durch die Spitze *p*; 2. die Thatsache, dass Herr Niesten in Brüssel am 28. December 1877, $4^h\ 30^m$ mittlerer Ortszeit den Fleck *pm* gesehen — und 3., dass Herr Trouvelot zu Cambridge in Massachussets den Fleck *h* gesehen und seine Persistenz constatirt hat.[1] Sodann gibt er folgende Interpretation der Beobachtungen:

„Da die Flecke *k* und *h* sich in derselben Position nach Ablauf eines Tages sich wieder finden, so wird man auf eine der folgenden Hypothesen geführt: entweder die Rotation vollzieht sich in 24 Stunden, oder 24 Stunden sind ein ganzes Vielfaches der Periode, oder endlich die Rotation geschieht ausserordentlich langsam. Wir können die Möglichkeit von Perioden unter 24 Stunden sofort ausschliessen. Wie steht es aber mit einer 24stündigen Periode? Würde es nicht möglich sein, eine solche Lage der Pole der Venus anzunehmen, dass daraus die scheinbare Unbeweglichkeit der beiden Flecke *h* und *k* resultiren müsste? Die nachstehenden Thatsachen überheben uns aber vollständig einer weiteren Discussion dieser Frage. Am 15. December haben Herr Holden und ich den Fleck *h* genau in derselben Stellung gefunden während einer Zeitdauer von 8 Stunden. Das schliesst jede Periode von 24 Stunden aus oder macht sie wenigstens in höchstem Grade unwahrscheinlich. Anderseits hätte der Fleck *hm* wegen seiner Lage und Länge irgendwelche merkliche Veränderung während einer Beobachtungszeit von 3 Stunden zeigen müssen, falls sich derselbe um 45° um einen irgendwie gelegenen Durchmesser des Planeten bewegt haben würde. Man muss also eine sehr viel grössere Dauer der Rotation annehmen. Die langsame Rotationsdauer und die Richtung der Axe des Planeten können unmittelbar aus der scheinbaren Unbeweglichkeit der Flecke gegen die Lichtgrenze abgeleitet werden. Die Rotation des Planeten identificirt sich hiernach thatsächlich mit derjenigen der Lichtgrenze, oder mit anderen Worten, sie vollzieht sich

[1] Rendiconti, Note 4, p. 9. — Sirius, 1890, S. 246.

um eine senkrecht zur Bahnebene der Venus stehende Axe in einer Zeitdauer, welche der siderischen Umlaufszeit der Venus um die Sonne gleich ist, also 224·7 Tage beträgt."[1]

Man kann nun recht wohl Herrn Schiaparelli darin beistimmen, dass wir in unserer Untersuchung über die Rotation der Venus mit voller Zuversicht die Flecken *hm*, *h*, *p* und *k* benützen können,[2] ohne jedoch daraus auf eine 225tägige Rotation schliessen zu müssen, ja im Gegentheil, dass eine weit schnellere viel wahrscheinlicher ist. Untersucht man nämlich Herrn Schiaparelli's eigene Beobachtungen, so kommt man zu der Erkenntniss, dass seine Interpretation derselben weit davon entfernt ist, unanfechtbar zu sein. Abgesehen davon, dass er selbst mehrfache Veränderungen der Flecke constatirt, wie z. B. dass ein dreieckiger Schatten am 8. December etwa auf der Mitte der sichtbaren halben Scheibe stand, 24 Stunden später aber unter Beibehaltung seiner Richtung mit der Spitze in *m* fast die ganze obere Hälfte der Phase einnimmt, dass er am 10. December längs der Lichtgrenze bei *y* eine etwas hellere Region bemerkte, die an den vorhergehenden Tagen nicht gesehen wurde, dass auch der am Südhorn vorhandene Fleck *h* an Sichtbarkeit und Aussehen variirte und nur seine Stelle immer die nämliche blieb — wollen wir nur die Frage stellen: wie kann Herr Schiaparelli bei Notirung seiner Beobachtung vom 18. December aus dem Umstande, dass der Fleck *h* seit 9 Tagen an der nämlichen Stelle am Südhorn gesehen wurde, folgern, der Planet rotire wohl nicht? Nach Ansicht sämmtlicher Astronomen, die sich mit dem Planeten eingehend beschäftigt haben, Bianchini und seine Anhänger ausgenommen, ja nach Ansicht des Herrn Schiaparelli selbst vollzieht sich die Rotation der Venus um eine senkrecht zu ihrer Bahnebene stehende Axe, deren Pole also in den Hörnern liegen. Der Fleck *h* muss demnach als am Südhorn befindlich zugleich am Südpole des Planeten liegen und kann folglich nicht um den Planeten, sondern nur um ein in seiner eigenen Ebene gelegenes Bewegungscentrum, welches mit dem Pole zusammenfällt, rotiren.

---

[1] Rendiconti, Note 5, p. 7 u. 8. Vergl. Sirius, 1890, S. 270.

[2] Rendiconti, Note 4, p. 10 u. 11.

Dadurch erklären sich zur Genüge sowohl die Unveränderlichkeit seines Ortes, als auch die Veränderlichkeit seines Aussehens; denn ein Kreis, der sich um sein eigenes Centrum dreht, sonst aber seine relative Stelle zur Umgebung nicht ändert, muss dem Beobachter stets als Kreis erscheinen und kann nur nach Massgabe der jeweiligen perspectivischen Lage zum Beobachter, sowie etwaiger in ihm selbst vorgehender Constitutionsänderungen einen Wechsel im Detail, nicht aber in der Örtlichkeit zeigen. Wir brauchen demnach nicht erst eine solche Lage der Pole anzunehmen, dass daraus die scheinbare Unbeweglichkeit des Fleckes *h* resultiren müsse. Herr Schiaparelli selbst hat uns diese Lage der Pole nach dem Vorgange anderer Astronomen bestimmt, indem er zugibt, die Rotation „vollziehe sich um eine senkrecht zur Bahnebene der Venus stehende Axe.“ [1] In Folge dieser Axenstellung kann die Richtung der Rotation nur geocentrisch Ost—West (oder aphroditocentrisch West — Ost) sein, und ein Polarfleck kann nur um sein eigenes Centrum rotiren. Die Thatsache also, dass am 15. December 1877 Herr Holden zu Washington den Fleck *h* genau in derselben Stellung wie Herr Schiaparelli gefunden während einer Dauer von 8 Stunden, beweist gar nichts gegen eine 24stündige Rotation; denn dieser Fleck darf, da er am Venuspole liegt, selbst in 8 Tagen, gleichviel ob man ihn in Europa oder Amerika beobachtet, seinen Ort nicht ändern, ausser es ändert sich die geocentrische Breite des Planeten.

Welches Bewandtniss es mit den Flecken *k* und *hm* (*pm*) hat, wird sich ergeben, wenn wir die Beobachtungen der von Herrn Schiaparelli angeführten Gewährsmänner näher untersuchen.

II.

Prüfen wir die Zeugnisse der von Herrn Schiaparelli vorgeführten fremden Gewährsmänner. Nach seinem Berichte hat Herr Holden in Washington wohl den hellen Fleck *h* gesehen, und zwar isolirt von der übrigen Scheibe durch den

[1] „....la rotatione del pianeta diventa identica a quella del terminatore, la quale è manifesto farsi intorno ad una asse perpendicolare all'orbita di venere.“ Rendiconti, Nota 5., pp. 8 u. 18.

darunter sichtbaren Schatten und durch die Spitze *p*, d. h. mit anderen Worten: Herr Holden hat 8 Stunden nach der Mailänder Beobachtung am Südhorn der Venus einen hellen runden Fleck, dunkel berandet, geradeso wie Herr Schiaparelli in Mailand gesehen, weiter aber weder den Fleck *k*, noch den dunklen Streifen *hm* (*pm*); denn sonst würde Herr Schiaparelli gewiss nicht unterlassen haben, auch diese zu seinen Gunsten zu erwähnen.[1] Was folgt aber hieraus? Offenbar nichts Anderes, als dass der helle runde Fleck *h* am Venuspole, und zwar auf dunkler Unterlage liegt, welche Unterlage rund um den Fleck hervorragt und für den Anblick von der Erde aus das gleiche mehr weniger kreisrunde Aussehen bietet. Es folgt aber auch weiter, dass der helle Fleck *k* ebenso wie der dunkle Streifen *pm* nach 8 Stunden verschwunden waren, denn sonst müsste Herr Holden diese ebensogut wie den Fleck *h* gesehen haben.

Dasselbe gilt von der zweiten amerikanischen Beobachtung, denn auch Herr Trouvelot zu Cambridge hat nur den Fleck *h* gesehen und als persistent erkannt. Von den Flecken *k* und *pm* ist auch bei ihm keine Rede.[2]

Dass Herr Niesten in Brüssel am 28. December $4^h\ 30^m$ mittlerer Ortszeit die dunkle Zone *hm* gesehen hat, ist ganz natürlich, da beide Beobachtungen zu Mailand und Brüssel so ziemlich simultane waren; denn der Längenunterschied zwischen beiden Städten beträgt nur 17 Minuten in Zeit. Es wird durch diese Beobachtung nichts weiter bestätigt, als dass beide Beobachter recht gesehen haben. Selbst aber wenn angenommen wird, zwischen den beiden Beobachtungen zu Mailand und Brüssel sei eine Zeit von 3 Stunden verflossen, so kann bei der Lage des Streifens *hm* nahe zum Westrande der Kugel eine Veränderung sich nur als eine geringe Projectionsänderung des allgemeinen Aussehens, kaum aber als merkbare Bewegung dargestellt haben. Eine solche müsste nämlich, falls der Fleck um 45° sich um eine irgendwie gelegene Axe des Planeten bewegt hätte, nur dann merkbar geworden

[1] Man vergleiche übrigens auch: Dr. Herm. Klein, Fortschritte der Astronomie, 1877—1879, S. 53 und Astron. Nachr. Nr. 2232, S. 69.

[2] Vergl. Fortschritte der Astronomie, 1880, S. 32.

sein, wenn der Fleck ziemlich auf der Mitte der Kugel gestanden wäre; der Zeichnung des Herrn Schiaparelli nach stand er aber ziemlich nahe dem Kugelrande.

Für die Hypothese einer 225tägigen Rotation beweist also die Brüsseler Beobachtung gar nichts, während die beiden amerikanischen Beobachtungen entschieden dagegen und für eine viel schnellere Rotation sprechen. Damit ist aber die ganze Hypothese Schiaparelli's hinfällig geworden, da seine eigenen Beobachtungen, welche überdies den Planeten nur im absteigenden Theile seiner Bahn (als Abendstern) und nicht auch im aufsteigenden (als Morgenstern) verfolgten und immer zur ziemlich gleichen Tageszeit angestellt wurden, sich ganz gut auch mit einer 24stündigen Rotationsdauer vereinbaren lassen.

Von Bedeutung wäre nur noch die Berufung des Herrn Schiaparelli auf Vogel und Lohse, die 1871 eine schöne Reihe von Beobachtungen der Venus am Schröder'schen Refractor zu Bothkamp ausgeführt haben. Diese Berufung stellt nämlich als Resultat der Bothkamper Beobachtungen hin: 1. Unveränderlichkeit im Aussehen des Planeten bei Beobachtungen während 5 und 6 Stunden (3. Mai, 16. Juni). 2. Sehr geringe oder gar keine Veränderungen bei Beobachtungen an zwei oder drei nacheinander folgenden Tagen (21.—22. Mai, 14.—15.—16. Juni, 30.—31. August, 10.—11. September). 3. Langsame, aber merkliche Veränderung nach langen Zeitintervallen.[1] Obwohl nun die Beobachter selbst erklären, dass es unmöglich scheint, aus den Flecken Schlüsse über die Rotation abzuleiten, glaubt Herr Schiaparelli doch Einiges aus diesen Beobachtungen zu Gunsten seiner Hypothese verwenden zu können. Namentlich führt er einen dunklen, recht auffallenden Fleck in der Nähe der Südspitze an, der am 24. Mai, ebenso am 14. Juni und den folgenden Tagen zu Bothkamp gesehen wurde, und den er mit seinem Flecke *p* (aus dem Jahre 1877) identisch hält. Aus der scheinbaren Permanenz der Form und der Position dieses Fleckes seit dem 24. Mai bis zum 14.—16. Juni glaubt er schliessen zu können, dass der Fleck während

[1] Rendiconti, Note 5, p. 11.

fast eines ganzen Monates seine Lage zur Lichtgrenze nicht merklich geändert habe. Allein die Identität und Permanenz des Fleckes vorausgesetzt und in Betracht genommen, dass die Beobachtung am 24. Mai um $7^h\ 50^m$, am 14. Juni um $8^h\ 10^m$ geschah, so ist leicht einzusehen, dass die beiden Beobachtungen sich ganz gut durch eine 24stündige Rotation erklären lassen; ebenso aber auch durch eine 24tägige, da am 14. Juni der Fleck etwas näher der Lichtgrenze stand als am 24. Mai, wie aus den Bothkamper Zeichnungen zu ersehen ist. Es hält jedoch sehr schwer und man muss dem Bothkamper Berichte Gewalt anthun, um den Fleck permanent zu finden und zu Gunsten einer 225tägigen Rotation zu deuten. Denn am 23. Mai war er nicht zu sehen, vom 25. Mai bis einschliesslich 13. Juni fand keine Beobachtung statt, am 14. Juni stand er etwas näher der Lichtgrenze, am 17. Juni war er weniger markirt, und am 24. Juni konnte er nicht mehr erkannt werden. Bedenkt man nun, dass Herr Schiaparelli selbst in den Bothkamper Beobachtungen langsame, aber merkliche Veränderungen in langen Zeitintervallen findet, so ist es weit wahrscheinlicher, dass, hätte man zwischen dem 24. Mai und 14. Juni den Planeten beobachten können, der betreffende Fleck vor dem 14. Juni ebenso wenig wäre gesehen worden, wie er am Tage unmittelbar vor dem 24. Mai nicht gesehen wurde, dass überhaupt der Aspect der Scheibe vor dem 14. Juni ebenso ein anderer gewesen wäre, wie er vor dem 24. Mai ein anderer als an diesem Tage war. Den Beobachtungen nach war das Aussehen des Planeten vor dem 24. Mai und nach dem 16. Juni veränderlich; warum sollte es gerade in der 21tägigen Zwischenzeit, wo keine Beobachtung stattfand, unveränderlich gewesen sein? Durch eine solche Annahme wird dem Planeten geradezu eine doppelte Natur zugeschrieben: Veränderlichkeit für lange Perioden der Beobachtungen und Unveränderlichkeit für ebenso lange Zeit, wo er nicht beobachtet wird. Man sieht also, dass „la permanenza di forma e di posizione fra il 24 maggio e il 14 giugno nichts weniger als incontestabile“[1] ist, und dass Herr Vogel vollkommen Recht

[1] Rendiconti, Note 5, p. 12.

hatte, als er aus seinen Beobachtungen irgend eine Rotation abzuleiten für unmöglich erklärte.

Von grösserem Gewichte wäre die Thatsache, dass am 3. Mai und 16. Juni 1871 sich das Aussehen des Planeten während 5 und 6 Stunden nicht wesentlich geändert habe. Allein wir werden noch sehen, wie verschiedene Ursachen eine scheinbare Unbeweglichkeit der Flecke bewirken können, und begnügen uns hier bloss zu bemerken, dass Mitte Juni 1871 Venus nur einen scheinbaren Durchmesser von etwa 11″ bis 12″ hatte, und dass am 16. Juni es nur „schien", als ob keine „starken Veränderungen" vorgekommen seien.[1]

Wenn weiter Herr Schiaparelli noch eine wiederholte, von Herrn Denning in Bristol 1881 gemachte Beobachtung eines kleinen glänzenden Fleckes in der Nähe des nördlichen Horns, analog seinem Flecken *k* zu Gunsten seiner Hypothese ins Treffen führt, so bedauern wir wiederum eben in dieser Beobachtung nach dem eigenen Texte des Herrn Schiaparelli viel eher eine Widerlegung als eine Bestätigung der neuen Hypothese zu finden. Herr Schiaparelli schreibt nämlich: „Dieser glänzende Fleck blieb in Contact mit der Lichtgrenze vom 28. bis 31. März. Am 5. April war er verschwunden, allein sein Ort an diesem Tage noch bezeichnet durch die Auszahnung, welche ihn begleitet hatte. Sonach hatte also während 8 Tagen der kleine helle Fleck die Lichtgrenze in ihrer Rotation begleitet." Und er fügt hinzu: „Die Beobachtung des Herrn Denning kann also durch Annahme einer 224tägigen Rotation nicht nur erklärt werden, sondern sie dient auch zur Bestätigung dieser Rotation."[2]

Man ist aber keineswegs genöthigt, diese bestimmte Schlussfolgerung zu ziehen. Nach dem eigenen Berichte des Herrn Schiaparelli ist nämlich Denning's Fleck nur vom 28. bis 31. März mit der Lichtgrenze in Contact gesehen worden. Wo stand er denn aber in der Zeit vom 31. März bis 5. April? Wenn der Himmel heiter war und er beobachtet worden, gewiss nicht mehr an der Lichtgrenze, denn im bejahenden Falle würde der Bericht nicht den 31. März

---

[1] Bothkamper Beobachtungen, Heft II, S. 121.

[2] Rendiconti, Note 5, Seite 13.

als letzte Zeit des Contacts erwähnen. Wenn aber der Himmel in dieser Zwischenzeit von 5 Tagen bewölkt und keine Beobachtung möglich war, so wissen wir einfach nicht, wo der Fleck stand. Im ersten Falle hat aber der Fleck entschieden schneller rotirt als die Lichtgrenze, denn er hat sich soweit von ihr entfernt, dass er am 5. April schon ganz verschwunden war. Im zweiten Falle aber wissen wir über seine Position in der Zwischenzeit eben nichts und können aus dieser unserer Unkenntniss keinerlei Schlussfolgerung bilden. Es ist also durchaus nicht constatirt, dass der Fleck während 8 Tagen die Lichtgrenze in ihrer scheinbaren Rotation begleitet habe, und entbehrt somit das Schlusscorollar, dass er die Rotationsperiode von 224 Tagen bestätige, des hinreichenden Grundes. Übrigens sagt Herr Denning selbst von der Auszahnung des 5. April: „but is may not be identical".

Aber selbst wenn der helle Fleck durch volle 8 Tage, ja sogar, wenn er durch 14 Tage in sichtbarem Contact mit der Lichtgrenze gestanden wäre, sind wir noch immer nicht genöthigt, auf seine objective Unbeweglichkeit zu schliessen; denn er kann ebenso wie die ihn begleitende Auszahnung in der Richtung Ost—West sich in die Länge erstreckt und weit in die Nachtseite hineingereicht haben, so dass unter Annahme einer etwa 24stündigen Rotation täglich und stündlich andere Partien aus der Nacht in die Lichtgrenze einrückten, das westliche Ende aber stets an dem sehr nahen und sehr glänzenden Rande der schon schmalen Sichel verschwand, wo dann dem irdischen Beobachter sich immer der gleiche Aspect darbieten musste, ohne dass Fleck und Auszahnung von später mit denen von früher sachlich identisch waren.

Nach Ansicht des Herrn Denning, welche er aus seinen Beobachtungen schöpfte, haben die Örter der Flecke eine ziemlich rasche Bewegung gegen West gezeigt, was mit Cassini's Rotationsperiode von $23^h\ 21^m$ gut übereinstimmt.[1] Die Beobachtungen dieses angesehenen Astronomen, welche drei Jahre nach denen des Herrn Schiaparelli geschahen, letztere also überholten, bilden demnach eine gefährliche Klippe, welche

[1] Fortschritte der Astronomie, 1882, S. 30.

Herr Schiaparelli um jeden Preis umschiffen muss. Er sucht dies aus den Aufzeichnungen Denning's an einem grossen, verschwommenen, schlecht begrenzten Schatten zu erreichen, welchen dieser auf dem mehr centralen Theile der abnehmenden Sichel in der Zeit vom 28. März bis 5. April 1881 gesehen, und bemüht sich in einer Anmerkung[1] nachzuweisen, wie unrichtig die Argumentation Denning's mit der Bewegung dieses Schattens zu Gunsten einer Rotation von $23^h\,21^m$ sei, begeht aber dabei den Fehler, seine eigene Argumentation auf eben jenen kleinen hellen Fleck in der Nähe des Nordhorns zu stützen, von dem wir soeben gesehen, dass wir über seine successiven Positionen und seine Ausdehnung nichts Bestimmtes wissen.[2]

Aus dem soeben Gesagten erkennt man ohne Mühe, dass der schwächste Punkt der Argumentationen des Mailänder Astronomen für eine Rotationsdauer der Venus von 225 Tagen darin liegt, dass seine eigenen Beobachtungen zur Begründung dieser Ansicht nicht genügen. Um sie zu stützen, muss er daher die Beobachtungen fremder Astronomen, zum Theile auch solcher heranziehen, die Gegner seiner Ansicht sind, und überdies ein eklektisches Verfahren einschlagen, wodurch seinen Betrachtungen ein rein hypothetischer Charakter aufgedrückt wird. Dessenungeachtet hat die Arbeit Schiaparelli's einen grossen Werth für die Wissenschaft. Denn wenngleich, wie aus dem Gesagten hervorleuchtet, Herr Schiaparelli in dem positiven Theile seiner mühevollen Arbeit auch nicht glücklicher war, als alle jene berühmten Astronomen, deren Ansichten er im negativen Theile wiederlegt zu haben glaubt; wenngleich die Basis seiner Ausführungen, nämlich die Unveränderlichkeit der Flecke gerade durch die von ihm angeführten fremden Beobachtungen erschüttert wird, so gebührt ihm doch das Verdienst, die Frage nach der Venusrotation, welche seit de Vico's Zeiten sanft schlummerte, wieder aufgerollt zu haben, so dass eine definitive Lösung nunmehr bald zu erwarten ist.

---

[1] Rendiconti, Note 5, p. 13.

[2] Überdies ist seine Annahme, dass bei einer Rotation von $23^h\,21^m$ „la piccola macchia lucida avrebbe devuto percorrere un parallelo non molto distante dal supposto equatore" durch nichts begründet. Daselbst.

III.

Die behauptete Unveränderlichkeit der Venusflecke scheint also bloss eine subjective zu sein, die ihre Ursache zum Theil in den Beobachtungen selbst, zum Theil in den angewandten Methoden hat.

Es ist nämlich nur zu wahr, was Herr Dr. Vogel über die Venusflecke schreibt: „Diese Flecke sind meist unbestimmt begrenzt und heben sich nur so wenig von den umliegenden Theilen der Planetenscheibe ab, dass sie sich selbst bei guter Luft dem Auge des Beobachters nur intermittirend darstellen und daher nur sehr schwer und unsicher aufzufassen sind. Diesem Umstande mag es zum Theile zugeschrieben werden, dass das Aussehen des Planeten innerhalb einiger Stunden, ja sogar von einem Tage zum andern sich scheinbar nur wenig verändert. Man wird unter solchen Verhältnissen nur grössere Veränderungen zu beobachten im Stande sein.“[1] Es ist daher kein Wunder, wenn diese Flecken so verschiedentlich gedeutet werden. Von ihrer richtigen Deutung hängt aber gerade die Lösung der Frage ab.

Bei dieser Sachlage muss man sich aber besonders davor in Acht nehmen, mit einer gewissen Voreingenommenheit an die Beobachtungen heranzutreten, weil man dadurch zu leicht in Gefahr geräth, immer das zu finden, was man sucht.

Zu diesen Bemerkungen veranlasst uns die Note von Perrotin in den Comptes rendus der Sitzung der Pariser Akademie vom 27. October 1890, nach welcher er Venus vom 15. Mai bis 4. October an 74 Tagen beobachtet und Zeichnungen aufgenommen habe „dans le but de verifier les recentes decouvertes de Mr. Schiaparelli sur la rotation de la planète.“

Seine sämmtlichen Zeichnungen (6 an der Zahl), die er in den Comptes rendus veröffentlicht, sind ebenso wie die Beobachtungen Schiaparelli's Nachmittagsaufnahmen und erstrecken sich nur über je 4 bis 5 zusammenhängende Stunden täglich. Perrotin scheint wohl auch den Planeten wiederholt des Vormittags eingestellt, aber nie Flecken gesehen zu haben.

[1] Bothkamper Beobachtungen, Heft II, S. 125.

Er nimmt aber trotzdem ohneweiters an, dass die Flecken des Nachmittages auch schon Vormittags auf der Scheibe gestanden, er sie aber „par effet des variations de l'illumination et de l'absorption atmosphérique avec la hauteur de l'astre sur l'horizon" nicht gesehen habe. Das ist aber eine erst zu beweisende Annahme. Denn die Flecke können auch darum vormittags nicht gesehen worden sein, weil sie noch nicht in den Tag eingetreten waren. Freilich ist es schwer, bei hohem Sonnen- und niederem Planetenstande zu beobachten; aber im Laufe eines ganzen Sommers gibt es doch auch bei hohem Sonnen- und niederem Planetenstande mitunter Stunden, wo die Luft besonders klar ist und man daher mit Erfolg beobachten kann. Ich habe zur selben Zeit wie Herr Perrotin, nämlich vom 20. Mai bis 18. November 1890, so oft es thunlich war, zu jeder Tageszeit den Planet aufgesucht, an 60 Beobachtungen, die zahlreichen erfolglosen Einstellungen nicht gerechnet, sorgfältig notirt, 46 Zeichnungen angefertigt und mir Mühe gegeben, den Eintritt der Flecke in den Tag zu erspähen. Ich will nun hier die wenigen Beobachtungen im Auszuge aus meinen Aufzeichnungen mittheilen, aus denen man auf eine ziemlich schnelle Bewegung der Flecke schliessen kann.

Die Coordinaten meines Beobachtungsortes sind: Länge 20° 34′ östlich von Greenwich, Breite +45° 52′.

26. Juni, $4^h\,40^m$. Venus im Stundenwinkel 38°, D+20° 15′,[1] zeigt bei tiefblauem Himmel an 36facher Vergrösserung nahe der Mitte des erleuchteten Theiles einen schwachen, einem kleinen Sonnenflecken ähnlichen Punkt, an 72facher Vergrösserung drei graue Flecke (Fig.).

28. Juni, $5^h\,0^m$. Stundenwinkel 45°, D+19° 30′. Venus an 36facher Vergrösserung zeigt den dunklen Fleck ganz deutlich; jedoch scheint er etwas mehr vom Centrum gegen Süd abzustehen. Eine Viertelstunde später an 72facher Vergrösserung der Punkt nicht zu sehen, doch ist der erleuchtete Theil im Innern schwach marmorirt, was sich aber nicht zeichnen lässt, da die Lichtunterschiede viel zu schwach sind. — $6^h\,45^m$, Venus an 72facher Ver-

[1] Sämmtliche Zeit- und Positionsangaben sind mit den Instrumentalfehlern behaftet.

grösserung zeigt ganz deutlich drei sehr mattgraue Flecke, wie am 26.

1. Juli, $9^h\ 30^m$. Venus im Stundenwinkel 289°, $D+18°$. Himmel klar, im Norden feine Cirrhi, in der Gegend der Sonne leichter Dunst nur im Fernrohr zu sehen. Der Planet zeigt deutlich den dunklen Punkt fast ganz genau in der Mitte vor der Lichtgrenze. An 72facher Vergrösserung an derselben Stelle ein schwacher grauer Fleck sichtbar, diesmal aber nur einer (Fig.). In der Nähe des nördlichen Hornes ist der beleuchtete Planetenrand besonders hell, wie wenn dort ein weisser Fleck stünde (*b*). — $6^h\,5^m$, Stundenwinkel 53°, $D+18°\,20'$. An 36facher Vergrösserung zwei dunkle Punkte deutlich wahrzunehmen, an 72facher Vergrösserung drei Flecke schwach sichtbar (Fig.). Himmel schön blau, ganz wolkenlos, etwas Wind.

2. Juli, $9^h\,10^m$. Stundenwinkel 282°, $D+18°\,10'$. Zu Beginn der Beobachtung der Punkt an 36facher Vergrösserung ebendort, wo gestern früh zu sehen, und zwar recht deutlich. Je mehr aber das der Sonne ausgesetzte Fernrohr sich erhitzte, desto unruhiger wurde Venus, so dass die Beobachtung aufgegeben werden musste. — $7^h\ 0^m$, Stundenwinkel 65°, $D+18°\ 5'$. Venus steht in der Nähe feiner Cirrhi. An schwächster Vergrösserung zwei Punkte ganz deutlich, vielleicht auch nördlich ein dritter wahrzunehmen. An stärkerer Vergrösserung unbestimmt marmorirt. Leichter Dunst zieht bisweilen über die Scheibe. Alle Punkte ziemlich auf der Mitte; der südlichste ist der dunkelste und grösste; der nördlichste der schwächste, kaum bemerkbar. Alle drei bilden einen stumpfen Winkel, dessen Scheitel gegen Südwest mehr West gerichtet ist.

8. Juli, $11^h\ 30^m$, Stundenwinkel 316°, $D+15°\ 45'$. Flecken ganz genau so wie am 1. Juli früh, vielleicht noch etwas deutlicher. — $5^h\ 45^m$, Stundenwinkel 49°, $D+15°\,55'$. Anblick genau so wie am 1. Juli Abends. — $7^h\ 40^m$, Venus unverändert, Flecken vielleicht etwas deutlicher.

10. Juli, $10^h\ 0^m$, Stundenwinkel 292°, $D+15°\ 10'$. Dunkler Fleck in der Mitte an der Lichtgrenze deutlich sichtbar (Fig.).

1. August, $11^h\,15^m$. Venus im Stundenwinkel 307°, $D+4°40'$, zeigt einen dunkleren Fleck ganz an der Lichtgrenze südlich vom Centrum und einen minder dunklen etwas ferner der

Lichtgrenze im Centrum (Fig.). Himmel klar, hie und da kleines Haufengewölk, Hitze $23^3/_4°$ R. im Schatten. Kleines Lüftchen. — 5^h15^m, Stundenwinkel 50°, $D+5°$. An schwächster Vergrösserung ein dunkler Punkt südwestlich vom Centrum, an 72facher Vergrösserung ein sichelförmiger grauer Streifen über die ganze erleuchtete Scheibe, parallel mit dem Westrande in der Mitte zwischen diesem und dem Centrum hinziehend. Derselbe ist an seinem südlichsten Ende am deutlichsten, im übrigen Verlaufe aber nur mit grosser Anstrengung wahrzunehmen (Fig.). Himmel ganz klar, Hitze 25° R. im Schatten, ganz windstill.

16. August, $11^h\ 0^m$, Stundenwinkel 305, $D-3°$. Venus zeigt nahe der Lichtgrenze zwei Flecken, wie Fig. — $6^h\ 20^m$, Stundenwinkel 52°, $D-2°\ 45'$. Flecke schön, Nordhorn ausserordentlich hell, nach innen kreisförmig scharf begrenzt wie eine Calotte und nach aussen abgestumpft. Südhorn spitz (Fig.).

28. September, 3^h20^m. Venus im Stundenwinkel 8°, $D-22°$, flackert etwas. Flecken wie Fig. zeigt. Dunkler Bogen etwa in der Mitte des erleuchteten Theiles. In der Mitte der Lichtgrenze ein lichter Fleck. Eiscalotte am Nordpol deutlich. — $5^h\,50^m$, Stundenwinkel $42°\,30'$. Dunkler Bogen bedeutend gegen den Westrand vorgerückt. Lichtgrenze vielleicht gezackt. Eiscalotte scharf.

1. October, $2^h\ 30^m$, Stundenwinkel 354°, $D-23°\ 5'$. Venus ziemlich ruhig, Nordpolcalotte scharf. Dunkler Bogen etwa ein Drittel Halbmesser von der Lichtgrenze. Auch das Südhorn scheint etwas heller zu sein als der übrige Westrand (Fig.). — $5^h\ 5^m$, Stundenwinkel 32°. Venus flackert etwas; dunkler Bogen scheint bis in die Mitte vorgerückt. Unterhalb des Südhorns scheint an der Lichtgrenze eine dunkle Einkerbung sich zu befinden.

Ich bilde mir nun nicht ein, dass diese meine Beobachtungen die Rotationsdauer der Venus ermitteln lassen und möchte lieber das Beispiel des Herrn Vogel nachahmen und nicht zugeben, dass aus meinen Beobachtungen auf irgend welche Rotation geschlossen werde, und das umso weniger, als ich ebenso wie die Herren Schiaparelli und Perrotin den Planeten bisher nur in seinem Abstiege zur Erde, nicht aber auch in seinem Aufstiege zur Sonne beobachtet habe, es aber leicht möglich ist, dass uns der Aufstieg, welcher jedenfalls auch beobachtet werden muss, neue Überraschungen bringe.

Dessenungeachtet wird es aber doch schon gestattet sein, aus dem bisher Dargelegten einige Thatsachen zu constatiren und aus ihnen einige Lehren hinsichtlich der in Zukunft einzuschlagenden Beobachtungsmethoden abzuleiten. Wir finden nämlich, dass der Satz des Herrn Perrotin: „que l'aspect de la planète ne varie pas sensiblement d'un jour à l'autre" nur mit der Beschränkung „zur beiläufigen gleichen Tageszeit" richtig ist. Denn sämmtliche veröffentlichte Zeichnungen des Herrn Perrotin umfassen nur 4—5 Stunden des Nachmittags, und aus diesen auf ein gleiches Aussehen des Planeten während des ganzen Tages zu schliessen, dürfte denn doch unstatthaft sein. Meine angeführten Beobachtungen, welche sich auf 6—10 Stunden erstrecken, haben wenigstens thatsächlich eine Änderung des Aspectes mit geringerer oder grösserer Sicherheit erkennen lassen, obgleich sich auch in meinen übrigen Aufzeichnungen recht häufig die Bemerkung „Fleck an derselben Stelle" oder „unverändert" findet. Bei einem Vergleiche meiner Beobachtungen mit denen des Herrn Perrotin glaube ich sogar weitere positive Anzeichen einer schnellen Rotation zu finden. Herr Perrotin bemerkt nämlich bei Besprechung des Unterschiedes im Aussehen der beiden Regionen links und rechts von dem dunklen Streifen der beiden letzten Monate, er habe in der links liegenden Region bisweilen grosse, unbestimmte, dunkle Flecken zu erkennen geglaubt. Ich habe diese Flecken in den Monaten Juni und Juli ganz deutlich (insofern man da überhaupt von Deutlichkeit sprechen darf) gesehen, wie aus meinen Zeichnungen ersichtlich ist, dagegen keine Spur noch von dem dunklen Bogen, welche die Perrotin'schen Figuren 2 und 3 zeigen.[1] Im August sah ich die fraglichen Flecken Vormittags ohne dunklen Bogen, Nachmittags den dunklen Bogen ohne die Flecken. Wir beide haben also zu Nákófalva und Nizza dieselben Objecte an verschiedenen Stellen der Planetenscheibe und mit verschiedenen Intensitäten gesehen. Was ich deutlich sah, glaubt Herr Perrotin nur mehr unbestimmt erkannt zu haben, und was ich noch nicht sehen konnte, hat er deutlich erkannt. Das scheint doch wohl auf eine schnelle Rotation hinzudeuten. Ferner hat Herr Perrotin ebenso

[1] Comptes rendus, 1890, Nr. 17 und Sirius, 1891, Taf. 2.

wie ich am Nordhorn der Venus einen persistenten hellen Fleck mit ausgeprägtem dunklen Rande gesehen, der sich als Kreissegment in perspectivischer Verkürzung darstellte, also aller Wahrscheinlichkeit nach ein Theil der den Nordpol bedeckenden Eiscalotte war. Ein ähnliches Aussehen hatte der von den Herren Schiaparelli, Holden und Trouvelot 1877 am Südpole gesehene Fleck *h*. Wenn nun Venus stets dieselbe Seite der Sonne zuwendet, wie wäre es da möglich, dass die Polarcalotten eine so regelmässige Kreisform annehmen? Nichts ist natürlicher, als dass wir eine schnelle Rotation annehmen müssen, um zu einer richtigen Berechnung der Fleckenbewegung zu gelangen. Die Kreisform der Polarcalotten nöthigt uns dazu.

IV.

Wir haben nun noch nach den Ursachen zu forschen, warum es so schwer hält und nur selten gelingt, eine Ortsveränderung der Venusflecke wahrzunehmen.

Eine erste Ursache liegt darin, dass man den Planeten tagsüber nicht lange genug und nicht bei jeder Sonnenhöhe beobachtet hat. Eine drei- bis vierstündige Beobachtungsdauer genügt nur um die Zeit der grössten Elongation. Vor dieser muss man 6 bis 9 Stunden hindurch par intervall beobachten. Nach dem Eintritt des grössten Glanzes ist jede Beobachtung fruchtlos oder doch sehr unsicher. Dies, wenn der Planet Abendstern ist. Ist er aber Morgenstern, so gestalten sich die Verhältnisse natürlich umgekehrt. Um dies begreiflich zu finden, hat man nur zu überlegen, dass mit der Entfernung des Planeten von der Erde auch sein scheinbarer Durchmesser variirt, von diesem aber die Grösse des Winkels abhängt, unter welchem irgend eine Dimension oder Distanz auf der Venus von dem irdischen Beobachter aufgefasst wird. So beträgt der scheinbare Durchmesser des Planeten um die Zeit seiner grössten östlichen Elongation etwa 26″, zwei Monate früher aber nur etwa 15″. Der Bogen von 45°, den ein Fleck in Folge der Rotation zurücklegt, zeigt sich uns im ersten Falle unter einem Winkel von 6·5″, im zweiten aber nur unter einem Winkel von 3·7″. Eine solche Distanz ist bei Doppelsternen wohl leicht wahrzunehmen, da dort ihre Endpunkte durch hellleuchtende scharf

begrenzte Signale auf dem dunklen Himmelsgrunde gut bezeichnet sind. Nicht so bei der Venus. Hier bewegen sich die Flecke auf glänzend hellem Untergrunde als hauchähnliche, gerade noch wahrnehmbare Gebilde. Die Endpunkte der zu messenden oder schätzenden Distanz sind, wie allgemein bekannt, verschwommen, unklar und fast beständig in zitternder Bewegung. Dadurch muss aber die sinnliche Wahrnehmung eines Winkels von 3·7″ und selbst eines grösseren ungemein erschwert, wenn nicht gänzlich unmöglich werden, selbst wenn der Fleck auf der Mitte der Scheibe sich befindet. Steht er aber näher dem Rande, so wird begreiflicherweise die Schwierigkeit der Wahrnehmung noch gesteigert. Daher der Eindruck der Unveränderlichkeit der Flecke durch 3 und auch mehr Stunden auf unser Auge. Um dennoch eine Winkelbewegung wahrnehmen zu können, muss man demnach die tägliche Beobachtungsdauer in umgekehrtem Verhältnisse zum scheinbaren Durchmesser des Planeten verlängern oder verkürzen. Eine kürzeste würde genügen, wenn man den Planeten in seiner unteren Conjunction beobachten könnte, wo sein scheinbarer Durchmesser über eine Minute beträgt.

Wie man sieht, liegt der Grund, dass man nur durch vielstündige Beobachtung eine Ortsveränderung der Flecke gewahr werden kann, in den geocentrischen Bahnverhältnissen der Venus, als eines inneren Planeten, und den daraus resultirenden Phasenbildungen, welche gerade entgegengesetzt denen der äusseren Planeten sich gestalten. Während nämlich diese volles Licht zur Zeit ihrer Opposition, also wenn sie der Erde am nächsten stehen, haben, ist bei den inneren Planeten das gerade Gegentheil der Fall. Wir sehen sie gar nicht, wenn sie uns am nächsten, und sie haben ihre vollste Phase in der grössten Entfernung. Ausserdem ist bei den ersteren mit dem vollen Lichte zugleich der grösste scheinbare Durchmesser verbunden, während bei den letzteren die grösste Phase mit dem kleinsten Durchmesser zusammenfällt. Daraus ergibt sich aber eine grosse Leichtigkeit der Beobachtung für die äusseren, und anderseits die geschilderte grosse Schwierigkeit für die inneren Planeten. Ein Beobachter kann sich z. B. vom Mars zur Zeit seiner Opposition verhältnissmässig recht leicht eine Karte von

dessen ganzer Oberfläche anfertigen. Wollte er dies jedoch zur Zeit unternehmen, wenn dieser Planet von einer Quadratur durch die Conjunction zur anderen Quadratur wandert, so würde er wahrscheinlich auch immer nur einen verschwommenen Fleck auf der Mitte der Scheibe wahrnehmen, und das Resultat wäre dann auch bei Mars: Rotation = Revolution.

Es wurde aber Venus bisher immer nur nach derselben Methode beobachtet wie die äusseren Planeten, nämlich von vereinzelten Standorten aus. Es ist jedoch einleuchtend, dass, wenn die Beleuchtungsverhältnisse bei den äusseren und inneren Planeten sich so grundverschieden und in mehrfacher Beziehung gerade entgegengesetzt gestalten, man bei den inneren Planeten die Beobachtungsmethode demgemäss umändern muss. Steht bei Beobachtung z. B. des Mars der Scheitel des Beobachtungswinkels im Standorte des Beobachters und der Planet in der Öffnung des Winkels, so soll man bei Beobachtung der Venus behufs Constatirung von Bewegung der Flecke den Spiess, soll heissen den Beobachtungswinkel umkehren, seinen Scheitel auf den Planeten übertragen und in seine Öffnung den Erdball hineinlegen, d. h. es ist erforderlich, dass Venus nicht von einer einzelnen Sternwarte aus unabhängig, sondern auf dem ganzen Erdenrunde oder wenigstens unter mehreren, weit von einander entlegenen Längengraden gleichzeitig, planmässig, nach vorher festgesetzten Grundsätzen beobachtet werde. Denn es ist höchst wahrscheinlich, dass in Amerika und dem äussersten Oriente unseres Erdballes an gleichen Tagen andere Flecke sich zeigen werden als in Europa. Für diese Wahrscheinlichkeit sprechen wenigstens die beiden, von Herrn Schiaparelli zu seinen Ungunsten angeführten amerikanischen Beobachtungen der Herren Holden und Trouvelot, welche im December 1877 weder den Fleck *k*, noch den Schatten *hm*, sondern nur die Südpolcalotte *h* gesehen haben, was sehr leicht erklärlich ist.

Eine weitere Ursache der Schwierigkeit, Ortsveränderungen der Venusflecke wahrzunehmen, scheint, so paradox dies auch klingen mag, in den modernen, sehr vollkommenen, oftmals auch sehr grossen Instrumenten zu liegen. Die beiden Cassini Bianchini, Schröter haben mit ihren unvollkommenen Fern-

röhren mehrfache Ortsveränderungen der hauchähnlichen Gebilde erkannt und daraus, wenn auch ungenau, die Rotationsdauer berechnen können. De Vico, dem schon ein Cauchoix zur Verfügung stand, klagt schon, dass die Flecken durch 3—4 Stunden anscheinend noch dieselben Positionen auf der Scheibe einnehmen und der Beobachter genöthigt ist, „von Stunde zu Stunde", also wohl den grössten Theil des Tages hindurch zu beobachten, um an ihrer Bewegung nicht irre zu werden. Die Herren Schiaparelli und Perrotin mit ihren ausgezeichneten Refractoren sind aber kaum mehr im Stande, eine Bewegung der Flecke zu erkennen. Mir dagegen mit meinem unansehnlichen, aber vorzüglichen Dreizöller (von Karl Fritsch in Wien) ist es wieder, wiewohl nicht ohne Mühe gelungen, eine solche im Verlaufe mehrerer Stunden zu constatiren.

Ich glaube daher, dass sich aus diesen Thatsachen folgende Lehre ergibt: Man bediene sich bei Venusbeobachtungen keiner grossen Instrumente und nur schwacher Vergrösserungen. Denn da man derlei Beobachtungen nur am hellen Tage anstellen kann, so dringt bei grossen Instrumenten eine zu grosse Fülle diffusen Sonnenlichtes in das Rohr, was das klare Sehen beeinträchtigt. Wenn auch grosse Instrumente die Flecke leichter zeigen als kleine, so hält es doch schwer, bei dem diffusen unbestimmten Charakter derselben einen fixen Punkt hinsichtlich seiner Örtlichkeit besonders ins Auge zu fassen. An kleinen, aber guten Instrumenten und schwacher Vergrösserung sehen wir aber nur die dunkelsten, respective hellsten Partien der Flecke, welche sich uns gewissermassen nur als Punkte und Linien präsentiren, an denen jedoch eben dieses Umstandes wegen eine Bewegung leichter wahrzunehmen ist. Ich finde mich da in Übereinstimmung mit Gruithuisen, der untersucht hat, ob grosse oder kleine Fernrohre die Polarflecke der Venus besser erkennen lassen, indem er den Planeten mit Fraunhofer'schen Achromaten von 5, $3^1/_2$ und $1^1/_2$ Fuss Brennweite beobachtete. Es zeigte sich, dass das kleinste Instrument die hellen Flecke am deutlichsten darstellte.[1] Man vergesse aber niemals das Objectiv, wie zu Bothkamp geschehen, abzublenden oder wenigstens nach dem

[1] Sirius, 1891, S. 31.

Rathe, welchen Herr Dr. Herm. Klein in seiner „Anleitung zur Durchmusterung des Himmels“ gibt, eine Röhre aus Pappe, je länger desto besser, auf das Objectivende des Fernrohres aufzusetzen, um das diffuse Tageslicht abzuhalten.

Endlich muss noch eine Ursache der Schwierigkeit, deutliche Bilder der Venusoberfläche zu erhalten, in den combinirten Refractionswirkungen der Venus- und Erdatmosphären gesucht werden, welche sich nach dem wechselseitigen Höhenstande der beiden Weltkörper, nämlich der Venus über dem Erdhorizonte und der Erde über dem Horizonte verschiedener Orte auf der Venus von Stunde zu Stunde ändern und möglicherweise bewirken, dass ein Fleck schon in der kürzesten Gesichtslinie erscheint, wenn er noch östlich derselben steht und noch in ihr verharrt, wenn er schon westlich gerückt ist.

Nach übereinstimmender Ansicht der Astronomen muss Venus eine sehr dichte Atmosphäre besitzen. Herr Dr. Vogel schreibt diesbezüglich: „Das nebelartige verschwommene Aussehen der Flecke, sowie die — besonders zu der Zeit, wo die Venus als Sichel erscheint — auffallende Abnahme des Lichtes nach der Beleuchtungsgrenze machen es sehr wahrscheinlich, dass der Planet von einer Atmosphäre umgeben ist, in der eine sehr dicke und dichte Schicht von Condensationsproducten schwebt, und dass die Aufhellungen in dieser Schicht nie soweit gehen, dass sie deutlich markirte Flecken auf der Venusscheibe bedingen oder einen Durchblick auf die Oberfläche des Planeten gestatten.“[1] Es ist jedoch nicht einmal nothwendig, eine besonders dichte Venusatmosphäre anzunehmen, um über die Refractionswirkungen derselben klar zu werden. Es genügt schon eine Atmosphäre von der Dichte unserer Erdatmosphäre, welche, auch wenn keine Condensationsproducte in ihr schweben, für den Anblick von aussen eigenthümliche Effecte hervorrufen muss. Hat nämlich Venus ebenso wie unsere Erde eine 24stündige Rotation, so muss auf ihr, ebenso wie auf der Erde, die Lufthülle in Folge des Umschwunges am Äquator eine grössere Höhe erhalten als gegen die Pole hin; es muss am Äquator eine Aufstauung der Atmosphäre stattfinden, in Folge welcher ihre Oberfläche ein Ellipsoid bildet, dessen grösster Durchmesser in der

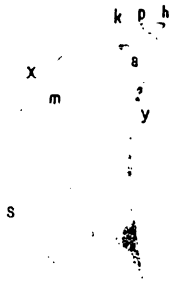
[1] Bothkamper Beobachtungen, Heft II, S. 125.

Äquatorebene liegt und dessen kleinster die Pole verbindet. Dieses Ellipsoid umgibt die feste Kugel gleichmässig, jedoch mit von oben nach unten zunehmender Dichtigkeit. Angenommen nun, diese ellipsoide Lufthülle sei ganz klar und durchsichtig, so bildet ihre dem aussenstehenden Beobachter zugekehrte Hälfte eine Art optischen Meniscus mit gestreckter Wölbung, durch welchen hindurch er auf die feste Oberfläche sieht. In diesem Meniscus hat aber jede Schichte in Folge der nach unten zunehmenden Dichte einen anderen Brechungsexponenten. Man kann also keine einfache Sammlung der von der festen Oberfläche des Planeten ausgesandten Lichtstrahlen erwarten, sondern es muss sich gegen den Äquator hin eine Verzerrung und ein Ineinanderfliessen der Bilder ergeben, auch müssen dort wegen der grösseren Mächtigkeit der Luftschichte die Lichteindrücke mehr gedämpft sein; an den Polen dagegen, wo die Unter- und Oberfläche des Luftoceanes mehr parallel zu einander stehen und auch die Mächtigkeit geringer ist, müssen die Bilder deutlicher durchscheinen.

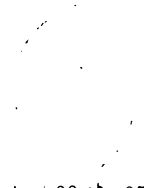
Der ellipsoidischen Gestalt der Venusatmosphäre mag es demnach zuzuschreiben sein, dass wir die Flecke gegen die Pole hin deutlicher wahrnehmen können als in der Nähe des Äquators, und dass die Venus oftmals eine kleinere Sichel zeigt, als sie der Berechnung nach haben sollte. Sind diese beiden Wahrnehmungen hinreichend sichergestellt, so läge umgekehrt in ihnen ein Beweis, dass der Planet eine schnelle Rotation haben müsse, denn sonst könnte sich die Atmosphäre am Äquator nicht in dem Masse aufstauen, um diese Effecte hervorzubringen.

Ich schliesse diese Abhandlung mit dem Bekenntniss, dass auch ich zu Denjenigen gehöre, die nach den vorsichtigen Worten des Herrn Schiaparelli „der Meinung sind, dass die Rotationselemente der Venus zur Zeit völlig unbekannt sind. Die vorgehende rasche Prüfung der Frage führt uns nur allzusehr zu dieser letzten Schlussfolgerung.“[1] Doch dürfte aus vorliegender Darstellung so viel hervorleuchten, dass die von Cassini und de Vico berechnete Rotationsdauer von beiläufig 23^h21^m der Wahrheit viel näher steht, als eine 225tägige oder irgend welche andere.

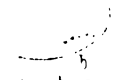
[1] Rendiconti, Note 3, p. 13. — Sirius, 1890, S. 225.



Venus 15 Dez. 1877
nach Prof. Schiaparelli.

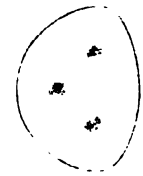


Juni 26. 4^{h} 40^{m}.



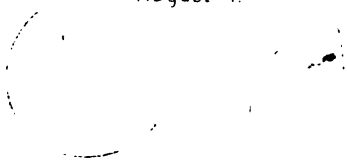
Juli 1. 9^{h} 30^{m}.

Juli 10. 10^{h}.



Juli 1. 6^{h} 5^{m}.

August 1.



11^{h} 15^{m}.

5^{h} 15^{m}.

August 16.

11^{h}.

6^{h} 20^{m}.

Sept. 28. 3^{h} 20^{m}.

Oktober 1. 2^{h} 30^{m}

Venus-Aspekte, aufgenommen 1890 an einem dreizöll. Tubus durch F. Löschardt in Nákófalva.

Lith. Anstalt v. J. Barth, Fünfhaus Wien

Über das System der covarianten Strahlencomplexe zweier Flächen zweiter Ordnung

von

Georg Pick in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. April 1891.)

Bei Gelegenheit einer früheren Arbeit[1] (über Raumcurven vierter Ordnung und die zugehörigen elliptischen Functionen) habe ich mich eingehender mit der Invariantentheorie zweier Flächen zweiter Ordnung beschäftigt; die damaligen Untersuchungen habe ich in jüngster Zeit vervollständigt und möchte im Folgenden den auf die Strahlencomplexe bezüglichen Theil derselben mittheilen.

Eine Übersicht über die vorhandenen fundamentalen Complexe lässt sich leicht mittelst der canonischen Form der Grundflächen gewinnen (§. 1). Das hiebei verwendete Verfahren kann auch ohne Schwierigkeit zu einem strengen Beweisverfahren ausgestaltet werden.[2]

In den §§. 2 und 3 werden die Complexe in symbolischer Form aufgestellt und ihre Bedeutung und fundamentalen Relationen entwickelt.

Eine interessante Anwendung bezieht sich auf die Strahlengleichung des Polartetraëders. Dieselbe ist von Herrn Mertens durch Nullsetzen der Funnctionaldeterminante von sechs quadratischen Complexen gewonnen worden.[3] Es wird hier

---

[1] Diese Sitzungsberichte, 1889. Im Folgenden Kürze halber mit „R." citirt.

[2] Vergl. die Behandlung der Flächen dritter Ordnung bei Salmon-Fiedler, Raumgeometrie, II, S. 418 ff.

[3] Diese Sitzungsberichte, 1885.

gezeigt werden, dass sich ihre linke Seite als ganze Function dritten Grades zweier anderer quadratischer Complexe ausdrückt (§. 4).

§. 1.

Die Complexe in canonischer Form.

Zwei Flächen zweiter Ordnung seien in canonischer Darstellung gegeben:

$$f = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2$$
$$f' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2.$$

Bezeichnet man mit p_{ik} die Strahlencoordinaten

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i,$$

so kann man sich über die vorhandenen covarianten Complexe dadurch orientiren, dass man aus diesen Grössen und geeigneten Functionen der λ_i Ausdrücke zusammensetzt, die gegenüber jenen Collineationen sich invariant verhalten, welche die canonische Gestalt der Grundformen in sich überführen. Diese Collineationen bestehen einerseits in Vorzeichenänderungen der Coordinaten x_i, anderseits in Vertauschungen derselben bei gleichzeitigen entsprechenden Vertauschungen der λ_i. Die ersteren haben Zeichenänderungen der Strahlencoordinaten, die letzteren Vertauschungen derselben zur Folge. Man gewinnt zunächst leicht das Resultat, dass es keine linearen covarianten Complexe geben kann.

Um quadratische Complexe zu bilden, betrachten wir erstens ein Glied von der Form p_{ik}^2. Ein solches zieht, nach dem früher Gesagten, alle übrigen Quadrate der Strahlencoordinaten nach sich. Bezeichnet man mit l_{ik} die Wurzel einer Resolvente sechsten Grades der Gleichung

$$\omega(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) = 0,$$

so ergeben sich die folgenden sechs quadratischen Complexe:

$$\Sigma p_{ik}^2,\ \Sigma l_{ik} p_{ik}^2, \ldots \Sigma l_{ik}^5 p_{ik}^2.$$

Wir wollen ein diesem Systeme äquivalentes aufstellen, welches möglichst niedrige Grade in den λ_i aufweist. Ein solches ist etwa

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma p_{ik}^2,\ \Sigma(\lambda_i+\lambda_k)p_{ik}^2,\ \Sigma\lambda_i\lambda_k p_{ik}^2,\\ \Sigma(\lambda_i^2+\lambda_k^2)p_{ik}^2,\ \Sigma\lambda_i\lambda_k(\lambda_i+\lambda_k)p_{ik}^2,\ \Sigma\lambda_i^2\lambda_k^2 p_{ik}^2.\end{array}\right\} \quad \ldots 1)$$

Quadratische Complexe, welche Producte verschiedener Strahlencoordinaten enthalten, können kein Glied von der Form

$$p_{ik}p_{ik'}$$

enthalten, was wieder leicht aus der Betrachtung der Collineationen erster Art folgt. Es bleiben also nur die Glieder von der Form

$$p_{23}p_{14},$$

deren es drei gibt. Mit Hilfe einer kubischen Resolvente der Gleichung

$$\omega(\lambda) = 0$$

würden sich also drei neue quadratische Complexe ergeben, von denen aber einer in Folge der Identität

$$p_{23}p_{14}+p_{31}p_{24}+p_{12}p_{34} = 0$$

entfällt.

Sind L_1, L_2, L_3 die Wurzeln der erwähnten Resolvente (also etwa

$$L_1 = \lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_4),$$

so ergeben sich so die beiden quadratischen Complexe

$$\left.\begin{array}{l}L_1p_{23}p_{14}+L_2p_{31}p_{24}+L_3p_{12}p_{34},\\ L_1^2p_{23}p_{14}+L_2^2p_{31}p_{24}+L_3^2p_{12}p_{34}\end{array}\right\} \quad \ldots 2)$$

Im Ganzen gibt es also acht covariante Complexe zweiten Grades. Durch die sechs Complexe 1) lassen sich die Quadrate der Strahlencoordinaten durch die beiden 2) (zusammen mit der Identität) die drei Producte $p_{23}p_{14}$, $p_{31}p_{24}$, $p_{12}p_{34}$ ganz und rational ausdrücken. Wir benützen diesen Umstand jetzt bei der Aufstellung der Complexe höherer Ordnung.

Um zunächst Complexe dritter Ordnung zu gewinnen, bilden wir Producte der Strahlencoordinaten zu dreien. Da ein

solches Product aber nach dem eben Gesagten, ohne reducibel zu sein, keine der Coordinaten im Quadrat und auch keine zwei verschiedene Coordinaten ohne gemeinsamen Index enthalten kann, so ergeben sich nur die folgenden zwei Typen von Producten:

$$p_{12}p_{13}p_{14} \text{ und } p_{34}p_{42}p_{23}.$$

Von jedem Typus gibt es vier Glieder, und wir gelangen also zu den Complexen dritter Ordnung:

$$\Sigma p_{12}p_{13}p_{14},\ \Sigma\lambda_1 p_{12}p_{13}p_{14},\ \Sigma\lambda_1^2 p_{12}p_{13}p_{14},\ \Sigma\lambda_1^3 p_{12}p_{13}p_{14};\quad \ldots 3)$$
$$\Sigma p_{34}p_{42}p_{23},\ \Sigma\lambda_1 p_{34}p_{42}p_{23},\ \Sigma\lambda_1^2 p_{34}p_{42}p_{23},\ \Sigma\lambda_1^3 p_{34}p_{42}p_{23}.\quad \ldots 4)$$

Es gibt also acht covariante Complexe dritter Ordnung.

Höhere Complexe können nach dem oben Gesagten sämmtlich reducirt werden. Mit den 16 aufgestellten Complexen ist also das System erschöpft.

Es muss noch ausdrücklich bemerkt werden, dass die unter 1), 2), 3) und 4) angegebenen Formen durch das eingeschlagene Verfahren in zweierlei Hinsicht unvollständig bestimmt erscheinen. Erstens ist eine jede, mit einer besonderen Ziffer bezeichnete Gruppe von Formen nur in ihrer Gesammtheit gekennzeichnet als ein lineares System, von welchem zwar eine genügende Zahl von Individuen, aber in zufälliger Auswahl herausgegriffen erscheint. Zweitens können den richtigen Formen noch überdies constante Factoren (Functionen der λ_i) anhaften, über welche das Verfahren in der obigen Gestalt keinerlei Auskunft gibt.

§. 2.

Die quadratischen Complexe in symbolischer Form.

Es seien jetzt[1]

$$f = a_x^2 = b_x^2 = \ldots,\ f' = a_x'^2 = b_x'^2 = \ldots$$

die beiden Grundformen,

$$(abcu)^2 = u_\alpha^2 = u_\beta^2 = \ldots,\ (a'b'c'u)^2 = u_\alpha^{2'''} = u_\beta^{2'''} = \ldots,$$

[1] Vergl. wegen der folgenden Bezeichnungen und Operationen R. §§. 1—5.

beziehungsweise ihre zugehörigen Formen. Die Discriminante der Büschelform

$$\xi_1 f + \xi_2 f'$$

ist eine binäre biquadratische Form der $\xi_1 \xi_2$ und werde mit

$$A_\xi^4 = A\xi_1^4 + 4A'\xi_1^3\xi_2 + \ldots + A''''\xi_2^4$$

bezeichnet. Die von dieser Form genommenen binären Invarianten und Covarianten heissen, wie üblich,

$$i,\ j,\ H_\xi^4,\ T_\xi^6.$$

Wir führen ferner die beiden quadratischen Covarianten in folgender Gestalt ein:[1]

$$\varphi = \varphi_x^2 = -a'_\alpha b'_\alpha a'_x b'_x - \frac{1}{4} A'' f + \frac{1}{2} A' f'$$

$$\varphi' = \varphi_x'^2 = -a_{\alpha'''} b_{\alpha'''} a_x b_x - \frac{1}{4} A'' f' + \frac{1}{2} A''' f.$$

Endlich benützen wir die beiden Operationen δ und $\mathfrak{H}$.[2] Die Operation δ führt f in f', f' in Null, φ in φ', φ' in Null über u. s. w. Die Operation $\mathfrak{H}$ führt die binäre Form

$$f_\xi = f\xi_1 + f'\xi_2$$

in

$$\varphi_\xi = \varphi\xi_1 + \varphi'\xi_2$$

über, φ_ξ aber in $\frac{5}{96} i f_\xi$. Hinsichtlich der Form A_ξ^4 selbst ist die Operation identisch mit der Aronhold'schen Operation δ.[3]

Um nun covariante quadratische Complexe zu gewinnen, drücken wir die Strahlencoordinaten durch zwei Systeme von Ebenencoordinaten u_i, v_i aus. Es sind dann drei Typen von symbolischen Factoren zu berücksichtigen:

1) $a_{\alpha'''}, a'_\alpha$; 2) $(aba'b')$; 3) $(abuv), (aa'uv), (a'b'uv)$.

---

[1] Von R. §. 2 im Vorzeichen abweichend.

[2] R. §§. 2 und 3. Das hier gebrauchte $\mathfrak{H}$ ist nicht völlig mit R. §. 3 in Übereinstimmung. Siehe die vorige Anmerkung.

[3] Siehe etwa Clebsch, Binäre Formen, S. 137.

Die Factoren des ersten Typus können nun offenbar vermieden werden, indem man die Symbole der beiden quadratischen Covarianten φ, φ' einführt. Es bleiben dann Factoren von der Form

$$(aba'b'),\ (aba'\varphi') \text{ etc.}$$

und solche wie

$$(abuv), \ldots, (a\varphi uv), \text{ etc.}$$

Zunächst können nun quadratische Complexe ohne coordinatenfreien Factor gebildet werden. Man erhält

$$\sigma = (abuv)^2,\ \sigma' = (aa'uv)^2,\ \sigma'' = (a'b'uv)^2, \qquad \ldots \text{I})$$

wobei

$$\delta\sigma = 2\sigma',\ \delta\sigma' = \sigma'',\ \delta\sigma'' = 0;$$

ähnlich

$$\tau = (a\varphi uv)^2, \tau' = (a\varphi' uv)^2 = (a'\varphi uv)^2,^1\ \tau'' = (a'\varphi' uv)^2, \ \ldots \text{II})$$

mit

$$\delta\tau = 2\tau',\ \delta\tau' = \tau'',\ \delta\tau'' = 0.$$

Mittelst binärer Veränderlicher ξ_1, ξ_2 fassen wir diese sechs Formen in folgender Weise zusammen:[2]

$$\sigma_\xi^2 = \sigma\xi_1^2 + 2\sigma'\xi_1\xi_2 + \sigma''\xi_2^2,\ \tau_\xi^2 = \tau\xi_1^2 + 2\tau'\xi_1\xi_2 + \tau''\xi_2^2.$$

Augenscheinlich ist nun

$$\vartheta\sigma_\xi^2 = 2\tau_\xi^2. \qquad \ldots 5)$$

Eine leichte symbolische Rechnung ergibt ferner:

$$\vartheta\tau_\xi^2 = -\frac{1}{2}(A\tau)^2 A_\xi^2 + \frac{1}{8}(H\sigma)^2 H_\xi^2 + \frac{1}{16} i.\sigma_\xi^2. \qquad \ldots 6)$$

In dieser letzteren Relation liegt zugleich ausgesprochen, dass weitere Bildungen, wie

$$(\varphi\psi uv)^2 \text{ etc.}$$

auf die sechs I) und II) zurückführbar sind.

---

[1] Wegen der hier auftretenden Identität vergl. R. §. 5.

[2] R. §. 3.

Die geometrische Bedeutung dieser sechs Formen wird bekanntlich leicht vermittelst des Clebsch'schen Übertragungsprincips hergeleitet. Darnach bedeutet überhaupt

$$(mnuv)^2 = 0$$

die Gesammtheit der Strahlen, welche die Flächen zweiter Ordnung

$$m_x^2 = 0,\ n_x^2 = 0$$

in harmonischen Punktepaaren schneiden. Wir wollen die Complexe desshalb kurz als „harmonische" bezeichnen. Insbesondere ergeben σ und σ'' die Strahlengleichungen der gegebenen Complexe. Geht man zur canonischen Form über, so erweist sich die Gesammtheit der Bildungen I) und II) mit der Gesammtheit der Complexe 1) §. 1 identisch. So ist zum Beispiel, wenn wir jetzt die Strahlencoordinaten durch Punktcoordinaten ausdrücken,

$$\begin{aligned}
(abuv)^2 &= (a_x b_y - a_y b_x)^2 \\
&= 2\begin{vmatrix} a_x^2, & a_x a_y \\ a_y a_x, & a_y^2 \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} \lambda_1 x_1^2 + \ldots, & \lambda_1 x_1 y_1 + \ldots \\ \lambda_1 y_1 x_1 + \ldots, & \lambda_1 y_1^2 + \ldots \end{vmatrix} \\
&= 2\begin{vmatrix} \lambda_1 x_1, & \lambda_2 x_2, & \lambda_3 x_3, & \lambda_4 x_4 \\ \lambda_1 y_1, & \lambda_2 y_2, & \lambda_3 y_3, & \lambda_4 y_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \end{vmatrix} \\
&= 2\{\lambda_1\lambda_2 p_{12}^2 + \lambda_1\lambda_3 p_{13}^2 + \ldots\}.^1
\end{aligned}$$

Von quadratischen Complexformen, welche einen coordinatenfreien Klammerfactor enthalten, ist die einfachste

$$\begin{aligned}
s &= (aba'b')(abuv)(a'b'uv) \qquad \ldots \text{III)} \\
&= -2(aa'bb')(aa'uv)(bb'uv).
\end{aligned}$$

Aus dieser Bildung entspringt eine neue durch Anwendung der Operation ϑ:

$$\vartheta s = 2(a\varphi a'b')(a\varphi uv)(a'b'uv) + 2(aba'\varphi')(abuv)(a'\varphi' uv).$$

---

[1] Die sechs harmonischen Complexformen finden sich sämmtlich bei Mertens a. a. O. in unsymbolischer Form und anderer Normirung als hier. Zum Theil sind dieselben auch bei Voss (Math. Ann., Bd. 9) und Anderen in Betracht gezogen.

Die beiden rechts auftretenden Formen sind identisch. Man hat nämlich

$$(a\varphi a'b')(a\varphi uv)(a'b'uv) = -(aa'b'c')c'_\alpha d'_\alpha(ad'uv)(a'b'uv) - \frac{1}{4}A''.s$$

$$= -\frac{1}{3}(aa'b'c')(ad'uv)d'_\alpha\{(a'b'uv)c'_\alpha - (a'c'uv)b'_\alpha + (b'c'uv)c'_\alpha\}$$

$$-\frac{1}{4}A''.s$$

$$= \frac{1}{3}a_{\alpha'''}d'_\alpha(ad'uv)\{u_\alpha v_{\alpha'''} - v_\alpha u_{\alpha'''}\} - \frac{1}{4}A''.s,$$

welcher Ausdruck sich nicht ändert bei Vertauschung der beiden Grundformen. Wir setzen also

$$t = (a\varphi a'b')(a\varphi uv)(a'b'uv) \qquad \ldots \text{IV})$$
$$= (aba'\varphi')(abuv)(a'\varphi' uv)$$
$$= \frac{1}{3}(aa'uv)a_{\alpha'''}a'_\alpha(u_\alpha v_{\alpha'''} - v_\alpha u_{\alpha'''}) - \frac{1}{4}A''s$$

und haben sonach

$$\mathfrak{H}s = 4t. \qquad \ldots 7)$$

Die beiden Formen s und t sind Combinanten,[1] wie aus ihrer Symmetrie bezüglich der Coëfficienten der beiden Grundformen einerseits und dem Bestehen der Relationen

$$\delta s = 0, \ \delta t = 0$$

anderseits hervorgeht.

Ihre geometrische Bedeutung ergibt sich am einfachsten durch Übergang zur canonischen Darstellung, wobei sich s und t mit den Formen 2) §. 1 in Übereinstimmung erweisen. Sie sind desshalb tetraëdrale Complexe; insbesondere ist $s = 0$ die Gleichung desjenigen Complexes, welcher aus den Verbindungsgeraden solcher Punkte besteht, welche für beide Grundflächen dieselbe Polarebene liefern.[2]

---

[1] Die beiden Complexe sind sich selbst dual und folglich auch Combinanten der Flächenschaar, welcher die Grundflächen angehören.

[2] Betrachtet man die eine der beiden Grundflächen als Massfläche, so ist $s = 0$ der Reye'sche Axencomplex der anderen. („Polnormalencomplex" bei Waelsch, Acta Leop., 1888.)

Wird t der Operation ϑ unterworfen, so ergibt sich ohne Schwierigkeit

$$\vartheta t = \frac{1}{24} is. \qquad \ldots 8)$$

§. 3.

Die Complexe dritten Grades in symbolischer Form.

Aus je drei Factoren lassen sich die vier folgenden Complexformen dritten Grades bilden:

$$\Gamma = (aa'uv)(a\varphi uv)(a'\varphi uv), \quad \Gamma' = (aa'uv)(a\varphi' uv)(a'\varphi' uv), \quad \ldots V)$$

mit

$$\delta\Gamma = \Gamma', \quad \delta\Gamma' = 0;$$

$$\Theta = (a\varphi uv)(a\varphi' uv)(\varphi\varphi' uv), \quad \Theta' = (a'\varphi uv)(a'\varphi' uv)(\varphi\varphi' uv), \quad \ldots VI)$$

mit

$$\delta\Theta = \Theta', \quad \delta\Theta' = 0.$$

Bildet man wieder in der wiederholt hervorgehobenen Weise die binären Formen Γ_ξ und Θ_ξ, so kann man leicht die folgenden Relationen constatiren:

$$\vartheta\Gamma_\xi = -\Theta_\xi; \qquad \ldots 9)$$

$$\vartheta\Theta_\xi = -\frac{5}{96} i\Gamma_\xi. \qquad \ldots 10)$$

Die geometrische Bedeutung dieser vier Complexe folgt aus dem Clebsch'schen Ubertragungsprincip. Nach demselben stellt überhaupt

$$(lmuv)(lnuv)(mnuv) = 0$$

den Inbegriff derjenigen Geraden dar, welche die drei Flächen zweiten Grades

$$l_x^2 = 0, \quad m_x^2 = 0, \quad n_x^2 = 0$$

in Punktepaaren einer Involution schneiden.[1]

Mit Hinzunahme eines coordinatenfreien Klammerfactors lassen sich vier weitere Complexe dritten Grades bilden, nämlich

$$\Lambda = (aba'\varphi)(abuv)(ca'uv)(c\varphi uv),$$

[1] Vergl. Gundelfinger bei Salmon-Fiedler, Raumgeometrie, I, S. 322.

und drei andere, welche aus Λ durch die Operation δ hervorgehen. Doch ist die hiebei gewonnene Schreibweise unübersichtlich und es empfiehlt sich, den Ausdruck Λ umzugestalten. Ersetzt man darin nämlich φ durch die Symbole der Grundformen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\Lambda &= -(aba'b')(abuv)(ca'uv)(cc'uv)b'_\alpha c'_\alpha \\ &= -\frac{1}{2}(aba'b')(abuv)(cc'uv)c'_\alpha\{(ca'uv)b'_\alpha-(cb'uv)a'_\alpha\} \\ &= -\frac{1}{2}(aba'b')(abuv)(cc'uv)c'_\alpha\{-c_\alpha(a'b'uv)+(ca'b'v)u_\alpha-(ca'b'u)v_\alpha\} \\ &= \frac{1}{2}(aba'b')(abuv)(cc'uv)c'_\alpha(u_\alpha(ca'b'v)-v_\alpha(ca'b'u)),\end{aligned}$$

indem das dritte Glied identisch verschwindet. Man hat jetzt nur in ähnlicher Weise noch die beiden Klammerfactoren $(abuv)$, $(cc'uv)$ aufzulösen, damit u, v überall getrennt auftreten, um das gewünschte Resultat zu erhalten. Um dasselbe bequemer schreiben zu können, führen wir noch die Bezeichnungen ein:

$$(aba'u)^2 = u_{\alpha^2},\ (aa'b'u)^2 = u_{\alpha''}.$$

So erhalten wir

$$\Lambda = \frac{1}{2}(u_\alpha v_{\alpha'}-v_\alpha u_{\alpha'})(u_\alpha v_{\alpha''}-v_\alpha u_{\alpha''})(u_{\alpha'}v_{\alpha''}-v_{\alpha'}u_{\alpha''}).$$

Endlich vertauschen wir in dem Ausdrucke der Strahlencoordinaten die Ebenencoordinaten mit den Punktcoordinaten. Die vier fraglichen Formen stellen sich dann sehr übersichtlich so dar:

$$\left.\begin{aligned}\Lambda &= \frac{1}{2}(\alpha\alpha'xy)(\alpha\alpha''xy)(\alpha'\alpha''xy) \\ \Lambda' &= \frac{1}{6}(\alpha\alpha'xy)(\alpha\alpha'''xy)(\alpha'\alpha'''xy) \\ \Lambda'' &= \frac{1}{6}(\alpha\alpha''xy)(\alpha\alpha'''xy)(\alpha''\alpha'''xy) \\ \Lambda''' &= \frac{1}{2}(\alpha'\alpha''xy)(\alpha'\alpha'''xy)(\alpha''\alpha'''xy),\end{aligned}\right\} \quad \ldots \text{VII)}$$

wobei

$$\delta\Lambda = 3\Lambda', \ \delta\Lambda' = 2\Lambda'', \ \delta\Lambda'' = \Lambda''', \ \delta\Lambda''' = 0.$$

Die geometrische Bedeutung dieser zwei Formen folgt jetzt wieder aus dem Übertragungsprincip. Denn es stellt überhaupt

$$(\lambda\mu xy)(\lambda\nu xy)(\mu\nu xy) = 0$$

die Gesammtheit der Strahlen dar, von welchen an die drei Flächen $u_\lambda^2 = 0$, $u_\mu^2 = 0$, $u_\nu^2 = 0$ Berührungsebenenpaare bestimmt sind, die in Involution liegen.[1] Man erkennt hieraus, dass diese vier involutorischen Complexe den vorhin gefundenen dualistisch gegenüberstehen. Denn die lineare Mannigfaltigkeit der Ordnungsflächen, welche von den Flächen

$$a_x^2 = 0, \ a_x'^2 = 0, \ \varphi_x^2 = 0, \ \varphi_x'^2 = 0$$

bestimmt wird, ist identisch mit der linearen Mannigfaltigkeit von Classenflächen, welche aus

$$u_\alpha^2 = 0, \ u_\alpha^{2\prime} = 0, \ u_\alpha^{2\prime\prime} = 0, \ u_\alpha^{2\prime\prime\prime} = 0$$

hervorgeht; beide bilden die Gesammtheit der Flächen mit gemeinsamem Polartetraëder Δ.[2] Irgend drei Flächen der Mannigfaltigkeit liefern nun offenbar einen involutorischen Complex der ersten Art, welcher sich aus Γ, Γ', Θ, Θ' zusammensetzt, einen solchen der zweiten Art, welche sich aus Λ, Λ', Λ'', Λ''' zusammensetzt.

Beim Übergang zur canonischen Form erkennt man die Gesammtheit der Bildungen V) und VI) in Übereinstimmung mit 4) §. 1, jener VII) mit 3) §. 1.

Noch ist das Verhalten der Λ gegenüber der Operation ϑ zu erwähnen. Man erhält, ähnlich wie früher,

$$\vartheta\Lambda_\xi^3 = -\frac{3}{4}(A\Lambda)^2 A_\xi^2 \Lambda_\xi. \qquad \ldots 11$$

---

[1] Der Complex $\Lambda'' = o$ findet sich in canonischer Form bei Herrn Waelsch (a. a. O.) und heisst dort „Focalcomplex."

[2] R. §. 1.

§. 4.

Das Polartetraëder.

Für die canonische Form ist die Gleichung des Polartetraëders in Strahlencoordinaten:

$$p_{23}p_{31}p_{12}p_{14}p_{24}p_{34} = 0.$$

Man erhält das Product der linken Seite multiplicirt mit dem Quadrate des Differenzenproductes der λ_i offenbar als Functionaldeterminante der sechs harmonischen Complexe (1) §. 1, wodurch eine invariante Gestalt der Gleichung gewonnen ist.[1]

Es ist aber klar, dass man dasselbe Product (gleichfalls multiplicirt mit dem Quadrate des Differenzenproductes) als ganze Function dritten Grades der beiden tetraëdralen Complexformen (2) §. 1 (mit ganzen Coëfficienten in den λ_i) erhält, indem man mit Zuhilfenahme der Identität die drei Producte

$$p_{23}p_{14},\ p_{31}p_{24},\ p_{12}p_{34}$$

linear durch die beiden Complexformen ausdrückt.

Die Functionaldeterminante der sechs Formen I) und II), §. 2, ist vom 24ten Grade in den Coëfficienten der Grundformen, offenbar symmetrisch in denselben und verschwindet bei Anwendung jeder der Operationen δ und ϑ. Sie ist also jedenfalls eine Combinante, und da auch die tetraëdralen Complexe III) und IV), §. 2, Combinanten sind, so können in der gesuchten Darstellung nur Invarianten mit Combinanteneigenschaft als Coëfficienten auftreten. Mit Rücksicht auf den früher constatirten Grad in den Coëfficienten der Grundformen ergibt sich so für die linke Seite ∇ der Gleichung des Polartetraëders

$$\nabla = t^3 + \mu its^2 + \nu js^3,$$

wo μ, ν noch zu bestimmende numerische Factoren bedeuten. Diese ergeben sich aus

$$\vartheta\nabla = 0,$$

[1] Vergl. Mertens a. a. O.

welche Relation die Gleichungen

$$\frac{1}{4}+8\mu=0$$

$$2\mu+12\nu=0$$

$$\frac{\mu}{12}+\frac{\nu}{2}=0$$

liefert. Man erhält somit

$$\nabla = t^3-\frac{1}{2^5}its^2+\frac{1}{2^6.3}js^3. \qquad \ldots 12)$$

Über eine geometrische Darstellung in der Theorie der binären Formen

von

Emil Waelsch,

Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. April 1891.)

Die Covarianten von n Punkten eines Raumes von $n-2$ Dimensionen hat Herr Klein[1] mit der Theorie der Resolventen einer Gleichung n^{ter} Ordnung in Beziehung gesetzt. Man kann diese Covarianten auch, wie dies in der vorliegenden Mittheilung geschehen soll, mit der binären Invariantentheorie in Zusammenhang bringen. Hiezu lege man durch die Punkte eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, die man, da sie rational ist, als binären Träger betrachten kann. Construirt man dann auf der Curve für die n Punkte eine Covariante, so beschreiben die Punkte dieser Covariante eine covariante Fläche der n Punkte, wenn die Curve, durch die n Punkte gehend, variirt.[2]

1. $\mathfrak{C}_{n-2}$ durch n Punkte des R_{n-2}. Es sei im Raume R_{n-2} von $n-2$ Dimensionen ein n-Eck (p) von n Punkten p_i $(i=1,\ldots,n)$ gegeben. Durch diese Punkte gehen ∞^{n-3} Curven $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung, welche als in R_{n-2} liegend rational sind und mit $\mathfrak{C}$ bezeichnet werden sollen. Durch jeden weiteren Punkt des Raumes ist eine einzige Curve $\mathfrak{C}$ bestimmt.

Lässt man in (p) den Punkt p_i weg, so bleibt ein $(n-1)$-Eck $[p]_i$; $n-2$ Punkte des letzteren bestimmen eine Ebene des R_{n-2}[3] und die $n-2$ Seitenebenen von $[p]_i$ bilden eine Fläche

[1] Siehe F. Klein, Über eine geometr. Repräsentation der Resolventen algebr. Gleichungen, Math. Ann., Bd. IV, S. 346.

[2] Vergl: Construct. d. Polargruppen, diese Sitzungsber., Bd. 100, S. 326.

[3] Wir bezeichnen als „Fläche" des R_{n-2} jedes seiner Gebilde von $n-3$ Dimensionen, speciell als „Ebene" das lineare Gebilde.

$n-2^{\text{ter}}$ Ordnung. Es wurde nun l. c. gezeigt, dass die erste Polargruppe des Punktes p_i bezüglich der Punktgruppe $[p]_i$ in der Polarebene P_i von p_i bezüglich dieser Fläche liegt, also in einer Ebene, welche unabhängig von der durch die Punkte gelegten Curve $\mathfrak{C}$ ist. Diese Ebene P_i soll die „Gegenebene" des Punktes p_i heissen; man erhält so n Gegenebenen, welche ein n-Flach (P) bilden. Dasselbe soll das „Gegenflach" des n-Ecks (p) heissen; (p) ist dann das „Gegeneck" von (P).

Ist $x_i = 0$ die Gleichung der Ebene P_i, so kann man setzen: $\Sigma x_i = 0$ und kann die x_i als Coordinaten eines Punktes des R_{n-2} verwenden. Dann ist es leicht, eine Parameterdarstellung der Curve $\mathfrak{C}$ aufzustellen.

Es sei hiezu $(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)^n = a_\alpha^n$ eine binäre Form, deren wirkliche Coëfficienten $\bar{a}_i$ wären, und es sei gesetzt:

$$f = \frac{a_\alpha^n}{a_1^n} = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2) \ldots (\alpha - \alpha_n),$$

so dass $f = 0$ n Punkte einer Geraden gibt. Dann ist die erste Polargruppe des Punktes α_i bezüglich der $n-1$ übrigen Punkte von f gegeben durch die Gleichung:

$$0 = f \cdot \sum_{x=1}^{n} \frac{\alpha_i - \alpha_x}{\alpha - \alpha_i \,.\, \alpha - \alpha_x} = f \cdot \left(\frac{n}{\alpha - \alpha_i} - \sum_{x-1}^{n} \frac{1}{\alpha - \alpha_i} \right).$$

Setzt man nun:

$$x_i = \frac{n}{\alpha - \alpha_i} - \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{\alpha - \alpha_i}, \qquad 1)$$

so folgt zunächst, dass $\Sigma x_i = 0$ ist. Es wird daher jedem Punkte der Geraden ein Punkt eines Raumes von $n-2$ Dimensionen entsprechen, dessen Coordinaten x_i sind, und diese Punkte werden auf einer Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung liegen; die Coordinaten der Punkte dieser Curve sind in 1) rational durch den Parameter α dargestellt.

Den Parameterwerthen $\alpha = \alpha_i$ entsprechen n Punkte p_i der Curve. Die Ebene $x_i = 0$ wird vermöge der Gleichung 1) aus dieser Curve die 1te Polargruppe des Poles p_i bezüglich der $n-1$

übrigen Punkte von (p) ausschneiden, daher sind $x_i = 0$ die Gleichungen der Gegenebenen P_i des n-Ecks (p). Es ergibt sich demnach, dass die Gleichungen 1) die Parameterdarstellung einer die Punkte (p) enthaltenden Curve $\mathfrak{C}$ geben.

Multiplicirt man in den Gleichungen 1) auf den rechten Seiten mit dem Factor $\alpha - \alpha_1$, so erhält man dann für $\alpha = \alpha_1$ die Coordinatenwerthe:

$$x_1 = 1 - n,$$

während die $n-1$ übrigen Coordinaten alle den Werth 1 haben. Daher hat man für die Coordinaten des Punktes p_i:

$$x_i = 1 - n \quad \text{und} \quad x_k = 1,$$

wenn $k \neq i$ ist.

Wenn man demnach in den Gleichungen 1) statt der α_i ein anderes Werthsystem β_i substituirt, so erhält man die Parameterdarstellung einer anderen Curve $\mathfrak{C}$, welche durch die Punkte (p) geht.

Ein Punkt der Geraden $p_1 p_2$ hat, wenn λ ein beliebiger Parameter ist, die Coordinaten:

$$x_1 = \lambda - (n-1),\ x_2 = 1 - (n-1)\lambda;\ x_3, x_4 \ldots x_n = 1 + \lambda;$$

soll der Punkt in der Ebene P_1 liegen, so muss $x_1 = 0$ sein, daher $\lambda = n - 1$, und es ergibt sich für seine übrigen Coordinaten:

$$x_2 = 2 - n;\ x_3, x_4, \ldots, x_n = 1.$$

Es folgt demnach, dass sich das $(n-1)$-Eck $[p]_i$ aus dem Punkte p_i auf dessen Gegenebene P_i in ein $(n-1)$-Eck projicirt, dessen Gegenflach gebildet wird von den Schnitträumen von P_i mit den Ebenen des $(n-1)$-Flachs $[P]_i$. Ähnlich folgt weiter: Projicirt man aus den k Punkten $p_1 \ldots p_k$ die übrigen $n-k$ Punkte von (p) auf den gemeinsamen Raum R_{n-2-k} der k Ebenen $P_1 \ldots P_k$, so erhält man $n-k$ Punkte, deren $n-2-k$ Gegenebenen in R_{n-2-k} von den Ebenen $P_{k+1}, \ldots, P_n$ ausgeschnitten werden.

2. Covarianten- und Invariantenflächen. Wir denken uns nun auf der Curve $\mathfrak{C}$ für die Punkte (p) die ν Punkte (q) einer Covariante νter Ordnung construirt. Variirt $\mathfrak{C}$, durch die Punkte (p) gehend, so beschreiben die Punkte (q) eine Fläche, welche

die „Covariantenfläche“ der gewählten Covariante heissen möge. Diese Fläche hängt vermöge ihrer Construction nur von den Punkten (p) ab, ist demnach eine Covariante des n-Ecks (p). Jede Covariante von (p) ist aber auch eine Covariante seines Gegenflachs (P): Die Covariantenfläche ist dem Gegenflache covariant.

Nun hat Herr Klein l. c. bewiesen, dass jede Covariante eines n-Flachs im Raume von $n-2$ Dimensionen, dessen Seitenflächen die Gleichungen $x_i = 0$ haben und wobei $\Sigma x_i = 0$ ist, eine symmetrische Function der x_i ist. Es ergibt sich demnach, dass jeder Covariante von f eine symmetrische Function der x_i entspricht, die, gleich Null gesetzt, die Gleichung der zugehörigen Covariantenfläche liefert.

Aber auch umgekehrt: Jede covariante Fläche F des n-Ecks (p) schneidet aus $\mathfrak{C}$ eine Covariante der Gruppe (p) auf $\mathfrak{C}$ aus; denn jede lineare Transformation der Curve $\mathfrak{C}$ in sich ist eine Collineation des R_{n-2}; geht bei dieser Transformation der Curve die Gruppe (p) in die Gruppe (p') über, so die covariante Fläche F in F'; also übergeht die Gruppe, welche F aus $\mathfrak{C}$ ausschneidet, in die Schnittgruppe, welche auf F' liegt.

Die Covariantenfläche geht nothwendig im Allgemeinen eine Anzahl Male durch die Punkte p_i hindurch. Diese Anzahl nennen wir die „Potenz p der Covariante“; denn die Covariantenfläche schneidet aus $\mathfrak{C}$ die Covariante aus und die Gruppe (p) so oftmal, als diese Potenz der Covariante beträgt. Den Kegel, welcher der Fläche im Punkte p_i umschrieben ist, nennen wir den „Potenzkegel“ der Covariante für den Punkt p_i. Man erhält sein Gleichungspolynom als niedrigste Entwickelungsglieder der Covariantenfläche an der Stelle $x_1 = 1-n;\ x_2, x_3 \ldots = 1$.

Es gibt Covariantenflächen mit der Potenz Null, welche nicht durch die Punkte (p) gehen. Solche sind z. B. durch die elementaren symmetrischen Functionen der x_i gegeben und durch die Potenzsummen der x_i; denn diese Functionen werden nicht durch das Werthsystem $x_1 = 1-n;\ x_2, x_3 \ldots = 1$ befriedigt.

Der Schnitt der Covariantenfläche mit der Ebene P_i ist eine Covariantenfläche desjenigen $(n-1)$-Ecks $[p]'_i$, welches die Projection von $[p]_i$ aus dem Centrum p_i auf die Ebene P_i ist. Allgemeiner schneidet eine Covariantenfläche den gemeinsamen Raum

R_{n-2-k} von k Ebenen $P_1 \dots P_k$ des Gegenflachs (P) in einer Covariantenfläche des $(n-k)$-Ecks $[a]^{(k)}$, welches man erhält, indem man aus den Punkten $a_1 \dots a_k$ die übrigen Punkte (a) auf diesen gemeinsamen Raum projicirt. Dies ergibt sich, wenn man in der symmetrischen Function der x_i die $x_1, \dots, x_k$ gleich Null setzt; dann bleibt eine symmetrische Function der übrigen x, welche wieder eine Covariantenfläche des $(n-k)$-Ecks ist, weil auch die Summe der übrigen x verschwindet.

Aus einer Seitenebene des n-Ecks (p), welche $n-2$ dieser Punkte verbindet, schneidet eine Covariantenfläche ebenfalls eine Covariante des $(n-1)$-Ecks aus, welches aus den $n-2$ Punkten besteht und aus dem Punkte, welcher auf der Verbindungslinie der übrigen beiden Punkte von (p) liegt.

Auch der Potenzkegel K_i von p_i schneidet aus der Gegenebene seines Scheitels eine covariante Fläche des $(n-1)$-Ecks $[p]'_i$ aus; denn wäre $[P]'_i$ ein $(n-1)$-Flach, dessen Ebenen die Ebene P_i in denselben Räumen schneiden, wie die Ebenen $[P]'_i$, so kann man eine centrale Collineation des R_{n-2} construiren, in welcher der Ebene P_k die Ebene P'_k entspricht und in welcher die Ebene P_i Collineationsebene ist. Dann entspricht auch dem Gegeneck (p) von (P) das Gegeneck (p') von (P') und der Covariantenfläche F von (p) die Covariantenfläche F' von (p'); daher auch der Potenzkegel K_i dem Potenzkegel K'_i von p'_i. Diese Potenzkegel müssen sich demnach auf P_i schneiden und dieser Schnitt muss eine covariante Fläche von $[p]'_i$ sein, da er, wie gezeigt wurde, unabhängig von (P) ist und nur durch $[P]'_i$ bestimmt erscheint.

Ebenso sieht man, dass der Kegel K_i den Raum R_{n-2-k} in einer Covariantenfläche des $(n-k)$-Ecks $[a]^{(k)}$ schneidet.

Jeder Invariante von f entspricht eine Fläche, welche auf folgende Weise erzeugt werden kann. Man bestimme alle Curven $\mathfrak{C}$, auf welchen die Punkte (p) eine binäre Form bilden, für welche immer dieselbe Invariante verschwindet; dann erfüllen diese Curven eine Fläche, welche die „Invariantenfläche der Invariante“ heissen möge. Auch diese Fläche ist covariant zu dem n-Eck (p); daher ist ihr Gleichungspolynom eine symmetrische Function der x. Umgekehrt ist jede covariante Fläche von (p), welche durch Curven $\mathfrak{C}$ erzeugt werden kann, eine Invariantenfläche der binären Form.

3. Covarianten und symmetrische Functionen. Wenn eine ganze rationale Function mehrerer Flächenpolynome identisch verschwindet, so wird auch zwischen den Punktsystemen, welche die Flächen auf einer rationalen Curve ausschneiden, eine entsprechende Relation bestehen. Wenn demnach eine Relation zwischen Invarianten- und Covariantenflächen vorliegt, d. h. also eine Relation zwischen den ihnen entsprechenden symmetrischen Functionen, so werden diese Flächen auf einer Curve $\mathfrak{C}$ Covarianten ausschneiden, zwischen welchen eine Relation besteht. Diese Relation wird sich von der, welche zwischen den Covariantenflächen besteht, dadurch unterscheiden, dass in sie noch f eintreten kann.

Ist C eine beliebige Covariante und sind $c_1, c_2 \dots c_n$ (wobei $c_1 = 0$) die elementaren symmetrischen Functionen der x, so lässt sich die symmetrische Function, welche zu C gehört, ganz und rational durch die $c_2 \dots c_n$ ausdrücken. Daher ist die Schnittgruppe S der Fläche C mit der Curve $\mathfrak{C}$ ganz und rational ausdrückbar durch die Schnittgruppen mit den Covariantenflächen $c_2 \dots c_n$. Die Schnittgruppe S besteht aber aus der Covariante C und der Gruppe (p), diese letztere so oftmal genommen, als die Potenz p der Covariante beträgt; daher besteht die Gleichung:

$$f^p . C = G(c_2 \dots c_n).$$

Es sind daher die Covarianten, welche die elementaren symmetrischen Functionen liefern, ein System von associirten Formen oder Schwesterformen der gegebenen Form f; im nächsten Artikel wird sich ergeben, dass sie mit den Hermite'schen Schwesterformen identisch sind.

Auch jedes andere System von $n-1$ Covarianten, durch deren zugehörige symmetrische Functionen sich alle anderen symmetrischen Functionen ganz und rational ausdrücken lassen, wird ein System von Schwesterformen bilden, so z. B. die Covarianten, welchen die Potenzsummen $s_2 \dots s_n$ zugehören. Da diese Potenzsummenflächen wieder nicht durch die Punkte (p) gehen, werden wir wieder die Gleichung haben:

$$f^p . C = \Gamma(s_2 \dots s_n).$$

Es können aber auch $n-1$ Covarianten, zu welchen symmetrische Functionen (durch welche sich die anderen symmetrischen Functionen rational und ganz ausdrücken lassen) gehören, und die eine gewisse Potenz in den Punkten (p) haben, als Schwesterformen auftreten; dann wird aber in den Ausdrücken der Covarianten durch diese Schwesterformen auch noch f eintreten, wie dies bei den Schwesterformen von Clebsch der Fall ist.

Um aus der Gleichung einer Covariantenfläche von (P), der annullirten symmetrischen Function der x, die zugehörige Covariante zu erhalten, hat man in dem Gleichungspolynom die Substitution 1) zu machen und erhält den Satz:

Jede Covariante von f ist mit einer Potenz von f multiplicirt eine symmetrische Function der n Grössen:

$$\frac{n}{\alpha-\alpha_i}-\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{\alpha-\alpha_x}.$$

Man kann daher sagen: Die n Formen $n-2^{ter}$ Ordnung, welche erste Polaren der Punkte von f bezüglich der $n-1$ übrigen Punkte von f sind (zwischen welchen n Formen eine lineare Relation besteht), bilden ein symmetrisches System irrationaler Schwesterformen von f.

Symmetrische Functionen der letzten Ausdrücke sind aber symmetrische Functionen der Quotienten $\frac{1}{\alpha-\alpha_i}$, aus welchen man die elementaren symmetrischen Functionen bilden kann, durch welche sich dann alle anderen symmetrischen Functionen ganz und rational ausdrücken lassen. Diese elementaren Functionen sind aber die Ableitungen von f nach α, multiplicirt mit Potenzen von f; daher ergibt sich die bekannte Darstellung durch die einseitigen Derivirten der Form.[1] Die Bedingung der Symmetrie in den Ausdrücken 1) ersetzt demnach die Differentialgleichung, welcher die Covariante als Function der Derivirten genügen muss.

Da die Ausdrücke 1) auch geschrieben werden können:

$$x=\sum\frac{\alpha_i-\alpha_x}{\alpha-\alpha_i\,.\,\alpha-\alpha_x},$$

[1] Siehe D. Hilbert, Über eine Darstellungsweise der inv. Gebilde im binären Gebiete, Math. Ann., Bd. 30, S. 15.

so ist auch jede Covariante, multiplicirt mit Potenzen von f eine symmetrische Function dieser letzten Ausdrücke. Um das Leitglied dieser Covariante zu erhalten, hat man in diesen Ausdrücken $\alpha = \infty$ zu setzen, und es ergibt sich: Das Leitglied einer jeden Covariante ist eine symmetrische Function der Ausdrücke;

$$n\alpha_i - \sum_{x=1}^{n} \alpha_x$$

oder, wenn $\bar{a}_1$ der Coëfficient der binären Form ist: der Ausdrücke $n(\alpha_i + \bar{a}_1)$; daher: Das Leitglied einer jeden Covariante ist eine symmetrische Function der Ausdrücke $\bar{a}_1 + \alpha_i$, und umgekehrt ist jede solche Function das Leitglied einer Covariante von f. Ist $\bar{a}_1 = 0$, was durch lineare Transformation immer erreicht werden kann, so ist dann jede symmetrische Function der α_i eine Covariantenfläche von f und umgekehrt.

Man erhält die symmetrische Function, welche die Gleichung der Covariantenfläche einer vorgelegten Covariante gibt, indem man in dem Leitgliede der Covariante $\bar{a}_0 = 1$ und $\bar{a}_1 = 0$ setzt; dann ergibt sich eine symmetrische Function der α_i und aus dieser die gesuchte Function, indem man $\alpha_i = x_i$ setzt. Umgekehrt erhält man aus der symmetrischen Function der x_i das Leitglied der Covariante, indem man für x_i substituirt: $\alpha_i + \bar{a}_1$ oder, wenn man homogen werden will, indem man dafür setzt: $a_0 + \alpha_i \bar{a}_1$.

Da eine jede Invariante eine symmetrische Function der Wurzeldifferenzen ist, so erhält man daher die Gleichung der Invariantenfläche, indem man für die Wurzeln α_i setzt: x_i. Z. B.: Die Discriminantenfläche (die Invariantenfläche der Discriminante) ist das Quadrat der Wurzeldifferenzen; da aber $x_i - x_x = 0$ eine Seitenfläche des n-Ecks (p) darstellt, so besteht die Discriminantenfläche aus dem Quadrate des $\frac{1}{2}n(n-1)$-Flachs der Seitenebenen von (p). Die Discriminantenfläche muss aus allen zerfallenden Curven $\mathfrak{C}$, welche (p) enthalten, bestehen, da auf jeder nicht zerfallenden Curve $\mathfrak{C}$ die Punkte (p) von einander getrennt sind.

4. Schwesterformen. Setzt man nach dem letzten Satze des vorigen Artikels in dem Leitgliede der Covariante, welcher die elementare symmetrische Function c_i entspricht, $\bar{a}_0 = 1, \bar{a}_1 = 0$, so wird man dieselbe symmetrische Function der α_i erhalten, also den Coëfficienten $\bar{a}_i$. Nun ergeben sich die Hermite'schen Schwesterformen[1] C_r, indem man aus

$$f_1\beta_1 + f_2\beta_2 \qquad \text{und} \qquad a_\beta^r a_\alpha^{n-r},$$

die α eliminirt; dann ist:

$$f.C_r = (af)^r a_x^{n-r}.$$

Um das Leitglied dieser Covariante C_r für $\bar{a}_0 = 1$, $\bar{a}_1 = 0$ zu erhalten, setzen wir zunächst in a_x^{n-r} ein: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ und erhalten:

$$a_1^{n-r} \Sigma (-1)^\varkappa \binom{r}{\varkappa} a_1^{n-\varkappa} f_2^{r-\varkappa} a_2^\varkappa f_1^\varkappa;$$

da ferner für $\bar{a}_0 = 1$, $\bar{a}_1 = 0$ sich ergibt: $f_1 = 1$, $f_2 = 0$, so übergeht der letzte Ausdruck in $a_1^{n-r} a_2^r = \bar{a}_r$.

Das Leitglied der Covariante C_r ist demnach $\bar{a}_r$ für $\bar{a}_0 = 1$, $\bar{a}_1 = 0$. Daher sind die Covariantenflächen, welche diesen Covarianten zugehören, dargestellt durch die elementaren symmetrischen Functionen der x; sie sind:

$$\Sigma x_1 x_2 \ldots x_r = 0.$$

Die Covariante C_2 ist mit der Hesse'schen Covariante identisch; daher ist $\Sigma x_1 x_2 = 0$ oder, da $\Sigma x_\varkappa = 0$ ist, auch $\Sigma x_\varkappa^2 = 0$ die Gleichung der Covariantenfläche der Hesse'schen Covariante, wir erhalten demnach wieder den Satz: Die Hesse'sche Covariante der Gruppe (p) wird aus $\mathfrak{C}$ von der Hauptfläche von (p) ausgeschnitten.

Wenn nun eine beliebige Covariante vorliegt, so erhält man nach dem letzten Satze des vorigen Artikels die zugehörige symmetrische Function, indem man im Leitgliede $\bar{a}_0 = 1$, $\bar{a}_1 = 0$ setzt. Diese symmetrische Function hat nun in den α_i einen Grad, welcher gleich dem Gewichte i des Leitgliedes ist; daher ist i die Ordnung der zugehörigen Covariantenfläche:

---

[1] Siehe z. B. Gordan's Vorlesungen, herausgeg. von Kerschensteiner, II, S. 356.

Die Ordnung der Covariantenfläche einer Covariante ist gleich dem Gewichte i ihres Leitgliedes.

Der Schnitt S der Covariantenfläche mit C besteht nun nach Obigem aus dem $\mathfrak{p}$-mal gezählten Schnitte f und aus der Covariante C, deren Ordnung ν und deren Grad g sein möge. Da die Ordnung der Covariantenfläche gleich i ist, folgt daher

$$(n-2)i = n.\mathfrak{p}+\nu;$$

nun ist ferner $2i = n.g-\nu$, so dass sich ergibt: $i = \mathfrak{p}+g$ oder:

Die Potenz einer Covariante ist gleich dem Gewichte weniger dem Grade derselben.

Die Ordnung der Invariantenfläche einer Invariante vom Grade g ist: $\frac{1}{2}ng$, ihre Potenz: $\frac{1}{2}(n-2)g$.

Die Hermite'schen Schwesterformen haben alle die Potenz 0, ihr Gewicht ist gleich ihrem Grade. Bei den Schwesterformen von Clebsch:

$$\sigma_\varkappa = (f,f)^{2\varkappa}, \quad \tau_\varkappa = ((f,f)^{2\varkappa}, f)$$

haben die $\sigma_\varkappa$, $\tau_\varkappa$ die Potenz $2(\varkappa-1)$.

Die Covarianten σ_1, τ_1 sind respective identisch mit den Covarianten C_2 und C_3; daher hat die Covariantenfläche der Functionaldeterminante zwischen der Hesse'schen und der Grundform die Gleichung $\Sigma x_i^3 = 0$. Speciell:

Die Diagonalfläche des Pentaëders (P) schneidet aus $\mathfrak{C}_3$ die Form (H,f) der Gruppe (p) aus.

5. Beispiele. Die Invarianten- und Covariantencurven einer Form 4ter Ordnung sind die Combinanten des Kegelschnittbüschels, welches die 4 Punkte (p) zu Basispunkten hat. Das System dieser Combinanten besteht demnach aus den 3 Curven, welche den elementaren symmetrischen Functionen der x_i entsprechen, nämlich dem Hauptkegelschnitte, dem Diagonaldreiseit und dem Gegenvierseit (P) von (p).

Die Invariantencurven zerfallen in Kegelschnitte des Büschels, und zwar die g_2 entsprechende Curve in 2 Kegelschnitte E, die g_3 entsprechende Curve in 3 Kegelschnitte H. Die Seite A_i wird von den drei übrigen Seiten (P) in 3 Punkten (r) geschnitten. Nach Artikel 1 müssen die Kegelschnitte E eine

Covariante der Gruppe (r) aus P_i ausschneiden; da aber eine Covariante 4ten Grades von (r) das Quadrat der Hesse'schen Covariante sein muss, so berühren die Kegelschnitte E die Gerade A_i in den Punkten dieser Covariante. Die Kegelschnitte H schneiden eine Covariante 6ter Ordnung der Gruppe (r) aus; werden die Punkte (r) als Ecken eines gleichseitigen Dreiecks auf einem Kreise gedacht, so sind die Punkte dieser Covariante die übrigen Ecken des regulären Neunecks, zu welchem dieses Dreieck gehört.

Um auch ein Beispiel für eine Invariantenfläche der Form 5ter Ordnung zu geben, suchen wir diese Fläche für die Hermite'sche Invariante 18ten Grades J_{18}. Die Ordnung dieser Fläche ist 45.

Die Ebene P_i werde von den anderen Seitenebenen des Pentaeders (P) in den Seiten eines Vierseits V geschnitten, dessen Diagonaldreiseit die Seiten δ_e^i mit den gegenüber liegenden Eckpunkten d_e^i $(i = 1, \ldots, 5;\ e = 1, 2, 3)$ habe. Es sei ferner $[p]_i$ das Tetraëder, welches alle Punkte (p) ausser den Gegenpunkt p_i von P_i enthält. Dann ist die erste Polarfläche F_e^i des Poles d_e^i bezüglich des Tetraëders $[p]_i$ eine Fläche dritter Ordnung, welche Theil der Invariantenfläche von J_{18} ist. Denn die 15 Flächen F_e^i, welche von $\mathfrak{C}_3$ beschrieben werden können, geben eine Invariantenfläche von der Ordnung 45; diese Fläche gehört daher zu einer Invariante 18ten Grades, also zu der einzigen J_{18}.

Die Fläche F_e^i hat die Punkte $[p]_i$ zu Doppelpunkten und berührt im Punkte p_i die Ebene, welche δ_e^i enthält, so dass die 3 Ebenen $p_i\delta_e^i$ dem Potenzkegel des Punktes p_i angehören; in dieser Tangentialebene liegen ausser δ_e^i noch zwei Gerade der F_e^i, nämlich die Tangenten, welche von p_i an die Hauptfläche des Pentaëders (P) gezogen werden können. Die Fläche F_e^i schneidet die Ebene P_i in der Geraden δ_e^i und in einem Kegelschnitte K_e^i; die 3 Kegelschnitte K_e^1, K_e^2, K_e^3 gehören zu dem Systeme harmonisch-zugeordneter Kegelschnitte des Vierseits V.

Da F_e^i die Geraden δ_e^i enthält und von $\mathfrak{C}_3$ beschrieben wird, kann man auch sagen: Die Invariantenfläche von J_{18} ist der Ort der $\mathfrak{C}_3$, welche die Diagonalfläche des Pentaëders (P) in einem Punkte der 15 Geraden schneiden,

welche diese Fläche in den Pentaëderebenen besitzt.

Der Punkt d_1^1 hat als Eckpunkt des Diagonaldreiecks des Vierseits, welches die Ebenen $x_2, x_3, x_4, x_5 = 0$ aus der Ebene $x_1 = 0$ ausschneiden, die Coordinaten:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1, \quad x_5 = -1;$$

die Seitenflächen des Tetraëders $[p]_1$ haben die Gleichungen:

$$x_1 - x_2, \quad x_1 - x_3, \quad x_1 - x_4, \quad x_1 - x_5 = 0.$$

Daher ist die Gleichung der Polarfläche des Punktes d_1^1 bezüglich dieses Tetraëders:

$$0 = x_1 - x_2 . x_1 - x_3 . x_1 - x_4 . x_1 - x_5 \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{1}{x_1 - x_2} + \frac{1}{x_1 - x_3} - \frac{1}{x_1 - x_4} - \frac{1}{x_1 - x_5} \right) =$$
$$= x_1 - x_3 . x_1 - x_5 . x_2 - x_4 + x_1 - x_2 . x_1 - x_4 . x_3 - x_5 ;$$

der letzte Ausdruck ist in der That einer der Factoren 3ten Grades, in welche Hermite die Invariante J_{18} zerlegt hat.

XII. SITZUNG VOM 14. MAI 1891.

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem am 10. Mai l. J. erfolgten Ableben des ausländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe, Herrn Professor Dr. Karl Wilhelm v. Naegeli an der königl. Universität in München.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Se. Excellenz der k. und k. Herr Feldmarschall-lieutenant und Obersthofmeister Seiner k. und k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzog Rainer setzt die kaiserliche Akademie in Kenntniss, dass Seine k. und k. Hoheit als Curator der Akademie die diesjährige feierliche Sitzung am 30. Mai mit einer Ansprache zu eröffnen geruhen werde.

Herr Prof. Friedrich Reinitzer an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag dankt für die ihm bewilligte Subvention zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über das Cholesterin.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. A. Rollett in Graz übersendet eine Arbeit des Herrn Dr. Oscar Zoth, Assistenten am physiologischen Institute der Grazer Universität: „Über das durchsichtig erstarrte Blutserum- und Hühnereiweiss und über das Eiweiss der Nesthocker".

Ferner übersendet Herr Prof. Rollett eine Arbeit aus demselben Institute von Dr. Herm. Franz Müller, betitelt: „Beitrag zur Lehre vom Verhalten der Kern- zur Zellsubstanz bei der Mitose".

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Adolf Weiss in Prag übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Entwickelungsgeschichte der Trichome im Corollenschlunde von *Pinguicula vulgaris* L.“.

Herr Prof. Dr. A. Adamkiewicz an der k. k. Universität in Krakau übersendet eine Abhandlung: „Über den apoplectischen Anfall“.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann in Wien übersendet eine Arbeit des Herrn Alfred Klauber: „Über die Eigenschaften des α-Metaxylylhydrazins und seine Einwirkung auf Acetessigester“.

Der Secretär legt zwei versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor, und zwar:

1. Von Herrn Alfred J. Ritter v. Dutczynski in Wien. Dasselbe führt die Aufschrift: „Die Anwendung comprimirter Luft in der Therapie und deren Tragweite“.
2. Von Herrn Prof. Wilhelm Roux in Innsbruck einen Nachtrag zu seinem in der Sitzung am 16. April l. J. vorgelegten versiegelten Schreiben.

Das w. M. Hofrath Prof. C. Claus berichtet über die Resultate seiner Untersuchungen „Über den feineren Bau des Medianauges der Crustaceen“.

Das w. M. Hofrath Director J. Hann legt eine Abhandlung des Herrn Fritz Kerner v. Marilaun vor, betitelt: „Die Änderung der Bodentemperatur mit der Exposition“.

Das w. M. Prof. C. Toldt legt den I. Theil einer Arbeit: „Über die Anhangsgebilde des menschlichen Hodens und Nebenhodens“ vor.

Das w. M. Herr Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung des c. M. Herrn Prof. F. Exner, betitelt: „Elektrochemische Untersuchungen, I. Mittheilung“.

Herr Prof. Lang übergibt ferner eine von Herrn A. Lampa unter der Leitung des Prof. F. Exner im physikalischen Cabinete der Wiener Universität ausgeführte Untersuchung: „Über die Absorption des Lichtes in trüben Medien“.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn Alfred Kraus: „Über Methylirung des Orcins".

Herr Prof. Lieben überreicht ferner eine von Prof. St. v. Kostanecki aus Bern eingesandte Abhandlung: „Über das Gentisin".

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr überreicht eine Abhandlung: „Über Involutionen höheren Grades auf nichtrationalen Trägern".

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Herrick C. L., The Journal of Comparative Neurology. A quarterly periodical devoted to the Comparative Study of the Nervous System. Cincinnati (Ohio), Vol. I, 1. (Plates I—VIII.) March 1891.

Über Involutionen höheren Grades auf nichtrationalen Trägern

von

Emil Weyr,
w. M. k. Akad.

I. Gemeinsame Elementenpaare zweier Involutionen erster Stufe auf einem Träger vom Geschlechte Eins.

Wir denken uns die eine Involution J_1^m als Punktinvolution auf einer Raumcurve $R_{n,1}$ n^{ter} Ordnung vom Geschlechte Eins und verbinden je zwei einer Gruppe angehörigen Punkte durch eine Gerade; alle diese Geraden erfüllen die der Involution entsprechende Involutionsfläche φ.

Die durch irgend eine feste Gerade G gehenden Ebenen schneiden $R_{n,1}$ in einer Involution J_1^n n^{ten} Grades erster Stufe, und die den beiden Involutionen $J_1^m J_1^n$ gemeinschaftlichen Punktepaare liegen offenbar auf Erzeugenden der φ-Fläche, welche die Gerade G schneiden. Die Zahl $g(m, n)$ der den beiden Involutionen m^{ten} und n^{ten} Grades gemeinschaftlichen Elementenpaare wird also zugleich den Grad der Involutionsfläche φ darstellen.

Da jeder Punkt von $R_{n,1}$ mit $(m-1)$ anderen Punkten der Curve eine Gruppe der J_1^m bildet, so ist die Curve $R_{n,1}$ eine $(m-1)$-fache Curve von φ.

Wenn wir die Gerade G als durch einen Punkt a von $R_{n,1}$ hindurchgehend annehmen, so geht J_1^n über in eine J_1^{n-1}, welche also mit der J_1^m $g(m, n-1)$ gemeinsame Paare haben wird, von denen jedes auf einer die G schneidenden Erzeugenden von φ gelegen ist; zu den so entstehenden $g(m, n-1)$ Schnittpunkten von φ mit G tritt noch der $(m-1)$-fache Punkt a, so dass wir im

Ganzen $g(m, n-1) + (m-1)$ Punkte haben. Dies gibt die Beziehung

$$g(m, n) = g(m, n-1) + m - 1. \qquad 1)$$

Diese Recursionsformel liefert, wenn man statt n der Reihe nach $n-1, n-2, \ldots, 4, 3$ setzt, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} g(m, n-1) &= g(m, n-2) + m - 1 \\ g(m, n-2) &= g(m, n-2) + m - 1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g(m, 3) &= g(m, 2) + m - 1 \end{aligned}$$

welche, zu 1) addirt, die Relation:

$$g(m, n) = g(m, 2) + (n-2)(m-1) \qquad 2)$$

ergeben. Nun kann man für $g(m, 2)$ die schon früher einmal[1] gefundene Zahl $(m-2)$ setzen, oder aber, wir setzen in 1) an Stelle von m die Zahl 2 und schreiben m statt n; dies gibt

$$g(2, m) = g(2, m-1) + 1,$$

woraus, wenn statt m der Reihe nach $m-1, m-2, \ldots, 3$ gesetzt wird, sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} g(2, m-1) &= g(2, m-2) + 1 \\ g(2, m-2) &= g(2, m-3) + 1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g(2, 3) &= g(2, 2) + 1 \end{aligned}$$

ergeben, welche, zur obigen addirt, die Relation

$$g(2, m) = g(2, 2) + m - 2$$

liefern. Nun ist eine Paarinvolution durch ein Paar vollkommen bestimmt, so dass zwei Paarinvolutionen kein gemeinsames Elementenpaar besitzen, d. h. $g(2, 2) = 0$, somit

$$g(2, m) = m - 2,$$

was in 2) gesetzt, die Gleichung

---

[1] Siehe: Über Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins, XC. Band, 1884, S. 210.

$$g(m, n) = (m-1)(n-1)-1 \qquad 3)$$

liefert.

„Zwei auf einem Träger vom Geschlechte Eins befindliche Involutionen erster Stufe m^{ten} und n^{ten} Grades besitzen $[(m-1)(n-1)-1]$ gemeinschaftliche Elementenpaare."

Wird G als eine r-punktige Secante von $R_{n,1}$ vorausgesetzt, so erhält man statt 1) die Gleichung $g(m, n) = g(m, n-r) + r(m-1)$, aus welcher für $r = n-2$ sofort die Gleichung 2) folgt.

Übrigens kann die Gleichung 3) direct geometrisch abgeleitet werden, wobei man entweder räumliche oder nur ebene Betrachtungen zu Grunde legen kann.

Wir beginnen mit Letzteren. Es seien $\varkappa$ und $\varkappa'$ zwei positive ganze Zahlen, welche der Gleichung $m-n = \varkappa-\varkappa'$ genügen, und wir setzen $m+\varkappa' = n+\varkappa = q$. Es sei $C_{q,1}$ eine beliebige ebene Curve q^{ter} Ordnung vom Geschlechte Eins, welche den Punkt a zu einem $\varkappa$-fachen und den Punkt b zu einem $\varkappa'$-fachen Punkte haben mag; da sie im Ganzen $\frac{(q-1)(q-2)}{2}-1$ Doppelpunkte besitzen muss, und da a, respective b, für $\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{2}$, respective $\frac{\varkappa'(\varkappa'-1)}{2}$ Doppelpunkte zählt, so wird sie ausser den mehrfachen Punkten a, b noch weitere $\frac{(q-1)(q-2)}{2}-1-\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{2}-\frac{\varkappa'(\varkappa'-1)}{2}$ Doppelpunkte δ besitzen. Die durch a gehenden Strahlen bestimmen auf C eine J_1^n und die durch b gehenden Strahlen eine J_1^m. Die diesen beiden $J_1^n J_1^m$ gemeinsamen Paare sind nun offenbar dargestellt: erstens durch die Doppelpunkte δ und zweitens durch die Paare, welche man aus den $(q-\varkappa-\varkappa')$ Schnittpunkten von C mit der Geraden $\overline{ab}$ bilden kann und deren Zahl somit

$$\frac{(q-\varkappa-\varkappa')(q-\varkappa-\varkappa'-1)}{2}$$

ist. Die Zahl der beiden Involutionen gemeinsamen Paare ist somit:

$$\frac{(q-1)(q-2)}{2}-1-\frac{\varkappa(\varkappa-1)}{2}-\frac{\varkappa'(\varkappa'-1)}{2}+\frac{(q-\varkappa-\varkappa')(q-\varkappa-\varkappa-1)}{2}.$$

Diese Zahl ist aber gleich $(q-\varkappa-1)(q-\varkappa'-1)-1$ oder aber gleich $(m-1)(n-1)-1$ wie früher.

Betrachten wir eine Raumcurve $R_{q,1}$ vom Geschlechte Eins und von beliebiger Ordnung $q (q > m, n)$; es sei A eine $(q-n)$-punktige und B eine $(q-m)$-punktige Secante derselben. Eine Gerade X, welche längs der Leitlinien R, A, B hingleitet, beschreibt eine Regelfläche $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche A zur m-fachen und B zur n-fachen Geraden hat, während R für die Fläche einfach ist. Das Ebenenbüschel A bestimmt auf R eine J_1^m und das Büschel B eine J_1^n; die gemeinsamen Elementenpaare beider liegen offenbar auf Doppelerzeugenden der Regelfläche. Der ebene Schnitt der Regelfläche muss auch vom Geschlechte Eins sein, weil er ja punktweise eindeutig auf R bezogen erscheint; dieser Schnitt ist eine Curve $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem m-fachen Punkte auf A und einem n-fachen auf B. Die Zahl seiner noch auftretenden Doppelpunkte ist nach Obigem gleich $g(m, n)$. Wir haben also die Relation:

$$\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} - g(mn) = 1,$$

woraus wie früher

$$g(m, n) = (m-1)(n-1)-1$$

folgt.

Aus dem Satze über die Anzahl gemeinschaftlicher Elementenpaare einer J_1^m und einer J_1^n auf einem Träger vom Geschlechte Eins folgen sofort die nachstehenden Sätze:

„Die Involutionscurve einer auf einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte Eins befindlichen Punktinvolution m^{ten} Grades (erster Stufe) ist eine Curve von der $[(m-1)(n-1)-1]^{\text{ten}}$ Classe."

Diese Classenzahl reducirt sich um soviele Einheiten, als es in der Involution Elementenpaare gibt, welche durch Doppelpunkte des Trägers dargestellt werden.

Für $m = 2$ ist die Curve von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Classe und vom Geschlechte Null (rational).

„Die Involutionsfläche einer auf einer Raumcurve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte Eins befindlichen Punktinvolution m^{ten} Grades und erster Stufe ist eine Regelfläche $[(m-1)(n-1)-1]^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Trägercurve zur $(m-1)$-fachen Curve besitzt."

Für $m = 2$ ist die Fläche rational und von der Ordnung $(n-2)$; der Träger ist eine einfache Curve der Fläche. Für $m = 3$ ist die Fläche vom Geschlechte Eins, weil auf die Curve abgebildet. Bei einer J_1^m $m > 2$ auf einer R kann man auch von einer Involutionscurve sprechen; es ist die Curve, welche von den Verbindungsebenen je dreier Punkte einer Gruppe eingehüllt wird.

Diese Curve ist, wie man sofort sieht, rational für $m = 3$ und vom Geschlechte Eins für $m = 4$.

II. Gemeinsame Elementenpaare zweier Involutionen erster Stufe auf einem Träger von beliebigem Geschlechte.

Sind die beiden Involutionen J_1^m J_1^n Punktinvolutionen auf einer Raumcurve R von beliebigem Geschlechte, so kann man die eine, z. B. J_1^n, wieder als durch ein Ebenenbüschel ausgeschnitten denken und erkennt sofort, dass auch hier die Reductionsgleichung

$$g(m, n) = g(m, n-1) + m - 1 \qquad 1)$$

giltig bleibt. Nun kann eine Curve von höherem Geschlechte definirt werden dadurch, dass auf ihr im Allgemeinen J_1^m vorkommen, wenn m nicht unter eine bestimmte Grenze sinkt. Wenn β oberhalb dieser Grenze ist, wird man also in 1) auf der linken Seite statt n die Werthe $n-1, n-2, \ldots, \beta+1$ setzen können und erhält:

$$\begin{aligned} g(m, n-1) &= g(m, n-2) + m - 1 \\ g(m, n-2) &= g(m, n-3) + m - 1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g(m, \beta+1) &= g(m, \beta) + m - 1 \end{aligned}$$

was zu 1) addirt die Gleichung:

$$g(m, n) = g(m, \beta) + (n-\beta)(m-1) \qquad 1')$$

liefert.

Auf $g(m, \beta)$ kann man diese selbe Reductionsgleichung 1) anwenden, wenn man in 1) an Stelle von m und n die Werthe β, respective m, setzt. Dies gibt:

$$g(\beta, m) = g(\beta, m-1) + \beta - 1$$

und wenn hierin der Reihe nach statt m die Werthe $m-1$, $m-2$, $\ldots$, $\beta+1$ gesetzt werden:

$$\begin{aligned} g(\beta, m-1) &= g(\beta, m-2)+\beta-1 \\ g(\beta, m-2) &= g(\beta, m-3)+\beta-1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g(\beta, \beta+1) &= g(\beta, \beta)+\beta-1 \end{aligned}$$

und durch Addition aller dieser Gleichungen:

$$g(\beta, m) = g(\beta, \beta)+(m-\beta)(\beta-1).$$

Setzt man diesen Werth in 1′) ein, so ergibt sich:

$$g(m, n) = (m-1)(n-1)-[(\beta-1)^2-g(\beta,\beta)]. \qquad 4)$$

In dieser Gleichung ist also $g(m, n)$ die Zahl der Elementenpaare, welche zwei Involutionen m^{ten} und n^{ten} Grades erster Stufe auf einem Träger von beliebigen Geschlechte gemeinschaftlich haben, und ebenso $g(\beta, \beta)$ die Anzahl der gemeinschaftlichen Elementenpaare zweier Involutionen β^{ten} Grades und erster Stufe auf jenem Träger.

Da die Gleichung 4) für ein beliebiges (zulässiges) β und für beliebige m, n giltig ist, so erkennt man, wenn m, n als constant und β als variabel gedacht wird, sofort, dass der Werth $[(\beta-1)^2-g(\beta, \beta)]$ unabhängig von β und nur von der Natur der Curve abhängig sein kann. Wir setzen:

$$(\beta-1)^2-g(\beta,\beta) = p \qquad 5)$$

und bezeichnen p als das Geschlecht der Curve, wobei nun noch zu zeigen ist, dass diese Zahl in der That jene ist, welche gewöhnlich als Geschlecht der Curve bezeichnet wird. Zu dem Behufe betrachten wir eine ebene Curve n^{ter} Ordnung mit δ Doppelpunkten. Zwei Strahlenbüschel bestimmen auf ihr zwei J_1^n, welche also $g(n, n) = (n-1)^2-p$ gemeinsame Elementenpaare besitzen werden. Diese Zahl setzt sich zusammen: *a)* aus den δ Paaren, welche von den Doppelpunkten repräsentirt werden und *b)* aus den $\frac{n(n-1)}{2}$-Paaren, die man aus den n Schnittpunkten der Curve mit dem gemeinschaftlichen Strahle der beiden Büschel bilden kann. Es ist also

$$\delta + \frac{n(n-1)}{2} = (n-1)^2 - p,$$

somit

$$\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p,$$

und p ist daher in der That nichts Anderes, als das Geschlecht der Curve.

Ebenso für eine Raumcurve; da sind die beiden Strahlenbüschel durch zwei Ebenenbüschel mit sich schneidenden Axen zu ersetzen und δ ist die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte. Wir haben also den Satz:

„Zwei Involutionen erster Stufe von m^{ter} und n^{ter} Ordnung auf einem Träger vom Geschlechte p besitzen

$$g(m, n) = (m-1)(n-1) - p \qquad 6)^1$$

gemeinsame Elementenpaare."

Aus diesem Satze ergibt sich unmittelbar:

„Die Involutionscurve (Enveloppe der Verbindungsgeraden je zweier einer Gruppe angehörigen Punkte) einer J_1^m auf einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte p ist eine Curve $[(n-1)(m-1)-p]^{ter}$ Classe."

„Die Involutionsfläche einer J_1^m auf einer Raumcurve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte p ist eine Regelfläche $[(n-1)(m-1)-p]^{ter}$ Ordnung. Die Curve ist $(m-1)$-fach für die Fläche."

III. Zahl der Doppelelemente einer J_1^m auf einem Träger vom Geschlechte p.

Wir denken uns die J_1^m als Punktinvolution auf einer ebenen Curve C vom Geschlechte p. Wenn man eine solche eindeutige Transformation durchgeführt denkt, dass das Curvenbüschel, welches aus C die Gruppen der J_1^m ausschneidet, in ein Strahlen-

---

[1] Siehe: Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch, I. Band, S. 446, Gleichung 13. Hier ist $\frac{(\varphi\varphi')}{2} = g(m,n)$, wenn $\alpha = \beta = m-1$, $\alpha' = \beta'$, $n-1 = \gamma = \gamma' = 1$ gesetzt wird.

büschel übergeht, so wird C in eine Curve C_n' n^{ter} Ordnung transformirt, welche ebenfalls vom Geschlechte p ist und für welche der Scheitel des Strahlenbüschels ein $(n-m)$-facher Punkt sein wird.

Die Curve C_n' möge ausser dem $(n-m)$-fachen Punkte noch δ Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte besitzen. Die durch den $(n-m)$-fachen Punkt gehenden Strahlen schneiden aus C_n' die transformirte J_1^m aus, und die Zahl Δ der Doppelelemente von J_1^m wird somit gleich sein der Summe aus der Zahl t der durch den $(n-m)$-fachen Punkt gehenden Tangenten und r:

$$\Delta = t+r.$$

Die Classe $\varkappa$ von C_n' ist gegeben durch

$$\varkappa = n(n-1)-(n-m)(n-m-1)-2\delta-3r$$

und somit ist, da $t = \varkappa-2(n-m)$:

$$t = n(n-1)-(n-m)(n-m-1)-2\delta-3r-2(n-m)$$

und folglich

$$\Delta = n(n-1)-(n-m)(n-m-1)-2(\delta+r)-2(n-m).$$

Da C_n' vom Geschlechte p ist, so hat man

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2} - \delta - r,$$

folglich ist

$$(n-m)(n-m-1)+2(\delta+r) = (n-1)(n-2)-2p,$$

somit

$$\Delta = n(n-1)-(n-1)(n-2)+2p-2(n-m)$$

oder

$$\Delta = 2(m+p-1). \qquad 7)^1$$

„Eine Involution m^{ten} Grades erster Stufe auf einem Träger vom Geschlechte p besitzt $2(m+p-1)$ Doppelelemente.“

---

[1] Siehe l. c., S. 460.

Hieraus sofort:

„Eine ebene (räumliche) Curve m^{ter} Ordnung vom Geschlechte p ist von der Classe (vom Range) $[2(m+p-1)-r]$, wenn r die Zahl ihrer Rückkehrpunkte ist."

IV. Cubische Involutionen erster Stufe auf Trägern vom Geschlechte Eins.

„Durch zwei einer J^m_{m-1} entnommene Gruppen von je n Elementen eines Trägers vom Geschlechte Eins ist eine J^m_1 vollkommen und unzweideutig bestimmt."

Denkt man sich die Involutionen etwa als Punktinvolutionen auf einer ebenen Curve, so werden durch die beiden m-elementigen Gruppen die zwei sie enthaltenden Curven der ∞^{m-1}-fachen linearen Schaar, welche die J^m_{m-1} bestimmt, festgelegt und durch dieselben wieder das Curvenbüschel, welches die J^m_1 aus dem Träger schneidet. Da eine J^m_{m-1} durch eine Gruppe vollkommen bestimmt ist, und da der letzte Punkt einer Gruppe durch die übrigen $m-1$ Punkte gegeben erscheint, so kann man auch sagen:

„Eine J^m_1 ist durch eine ihrer Gruppen und durch $(m-1)$ Punkte einer zweiten ihrer Gruppen vollkommen bestimmt."

Insbesondere ist also eine J^3_1 durch ein Tripel und ein Paar vollkommen bestimmt.

Auf einer Curve $C_{3,1}$ dritter Ordnung vom Geschlechte Eins kann die durch ein Tripel $a_1a_2a_3$ und ein Paar b_1b_2 bestimmte cubische Punktinvolution J^3_1 erster Stufe folgendermassen vervollständigt werden. Ein dem Dreieck $a_1a_2a_3$ beliebig umschriebener Kegelschnitt (der auch als Geradenpaar verwendet werden kann) schneidet die Curve in einem Punktetripel $s_1s_2s_3$ und wird vom Kegelschnitte der fünf Punkte $s_1s_2s_3b_1b_2$ in einem Punkte s geschnitten. Um nun die Gruppe zu vervollständigen, welche den beliebigen Punkt x_1 enthält, hat man $C_{3,1}$ mit dem Kegelschnitte $s_1s_2s_3sx_1$ in den Punkten x_2x_3 zum Durchschnitte zu bringen; $x_1x_2x_3$ ist eine Gruppe der J^3_1.

Liegen die Punkte $a_1a_2a_3$, b_1b_2 auf einer Raumcurve vierter Ordnung $R_{4,1}$ vom Geschlechte Eins (erster Art), so schneidet die Ebene $a_1a_2a_3$ die Curve in einem Punkte O, durch welchen alle

Ebenen $x_1x_2x_3$ hindurchgehen; die Ebene $a_1a_2a_3$ wird von der Geraden b_1b_2 in einem Punkte getroffen, welcher mit O verbunden die Axe A des Ebenenbüschels liefert, dessen Ebenen die $R_{4,1}$ in den einzelnen Gruppen der J_1^3 schneiden.

Der Punkt x_1 wird also von jenem Punktepaar x_2x_3 zu einer Gruppe der J_1^3 ergänzt, in welchem $R_{4,1}$ von der Ebene Ax_1 geschnitten wird.

Wenn auf $R_{4,1}$ drei Punktepaare a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 gegeben sind, so gibt es zwei Gerade A, A', welche einpunktige Secanten von $R_{4,1}$ sind und die drei Geraden a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 gleichzeitig schneiden. Die drei letztgenannten Geraden bestimmen nämlich ein Hyperboloid, welches $R_{4,1}$ ausser in den drei Punktepaaren noch in zwei Punkten α, α' schneiden wird; A, A' sind dann die beiden Erzeugenden des Hyperboloides H, welche dem anderen Systeme angehören und duech a, a' hindurchgehen. Wenn jedoch die drei Punktepaare einer und derselben J_1^2 angehören, so enthält H die Curve $R_{4,1}$ und die Geraden A, A' werden unbestimmt. Wir haben also den Satz:

„Durch drei Elementenpaare, welche nicht einer und derselben J_1^2 angehören, sind zwei J_1^3 bestimmt."

Wenn auf $R_{4,1}$ eine J_1^3 und eine J_1^2 gegeben sind, so gehen die Ebenen $x_1x_2x_3$ der Tripel der J_1^3 durch eine Gerade A, welche $R_{4,1}$ in einem Punkte O schneidet, während die Verbindungsgeraden xx' der Paare der J_1^2 ein durch R_4 gehendes Hyperboloid H erfüllen. Dieses wird von A ausser in O noch in einem zweiten Punkte p geschnitten, und die durch p gehende Erzeugende $\overline{xx'}$ von H enthält offenbar jenes einzige Punktepaar xx' der J_1^2, welches auch ein Paar von J_1^3 ist:

„Eine J_1^2 hat mit einer conlocalen J_1^3 ein gemeinsames Elementenpaar."

Wenn wir je zwei Punkte einer Gruppe einer J_1^3 auf einer $R_{4,1}$ durch eine Gerade verbinden, so erfüllen alle diese Geraden eine Regelfläche, die Involutionsfläche der J_1^3. Die Curve ist für die Fläche eine Doppelcurve, und die Gerade A, durch welche die Ebenen der Tripel der J_1^3 hindurchgehen, ist eine Doppelgerade der Fläche, da ja durch jeden Punkt von A zwei Bisecanten von $R_{4,1}$ gehen und diese offenbar Erzeugende der Fläche sind, da ja alle Erzeugenden der Fläche A schneiden müssen. Da

nun weiters in jeder durch A gehenden Ebene drei Erzeugende der Fläche liegen, so ist dieselbe von der fünften Ordnung.

„Die Involutionsfläche einer cubischen Punktinvolution erster Stufe auf einer Raumcurve vierter Ordnung erster Art ist eine Regelfläche fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins, welche die Curve sowie die Axe A der Involution zu Doppellinien hat."

Hat man auf $R_{4,1}$ zwei cubische Involutionen J_1^3, $J_2'^3$, so wird die Involutionsfläche der einen von der (geraden) Axe der anderen ausser in dem doppelt zu zählendem Punkte von $R_{4,1}$ noch in drei Punkten geschnitten; durch diese gehen Erzeugende der Involutionsfläche, welche $R_{4,1}$ in Punktepaaren schneiden, die den beiden Involutionen gemeinsam sind.

„Zwei cubische Involutionen erster Stufe auf einem Träger vom Geschlechte Eins besitzen drei gemeinschaftliche Elementenpaare."

Diese drei Paare bilden ein Tripel, wenn die beiden Involutionen einer und derselben Involution zweiter Stufe angehören; denn in diesem Falle schneiden sich die Axen der beiden Involutionen (in einem Punkte von $R_{4,1}$), und die sie verbindende Ebene schneidet $R_{4,1}$ in dem Tripel, welches beiden gemeinschaftlich ist.

Um zu den sechs Doppelelementen einer J_1^3 zu gelangen, denke man sich dieselbe als Punktinvolution auf einer ebenen $C_{3,1}$, und die J_2^3, welcher ihre Tripel angehören, als die fundamentale J_2^3 der geraden Tripel; dann wird die J_1^3 durch ein Strahlenbüschel aus der $C_{3,1}$ geschnitten, und die Berührungspunkte der sechs durch den Scheitel des Büschels gehenden Tangenten von $C_{3,1}$ sind die Doppelpunkte der J_1^3. Da zwei von ihnen die übrigen vier bestimmen, so hat man·

„Die Sextupel der Doppelelemente aller J_1^3, welche einer und derselben J_2^3 angehören, bilden eine J_2^6."

Ferner erkennt man sofort:

„Wenn eine J_1^3 einer gegebenen J_2^3 angehören soll, so ist sie durch zwei Elementenpaare eindeutig bestimmt."

Wird die J_2^3 zur fundamentalen J_2^3 der geraden Tripel einer $C_{3,1}$ gemacht, so bestimmen die zwei gegebenen Punktepaare

zwei Strahlen (ihre Verbindungsgeraden), welche sich im Scheitel des die J_1^3 aus $C_{3,1}$ schneidenden Büschels treffen.

Wird die J_2^3 auf eine $R_{4,1}$ verlegt, so ist durch die J_2^3 der Punkt O aus $R_{4,1}$ gegeben, durch welchen die Ebenen ihrer Tripel gehen; diese zwei Punktepaare liefern nun zwei Verbindungsgeraden, und die durch O zu diesen gelegte Transversale ist die Axe A der durch die Paare besimmten J_1^3.

„Wenn die Paare zweier J_1^2 projectiv aufeinander bezogen sind, so gibt es vier Elemente, welche zwei einander entsprechenden Paaren angehören."

Man verlege die beiden J_1^2 auf eine $C_{3,1}$, so werden sie aus ihr durch zwei projective Strahlenbüschel geschnitten, deren Scheitel O, O′ auf $C_{3,1}$ liegen. Diese Büschel schneiden sich in einer Curve zweiter Ordnung, welche $C_{3,1}$ ausser in O, O′ noch in vier Punkten trifft, von denen offenbar jeder in zwei einander entsprechenden Paaren der beiden J_1^2 enthalten ist.

In derselben Art gelangt man zu den Sätzen:

„Wenn eine J_1^2 projectiv bezogen ist auf eine J_1^3, so gibt es fünf Elemente, welche in einander entsprechenden Gruppen der beiden Involutionen enthalten sind."

„Wenn zwei J_1^3 projectiv aufeinander bezogen sind, so gibt es sechs Elemente, welche in einander entsprechenden Tripeln enthalten sind."

Verlegt man die beiden Involutionen auf eine $R_{4,1}$, so werden die sie aus der Curve schneidenden Ebenenbüschel projectiv sein und somit ein Hyperboloid erzeugen, welches $R_{4,1}$ in acht Punkten schneidet; zwei von diesen Punkten sind die Schnitte von $R_{4,1}$ mit den Axen der Büschel, die übrigen sechs sind die oben erwähnten.

V. Biquadratische Involutionen auf Trägern vom Geschlechte Eins.

Der Träger sei eine Raumcurve $R_{4,1}$ vierter Ordnung erster Art.

Jede J_3^4 kann durch Projection in die fundamentale J_3^4 der ebenen Quadrupel übergeführt werden. Als Projectionsstrahlen treten die Erzeugenden einer die $R_{4,1}$ enthaltenden Regelschaar

(Hyperboloid) auf; eine solche Regelschaar ist durch eine ihrer Erzeugenden (Bisecante von $R_{4,1}$) vollkommen bestimmt.

Ist nun d einer der vierfachen Punkte der J_3^4 und δ einer der vierfachen Punkte der fundamentalen J_3^4 der ebenen Quadrupel (Berührungspunkt einer stationären Schmiegungsebene), so bestimmt $\overline{d\delta}$ jene Regelschaar, welche die J_3^4 in die fundamentale J_3^4 projicirt.

Jede J_2^4 kann somit in eine centrale J_2^4 übergeführt werden. Die Quadrupel einer centralen J_2^4 liegen in Ebenen, welche durch einen festen, dem Träger nicht angehörigen Punkt das Centrum der J_2^4 hindurchgehen. Ist nun eine beliebige J_2^4 gegeben, so hat man die J_3^4, der sie angehört, in die fundamentale der ebenen Quadrupel zu überführen, so wird die J_2^4 zugleich in eine centrale verwandelt.

Weiter erkennt man sofort, dass jede J_1^4 durch Projection in eine axiale J_1^4, d. h. in eine solche überführt werden kann, deren Quadrupel in den Ebenen eines Ebenenbüschels liegen. Man hat nur die J_3^4, der die J_1^4 angehört, in die fundamentale der ebenen Quadrupel zu transformiren. Dass eine J_1^4, deren Quadrupel eben sind, eine axiale sein müsse, erkennt man aus dem Umstande, dass durch jeden Punkt von $R_{4,1}$ nur eine Quadrupelebene hindurchgeht.

„Eine J_1^4 hat mit einer J_2^3 ein Tripel gemeinschaftlich."

Jede J_2^3 auf $R_{4,1}$ ist central, d. h. die Ebenen der Tripel schneiden $R_{4,1}$ in einem festen Punkte O; macht man nun die J_1^4 zu einer axialen, so geht eine Ebene des Büschels, welches J_1^4 aus $R_{4,1}$ schneidet, durch O hindurch, wodurch die Behauptung erwiesen ist. Das den beiden Involutionen gemeinsame Tripel ergänzt O zu einem Quadrupel der J_1^4.

„Die Involutionscurve einer J_1^4 auf einer $R_{4,1}$ ist eine Raumcurve vierter Classe vom Geschlechte Eins."

Als Involutionscurve bezeichnen wir die Enveloppe der Verbindungsebenen je dreier Punkte eines Quadrupels. Solcher Ebenen gehen aber in der That vier durch jeden Punkt x_1 von $R_{4,1}$; erstens die Ebenen $x_1x_2x_3$, $x_1x_2x_4$, $x_1x_3x_4$, wenn $x_2x_3x_4$ die drei Punkte sind, welche x_1 zu einem Quadrupel ergänzen,

und dann die Ebene jenes Tripels $y_1y_2y_3$, welches der J_1^4 und jener J_2^3, die x_1 zum Centrum hat, gemeinschaftlich ist.

Anmerkung. Ist y_4 der vierte Punkt, welcher $y_1y_2y_3$ zu einem Quadrupel der J_1^4 ergänzt, so entsprechen sich x_1 und y_4 in der E-Beziehung, welche durch die J_3^4, der die J_1^4 angehört, auf $R_{4,1}$ gegeben ist.

Somit ist zunächst bewiesen, dass die Involutionscurve eine Raumcurve vierter Classe ist; dass sie vom Geschlechte Eins ist, folgt aus der eindeutigen Zuordnung ihrer Schmiegungsebenen $x_2x_3x_4$ zu den Punkten x_1 der Curve $R_{4,1}$.

„Eine J_1^4 hat mit einer J_2^3 vier Tripel gemein."

Macht man nämlich die J_2^3 durch Projection zu einer centralen, so gehen durch ihr Centrum vier Schmiegungsebenen der Involutionscurve vierter Classe der transformirten J_1^4, wodurch der Satz bewiesen erscheint.

Eine J_1^4 hat mit einer J_3^4 selbstverständlich kein Quadrupel gemeinschaftlich oder aber alle.

„Eine J_1^2 hat mit einer J_1^4 zwei Paare gemeinschaftlich."

Überführt man die J_1^4 durch Projection in eine axiale J_1^4, so schneidet ihre (gerade) Axe die Involutionsfläche zweiten Grades der J_1^2 in zwei Punkten; die durch diese zwei Punkte gehenden Erzeugenden des Hyperboloides schneiden $R_{4,1}$ in den oben erwähnten zwei Paaren.

„Die Involutionsfläche einer J_1^4 ist eine Regelfläche achter Ordnung, welche $R_{4,1}$ zur dreifachen Curve hat."

Letzteres ist sofort klar, da durch jeden Punkt x_1 von $R_{4,1}$ drei Erzeugende x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4 der Involutionsfläche hindurchgehen. Betrachten wir nun irgend eine Bisecante B von $R_{4,1}$; eine um B rotirende Ebene schneidet $R_{4,1}$ in Punktepaaren einer J_1^2, welche nach Obigem mit der J_1^4 zwei Elementenpaare gemeinsam hat. Es wird also B die Involutionsfläche ausser in den auf $R_{4,1}$ liegenden Punkten, von denen jeder dreimal zählt, noch in zwei Punkten geschnitten, also im Ganzen schneidet B die Involutionsfläche in acht Punkten w. z. b. w.

Hieraus folgt weiter:

„Eine J_1^4 und eine J_1^3 haben fünf gemeinsame Elementenpaare."

Die Axe der J_1^3 schneidet nämlich die Involutionsfläche der J_1^4 ausser in dem dreifach zu zählenden auf $R_{4,1}$ liegenden Punkte noch fünfmal, wodurch die Behauptung erwiesen ist.

„Zwei J_1^4 haben acht gemeinschaftliche Elementenpaare."

Überführt man die eine J_1^4 durch Projection in eine axiale, so schneidet ihre Axe die Involutionsfläche der anderen J_1^4 (respective ihrer Transformirten) in acht Punkten, woraus sofort die Richtigkeit des obigen Satzes folgt.

„Eine Involution J_1^4 ist durch ein Quadrupel und ein Tripel vollkommen bestimmt."

Durch das Quadrupel ist die J_3^4 gegeben, welcher die J_1^4 angehört, und man hat nur das gegebene Tripel in dieser J_3^4 zu einem Quadrupel zu ergänzen, um ein zweites Quadrupel der J_1^4 zu haben. Überführt man die J_3^4 in die der ebenen Quadrupel einer $R_{4,1}$, so hat man zwei ebene Quadrupel, deren Ebenen sich in der Axe des Büschels schneiden, welches aus $R_{4,1}$ die J_1^4 schneidet.

Ebenso erkennt man:

„Eine J_1^4 ist vollkommen gegeben durch ein Quadrupel und zwei Elementenpaare."

„Eine J_1^4, welche einer gegebenen J_3^4 angehören soll, ist vollkommen gegeben durch zwei Tripel."

„Durch vier Elementenpaare erscheinen zwei J_1^4 bestimmt, welche einer gegebenen J_3^4 angehören sollen."

Macht man die J_3^4 zur fundamentalen der ebenen Gruppen einer $R_{4,1}$, so bestimmen die vier gegebenen Punktepaare verbunden vier Bisecanten der Curve, welche zwei (reelle oder imaginäre) gemeinschaftliche Transversalen besitzen. Diese sind offenbar die Axen der Ebenenbüschel, welche die beiden J_1^4 aus $R_{4,1}$ schneiden.

„Eine J_2^3 hat mit einer J_2^4 einfach unendlich viele Tripel, welche eine J_1^3 bilden, gemeinschaftlich."

Macht man die J_2^4 zu einer centralen, so ist die Verbindungsgerade ihres Centrums mit dem Centrum der J_2^3 die Axe jenes Ebenenbüschels, welches $R_{4,1}$ in der oben erwähnten J_1^3 schneidet. Eine J_2^4 hat mit einer J_3^4 keine Quadrupel gemein, oder alle Quadrupel der J_2^4 gehören der J_3^4 an.

„Zwei J_2^4, welche derselben J_3^4 angehören, haben die Quadrupel einer J_1^4 gemeinschaftlich."

Macht man die J_3^4 zur fundamentalen J_3^4 der ebenen Quadrupel einer $R_{4,1}$, so werden beide J_2^4 central, und die Verbindungsgerade ihrer Centra ist Axe jenes Ebenenbüschels, welches $R_{4,1}$ in der beiden J_2^4 gemeinsamen J_1^4 schneidet.

„Die Involutionsfläche einer J_2^4 auf $R_{4,1}$ ist eine Fläche vierter Classe."

Unter der Involutionsfläche der J_2^4 verstehen wir die Enveloppe der Verbindungsebenen je dreier Punkte eines Quadrupels der J_2^4. Um die Classe zu erhalten, hat man die Zahl der durch eine beliebige Gerade gehenden Tangentialebenen der Involutionsfläche zu bestimmen. Die Ebenen durch die Geraden schneiden $R_{4,1}$ in einer J_1^4, welche mit der J_2^4 nach Früherem vier Tripel gemeinsam hat, wodurch die obige Behauptung bewiesen ist.

„Wenn zwei J_2^4 nicht derselben J_3^4 angehören, so haben sie einfach unendlich viele Tripel gemeinschaftlich; jedes Element kommt in vier solchen Tripeln vor."

Macht man die J_3^4, welcher die eine J_2^4 angehört, zur fundamentalen der ebenen Quadrupel einer $R_{4,1}$, so wird die J_2^4 eine centrale, und durch ihr Centrum lässt sich der Involutionsfläche der anderen J_2^4 ein Kegel vierter Classe umschreiben, dessen Tangentialebenen die $R_{4,1}$ in solchen Tripeln schneiden, welche den beiden J_2^4 gemeinschaftlich sind. Da durch jeden Punkt von $R_{4,1}$ vier Tangentialebenen des Kegels gehen, so kommt jeder Punkt von $R_{4,1}$ in vier solchen gemeinschaftlichen Tripeln vor.

„Eine J_2^4 besitzt zwei neutrale Elementenpaare."

Eine J_2^4 ist die doppelt unendliche Mannigfaltigkeit von Quadrupeln, von denen jedes durch Annahme zweier seiner Elemente vollkommen bestimmt erscheint; ist durch zwei Elemente das sie enthaltende Quadrupel nicht bestimmt, so bilden sie ein neutrales Paar.

Alle Elemententripel, welche mit einem festen Elemente x_1 Quadrupel der J_2^4 bilden, stellen eine J_1^3 dar; ebenso wird eine $J_1'^3$ von den Tripeln dargestellt, welche mit dem Elemente y_1 Quadrupel der J_2^4 bilden. Die beiden $J_1^3 J_1'^3$ besitzen nach Früherem drei gemeinsame Paare; eines davon ist jenes, welches das Paar $x_1 y_1$ zu einem Quadrupel der J_2^4 ergänzt. Die beiden anderen

Paare nn', mm' sind nun solche, dass jedes von ihnen sowohl mit x_1 als auch mit y_1 in einem Quadrupel der J_2^4 vorkommt. Es sind also nn', mm' die neutralen Paare der J_2^4.

Damit ist auch bewiesen, dass eine ebene Curve vierter Ordnung vom Geschlechte Eins zwei Doppelpunkte und eine Raumcurve vierter Ordnung vom Geschlechte Eins zwei scheinbare Doppelpunkte besitzen müsse. Im ersten Falle sind nn', mm' die neutralen Paare der durch die geraden Quadrupel dargestellten J_2^4 und zugleich die Nachbarpunkte der beiden Doppelpunkte, und im Falle der Raumcurve sind nn', mm' die neutralen Paare einer centralen J_2^4 und zugleich die Schnittpunkte der Curve mit den beiden durch das Centrum der J_2^4 gehenden Bisecanten derselben.

„Die Involutionsfläche einer J_2^4 auf $R_{4,1}$ ist eine geradlinige Fläche vierter Ordnung, welche einfach durch $R_{4,1}$ geht und die Verbindungsgeraden nn', mm' der beiden neutralen Paare zu Doppelgeraden hat."

Es bilden ja die Tripel $x_2x_3x_4$, welche mit einem Punkte x_1 Quadrupel der J_2^4 darstellen, eine J_1^3, deren Axe X_1 eine die $R_{4,1}$ in einem Punkte ξ_1 schneidende Gerade ist, und da jede durch X_1 gehende Ebene $x_2x_3x_4$ Tangentialebene der Involutionsfläche ist, so ist X_1 eine Erzeugende der Involutionsfläche. Jedem x_1 ist ein ξ_1 zugeordnet, aber auch umgekehrt jedem ξ_1 ein x_1, denn die durch ξ_1 gehenden Ebenen bestimmen auf $R_{4,1}$ eine J_2^3, welche mit der J_2^4 eine J_1^3 gemeinschaftlich hat (nach Früherem), deren sämmtliche Tripel von dem Punkte x_1 zu Quadrupeln der J_2^4 ergänzt erscheinen. Die Beziehung zwischen x_1 und ξ_1 ist offenbar jene E-Beziehung, welche der die J_2^3 enthaltenden J_3^4 entspricht.

Es seien nun nn', mm' die beiden neutralen Punktepaare und N, M ihre Verbindungsgeraden. Der vierte Schnittpunkt von $R_{4,1}$ mit der Ebene $N\xi_1$ sei x'. Das Paar nn' bildet mit jedem Punkte, also auch mit x', ein Tripel der J_2^4; es ist also $nn'x'$ ein Tripel, welches der J_2^4 und der J_2^3, deren Centrum ξ_1 ist, gemeinschaftlich ist, folglich gehört es der J_1^3 an, deren Axe X_1 ist, d. h. X_1 schneidet die Gerade N. Ebenso muss X_1 die Gerade M schneiden.

„Die Axen X_1 schneiden gleichzeitig M, N; die Involutionsfläche der J_2^4 ist somit jene Fläche vierter

Ordnung, welche von einer längs der Linien $R_{4,1}$, M, N hingleitenden Geraden beschrieben wird."

Durch die beiden Bisecanten M, N ist diese Involutionsfläche, damit auch die J_2^4 gegeben:

„Eine J_2^4 ist durch ihre beiden neutralen Paare vollkommen bestimmt."

„Die beiden neutralen Paare einer J_2^4 bilden ein Quadrupel jener J_3^4, welcher die J_2^4 angehört."

Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, verwandle man die J_3^4 in die fundamentale der ebenen Quadrupel einer $R_{4,1}$; dann wird die J_2^4 eine centrale, und die beiden neutralen Paare derselben liegen ja in einer Ebene, bilden also ein Quadrupel der J_3^4.

Wenn die beiden neutralen Quadrupel nn', mm', respective deren Verbindungsgeraden N, M gegeben sind, so kann die hiedurch bestimmte J_2^4 folgendermassen vervollständigt werden. Die E-Beziehung zwischen x_1 und ξ_1 ist gegeben, wenn man z. B. dem Punkte n den vierten Schnittpunkt ν von $R_{4,1}$ mit der Ebene $n'mm'$ als entsprechenden zuordnet. Soll nun das Paar $x_1 x_2$ zu einem Quadrupel vervollständigt werden, so bestimme man zu x_1 den Punkt ξ_1. Zu dem Behufe lege man durch $x_1 \nu$ eine beliebige Ebene, welche $R_{4,1}$ in zwei Punkten schneidet, deren Verbindungsgerade S sein möge; die Ebene Sn wird $R_{4,1}$ in ξ_1 schneiden.[1] Die durch ξ_1 zu MN gelegte Transversale ist X_1, und die Ebene $X_1 x_2$ wird $R_{4,1}$ in den Punkten $x_3 x_4$ schneiden, welche $x_1 x_2$ zu einem Qnadrupel ergänzen.

---

[1] Siehe: Ein Beitrag zur Gruppentheorie auf den Curven vom Geschlechte Eins. LXXXVIII. Bd., S. 465.

Elektrochemische Untersuchungen

(I. Mittheilung)

von

Prof. **Franz Exner**,
c. M. k. Akad.

(Mit 5 Textfiguren.)

Die elektrischen Potentialdifferenzen, welche bei Berührung von Metallen mit Flüssigkeiten oder von Flüssigkeiten unter sich auftreten, stehen unzweifelhaft in einem gewissen Zusammenhange mit dem thermochemischen Werthe der dabei auftretenden Reactionen; allein dieser Zusammenhang ist bisher nur für gewisse beschränkte Erscheinungsgebiete, z. B. für die galvanischen Elemente in ihrer Gesammtwirkung, oder für die galvanische Polarisation erforscht, und auch da keineswegs in erschöpfender Weise. Es haben sich vielfach Differenzen zwischen den aus den thermochemischen Daten berechneten und den beobachteten Werthen ergeben, ohne dass es bisher gelungen wäre, die Ursache dieser Differenzen genügend aufzuklären.

Man ist daher in neuerer Zeit vielfach von der ursprünglichen, zuerst von W. Thomson aufgestellten Ansicht abgekommen, der zufolge die bei einer chemischen Reaction auftretende elektrische Energie der auf thermischem Wege ermittelten in vollem Betrage äquivalent sei; da Wärme sich nicht vollständig in elektrische oder mechanische Energie verwandeln lässt, so nimmt man an, dass letztere immer nur einen gewissen Bruchtheil der ersteren repräsentiren könne, jenen Theil, welchen F. Braun,[1] von dem diese Anschauung zuerst ausführlicher

[1] Wied. Ann., Bd. 16 (1882).

begründet wurde, den Nutzeffect, und welchen v. Helmholtz die freie Energie genannt hat.

Obgleich diese Ansicht unzweifelhaft über viele momentane Schwierigkeiten hinweg hilft, indem sie alle auftretenden Differenzen zwischen Berechnung und Beobachtung einfach als Folge dieses Nutzeffectes darstellt, so glaube ich doch, dass ihre Nothwendigkeit gegenwärtig weder experimentell noch theoretisch begründet ist.

Was zunächst die experimentelle Begründung anlangt, so setzt dieselbe die Kenntniss zweier auf einen gewissen Vorgang bezüglicher Grössen voraus: der elektrischen Energie und der thermochemischen; erstere ist jederzeit leicht zu ermitteln, letztere dagegen nur, wenn die chemischen Processe, welche sich abspielen, vollständig bekannt sind. Nun ist aber diese Bedingung keineswegs in allen Fällen, ja man kann sagen, nur in den seltensten, erfüllt, selbst bei viel gebrauchten galvanischen Combinationen, wie z. B. dem Bunsen'schen Elemente, lässt sie uns in Stich, und es ist charakteristisch, dass die bedeutendsten Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung immer bei solchen Combinationen eintreten, wo die chemischen Processe am dunkelsten, die darüber zur Berechnung gemachten Annahmen daher mehr oder minder willkürlich sind. Das tritt besonders auffällig bei jenen Combinationen zu Tage, welche als negativen Pol Silber oder Blei enthalten, also Substanzen, bei deren Oxydation sich bekanntlich immer gewisse, und zwar unbestimmte Mengen von Superoxyden bilden, deren bedeutende negative Bildungswärme dann aber nicht in Rechnung gezogen wird.

Noch auffallender wird die Sache bei jenen Combinationen, bei welchen die elektrische Energie die thermische übertrifft; hier kann von einem Nutzeffect wohl nicht die Rede sein, und eine Erklärung dieses Verhaltens — die Richtigkeit der Prämissen vorausgesetzt — dürfte auf unübersteigliche Schwierigkeiten stossen. Viel näher liegt dagegen die Annahme, dass auch in diesen Fällen die der Rechnung zu Grunde gelegten chemischen Processe den thatsächlichen nicht vollständig entsprechen.

Dazu kommt noch ein Umstand, der bisher nicht berücksichtigt wurde: die Temperatur. Alle Reactionswärmen sind Functionen der Temperatur, und in Bezug auf diese müssten die

elektrischen und thermochemischen Messungen eigentlich bei gleichen Umständen ausgeführt werden; dass dieser Einfluss kein ganz geringer ist, beweisen die oft beträchtlichen Temperaturcoëfficienten galvanischer Elemente, die eben in diesem Umstande ihre Begründung finden.

Auch muss bemerkt werden, dass in allen jenen Fällen, wo die chemischen Reactionen in unzweifelhafter Weise verlaufen, sich stets zwischen Rechnung und Beobachtung eine genügende Übereinstimmung ergab; so z. B. bei jenen Elementen, welche J. Thomsen[1] sowohl elektrisch, als thermisch untersuchte, so auch bei den von mir gemessenen Combinationen von Metallen mit Brom und Jod,[2] und so endlich bei den Messungen der galvanischen Polarisation.[3]

Aber auch in theoretischer Hinsicht liegt meiner Meinung nach kein Grund vor, die ursprüngliche W. Thomson'sche Ansicht von einer vollständigen Äquivalenz der chemischen und elektrischen Energie zu verlassen. Allerdings lässt sich Wärme nur zum Theil in die letztere Form überführen, allein es handelt sich hier gar nicht um diese Art der Umwandlung, sondern gerade im Gegentheil um die jederzeit vollständig durchführbare Umsetzung elektrischer Energie in Wärme. Ich habe diese Ansicht schon vor längerer Zeit ausgesprochen,[4] und sie ist jedenfalls die nächstliegende Interpretation der Thatsachen; denn combinirt man z. B. Zink mit Schwefelsäure, so erhält man zunächst eine der Potentialdifferenz $Zn|H_2SO_4$ entsprechende Ladung des Systems — dasselbe als isolirt gedacht — und die Grösse dieser Ladung wird durch die Capacitäten der beiden Pole — Zn und H_2SO_4 — bedingt. Könnte man letztere unendlich gross machen, so würde man ohne Zweifel die ganze der Reaction entsprechende Energie in Form von Elektricität erhalten und das Zink würde sich ohne Wärmeentwicklung auflösen. Diesen Fall kann man ja auch erreichen, indem man das Element durch einen grossen Widerstand schliesst; hier

---

[1] Thermochemische Untersuchungen, Bd. 3.

[2] Diese Berichte, Bd. 84 (1881).

[3] Ebenda, Bd. 78 (1878).

[4] Ebenda, Bd. 82 (1880).

sieht man, dass die Wärmeentwicklung nur secundärer Natur ist, die Joule'sche Wärme, und verlegt man den Schliessungsbogen in die Flüssigkeit selbst, d. h. löst man einfach ein Stück Zink in Schwefelsäure auf, wobei die primär erzeugten Ladungen nach Überschreitung der Potentialdifferenz $Zn|H_2SO_4$ sich direct am Entstehungsorte ausgleichen, so erscheint die Joule'sche Wärme eben in der Flüssigkeit selbst als thermischer Effect der Reaction von Zink auf Schwefelsäure. Die so gemessene Wärmemenge ist aber nichts anderes als die in Wärme umgesetzte elektrische Energie der Reaction Zn, H_2SO_4.

Ich glaube, dass diese Anschauungsweise von der sonst üblichen, welche eine Umwandlung von chemischer Energie zunächst in Wärme und erst secundär in elektrische Energie voraussetzt, mancherlei Vorzüge hat. Unter anderem findet sie eine wesentliche Stütze auch in der so fruchtbaren Dissociationstheorie, welche durch die angenommenen statischen Ladungen der Jonen direct zu dieser Anschauung hinführt.

Obgleich demnach die Annahme der Braun'schen Anschauung mir keineswegs nothwendig, ja nicht einmal vortheilhaft erscheint, so bleiben doch die Eingangs schon erwähnten Mängel bestehen und eine Beseitigung derselben ist wohl nur von einer systematischen Erforschung des ganzen Erscheinungsgebietes zu erwarten. Eine solche soll soweit als möglich in den folgenden Mittheilungen gegeben werden. Dabei handelt es sich nicht so sehr um die elektromotorischen Kräfte galvanischer Combinationen im Ganzen, also z. B. galvanischer Elemente, als vielmehr um die absoluten Grössen der Einzelwerthe an den verschiedenen Berührungsstellen. Die Möglichkeit, die Potentiale der Flüssigkeiten zu bestimmen, ist durch W. Thomson's Methode der Tropfelektroden gegeben, und ich habe auch schon eine Reihe einzelner Messungen, betreffend den Gang des Potentialgefälles in galvanischen Elementen, nach derselben ausgeführt.[1] Handelt es sich aber darum, einen genaueren Einblick in die Processe zu gewinnen, die sich an den Berührungsstellen von Metallen und Flüssigkeiten oder von Flüssigkeiten unter einander abspielen, so ist es unerlässlich, auf zwei bisher weniger beachtete

[1] Diese Berichte, Bd. 97 (1888).

Factoren Rücksicht zu nehmen: die Concentration und die Temperatur.

Im Vorliegenden beginne ich mit der Mittheilung jener Messungen, die sich auf die Potentialdifferenzen zwischen Metallen und Flüssigkeiten, zunächst Säuren, beziehen, und zwar wird vorläufig nur der Einfluss der Concentration in Betracht gezogen. Auf den Einfluss der Temperatur werde ich später zurückkommen; derselbe ist keineswegs gering, die Werthe $Zn|ZnSO_4$ und $Cu|CuSO_4$ zum Beispiel, ändern sich von 20—90° um circa 5% und ergeben in ihrem Zusammenwirken das, was man den Temperaturcoëfficienten des Daniell'schen Elementes nennt.

Sehr auffallend muss sich der Einfluss der Temperatur bei Messungen der galvanischen Polarisation manifestiren; nach der Theorie, welche ich von dieser Erscheinung gegeben habe,[1] hängt die erzeugte elektromotorische Kraft von dem thermischen Werthe ab, welcher der Wiedervereinigung der ausgeschiedenen Jonen entspricht. Dieser Werth muss aber eine Function der Temperatur sein und sich gegen die Dissociationstemperatur der untersuchten Substanz zu der Null nähern; es muss also auch die elektromotorische Kraft der Polarisation mit der Temperatur abnehmen und an diesem Punkte Null werden. In letzterer Beziehung hat die Theorie in jüngster Zeit eine volle Bestätigung durch die Versuche von Poincaré erhalten,[2] welcher nachwies, dass bei geschmolzenen Salzen die Polarisation in der That bis auf Null sinkt, wenn man die Temperatur bis zum Dissociationspunkt steigert. Es lässt sich voraussehen, dass ähnlich wie die Temperatur auch der Druck von Einfluss auf die Polarisation sein muss; auch in diesem Falle wird man aus den elektrischen Grössen auf den geänderten Werth der chemischen Reaction einen Schluss ziehen können.

Ich habe die Methode der Tropfelektroden auch in einer weiter unten näher zu besprechenden Weise angewendet, die es erlaubt, die Potentialdifferenz F/F' zweier sich berührender isolirter Flüssigkeiten ohne Anwendung irgendwelcher Ab-

---

[1] Diese Berichte, Bd. 78 (1878).

[2] C. R., Bd. 110 (1890).

leitungen zu messen. Es ist dies bisher bekanntlich nicht möglich gewesen und setzt uns in den Stand, eine Reihe wichtiger Fragen, z. B. über die Einwirkung von Säuren auf Basen oder über die Verdünnung von Lösungen zu beantworten. Speciell die letztere Frage ist mit Rücksicht auf die Clausius'sche Dissociationstheorie von grossem Interesse; nach dieser muss z. B. bei Berührung von Wasser mit $ZnSO_4$-Lösung ersteres negativ werden, bei Berührung mit einer Halogenwasserstoffsäure dagegen positiv. Es folgt dies aus den verschiedenen Geschwindigkeiten, mit welchen sich die positiv und negativ geladenen Jonen in beiden Fällen bewegen. Es entscheidet das Experiment, wenigstens in allen bisher untersuchten Fällen, von denen einige auch schon in der vorliegenden Mittheilung Platz finden, zu Gunsten der Theorie.

Auch auf den Vorgang der Elektrolyse näher einzugehen, wird sich Gelegenheit bieten; es scheint, dass man es hiebei in erster Linie mit der statischen Wirkung des von den Elektroden erzeugten Feldes auf die Ladungen der Jonen zu thun hat. Aus dieser Wirkung lässt sich dann auch ein Rückschluss ziehen auf den Zusammenhang zwischen der elektrischen Energie einer Molekel eines Elektrolyten und deren Bildungswärme; die erstere Grösse ist durch das elektrochemische Äquivalent, die Moleculargrösse und das wahre specifische Gewicht gegeben, die letztere aus den thermochemischen Daten bekannt, und es erscheint bemerkenswerth, dass diese beiden Grössen sich z. B. bei H_2O und bei HCl als gleich, oder doch als angenähert gleich ergeben. Es würde dies besagen, dass die bei der Bildung von HCl aus H und Cl resultirende Wärme nichts anderes ist als das Äquivalent der Arbeit, welche von den elektrischen Ladungen der Jonen bei Annäherung derselben bis auf Moleculardistanz geleistet wird.

§. 1. Methoden.

Das Princip der Methode, nach welcher die folgenden Messungen ausgeführt wurden, habe ich schon früher eingehend besprochen;[1] es besteht im Wesentlichen darin, dass die mit dem

[1] Diese Berichte, Bd. 97 (1888).

Elektrometer verbundene Tropfelektrode im Inneren eines mit der zu untersuchenden Flüssigkeit getränkten Cylinders aus Filtrirpapier wirkt. Als tropfende Flüssigkeit wurde ausschliesslich Quecksilber verwendet. Da eine solche Tropfelektrode immer durch Reibung etwas Elektricität entwickelt, so muss eine Correctur in Anwendung kommen, die dadurch bestimmt wird, dass man dieselbe im Inneren eines zur Erde abgeleiteten reinen Kohlencylinders tropfen lässt. Freilich ist es nicht möglich, absolut reine und daher auch absolut gleiche Cylinder zu erhalten, allein die Abweichungen sind doch nicht beträchtlich (das beste Materiale ist dabei harte Gaskohle oder dichter sibirischer Graphit, die Innenflächen mit Glas gereinigt) und betragen meist einige Hundertstel Volt. Ich habe z. B. bei sieben verschiedenen Cylindern für dieselbe Tropfelektrode die folgenden Correcturen gefunden:

Cylinder Nr. 1.....	Correctur	—0·320 Volt
2.....	„	—0·332
3.....	„	—0·345
4.....	„	—0·333
5.....	„	—0·362
6.....	„	—0·355
7.....	„	—0·304
	Mittel =	—0·332.

Der Mittelwerth 0·332 stimmt mit Cylinder Nr. 2, und dieser wurde im Folgenden stets zur Bestimmung der Correctur verwendet. Denselben Werth ergeben auch Cylinder aus Wasser oder beliebigen verdünnten Lösungen, die durch Graphit oder Gold abgeleitet sind, und es wird sich in den folgenden Tabellen bei jeder Flüssigkeit auch eine derartige Controlmessung mit Graphit als Ableitung finden. Man wird daraus ersehen, dass sie bis auf 1 oder zwei Hundertstel Volt denselben Werth gaben wie die Kohlencylinder, d. h., dass sowohl letztere, als die durch Graphit abgeleiteten Flüssigkeitscylinder das Potential Null haben. Zu letzterer Annahme wird man genöthigt, wenn man nicht über ein eventuelles Spannungsgesetz zwischen, Kohle, Gold und Flüssigkeiten ganz willkürliche Voraussetzungen machen will.

Es wurde die Ansicht ausgesprochen, dass möglicherweise auch zwischen Metallen, respective Flüssigkeiten und Gasen Potentialdifferenzen in merklichem Maasse bestehen könnten und dadurch meiner Methode ein Fehler anhinge; ich habe desshalb diesen Fall noch genauer untersucht und zu diesem Zwecke Cylinder und Tropfelektrode in ein Gefäss gebracht, das zum Füllen mit verschiedenen Gasen eingerichtet war. Es hat sich jedoch kein Einfluss der letzteren ergeben, wie aus der nachstehenden Tabelle zu ersehen ist.

In derselben gebe ich nur die Einstellung des Elektrometers in Skalentheilen, um deren eventuelle Differenzen es sich handelt, und bemerke, dass 80 Skalentheile einem Daniell entsprachen.

Cylinder	Gas	Einstellung
Zn	Luft	325·0
„	H_2	325·5
„	O_2	326·0
„	CO_2	325·0
Cu	Luft	252·0
„	H_2	251·7
„	O_2	252·0
„	CO_2	252·5
C	Luft	218·0
„	H_2	218·0
„	O_2	218·0
„	CO_2	217·0
H_2O	Luft	295·0
„	H_2	294·0
„	O_2	295·0
„	CO_2	294·0

Es liegen also die beobachteten Differenzen in der Einstellung des Elektrometers durchaus innerhalb der Fehlergrenzen von einigen Hundertel Volt, und von den fraglichen Potentialdifferenzen zwischen Metallen und Gasen ist nichts zu bemerken; man müsste demnach, um dieselben aufrecht erhalten zu können, wieder

annehmen, dass alle untersuchten Substanzen mit dem Quecksilber der Tropfelektrode eine Spannungsreihe bilden.

Nur in einem Falle war die Einstellung eine wesentlich andere, nämlich bei Einleitung von Leuchtgas in den Apparat; es dürfte dies die Folge einer Einwirkung des Schwefels auf das Quecksilber gewesen sein, wenigstens zeigte sie sich auch beim Durchleiten von Schwefelkohlenstoffdämpfen.

Da im Folgenden auch mit Brom- und Jodlösungen getränkte Cylinder zur Verwendung kommen sollten, so stand eine ähnliche Einwirkung zu befürchten; das Einblasen der Dämpfe von Brom- oder Jodwasser, sowie von HCl, HBr, HJ und HF in einen die Tropfelektrode umgebenden Cylinder liess jedoch durchaus keine Veränderung in der Einstellung erkennen, so dass dieser Einfluss als nicht existirend zu betrachten ist.

In Luft — in anderen Gasen wurde der Versuch nicht gemacht — ist es auch gleichgiltig, ob die Tropfelektrode reines Quecksilber oder Zinkamalgam enthält.

Die Art und Weise, wie Ostwald[1] die Methode der Tropfelektroden anwendet — directe Einführung derselben in die Flüssigkeiten — ergibt bekanntlich wesentlich falsche Resultate, und zwar in Folge der chemischen Einwirkung der Flüssigkeiten auf das Quecksilber, einer Einwirkung, die auch die dauernden Ströme liefert, die man bei Verbindung des tropfenden und abgetropften Quecksilbers erhält. Dass die Schwere, welche Ostwald für die Quelle dieser Ströme hielt, um das Tausendfache zu gering ist, habe ich bereits gezeigt.[2] Wohin man unter Anwendung dieser Methode gelangt, das sieht man am besten aus den Resultaten, welche Pellat[3] erhielt, als er den Werth $Zn|ZnSO_4$ und $Cu|CuSO_4$ nach derselben bestimmte und dabei dem Quecksilber seiner Elektrode Zn, respective Cu, zusetzte; in beiden Fällen erhielt er — wie natürlich — den Werth Null, da er, im ersteren Falle, thatsächlich den Werth $Zn|ZnSO_4|Zn$ mass. Gleicherweise erhält Ostwald einen viel zu tiefen Werth, der dem Schema $Zn|ZnSO_4|Hg$ entspricht. Auch hat Ostwald selbst nach dieser Methode keine Messungen mehr ausgeführt.

[1] Zeitschrift für phys. Ch., I (1887).

[2] Rep. d. Phys., 1889.

[3] Ann. d. ch. et ph. (6), Bd. 19 (1890).

Bei Anwendung meiner Methode gestaltet sich die Ausführung längerer Beobachtungsreihen sehr zeitraubend, da die Einstellung des Elektrometers in Folge der asymptotischen Wirksamkeit der Tropfelektrode stets längere Zeit erfordert; es lässt sich aber leicht in folgender Weise ein wesentlich abgekürztes Verfahren einschlagen: Handelt es sich z. B. um die Messung der Metalle (M) in einer Flüssigkeit (F), so genügt es, diese durch die verschiedenen M zur Erde zu leiten und anderseits durch ein bekanntes System an das Elektrometer. Ich habe bei den folgenden Messungen als Hilfssystem stets $Cu|CuSO_4|H_2O|F$ verwendet, dessen Werth natürlich einmal mit der Tropfelektrode bestimmt werden muss. Bei den folgenden Beobachtungen wird dann einfach der Werth $Cu|CuSO_4|H_2O|F|M$ in gewöhnlicher Weise am Elektrometer ermittelt; die Flüssigkeiten befanden sich hiebei stets in getrennten Gefässen, die durch befeuchtete Schnüre mit einander in Verbindung standen. Bei den Ausschlägen des Elektrometers entsprach 1 Scalentheil 0·0138 Volt, welche Reduction mit Hilfe des Voller'schen Normal-Daniells ausgeführt wurde.

Es ist noch eine Methode zu erwähnen, welche es gestattet, die Potentialdifferenz zweier Flüssigkeiten ohne Ableitung derselben zu bestimmen. Es genügt zu diesem Zwecke, die beiden Quadrantenpaare des Elektrometers mit je einer, übrigens isolirten Tropfelektrode zu verbinden, diese mit den zu untersuchenden Flüssigkeiten als Cylindern zu umgeben und letztere unter einander durch eine nasse Schnur oder dergl. zu verbinden; die beiden Quadrantenpaare werden so auf die zu messende Potentialdifferenz gebracht. Nach der allgemeinen Formel für das Quadrantelektrometer ergibt der Ausschlag diese Differenz, so lange die absoluten Potentiale der Quadranten klein bleiben gegen das der Nadel. Da letztere mit circa 300 Volt geladen ist, so bleibt diese Bedingung immer erfüllt, auch dann noch, wenn man die Cylinder an einem beliebigen Punkte durch ein beliebiges Metall zur Erde leiten wollte; letzteres ist insoferne bequem, als man dadurch vor zufälligen äusseren Inductionen auf die Cylinder geschützt wird, es bleibt aber der Ausschlag völlig ungeändert, ob man eine solche Leitung anbringt oder nicht, vorausgesetzt, dass im letzteren Falle die isolirten Cylinder vor Induction irgend anderweitig geschützt werden.

Die Correctur, welche dadurch nothwendig wird, dass nicht beide Elektroden gleiche Reibung haben, kann bei dieser Methode einfach dadurch ermittelt werden, dass man die Elektroden mit zwei gleichen, mit einander verbundenen Cylindern, z. B. aus Wasser, umgibt.

Beobachtungen.

Dieselben umfassen zunächst die Messungen der Differenzen zwischen Metallen und den Halogenwasserstoffsäuren; als Übergang hiezu wurden auch reines Wasser, sowie die wässerigen Lösungen von Chlor, Brom und Jod untersucht. Die Metalle waren von Trommsdorff als rein bezogen und musste die grösste Sorgfalt auf eine jeweilig gleiche Oberflächenbeschaffenheit verwendet werden. Es geschah dies durch Abschaben mittelst Glas vor jedem Versuche, oder durch frisches Amalgamiren bei jenen, die eine leichte Amalgamation zulassen. Verwendet wurden ausser Graphit: Mg, Al, Fe, Ni, Cu, Zn, Ag, Cd, Sn, Hg, Pb. Wo das Metall in amalgamirtem Zustande gebraucht wurde, da ist das betreffende Zeichen in eine Klammer ( ) gesetzt.

Ich muss noch bemerken, dass alle Angaben auf Volt reducirt sind und das Potential bezeichnen, welches die Flüssigkeit bei Ableitung durch das betreffende Metall annimmt; es hat dies ausnahmslos das positive Vorzeichen.

§. 2. Metalle in H_2O.

Diese sowie die folgenden Messungen wurden unter Anwendung des Hilfssystems $Cu|CuSO_4|H_2O|F$ ausgeführt, dessen Werth jedesmal mit der Tropfelektrode ermittelt wurde.

Es war: $Cu|CuSO_4|H_2O|H_2O = 0{\cdot}39$.

In der folgenden Tabelle sind die Einzelmessungen von vier Reihen aufgeführt, um die nicht unbedeutenden Schwankungen derselben, die ohne Zweifel von einer wechselnden Oberflächenbeschaffenheit der Metalle herrühren, zu zeigen.

Metalle in H_2O.

Metall	Potentialdifferenz in Volt				Mittel
Mg	1·96	1·98	2·08	2·06	2·02
Al	1·57	1·68	1·66	1·74	1·66
Fe	0·73	0·76	0·77	0·81	0·77
Ni	0·66	0·66	0·63	0·69	0·66
(Cu)	0·44	0·46	0·50	0·47	0·47
(Zn)	1·31	1·29	1·31	1·33	1·31
Ag	0·40	0·40	0·40	0·40	0·40
(Cd)	1·10	1·11	1·13	1·15	1·12
(Sn)	0·99	1·09	0·91	0·94	0·98
Hg fliessend	—	—	0·54	0·55	0·54
Hg ruhend	—	—	0·22	0·21	0·21
(Pb)	0·92	0·92	0·94	0·94	0·93
C	−0·01	−0·04	0·01	0·01	−0·01

Unter „Hg fliessend“ ist immer eine in die Flüssigkeit tauchende Tropfelektrode zu verstehen; es war dabei gleichgiltig ob die Spitze selbst eintauchte oder nur ein Stück des geschlossenen Strahles. „Hg ruhend“ bedeutet eine eintauchende, aber nicht fliessende Elektrode.

§. 3. Metalle in wässerigen Lösungen von Chlor, Brom und Jod.

1. Metalle in $H_2O + Cl_2$.

Zur Verwendung kamen drei verschieden concentrirte Lösungen:

I mit 0·44 % = $^1/_{10}$ Normal
II „ 0·04
III „ 0·004

Die folgenden Tabellen geben die erhaltenen Resultate. Bei sämmtlichen Concentrationen war

$$Cu|CuSO_4|H_2O|Cl\,aq = 0·39.$$

I. Metalle in $H_2O + 0{\cdot}44\%\,Cl_2$.

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·08	2·06	2·07
Al	1·85	1·89	1·87
Fe	0·95	0·95	0·95
Ni.....	0·48	0·47	0·475
(Cu)...	0·47	0·46	0·465
(Zn)...	1·53	1·55	1·54
(Ag) ..	0·31	0·31	0·31
(Cd)...	1·12	1·14	1·13
(Sn)...	0·81	0·81	0·81
Hg ...	0·33	0·32	0·325
(Pb) ..	0·87	0·88	0·875

II. Metalle in $H_2O + 0{\cdot}04\%\,Cl_2$.

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·21	2·16	2·185
Al	1·60	1·72	1·66
Fe	1·05	1·05	1·05
Ni.....	0·56	0·56	0·56
(Cu)...	0·45	0·44	0·445
(Zn)...	1·54	1·56	1·55
(Ag) ..	0·33	0·30	0·315
(Cd)...	1·16	1·15	1·155
(Sn)...	0·76	0·77	0·765
Hg	0·29	0·30	0·295
(Pb)...	0·89	0·92	0·905

III. Metalle in $H_2O + 0{\cdot}004\%\,Cl_2$.

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg.....	2·21	2·17	2·19
Al	1·63	1·67	1·65
Fe	1·08	1·07	1·075
Ni.....	0·56	0·62	0·59
(Cu).....	0·47	0·47	0·47
(Zn).....	1·50	1·53	1·515
(Ag)	0·43	0·44	0·435
(Cd).....	1·14	1·17	1·155
(Sn)	0·69	0·70	0·695
Hg	0·32	0·30	0·31
Hg ruhend .	0·23	0·24	0·235
(Pb).....	0·87	0·89	0·88
C	0·04	0·04	0·04

Die erhaltenen Resultate sind in der folgenden Tabelle I übersichtlich zusammengestellt, wobei in der letzten Rubrik auch der Werth für H_2O beigefügt ist.

Tabelle I.

Metalle in H_2O+Cl.

Metall	0·44%	0·04%	0·004%	0%
Mg	2·07	2·18	2·19	2·02
Al	1·87	1·66	1·65	1·66
Fe	0·95	1·05	1·07	0·77
Ni	0·47	0·56	0·59	0·66
(Cu)	0·46	0·44	0·47	0·47
(Zn)	1·54	1·55	1·51	1·31
(Ag)	0·31	0·31	0·43	0·40
(Cd)	1·13	1·15	1·15	1·12
(Sn)	0·81	0·76	0·69	0·98
Hg	0·32	0·29	0·31	0·54
(Pb)	0·87	0·90	0·88	0·93

2. Metalle in H_2O+Br_2.

Es wurden vier Lösungen gemessen:

I mit 3·2 %
II „ 0·78 = $^1/_{10}$ Normal
III „ 0·078
IV „ 0·0078

Es war $Cu|CuSO_4|H_2O|Br\ aq = 0·40$.

I. Metalle in $H_2O+3·2\%\ Br_2$.

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·00	2·02	2·01
Al	1·89	1·89	1·89
Fe	0·95	0·96	0·95
Ni	0·41	0·41	0·41
(Cu)	0·55	0·56	0·55
(Zn)	1·52	1·51	1·51
Ag	0·55	0·55	0·55
(Cd)	1·14	1·16	1·15
(Sn)	0·91	0·91	0·91
Hg	0·44	0·45	0·44
(Pb)	0·90	0·92	0·91

II. Metalle in $H_2O+0·78\%\ Br_2$.

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·29	2·21	2·25
Al	1·93	1·93	1·93
Fe	1·08	1·06	1·07
Ni	0·45	0·45	0·45
(Cu)	0·62	0·62	0·62
(Zn)	1·57	1·53	1·55
Ag	0·54	0·54	0·54
(Cd)	1·18	1·16	1·17
(Sn)	0·97	0·93	0·95
Hg	0·45	0·47	0·46
(Pb)	0·97	0·95	0·96

III. Metalle in $H_2O+0{\cdot}078\%\ Br_2$.

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·28	2·26	2·27
Al	1·93	1·91	1·92
Fe	1·10	1·08	1·09
Ni.....	0·66	0·62	0·64
(Cu)...	0·58	0·58	0·58
(Zn)...	1·61	1·57	1·59
Ag ...	0·50	0·49	0·49
(Cd)...	1·20	1·18	1·19
(Sn)...	0·85	0·81	0·83
Hg ...	0·51	0·47	0·49
(Pb) ..	0·97	0·96	0·96

IV. Metalle in $H_2O+0{\cdot}0078\%\ Br_2$.

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·25	2·17	2·21
Al	1·71	1·71	1·71
Fe	0·88	0·84	0·86
Ni.....	0·54	0·52	0·53
(Cu)...	0·43	0·45	0·44
(Zn)...	1·32	1·34	1·33
Ag ...	0·40	0·43	0·41
(Cd)...	1·09	1·12	1·10
(Sn)...	0·81	0·79	0·80
Hg ...	0·55	0·55	0·55
(Pb)...	0·87	0·90	0·88
C	0·04	0·04	0·04

Tabelle II.

Metalle in H_2O+Br_2.

Metall	3·2%	0·78%	0·078%	0·0078%	0%
Mg	2·01	2·25	2·27	2·21	2·02
Al	1·89	1·93	1·92	1·71	1·66
Fe	0·95	1·07	1·09	0·86	0·77
Ni.....	0·41	0·45	0·64	0·53	0·66
(Cu).....	0·55	0·62	0·58	0·44	0·47
(Zn).....	1·51	1·55	1·59	1·33	1·31
Ag.....	0·55	0·54	0·49	0·41	0·40
(Cd).....	1·15	1·17	1·19	1·10	1·12
(Sn).....	0·91	0·95	0·83	0·80	0·98
Hg	0·44	0·46	0·49	0·55	0·54
(Pb).....	0·91	0·96	0·96	0·88	0·98

In Fig. 1 sind die Resultate der Tabelle II graphisch dargestellt; die Concentrationen sind dabei als Abscissen, jedoch

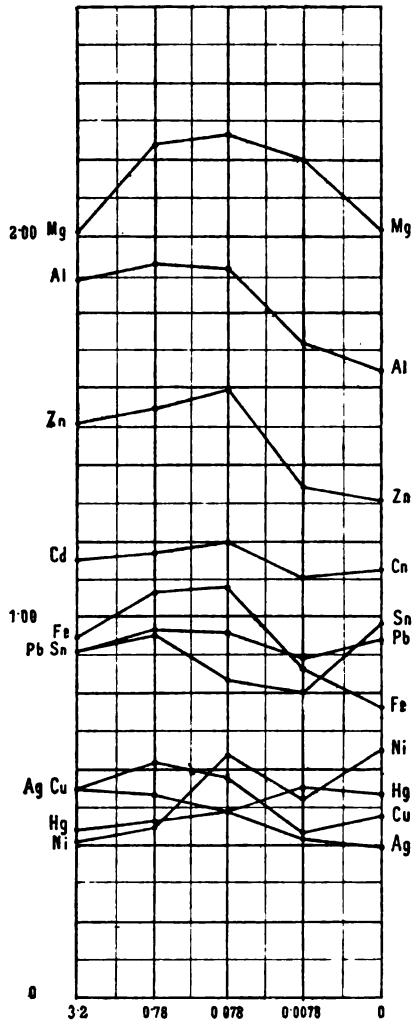


Fig. 1.

Metalle in H_2O+Br_2.

hier wie bei den folgenden Figuren in einem willkürlichen Maassstabe aufgetragen. Die Ordinaten geben die zugehörigen Potentialdifferenzen in Volts.

3. Metalle in H_2O+J_2.

Hier kamen der geringen Löslichkeit wegen nur zwei Concentrationen zur Verwendung:

I mit 0·026%
II „ 0·001.

Es war wieder $Cu|CuSO_4|H_2O|J$ aq $= 0·39$.

I. Metalle in $H_2O+0·026\%\ J_2$.

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·10	2·08	2·09
Al	1·63	1·60	1·61
Fe	0·91	0·91	0·91
Ni.....	0·36	0·41	0·38
(Cu) ...	0·50	0·54	0·52
(Zn) ...	1·45	1·43	1·44
(Ag)...	0·45	0·49	0·47
(Cd)...	1·08	1·07	1·07
(Sn) ...	0·55	0·61	0·58
Hg	0·55	0·56	0·55
(Pb)...	0·87	0·85	0·86

II. Metalle in $H_2O+0·001\%\ J_2$.

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·10	2·08	2·09
Al	1·66	1·63	1·64
Fe	0·82	0·82	0·82
Ni.....	0·46	0·52	0·49
(Cu)...	0·51	0·50	0·50
(Zn)...	1·41	1·41	1·41
(Ag) ..	0·48	0·48	0·48
(Cd)...	1·12	1·12	1·12
(Sn) ...	0·85	0·91	0 88
Hg	0·55	0·52	0·53
(Pb)...	0·91	0·91	0·91

Tabelle III.

Metalle in H_2O+J_2.

Metall	0·026%	0·001%	0%
Mg	2·09	2·09	2·02
Al	1·61	1·64	1·66
Fe	0·91	0·82	0·77
Ni.....	0·38	0·49	0·66
(Cu)	0·52	0·50	0·47
(Zn)	1·44	1·41	1·31
(Ag).....	0·47	0·48	0·40
(Cd).....	1·07	1·12	1·12
(Sn)	0·58	0·88	0·98
Hg	0·55	0·53	0·54
(Pb).....	0·86	0·91	0·93

§. 4. Metalle in wässerigen Lösungen der Halogenwasserstoffsäuren.

1. Metalle in HCl.

Zur Verwendung kamen vier Lösungen:

I mit 37·2%
II „ 18·0
III „ 3·6 = Normal
IV „ 0·36.

Es war bei den concentrirteren dieser Lösungen schon ein deutlicher Effect der Verdünnungswärme bemerkbar, der sich in der Weise äusserte, dass die HCl-Lösung gegen Wasser negativ erschien. Es wurde gefunden für $Cu|CuSO_4|H_2O|HCl$ bei

I.....0·19
II.....0·32
III.....0·39
IV.....0·39.

I. Metalle in HCl (37·2%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·30	2·30	2·30
Al	1·27	1·27	1·27
Fe	0·75	0·74	0·74
Ni.....	0·58	0·59	0·58
(Cu)...	0·76	0·76	0·76
(Zn)...	1·42	1·45	1·43
Ag ...	0·69	0·74	0·71
(Cd)...	1·20	1·20	1·20
(Sn)...	0·99	1·00	0·99
Hg	1·12	1·12	1·12
(Pb)...	1·03	1·02	1·02

II. Metalle in HCl (18%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·46	2·40	2·43
Al	1·38	1·35	1·36
Fe	0·90	0·90	0·90
Ni.....	0·75	0·76	0·75
(Cu)...	0·76	0·79	0·77
(Zn)...	1·59	1·60	1·59
Ag ...	0·79	0·73	0·76
(Cd)...	1·30	1·28	1·29
(Sn)...	1·06	1·03	1·04
Hg ...	1·21	1·19	1·20
(Pb)...	1·03	1·03	1·03

III. Metalle in HCl (3·6%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·37	2·37	2·37
Al	1·34	1·30	1·32
Fe	1·02	0·97	1·00
Ni.....	0·81	0·76	0·79
(Cu) ...	0·78	0·71	0·75
Cu	0·73	0·70	0·71
(Zn) ...	1·65	1·59	1·62
Zn	1·60	1·55	1·58
Ag	0·72	0·69	0·70
(Cd) ...	1·31	1·28	1·29
Cd	1·30	1·30	1·30
(Sn) ...	1·10	1·05	1·07
Sn	1·09	1·03	1·06
Hg	1·24	1·19	1·21
(Pb) ...	1·07	1·03	1·05
Pb	1·05	1·03	1·05
C	0·02	—	0·02

IV. Metalle in HCl (0·36%).

Metall	Potentialdifferenz			Mittel
Mg	2·18	2·17	2·28	2·21
Al	1·19	1·18	1·19	1·19
Fe	1·01	0·97	0·95	0·98
Ni.....	0·70	0·69	0·70	0·70
(Cu) ...	0·54	0·52	0·56	0·54
Cu	—	0·48	0·52	0·50
(Zn) ...	1·60	1·53	1·56	1·56
Zn	—	1·45	1·49	1·47
Ag	0·51	0·53	0·53	0·52
(Cd) ...	1·22	1·15	1·18	1·18
Cd	—	1·19	1·22	1·20
(Sn) ...	1·00	0·97	0·96	0·98
Sn	—	0·96	0·95	0·95
Hg	1·13	1·10	—	1·11
Hg ruhend	1·07	1·05	—	1·06
(Pb) ...	0·97	1·05	0·95	0·99
Pb	—	0·91	0·95	0·93
C	—	—	0·01	0·01

In Tabelle IV und Fig. 2 sind die Resultate zusammengestellt.

Tabelle IV.

Metalle in HCl.

Metall	37·2%	18%	3·6%	0·36%	0%
Mg	2·30	2·43	2·37	2·21	2·02
Al	1·27	1·36	1·32	1·19	1·66
Fe	0·74	0·90	1·00	0·98	0·77
Ni.....	0·58	0·75	0·79	0·70	0·66
(Cu)	0·76	0·77	0·75	0·54	0·47
(Zn)	1·43	1·59	1·62	1·56	1·31
Ag.....	0·71	0·76	0·70	0·52	0·40
(Cd).....	1·20	1·29	1·29	1·18	1·12
(Sn)	0·99	1·04	1·07	0·98	0·98
Hg.....	1·12	1·20	1·21	1·11	0·54
(Pb).....	1·02	1·03	1·05	0·99	0·93

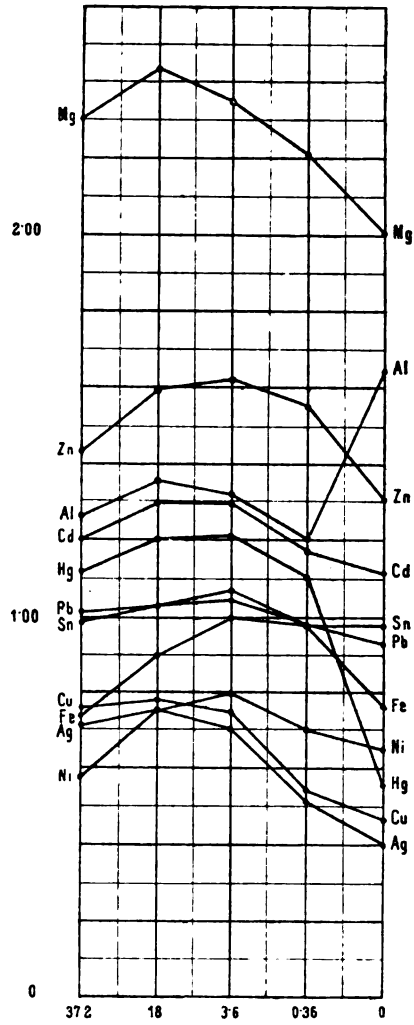


Fig. 2.
Metalle in HCl.

2. Metalle in HBr.

Zur Verwendung kamen die folgenden vier Lösungen:

I mit 48%
II „ 28
III „ 8 = Normal
IV „ 0·8.

Der Werth von $Cu|CuSO_4|H_2O|HBr$ war für diese Lösungen:

I.....0·25
II.....0·34
III.....0·39
IV.....0·39.

Also auch hier ist der Effect der Verdünnung wahrnehmbar.

I. Metalle in HBr (48%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·34	2·36	2·35
Al	1·31	1·33	1·32
Fe	0·74	0·72	0·73
Ni.....	0·69	0·70	0·69
(Cu)...	0·85	0·86	0·85
(Zu)...	1·56	1·59	1·57
(Ag)...	0·79	0·77	0·78
(Cd)...	1·36	1·36	1·36
(Sn)...	1·12	1·15	1·13
Hg	0·73	0·73	0·73
Pb	1·17	1·12	1·14

II. Metalle in HBr (28%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·36	2·33	2·34
Al	1·42	1·42	1·42
Fe	0·87	0·89	0·88
Ni.....	0·76	0·78	0·76
(Cu)...	0·85	0·85	0·85
(Zn)...	1·58	1·58	1·58
(Ag)...	0·82	0·78	0·80
(Cd)...	1·32	1·34	1·33
(Sn)...	1·02	1·00	1·01
Hg	0·72	0·73	0·72
(Pb)...	1·08	1·06	1·07
C	0·01	0·01	0·01

III. Metalle in HBr (8%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·29	2·26	2·27
Al	1·67	1·63	1·65
Fe	0·94	0·96	0·95
Ni.....	0·76	0·76	0·76
(Cu)...	0·76	0·78	0·77
(Zn)...	1·56	1·57	1·56
(Ag)...	0·72	0·73	0·72
(Cd)...	1·26	1·28	1·27
(Sn)...	0·99	0·99	0·99
Hg	0·83	0·85	0·84
(Pb)...	1·02	1·03	1·02

IV. Metalle in HBr (0·8%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·25	2·22	2·23
Al	1·83	1·82	1·82
Fe	0·97	0·94	0·95
Ni.....	0·75	0·75	0·75
(Cu)...	0·66	0·69	0·67
(Zn)...	1·56	1·54	1·55
(Ag)...	0·57	0·57	0·57
(Cd)...	1·19	1·19	1·19
(Sn)...	0·97	0·95	0·96
Hg	0·76	0·75	0·75
(Pb)...	0·95	0·97	0·96
C	0·01	0·00	0·005

Tabelle V.

Metalle in HBr.

Metall	48%	28%	8%	0·8%	0%
Mg.....	2·35	2·34	2·27	2·23	2·02
Al	1·32	1·42	1·65	1·82	1·66
Fe	0·73	0·88	0·95	0·95	0·77
Ni.....	0·69	0·76	0·76	0·75	0·66
(Cu)	0·85	0·85	0·77	0·67	0·47
(Zn).....	1·57	1·58	1·56	1·55	1·31
(Ag).....	0·78	0·80	0·72	0·57	0·40
(Cd).....	1·36	1·33	1·27	1·19	1·12
(Sn).....	1·13	1·01	0·99	0·96	0·98
Hg	0·73	0·72	0·84	0·75	0·54
(Pb)	1·14	1·07	1·02	0·96	0·93

3. Metalle in HJ.

Folgende vier Lösungen wurden untersucht:

I mit 50% (ungefähr)
II „ 9% = $^7/_{10}$ Normal
III „ 0·18%
IV „ 0·0036%.

Die Werthe von $Cu|CuSO_4|H_2O|HJ$ waren dabei für:

I.....0·15
II.....0·28
III.....0·39
IV.....0·39.

Doch muss bemerkt werden, dass bei den concentrirteren Lösungen des HJ, wie bekannt, sich grosse Quantitäten von Jod in Lösung ausscheiden, so dass man es hier eigentlich mit einer nicht definirbaren Flüssigkeit zu thun hat.

I. Metalle in HJ (circa 50%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·08	2·12	2·10
Al	1·05	1·02	1·03
Fe	0·33	0·36	0 34
Ni.....	0·22	0·22	0·22
(Cu) ...	0·79	0·82	0·80
(Zn) ...	1·42	1·42	1·42
(Ag)...	0·82	0·82	0·82
(Cd)...	1·30	1·30	1·30
(Sn) ...	0·86	0·83	0·84
Hg	0·82	0·82	0·82
(Pb)...	1·08	1·06	1·07

II. Metalle in HJ (9%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·12	2·15	2·13
Al	1·45	1·45	1·45
Fe	0·63	0·63	0·63
Ni.....	0·34	0·34	0·34
(Cu)...	0·74	0·74	0·74
(Zn)...	1·42	1·42	1·42
(Ag)...	0·69	0·69	0·69
(Cd)...	1·17	1·15	1·16
(Sn)...	0·85	0·85	0·85
Hg ...	0·69	0·69	0·69
(Pb)...	0·75	0·74	0·74

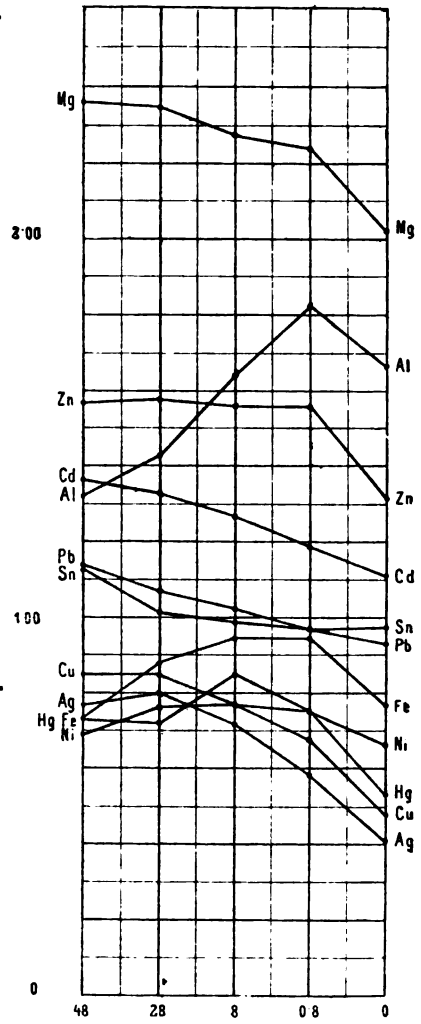


Fig. 3.

Metalle in HBr.

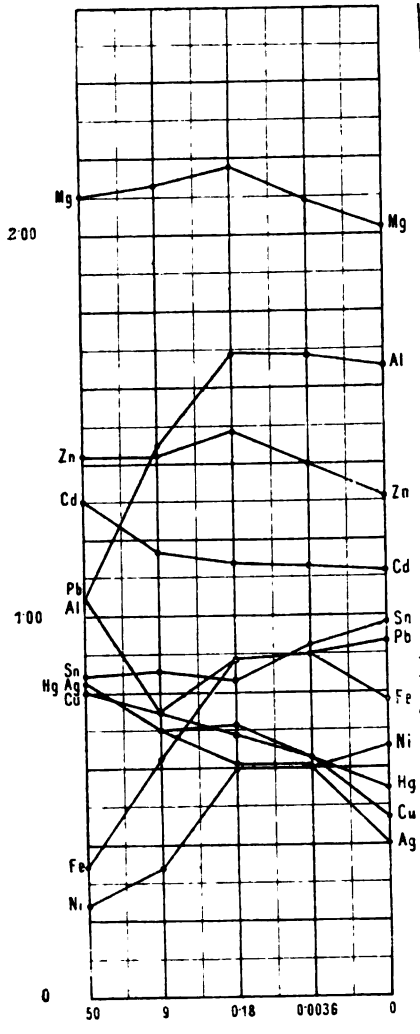


Fig. 4.

Metalle in HJ.

III. Metalle in HJ (0·18%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·17	2·18	2·17
Al	1·71	1·67	1·69
Fe	0·88	0·90	0·89
Ni.....	0·61	0·59	0·60
(Cu) ...	0·70	0·69	0·69
(Zn) ...	1·48	1·50	1·49
(Ag)...	0·62	0·61	0·61
(Cd) ...	1·14	1·14	1·14
(Sn) ...	0·83	0·83	0·83
Hg	0·72	0·70	0·71
(Pb) ...	0·89	0·89	0·89
C	—0·01	—0·01	—0·01

IV. Metalle in HJ (0·0036%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·08	2·10	2·09
Al	1·70	1·66	1·68
Fe	0·90	0·90	0·90
Ni.....	0·61	0·60	0·60
(Cu) ...	0·61	0·63	0·62
(Zn) ...	1·42	1·40	1·41
(Ag)...	0·60	0·63	0·61
(Cd) ...	1·13	1·13	1·13
(Sn) ...	0·91	0·93	0·92
Hg ...	0·63	0·63	0·63
(Pb) ...	0·90	0·91	0·90

Tabelle VI.

Metall in HJ.

Metall	50%	9%	0·18%	0·0036%	0%
Mg.....	2·10	2·13	2·17	2·09	2·02
Al	1·03	1·45	1·69	1·68	1·66
Fe	0·34	0·63	0·89	0·90	0·77
Ni.....	0·22	0·34	0·60	0·60	0·66
(Cu)	0·80	0·74	0·69	0·62	0·47
(Zn).....	1·42	1·42	1·49	1·41	1·31
(Ag)	0·82	0·69	0·61	0·61	0·40
(Cd).....	1·30	1·16	1·14	1·13	1·12
(Sn).....	0·84	0·85	0·83	0·92	0·98
Hg.....	0·82	0·69	0·71	0·63	0·54
(Pb)	1·07	0·74	0·89	0·90	0·93

4. Metalle in HF.

Untersucht wurden die folgenden vier Lösungen:

I mit 36%
II „ 18%
III „ 0·7% = $^3/_{10}$ Normal
IV „ 0·036%.

Auch hier ist der Effect der Verdünnung noch bemerkbar, denn es wurde für Cu|$CuSO_4$|H_2O|HF gefunden:

bei I.....0·23
II.....0·37
III.....0·37
IV.....0·37.

I. Metalle in HF (36%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg....	1·21	1·20	1·20
Al	1·12	1·10	1·11
Fe	0·83	0·83	0·83
Ni.....	0·51	0·50	0·50
(Cu)...	0·34	0·37	0·35
(Zn) ...	1·34	1·34	1·34
(Ag)...	0·39	0·40	0·39
(Cd)...	1·00	1·02	1·01
(Sn) ...	0·96	0·96	0·96
Hg	0 48	0·50	0·49
(Pb) ...	0·83	0·83	0·83

II. Metalle in HF (18%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	1·28	1·34	1·31
Al	1·25	1·25	1·25
Fe	0·97	0·99	0·98
Ni.....	0·68	0·69	0·68
(Cu)...	0·52	0·51	0·51
(Zn)...	1·54	1·54	1·54
(Ag)...	0·48	0·50	0·49
(Cd)...	1·13	1·13	1·13
(Sn) ...	1·10	1·10	1·10
Hg	0·58	0·58	0·58
(Pb)...	0·96	0·96	0·96

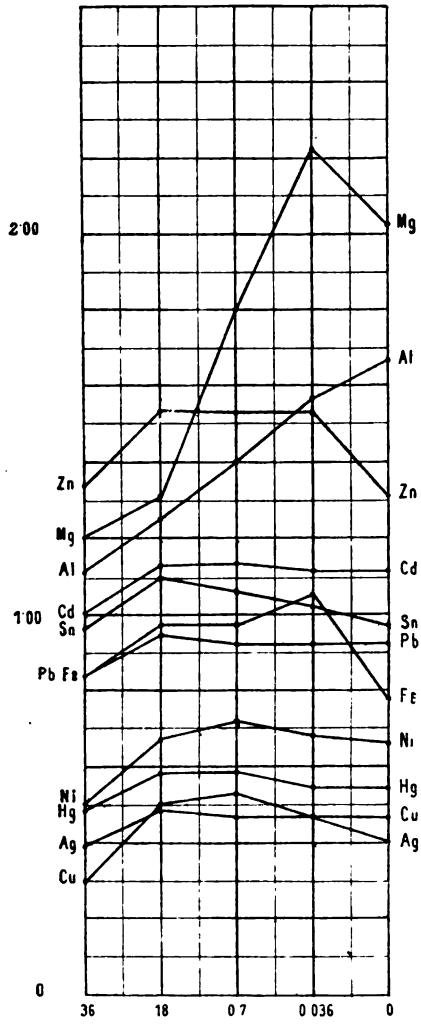


Fig. 5.

Metalle in HF.

III. Metalle in HF (0·7%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	1·82	1·78	1·80
Al	1·40	1·40	1·40
Fe	0·97	1·00	0·98
Ni.....	0·72	0·72	0·72
(Cu) ...	0·54	0·51	0·52
(Zn) ...	1·54	1·52	1·53
(Ag)...	0·47	0·47	0·47
(Cd) ...	1·14	1·14	1·14
(Sn) ...	1·06	1·06	1·06
Hg	0·58	0·58	0·58
(Pb) ...	0·92	0·92	0·92
Pb	0·92	0·92	0·92
C	0·01	0·01	0·01

IV. Metalle in HF (0·036%).

Metall	Potentialdifferenz		Mittel
Mg	2·22	2·25	2·23
Al	1·57	1·58	1·57
Fe	1·05	1·05	1·05
Ni.....	0·68	0·69	0·68
(Cu) ...	0·46	0·46	0·46
(Zn) ...	1·52	1·54	0·53
(Ag)...	0·48	0·46	0·47
(Cd) ...	1·12	1·13	1·12
(Sn) ...	1·02	1·02	1·02
Hg	0·54	0·53	0·54
(Pb) ...	0·91	0·93	0·92

Tabelle VII.

Metalle in HF.

Metall	36%	18%	0·7%	0·036%	0%
Mg.....	1·20	1·31	2·80	2·23	2·02
Al	1·11	1·25	1·40	1·57	1·66
Fe	0·83	0·98	0·98	1·05	0·77
Ni.....	0·50	0·68	0·72	0·68	0·66
(Cu)	0·35	0·51	0·52	0·46	0·47
(Zn).....	1·34	1·54	1·53	1·53	1·31
(Ag).....	0·39	0·49	0·47	0·47	0·40
(Cd).....	1·01	1·13	1·14	1·12	1·12
(Sn).....	0·96	1·10	1·06	1·02	0·98
Hg.....	0·49	0·58	0·58	0·54	0·54
(Pb)	0·83	0·96	0·92	0·92	0·93

Eine eingehende Discussion der vorstehenden Beobachtungsresultate muss einer folgenden Mittheilung vorbehalten bleiben, um auch die Ergebnisse der übrigen Säuren mit in Rechnung ziehen zu können; hier möchte ich nur noch darauf aufmerksam machen, dass die Potentialdifferenzen, welche bei der Verdünnung von Chlor- und Bromwasserstoff entstehen und die nur nebenbei beobachtet wurden, nicht nur in qualitativer, sondern auch in quantitativer Hinsicht mit der Theorie in guter Übereinstimmung stehen. Da in diesen Säuren der positive Wasserstoff das schnellere Jon ist, so muss in Berührung mit den concentrirten Lösungen das Wasser sich positiv, die Säure negativ laden. Dies tritt auch ein, und vergleicht man die erzeugten Potentialdifferenzen mit den von J. Thomsen bestimmten Verdünnungswärmen, so findet man auch eine befriedigende quantitative Übereinstimmung. Man erhält für die Verdünnung der Lösungen I und II bei HCl:

	Beobachtet	Berechnet
I.....	0·20	0·15
II.....	0·07	0·05

und bei HBr:

	Beobachtet	Berechnet
I.....	0·14	0·10
II.....	0·05	0·03

Würde man dagegen nach der Methode von Ostwald verfahren und die Tropfelektrode in die Flüssigkeit tauchen lassen, so zeigt uns die Curve für Hg in Fig. 2, zu welchen Resultaten man z. B. bei HCl kommen würde. Bei allmäliger Verdünnung der concentrirtesten Lösung würde die verdünntere negativ erscheinen, also gerade umgekehrt wie in Wirklichkeit, dagegen würde eine Combination der verdünntesten Lösung mit Wasser letzteres scheinbar sehr stark positiv machen, scheinbar, denn in Wirklichkeit ist der Effect dieser Combination schon gleich Null.

Zur Theorie der Näherungsbrüche

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Mai 1891.)

Ich werde in den folgenden Zeilen eine Reihe von Relationen und Theoremen aus der Theorie der Näherungsnenner von Kettenbruchentwicklungen ableiten und hiebei gelegentlich einige aus einer der auftretenden Formeln sich ergebende Beziehungen aus dem Gebiete der Congruenzen mit einer Unbekannten in Bezug auf einen Primzahlmodul angeben. Sodann werde ich mit Hilfe der aufgestellten Gleichungen mehrere Sätze über Interpolationsformeln und mechanische Quadraturen erschliessen und im Anschlusse an dieselben einige Bemerkungen über die wichtige und interessante Methode machen, welche Herr F. Neumann[1] zur interpolatorischen Darstellung einer Function des Ortes an der Erdoberfläche ermittelt hat, deren praktische Verwendbarkeit durch die vor wenigen Monaten von Herrn H. Seeliger[2] in den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Classe der

---

[1] „Über eine neue Eigenschaft der Laplace'schen Ypsilons und ihre Anwendung zur analytischen Darstellung derjenigen Phänomene, welche Functionen der geographischen Länge und Breite sind." Astronomische Nachrichten von Schumacher, 15. Bd., S. 313 ff. Dieser bemerkenswerthe Aufsatz wurde von Neuem abgedruckt im 14. Bande der „Mathematischen Annalen von F. Klein". Eine sehr eingehende Darstellung der F. Neumann'schen Methode findet sich auch im 7. Capitel der von F. Neumann an der Universität zu Königsberg gehaltenen „Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen", welche von Herrn C. Neumann im Jahre 1887 herausgegeben wurden.

[2] „Über die interpolatorische Darstellung einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe." A. a. O., 20. Bd., S. 499—511.

k. b. Akademie der Wissenschaften zu München veröffentlichten vorzüglichen Hilfstafeln wesentlich erhöht wurde. Zum Schlusse endlich werden mehrere neue Sätze aus der Theorie der Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung der hypergeometrischen Reihe $x^{-1}F\left(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right)$ nebst einigen arithmetischen Identitäten bewiesen.

§. 1. Differentiirt man die ganze Function n^{ten} Grades

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 , \qquad 1)$$

deren Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sämmtlich verschieden sein sollen, nach x_λ, so erhält man, wenn die Ableitung der elementaren symmetrischen Function h^{ter} Dimension dieser Wurzeln, d. i. also die elementare symmetrische Function $(h-1)^{\text{ter}}$ Dimension der Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda-1}, x_{\lambda+1}, \ldots, x_n$ mit $(-1)^h a_{n-h,\lambda}$ bezeichnet wird, die Relationen

$$-a_{n-h,\lambda} = x_\lambda^{h-1} + \frac{a_{n-1}}{a_n} x_\lambda^{h-2} + \ldots + \frac{a_{n-h+1}}{a_n}$$

$$a_{n-h,\lambda} = \frac{a_{n-h}}{a_n} x_\lambda^{-1} + \frac{a_{n-h-1}}{a_n} x_\lambda^{-2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} x_\lambda^{h-n-1} .$$

Da nun nach den Euler'schen Formeln für jede ganze Function

$$g_\mu(x) = g_\mu x^\mu + g_{\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots + g_1 x + g_0$$

von nicht höherem als dem Grade $n-1$ die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{g_\mu(x_\lambda)}{f'(x_\lambda)} = \frac{g_{n-1}}{a_n}$$

besteht, so ergeben sich nach den eben angeführten Beziehungen die Relationen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} x_\lambda^{n-\varkappa}}{f'(x_\lambda)} = \frac{-\delta_{n+h-k-1,\,n-1}}{a_n}$$

$$(k \geqq h;\ \delta_{r,r} = 1,\ \delta_{r,s} = 0,\ r \gtrless s;\ n \geqq \varkappa > 0)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} x_\lambda^{n-\varkappa}}{f'(x_\lambda)} = 0, \qquad (h > \varkappa > 0;\ n \geqq h > 0)$$

welche sich in die bekannte Kronecker'sche Verallgemeinerung[1] der Euler'schen Formeln

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} x_\lambda^{n-\varkappa}}{f'(x_\lambda)} = \frac{-\delta_{h,k}}{a_n} \qquad (n \geqq h,\ k > 0)$$

zusammenfassen lassen. Aus derselben folgt sofort die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} g_\mu(x_\lambda)}{f'(x_\lambda)} = \frac{-g_{n-h}}{a_n}, \qquad (0 \leqq \mu \leqq n-1;\ h > 0) \qquad 2)$$

da offenbar für $h > n$ beide Seiten der Gleichung den Werth 0 erhalten.

Man kann nun leicht folgende Erweiterung dieser Formel beweisen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} g_{n+\nu-1}(x_\lambda)}{f'(x_\lambda)} = \left(\frac{-1}{a_n}\right)^{\nu+1} \begin{vmatrix} g_{n+\nu-1}, & a_n, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ g_{n+\nu-2}, & a_{n-1}, & a_n, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n, & a_{n+1-\nu}, & a_{n+2-\nu}, & a_{n+3-\nu}, & \ldots, & a_{n-1}, & a_n \\ g_{n-h}, & a_{n-\nu+1-h}, & a_{n+2-\nu-h}, & a_{n+3-\nu-h}, & \ldots, & a_{n-h-1}, & a_{n-h} \end{vmatrix} \quad (n \geqq \nu > -n;\ h > 0) \qquad 3)$$

[1] „Über die symmetrischen Functionen." Monatsber. d. k. preussischen Akad. d. Wissensch. in Berlin, 1880, S. 936–948.

Nachdem dieselbe für nicht positive ganzzahlige Werthe von ν mit 2) zusammenfällt, kann man beim Beweise voraussetzen, dass ν eine positive ganze Zahl ist. Gilt diese Relation nun für alle ganzen Functionen von nicht höherem als dem Grade $n+1-\nu$, so hat man für eine ganze Function $g_{n+\nu}(x)$ vom Grade $n+\nu$ die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} g_{n+\nu}(x_\lambda)}{f'(x_\lambda)} = g_{n+\nu} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} x_\lambda^{n+\nu}}{f'(x_\lambda)} + \left(\frac{-1}{a_n}\right)^{\nu+1} \begin{vmatrix} g_{n+\nu-1}, & a_n, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ g_{n+\nu-2}, & a_{n-1}, & a_n, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n, & a_{n+1-\nu}, & a_{n+2-\nu}, & a_{n+3-\nu}, & \ldots, & a_{n-1}, & a_n \\ g_{n-h}, & a_{n+1-\nu-h}, & a_{n+2-\nu-h}, & a_{n+3-\nu-h}, & \ldots, & a_{n-h-1}, & a_{n-h} \end{vmatrix} \quad .4)$$

Nach 1) ist nun für jedes ν

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} x_\lambda^{n+\nu}}{f'(x_\lambda)} = \frac{-1}{a_n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} \{a_{n-1} x_\lambda^{n+\nu-1} + a_{n-2} x_\lambda^{n+\nu-2} + \ldots + a_1 x_\lambda^{\nu+1} + a_0 x_\lambda^{\nu}\}}{f'(x_\lambda)}$$

und demnach besteht nach 3) die Gleichung

$$\sum_{\lambda-1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda} x_\lambda^{n+\nu}}{f'(x_\lambda)} = \left(\frac{-1}{a_n}\right)^{\nu+2} \begin{vmatrix} a_{n-1}, & a_n, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ a_{n-2}, & a_{n-1}, & a_n, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-\nu}, & a_{n-\nu+1}, & a_{n-\nu+2}, & a_{n-\nu+3}, & \ldots, & a_{n-1}, & a_n \\ a_{n-\nu-h}, & a_{n-\nu+1-h}, & a_{n-\nu+2-h}, & a_{n-\nu+3-h}, & \ldots, & a_{n-1-h}, & a_{n-h} \end{vmatrix},$$

deren Verbindung mit 4) sofort erkennen lässt, dass die Relation 3) noch für ganze Functionen vom Grade $n+\nu$ ($\nu<n$) bestehen bleibt, wenn sie für alle ganzen Functionen von nicht höherem als dem Grade $n+\nu-1$ gilt. Aus der erwiesenen Existenz der Gleichung 2) folgt demnach unmittelbar das Bestehen der Gleichung 3) für alle im angegebenen Intervalle befindlichen ganzzahligen Werthe von ν und alle positiven ganzzahligen Werthe von h. Dieselbe ist eine Erweiterung der zuerst von Herrn F. Brioschi[1] und später von mir[2] bewiesenen Formel

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{g_{n+\nu-1}(x_\lambda)}{f'(x_\lambda)} = \frac{(-1)^\nu}{a_n^{\nu+1}} \begin{vmatrix} g_{n+\nu-1}, & a_n, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ g_{n+\nu-2}, & a_{n-1}, & a_n, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_n, & a_{n+1-\nu}, & a_{n+2-\nu}, & a_{n+3-\nu}, & \ldots, & a_{n-1}, & a_n \\ g_{n-1}, & a_{n-\nu}, & a_{n+1-\nu}, & a_{n+2-\nu}, & \ldots, & a_{n-1}, & a_{n-2} \end{vmatrix}.$$

Aus der Gleichung 3) ergibt sich sofort folgendes Theorem aus der Theorie der Congruenzen:
Hat die Congruenz n^{ten} Grades in Bezug auf den Primzahlmodul p

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p} \qquad (p>n)$$

genau n unter einander verschiedenen Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, so ist für jede ganze ganzzahlige Function

$$\varphi(x) = g_{n-1+\nu} x^{n-1+\nu} + g_{n-2+\nu} x^{n-2+\nu} + \ldots + g_1 x + g_0 \qquad (n \geqq \nu > -n)$$

---

[1] „Sur deux formules relatives à la théorie de la décomposition des fractions rationnelles." Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle, 50. Band, S. 239–242.

[2] „Über Congruenzen." Diese Sitzungsberichte, 95. Band, II. Abtheilung, S. 610—617.

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{a_{n-h,\lambda}\varphi(\xi_\lambda)}{f'(\xi_\lambda)} \equiv \left(\frac{-1}{a_n}\right)^{\nu+1} \begin{vmatrix} g_{n+\nu-1}, & a_n, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ g_{n+\nu-2}, & a_{n-1}, & a_n, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n, & a_{n+1-\nu}, & a_{n+2-\nu}, & a_{n+3-\nu}, & \dots, & a_{n-1}, & a_n \\ g_{n-h}, & a_{n+1-\nu-h}, & a_{n+2-\nu-h}, & a_{n+3-\nu-h}, & \dots, & a_{n-1-h}, & a_{n-h} \end{vmatrix} \pmod{p}, \quad (h>0)$$

wo $(-1)^h a_{n-h,\lambda}$ die elementare symmetrische Function $(h-1)^{\text{ter}}$ Dimension der Grössen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\lambda-1}, \xi_{\lambda+1}, \dots, \xi_n$ ist.

Setzt man speciell

$$f(x) = x^{p-1} - 1,$$

so wird $\xi_\lambda = \lambda$, und demnach bestehen für jede ganze ganzzahlige Function

$$g_{2p-3}(x) = g_{2p-3}x^{2p-3} + g_{2p-2}x^{2p-2} + \dots + g_1 x + g_0$$

von nicht höherem als dem Grade $2p-3$ die Congruenzen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p-1} \frac{(\lambda)_{h-1} g_{2p-3}(\lambda)}{\lambda^{p-2}} \equiv (-1)^h g_{p-h-1} \pmod{p}. \qquad (2p-2 > \mu+h \text{ oder } \mu+h > 2p-2 > \mu;\ h>0)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p-1} \frac{(\lambda)_{h-1} g_{2p-3}(\lambda)}{\lambda^{p-2}} \equiv (-1)^h \{g_{p-h-1} + g_{2p-h-2}\} \pmod{p}, \qquad (2p-2 = \mu+h;\ h>0)$$

wo $(\lambda)_{h-1}$ die elementare symmetrische Function $(h-1)^{\text{ter}}$ Dimension der ganzen Zahlen $1, 2, \ldots, \lambda-1, \lambda+1, \ldots, p-1$ und μ der Grad von $g_{2p-3}(x)$ ist.

Aus dieser Congruenz folgt das Theorem:

Die Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p-1} (\lambda)_{h-1} \lambda^{\nu}, \qquad (h>0)$$

wo p eine Primzahl und $(\lambda)_{h-1}$ die elementare symmetrische Function $(h-1)^{\text{ter}}$ Dimension der ganzen Zahlen $1, 2, \ldots, \lambda-1, \lambda+1, \ldots, p-1$ vorstellt, ist nach dem Modul p entweder -1 oder 0 congruent, je nachdem ν in Bezug auf den Modul $p-1$ der ganzen Zahl $1-h$ congruent ist oder nicht.

Dasselbe bildet eine neue interessante Verallgemeinerung des bekannten Lionnet'schen Satzes.

Definirt man die ganzen Zahlen A_q durch die Gleichung

$$A_{q,n}^{(h)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} (-1)^{\lambda} (\lambda)_{h-1} \binom{n-2}{n-1-\lambda} \lambda^{q} \qquad (h>0)$$

und beachtet, dass bekanntlich für jede Primzahl p die Congruenz

$$\binom{p-2}{p-1-\lambda} \equiv (-1)^{\lambda+1} \lambda \qquad (\text{mod. } p)$$

besteht, so erkennt man auf Grund des eben abgeleiteten Satzes sofort, dass $\frac{A_{q,p}^{(h)}}{p}$ eine ganze Zahl vermehrt um $\frac{1}{p}$ oder eine ganze Zahl ist, je nachdem $q+h$ durch $p-1$ theilbar ist oder nicht.

Durch zweckmässige Verbindung der Zahlen $A^{(h)}_{q,n}$ lässt sich demnach eine Zahlengruppe herstellen, welche insoferne eine Verallgemeinerung der Bernoulli'schen Zahlen darstellt, als die Glieder derselben für $h=1$ Bernoulli'sche Zahlen werden und auch bei allgemeinem h das von Staudt und Clausen für die Bernoulli'schen Zahlen aufgestellte Theorem befolgen.

§. 2. Die Theilnenner, Näherungszähler, Näherungsnenner und Restfunctionen einer Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$, deren Theilzähler sämmtlich -1 sind, mögen mit $g_\lambda(x)$, $\varphi_\lambda(x)$, $\psi_\lambda(x)$, $f_\lambda(x)$ bezeichnet werden; die Grade derselben (beziehungsweise bei der Restfunction der Grad des Anfangsgliedes) sind $n_\lambda - n_{\lambda-1}$, $n_\lambda - n_1$, n_λ, $-n_\lambda$. Da nun bekanntlich die einander gleichen Determinanten

$$\begin{vmatrix} \psi_\lambda(x), & \psi_\varkappa(x) \\ \varphi_\lambda(x), & \varphi_\varkappa(x) \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} f_{\lambda+1}(x), & f_{\varkappa+1}(x) \\ \psi_\lambda(x), & \psi_\varkappa(x) \end{vmatrix}$$

ganze Functionen $g_\mu(x)$ vom Grade $n_\lambda - n_{\varkappa+1}$, beziehungsweise $n_\varkappa - n_{\lambda+1}$ sind, je nachdem $\lambda > \varkappa$ oder $\varkappa > \lambda$ ist, so hat man, wenn, wie im Folgenden stets vorausgesetzt wird, $\psi_\varkappa(x)$ nur ungleiche Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_{n_\varkappa}$ besitzt, so lange

$$n_\lambda < n_\varkappa + n_{\varkappa+1}$$

ist, nach 2) die Relation

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-h,\nu}\psi_\lambda(x_\nu)\varphi_\varkappa(x_\nu)}{\psi'_\varkappa(x_\nu)} = -\sum_{\nu=1}^{\nu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-h,\nu}\psi_\lambda(x_\nu)f_{\varkappa+1}(x_\nu)}{\psi'_\varkappa(x_\nu)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-h,\nu}\psi_\lambda(x_\nu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\nu)\psi'_\varkappa(x_\nu)} = -\frac{g_{n_\varkappa-h}}{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa}}, \qquad (h>0) \qquad 5)$$

wo $a^{(\varkappa)}_\rho$ der Coëfficient von x^ρ im Näherungsnenner $\psi_\varkappa(x)$ ist.

Aus dieser Gleichung ergibt sich auf Grund einer von mir früher angegebenen Darstellung der Coëfficienten der Restfunctionen, dass der Coëfficient von $x^{-(n_{\lambda+1}+\alpha)}$ in der Entwicklung von $f_{\lambda+1}(x)$ nachsteigenden Potenzen von $\frac{1}{x}$ durch

$$\frac{(-1)^{\alpha+1}}{\left(a_{n_\varkappa}^{(\varkappa)}\right)^{\alpha}}\begin{vmatrix} \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a_{n_\varkappa-n_{\lambda+1},\mu}^{(\varkappa)}\psi_\lambda(x_\mu)\varphi_\varkappa(x_\mu)}{\psi'_\varkappa(x_\mu)}, & a_{n_\varkappa}^{(\varkappa)}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a_{n_\varkappa-n_{\lambda+1}-1,\mu}^{(\varkappa)}\psi_\lambda(x_\mu)\varphi_\varkappa(x_\mu)}{\psi'_\varkappa(x_\mu)}, & a_{n_\varkappa-1}^{(\varkappa)}, & a_{n_\varkappa}^{(\varkappa)}, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\

$$-\left(\frac{-1}{a_{n_\varkappa}^{(\varkappa)}}\right)^{\alpha+1} a_{n_\lambda}^{(\lambda)} \begin{vmatrix} \sum_{\nu=1}^{\nu=n_\lambda} \frac{a_{n_\varkappa-n_{\lambda+1},\nu}^{(\lambda)} \psi_\varkappa(x_\nu)\varphi_\lambda(x_\nu)}{\psi_\lambda'(x_\nu)}, & a_{n_\varkappa}^{(\varkappa)}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ \sum_{\nu=1}^{\nu=n_\lambda} \frac{a_{n_\varkappa-n_{\lambda+1}-1,\nu}^{(\lambda)} \psi_\varkappa(x_\nu)\varphi_\lambda(x_\nu)}{\psi_\lambda'(x_\nu)}, & a_{n_\varkappa-1}^{(\varkappa)}, & a_{n_\varkappa}^{(\varkappa)}, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\

Ist $\vartheta(x)$ eine im reellen Intervalle $a \ldots b$ reelle und positive Function, und bezeichnen $\alpha_x x+\beta_x$, $\psi_x(x)$ den x^{ten} Theilnenner, beziehungsweise den x^{ten} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales $\int_a^b \frac{\vartheta(z)dz}{x-z}$, ist ferner

$$\chi(x) = c_{2x-\lambda-\tau-1}x^{2x-\lambda-\tau-1}+c_{2x-\lambda-\tau-2}x^{2x-\lambda-\tau-2}+\ldots+c_1x+c_0$$

eine ganze Function von x von nicht höherem als dem Grade $2x-\lambda-1$, so ist

$$\int_a^b \vartheta(x)\chi(x)\psi_x(x)\,dx = \frac{(-1)^\tau}{\left(a_{n_x}^{(x)}\right)^{2(x-\lambda)-\tau-1}}\cdot$$

$$\begin{vmatrix}
c_{2x-\lambda-\tau-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=x}\frac{a_{x-\lambda-1,\mu}^{(x)}\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu)\psi_x'(x_\mu)}, & a_x^{(x)}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\
c_{2x-\lambda-\tau-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=x}\frac{a_{x-\lambda-2,\mu}^{(x)}\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu)\psi_x'(x_\mu)}+c_{2x-\lambda-\tau-2}\sum_{\mu=1}^{\mu=x}\frac{a_{x-\lambda-1,\mu}^{(x)}\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu)\psi_x'(x_\mu)}, & a_{x-1}^{(x)}, & a_x^{(x)}, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & & & & \\
\sum_{\rho=0}^{\rho=2(x-\lambda-1)-\tau}c_{2x-\lambda-\tau-\rho-1}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=x}\frac{a_{\lambda+\rho+\tau+1-x,\mu}^{(x)}\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu)\psi_x'(x_\mu)}\right), & a_{2\lambda+\tau+2-x}^{(x)}, a_{2\lambda+\tau+3-x}^{(x)}, a_{2\lambda+\tau+4-x}^{(x)}, \ldots, a_{\tau-1}^{(x)}, a_x^{(x)} & & & & & \\
\sum_{\rho=0}^{\rho=2(x-\lambda)-\tau-1}c_{2x-\lambda-\tau-\rho-1}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=x}\frac{a_{\lambda+\rho+\tau-x,\mu}^{(x)}\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu)\psi_x'(x_\mu)}\right), & a_{2\lambda+\tau+1-x}^{(x)}, a_{2\lambda+\tau+2-x}^{(x)}, a_{2\lambda+\tau+3-x}^{(x)}, \ldots, a_{x-2}^{(x)}, a_{x-1}^{(x)} & & & & &
\end{vmatrix} \quad (x>\lambda)$$

$$= \frac{(-1)^{\tau+1} a_{n_\lambda}^{(\lambda)}}{\left(a_{n_\varkappa}^{(\varkappa)}\right)^{2(\varkappa-\lambda)-\tau}} \cdot$$

$$\begin{vmatrix}
c_{2\varkappa-\lambda-\tau-1} \sum_{\nu=1}^{\nu=\lambda} \frac{a_{\varkappa-\lambda-1,\nu}^{(\lambda)} \psi_\varkappa(x_\nu)}{\psi_{\lambda-1}(x_\nu)\psi'_\lambda(x_\nu)}, & a_\varkappa^{(\varkappa)}, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\
c_{2\varkappa-\lambda-\tau-1} \sum_{\nu=1}^{\nu=\lambda} \frac{a_{\varkappa-\lambda-2,\nu}^{(\lambda)} \psi_\varkappa(x_\nu)}{\psi_{\lambda-1}(x_\nu)\psi'_\lambda(x_\nu)} + c_{2\varkappa-\lambda-\tau-2} \sum_{\nu=1}^{\nu=\lambda} \frac{a_{\varkappa-\lambda-1,\nu}^{(\lambda)} \psi_\varkappa(x_\nu)}{\psi_{\lambda-1}(x_\nu)\psi'_\lambda(x_\nu)}, & a_{\varkappa-1}^{(\varkappa)}, & a_\varkappa^{(\varkappa)}, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\
\dots\dots\dots

$$\int_a^b \vartheta(x)\chi(x)\frac{\psi_\varkappa(x)-\psi_\varkappa(y)}{x-y}\,dx = \frac{(-1)^\tau}{\left(a_{n_\varkappa}^{(\varkappa)}\right)^{2\varkappa-\tau-1}} \sum_{\rho=0}^{\rho=\varkappa-1} \frac{a_{\rho+1}^{(\rho+1)}\left(a_{n_\varkappa}^{(\varkappa)}\right)^{2\rho}}{a_\rho^{(\rho)}} \begin{vmatrix} \psi_\lambda(y), & \psi_\varkappa(y) \\ \varphi_\lambda(y), & \varphi_\varkappa(y) \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix}
c_{2\varkappa-\rho-\tau-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa}\frac{a_{\varkappa-\rho-1,\mu}^{(\varkappa)}\psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi'_\varkappa(x_\mu)}, & a_\varkappa^{(\varkappa)}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\
c_{2\varkappa-\rho-\tau-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa}\frac{a_{\varkappa-\rho-2,\mu}^{(\varkappa)}\psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi'_\varkappa(x_\mu)} + c_{2\varkappa-\rho-\tau-2}\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa}\frac{a_{\varkappa-\rho-1,\mu}^{(\varkappa)}\psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi'_\varkappa(x_\mu)}, & a_{\varkappa-1}^{(\varkappa)}, & a_\varkappa^{(\varkappa)}, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\
\ldots\ldots\ldots

$$\int_a^b \frac{\vartheta(x)\chi(x)|\psi_{\rho_1}(\xi_{\rho_2})|\,dx}{(x-\xi_1)(x-\xi_2)\dots(x-\xi_r)} = \frac{(-1)^\tau}{\left(a_{n_\varkappa}^{(\varkappa)}\right)^{2\varkappa-\tau-1}} \sum_{\rho=0}^{\rho=\varkappa-r} \left(a_{n_\varkappa}^{(\varkappa)}\right)^{2\rho} |\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{\rho-\sigma}\psi_{\rho+\sigma-1}(\xi_\tau)|\,.$$

$$\begin{vmatrix}
c_{2\varkappa-\rho-\tau-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa}\frac{a_{\varkappa-\rho-1,\mu}^{(\varkappa)}\psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi_\varkappa'(x_\mu)}, & a_\varkappa^{(\varkappa)}, & 0, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\
c_{2\varkappa-\rho-\tau-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa}\frac{a_{\varkappa-\rho-2,\mu}^{(\varkappa)}\psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi_\varkappa'(x_\mu)} + c_{2\varkappa-\rho-\tau-2}\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa}\frac{a_{\varkappa-\rho-1,\mu}^{(\varkappa)}\psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi_\varkappa'(x_\mu)}, & a_{\varkappa-1}^{(\varkappa)}, & a_\varkappa^{(\varkappa)}, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\
\dots\dots\dots

genügt, wenn ε_λ den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem $\varkappa > \lambda$ oder $\varkappa < \lambda$ ist, so besteht für

$$n_\lambda < n_\varkappa + n_{\varkappa+1}$$

die Beziehung

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-h,\,\mu}\,\chi(x_\mu)\,\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\,\psi'_\varkappa(x_\mu)} = \frac{(-1)^{\tau-n_{\lambda+1}}}{\left(a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa}\right)^{\tau-n_{\lambda+1}+1}}\,.$$

$$\left|\begin{array}{llllll}
c_\tau \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-n_{\lambda+1}-\varepsilon_\lambda(n_\varkappa+n_{\varkappa+1}-n_\lambda-n_{\lambda+1}),\,\mu}\,\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\,\psi'_\lambda(x\ )}, & a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa}, & 0, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\
c_\tau \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-n_{\lambda+1}-\varepsilon_\lambda(n_\varkappa+n_{\varkappa+1}-n_\lambda\ \ \lambda+1)-1,\,\mu}\,\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\,\psi'_\varkappa(x_\mu)} + & & & & & \\
\quad + c_{\tau-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-n_{\lambda+1}-\varepsilon_\lambda(n_\varkappa+n_{\varkappa+1}-n_\lambda-n_{\lambda+1}),\,\mu}\,\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\,\psi'_\varkappa(x_\mu)}, & a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-1}, & a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa}, & 0, & \ldots, 0, & 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
\sum_{\rho=0}^{\rho=\tau-n_{\lambda+1}} c_{\tau-\rho}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-\tau+\rho-\varepsilon_\lambda(n_\varkappa+n_{\varkappa+1}-n_\lambda-n_{\lambda+1}),\,\mu}\,\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\,\psi'_\varkappa(x_\mu)}\right), & a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa+n_{\lambda+1}-\tau}, & a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa+n_{\lambda+1}-\tau+1}, & a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa+n_{\lambda+1}-\tau+2}, & \ldots, a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-1}, & a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa} \\
\sum_{\rho=0}^{\rho=\tau+h-n_{\lambda+1}} c_{\tau-\rho}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\ \ \varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-\tau+\rho-h-\varepsilon_\lambda(n_\varkappa+n_{\varkappa+1}-n_\lambda-n_{\lambda+1}),\,\mu}\,\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\,\psi'_\varkappa(x_\mu)}\right), & a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa+n_{\lambda+1}-\tau-h}, & a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa+n_{\lambda+1}-\tau+1-h}, & a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa+n_{\lambda+1}-\tau+2-h}, & \ldots, a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-h-1}, & a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-h}
\end{array}\right| \qquad (h > 0)$$

und speciell:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-h,\,\mu}\,\psi_\sigma(x_\mu)\,\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\,\psi'_\varkappa(x_\mu)} = \frac{(-1)^{n_\sigma-n_{\lambda+1}}}{\left(a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa}\right)^{n_\sigma-n_{\lambda+1}+1}}\,.$$

$$\cdot \begin{vmatrix} a^{(\sigma)}_{n_\sigma} \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-n_{\lambda+1}-\varepsilon_\lambda(n_\varkappa+n_{\varkappa+1}-n_\lambda-n_{\lambda+1}),\,\mu}\,\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\,\psi'_\varkappa(x_\mu)}, & a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa}, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ a^{(\sigma)}_{n_\sigma-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-n_{\lambda+1}-\varepsilon_\lambda(n_\varkappa+n_{\varkappa+1}-n_\lambda-n_{\lambda+1})-1,\,\mu}\,\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\,\psi'_\varkappa(x_\mu)} + & & & & & & \\ + a^{(\sigma)}_{n_\sigma} \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa-n_{\lambda+1}-\varepsilon_\lambda(n_\varkappa+n_{\varkappa+1}-n_\lambda-n_{\lambda+1}),\,\mu}\,\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\,\psi'_\varkappa(x_\mu)}, & a^{(\varkappa)}_{n_{\varkappa-1}}, & a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa}, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\

Von den speciellen Fällen dieser Formeln mögen die folgenden als besonders wichtig erwähnt werden.
Ist

$$\chi(x) = c_\tau x^\tau + c_{\tau-1} x^{\tau-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

eine ganze Function von x von nicht höherem als dem Grade $n_{\lambda+1} - 1 + \varepsilon_\lambda(n_\varkappa + n_{\varkappa+1} - (n_\lambda + n_{\lambda+1}))$, wo ε_λ den Werth 0 oder 1 besitzt, je nachdem $n_\varkappa > n_\lambda$ oder $n_\varkappa < n_\lambda$ ist, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa - h,\mu}\, \chi(x_\mu)\, \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\, \psi'_\varkappa(x_\mu)} = - \sum_{\rho=0}^{\rho=\tau-n_{\lambda+1}+h} c_{\tau-\rho} \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa - \tau+\rho-h-\varepsilon_\lambda(n_\varkappa+n_{\varkappa+1}-n_\lambda-n_{\lambda+1}),\mu}\, \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\, \psi'_\varkappa(x_\mu)} \right) \quad (h>0;\ n_\lambda < n_\varkappa + n_{\varkappa+1})$$

und demnach, falls τ nicht grösser als $n_{\lambda+1} - h - 1 + \varepsilon_\lambda(n_\varkappa + n_{\varkappa+1} - n_\lambda - n_{\lambda+1})$ ist,

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa - h,\mu}\, \chi(x_\mu)\, \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\, \psi'_\varkappa(x_\mu)} = 0, \qquad (h>0;\ n_\lambda < n_\varkappa + n_{\varkappa+1})$$

wo der Näherungsnenner $\psi_\varkappa(x)$ keine mehrfache Wurzel besitzt.

Hat der $\varkappa^{\text{te}}$ Näherungsnenner

$$\psi_\varkappa(x) = a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa} x^{n_\varkappa} + a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa - 1} x^{n_\varkappa - 1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

einer Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function, deren Theilzähler sämmtlich den Werth -1 besitzen, keine mehrfache Wurzel, genügen ferner die Grade n_λ und n_ν der Näherungsnenner $\psi_\lambda(x)$, $\psi_\nu(x)$ der Bedingung

$$n_\lambda + n_\nu < n_\varkappa + n_{\varkappa+1} - h\,,$$

so ist, falls mindestens eine der zwei Ungleichungen

$$n_\nu < n_{\lambda+1} - h + \varepsilon_\lambda (n_\varkappa + n_{\varkappa+1} - n_\lambda - n_{\lambda+1})$$
$$n_\lambda < n_{\nu+1} - h + \varepsilon_\nu (n_\varkappa + n_{\varkappa+1} - n_\lambda - n_{\lambda+1})$$

stattfindet,

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa - h,\mu}\, \psi_\lambda(x_\mu)\, \psi_\nu(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\, \psi'_\varkappa(x_\mu)} = 0\,,$$

ist aber

$$n_\lambda = n_{\nu+1} - h + \varepsilon_\nu (n_\varkappa + n_{\varkappa+1} - n_\nu - n_{\nu+1}),$$

so wird

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa - h,\mu}\, \psi_\lambda(x_\mu)\, \psi_\nu(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\, \psi'_\varkappa(x_\mu)} = -\, a^{(\lambda)}_{n_\lambda} \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa - n_{\nu+1} - \varepsilon_\nu (n_\varkappa + n_{\varkappa+1} - n_\nu - n_{\nu+1}),\mu}\, \psi_\nu(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\, \psi'_\varkappa(x_\mu)} \gtrless 0\,,$$

während für

$$n_\nu = n_{\lambda+1} - h + \varepsilon_\lambda (n_\varkappa + n_{\varkappa+1} - (n_\lambda + n_{\lambda+1}))$$

die Gleichung

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa - h,\mu}\, \psi_\lambda(x_\mu)\, \psi_\nu(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\, \psi'_\varkappa(x_\mu)} = -\, a^{(\nu)}_{n_\nu} \sum_{\mu=1}^{\mu=n_\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{n_\varkappa - n_{\lambda+1} - \varepsilon_\lambda (n_\varkappa + n_{\varkappa+1} - n_\lambda - n_{\lambda+1}),\mu}\, \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\, \psi'_\varkappa(x_\mu)} \gtrless 0$$

besteht.

Sind die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ des $\varkappa^{\text{ten}}$ Näherungsnenners

$$\psi_\varkappa(x) = a_\varkappa^{(\varkappa)} x^\varkappa + a_{\varkappa-1}^{(\varkappa)} x^{\varkappa-1} + \ldots + a_1^{(\varkappa)} x + a_0^{(\varkappa)}$$

der mindestens bis einschliesslich zum $\varkappa^{\text{ten}}$ Theilnenner regulären Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function sämmtlich von einander verschieden, bezeichnen ferner λ und ν irgend zwei nicht negative ganze Zahlen, deren Summe kleiner als $2\varkappa+1-h$ ist, so hat die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa} \frac{a_{\varkappa-h,\mu}^{(\varkappa)} \psi_\lambda(x_\mu)\psi_\nu(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi'_\varkappa(x_\mu)}$$

den Werth 0 oder

$$-a_\lambda^{(\lambda)} \sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa} \frac{a_{\varkappa-\lambda-1-2\varepsilon_\lambda(\varkappa-\lambda),\mu}^{(\varkappa)} \psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi'_\varkappa(x_\mu)} = -a_\nu^{(\nu)} \sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa} \frac{a_{\varkappa-\nu-1-2\varepsilon_\nu(\varkappa-\nu),\mu}^{(\varkappa)} \psi_\nu(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi'_\varkappa(x_\mu)} \gtrless 0,$$

je nachdem $|\lambda-\nu| > h-1$ oder $= h-1$ ist.

Lässt eine nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitende Function wenigstens bis zum $\varkappa^{\text{ten}}$ Theilnenner inclusive eine reguläre Kettenbruchentwicklung zu, sind ferner die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ des $\varkappa^{\text{ten}}$ Näherungsnenners derselben

$$\psi_\varkappa(x) = a_\varkappa^{(\varkappa)} x^\varkappa + a_{\varkappa-1}^{(\varkappa)} x^{\varkappa-1} + \ldots + a_1^{(\varkappa)} x + a_0^{(\varkappa)}$$

sämmtlich von einander verschieden, bezeichnen endlich λ und ν zwei nicht negative ganze Zahlen, deren Summe kleiner als $2\varkappa$ ist, so ist die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{\psi_\lambda(x_\mu)\psi_\nu(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu)\psi'_x(x_\mu)}$$

gleich Null oder von Null verschieden, je nachdem $\lambda \gtrless \nu$ oder $\lambda = \nu$ ist.

Sind λ und ν zwei ganze nicht negative Zahlen, deren Summe einen der Werthe $0, 1, 2, \ldots, 2x-1$ besitzt, bezeichnen ferner $x_1, x_2, \ldots, x_x$ die Wurzeln der ganzen Function des x^{ten} Grades

$$T_x^m(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=x} (-1)^\lambda \frac{x^{x-\lambda}}{\Pi(\lambda)\Pi(x-\lambda)\Pi(m+x-\lambda)} \qquad (m > -1)$$

und ist

$$S_x^m(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-y} y^m \{T_x^m(x) - T_x^m(y)\}}{x-y}\, dy,$$

so hat die Summe

$$\sum_{\mu-1}^{\mu=x} \frac{T_\lambda^m(x_\mu)\, T_\nu^m(x_\mu)\, S_x^m(x_\mu)}{T_{x-1}^{m+1}(x_\mu)}$$

den Werth $\dfrac{[\Pi(m)]^2}{\Pi(\lambda)\Pi(\lambda+m)}$ oder 0, je nachdem $\lambda = \nu$ oder λ von ν verschieden ist.

Sind λ und ν zwei ganze nicht negative Zahlen, deren Summe einen der Werthe $0, 1, 2, \ldots, 2x-1$ besitzt, bezeichnen ferner $x_1, x_2, \ldots, x_x$ die Wurzeln des Jacobi'schen Polynoms $T_{n,\alpha,\beta}(x)$ und ist

$$S_{n,\alpha,\beta}(x)=\int_{-1}^{+1}\frac{(1+y)^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\{T_{n,\alpha,\beta}(x)-T_{n,\alpha,\beta}(y)\}}{x-y}\,dy$$

so hat die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa}\frac{T_{\lambda,\alpha,\beta}(x_\mu)\,T_{\nu,\alpha,\beta}(x_\mu)\,S_{\varkappa,\alpha,\beta}(x_\mu)}{T_{\varkappa-1,\alpha+1,\beta+1}(x_\mu)}$$

den Werth $\dfrac{4^\lambda\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(\alpha+\lambda)\,\Gamma(\beta+\lambda)\,\Gamma(\alpha+\beta-1)\,\Gamma(\alpha+\beta+\lambda-1)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta+2\lambda-1)\,\Gamma(\alpha+\beta+2\lambda)}$ oder 0, je nachdem $\lambda=\nu$ oder $\lambda\gtrless 0$ ist.

Von den besonders interessanten speciellen Relationen, welche in diesem Satze enthalten sind, mögen die folgenden hervorgehoben werden:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa}\cos\frac{(2\mu-1)\lambda\pi}{2\varkappa}\cos\frac{(2\mu-1)\nu\pi}{2\varkappa}=\delta_{\lambda,\nu}\frac{\varkappa}{2}\qquad(\lambda,\nu\geqq 0;\ 2\varkappa>\lambda+\nu>0)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa}\cos\frac{(2\mu-1)\lambda\pi}{2\varkappa}\cos\frac{(2\mu-1)\nu\pi}{2\varkappa}=\delta_{\lambda,\nu}\varkappa\qquad(\lambda,\nu\geqq 0,\ \lambda+\nu=0,\ \lambda+\nu=2\varkappa)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa}\sin\frac{(\lambda+1)\mu\pi}{\varkappa+1}\sin\frac{(\nu+1)\mu\pi}{\varkappa+1}=\frac{\delta_{\lambda,\nu}(\varkappa+1)}{2}\qquad(2\varkappa>\lambda+\nu\geqq 0;\ \lambda,\nu\geqq 0)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa} \sin\frac{(2\lambda+1)\,\mu\pi}{2\varkappa+1} \sin\frac{(2\nu+1)\,\mu\pi}{2\varkappa+1} = \delta_{\lambda,\nu}(2\varkappa+1) \qquad (2\varkappa > \lambda+\nu \geqq 0;\ \lambda, \nu \geqq 0)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa} a_\mu P_\lambda(x_\mu) P_\nu(x_\mu) = \frac{2\delta_{\lambda,\nu}}{2\lambda+1} \qquad (2\varkappa > \lambda+\nu \geqq 0;\ \lambda, \nu \geqq 0;\ P_\varkappa(x_\mu) = 0)$$

wo die Zahlen a_μ die Coëfficienten der Gauss'schen Formel für die näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrales sind. Die letzte Gleichung hat bekanntlich zuerst Herr F. Neumann a. a. O. aufgestellt.

Sind die Coëfficienten von x in den einzelnen Theilnennern einer regulären Kettenbruchentwicklung bis zum $\varkappa^{\text{ten}}$ incl. positiv, so sind bekanntlich[1] die Wurzeln der Functionen $\psi_{\varkappa-1}(x)$, $\psi_\varkappa(x)$, $\varphi_\varkappa(x)$ reell und ungleich, und es trennen die Wurzeln von $\psi_\varkappa(x)$, $\psi_{\varkappa-1}(x)$, sowie die von $\psi_\varkappa(x)$ und $\varphi_\varkappa(x)$ sich gegenseitig von einander, so dass also in diesem Falle

$$\text{sign.}(\varphi_\varkappa(x_\mu)\psi'_\varkappa(x_\mu)) = \text{sign.}(\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi'_\varkappa(x_\mu)) = +1$$

ist. Man leitet daher aus den aufgestellten Theoremen unmittelbar das folgende neue her:

Sind die Coëfficienten von x in den einzelnen Theilnennern einer regulären Kettenbruchentwicklung wenigstens bis zum $\varkappa^{\text{ten}}$ incl. positiv, sind ferner die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ des $\varkappa^{\text{ten}}$ Näherungsnenners dieser Entwicklung

$$\psi_\varkappa(x) = a_\varkappa^{(\varkappa)} x^\varkappa + a_{\varkappa-1}^{(\varkappa)} x^{\varkappa-1} + \ldots + a_1^{(\varkappa)} x + a_0^{(\varkappa)}$$

---

[1] „Über algebraische Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen." Von Leopold Gegenbauer. Diese Sitzungsber., 84. Bd., II. Abth., S. 1102—1107.

sämmtlich positiv, ist endlich

$$\chi(x) = c_\tau x^\tau + c_{\tau-1} x^{\tau-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

eine ganze Function von x von nicht höherem als dem Grade $\varkappa+\lambda+2\varepsilon_\lambda(\varkappa-\lambda)$ ($\varepsilon_\lambda = 0$, $\varkappa > \lambda$; $\varepsilon_\lambda = 1$, $\varkappa < \lambda$), welche an den Nullstellen von $\psi_\varkappa(x)$ dasselbe Vorzeichen wie $\psi_\lambda(x)$ besitzt, so ist die Determinante

$$\begin{vmatrix}
c_\tau \sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{\varkappa-\lambda-1-2\varepsilon_\lambda(\varkappa-\lambda),\mu}\,\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\,\psi'_\varkappa(x_\mu)}, & a^{(\varkappa)}_\varkappa, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\
c_\tau \sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{\varkappa-\lambda-2-2\varepsilon_\lambda(\varkappa-\lambda),\mu}\,\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\,\psi'_\varkappa(x_\mu)} + & & & & & & \\
\quad + c_{\tau-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa} \frac{a^{(\varkappa)}_{\varkappa-\lambda-1-2\varepsilon_\lambda(\varkappa-\lambda),\mu}\,\psi_\lambda(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\,\psi'_\varkappa(x_\mu)}, & a^{(\varkappa)}_{\varkappa-1}, & a^{(\varkappa)}_\varkappa, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\
\cdots\cdots\cdots

§. 3. Der ρ^{te} Näherungsnenner

$$\overline{\psi}_\rho(x) = \bar{a}_\rho^{(\rho)} x^\rho + \bar{a}_{\rho-1}^{(\rho)} x^{\rho-1} + \ldots + \bar{a}_1^{(\rho)} x + \bar{a}_0^{(\rho)}$$

der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes

$$(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \ldots (x-y_r)^{\nu_r} f_1(x) \qquad (\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r = m)$$

wird, wie ich unlängst gezeigt habe,[1] falls die Kettenbruchentwicklung von $f_1(x)$ regulär ist, durch folgende Gleichung gegeben

$$(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2} \ldots (x-y_r)^{\nu_r}\overline{\psi}_\rho(x) = \frac{\bar{a}_\rho^{(\rho)}}{\bar{a}_{\rho+m}^{(\rho+m)}\left|\psi_{\rho+m-\sigma}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)\right|} \begin{vmatrix} \psi_{\rho+m}(x), & \psi_{\rho+m-1}(x), & \ldots, & \psi_{\rho+1}(x), & \psi_\rho(x) \\ \psi_{\rho+m}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}(y_1), & \ldots, & \psi_{\rho+1}(y_1), & \psi_\rho(y_1) \\ \psi'_{\rho+m}(y_1), & \psi'_{\rho+m-1}(y_1), & \ldots, & \psi'_{\rho+1}(y_1), & \psi'_\rho(y_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{\rho+m}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \ldots, & \psi_{\rho+1}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_\rho^{(\nu_1-1)}(y_1) \\ \psi_{\rho+m}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}(y_2), & \ldots, & \psi_{\rho+1}(y_2), & \psi_\rho(y_2) \\ \psi'_{\rho+m}(y_2), & \psi'_{\rho+m-1}(y_2), & \ldots, & \psi'_{\rho+1}(y_2), & \psi'_\rho(y_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{\rho+m}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \ldots, & \psi_{\rho+1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_\rho^{(\nu_2-1)}(y_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \qquad 6)$$

$$\begin{vmatrix} & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_{\rho+m}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}(y_r), & \cdots, & \psi_{\rho+1}(y_r), & \psi_\rho(y_r) \\ \psi'_{\rho+m}(y_r), & \psi'_{\rho+m-1}(y_r), & \cdots, & \psi'_{\rho+1}(y_r), & \psi'_\rho(y_r) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+m}(y_r), & \psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+m-1}(y_r), & \cdots, & \psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+1}(y_r), & \psi^{(\nu_r-1)}_{\rho}(y_r) \end{vmatrix}$$

$$(\lambda = 1, 2, \ldots, r;\ \tau_\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \nu_\lambda - 1;\ \sigma = 1, 2, \ldots, m)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit

$$\frac{a^{(\varkappa)}_{\varkappa-h,\mu}\chi(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi'_\varkappa(x_\mu)}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{a^{(\varkappa)}_{\varkappa-h,\mu}\bar{\psi}_\sigma(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi'_\varkappa(x_\mu)}$$

und summirt bezüglich μ von 1 bis $\varkappa$, so erhält man unter Berücksichtigung der im vorigen Paragraphe abgeleiteten Formeln die Theoreme.

Hat der $\varkappa^{\text{te}}$ Näherungsnenner

$$\psi_\varkappa(x) = a^{(\varkappa)}_\varkappa x^\varkappa + a^{(\varkappa)}_{\varkappa-1}x^{\varkappa-1} + \ldots + a^{(\varkappa)}_1 x + a^{(\varkappa)}_0$$

der regulären Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ keine mehrfache Wurzel, ist ferner der Grad der ganzen Function

$$\chi(x) = c_\tau x^\tau + c_{\tau-1}x^{\tau-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

---

[1] „Zur Theorie der regulären Kettenbrüche." Denkschriften der k. Akad. der Wissensch., Mathem.-naturw. Cl., 59. Bd.

nicht grösser als die kleinste der Zahlen $\rho+\sigma-h+2\varepsilon_{\rho+\sigma}(\varkappa-\rho-\sigma)$ $(\sigma=0,1,2,\ldots,m;\ \varepsilon_\lambda=0,\varkappa>\lambda;\ \varepsilon_\lambda=1,\varkappa<\lambda)$ und bezeichnet $\bar{\psi}_\rho(x)$ den ρ^{ten} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots(x-y_r)^{\nu_r}f_1(x)$ $(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r=m)$, so ist für $2\varkappa+1>\rho+m$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa}\frac{a^{(\varkappa)}_{\varkappa-h,\mu}(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\ldots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\chi(x_\mu)\bar{\psi}_\rho(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi'_\varkappa(x_\mu)}=0.$$

Hat der $\varkappa^{\text{te}}$ Näherungsnenner

$$\psi_\varkappa(x)=a^{(\varkappa)}_\varkappa x^\varkappa+a^{(\varkappa)}_{\varkappa-1}x^{\varkappa-1}+\ldots+a^{(\varkappa)}_1 x+a^{(\varkappa)}_0$$

der regulären Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ keine mehrfache Wurzel, ist ferner

$$\chi(x)=c_\tau x^\tau+c_{\tau-1}x^{\tau-1}+\ldots+c_1 x+c_0$$

eine ganze Function von nicht höherem als dem Grade $\rho-h$ und bezeichnet $\bar{\psi}_\rho(x)$ den ρ^{ten} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots(x-y_r)^{\nu_r}f_1(x)$ $(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r=m)$, so ist für $\varkappa\geqq\rho+m$ die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa}\frac{a^{(\varkappa)}_{\varkappa-h,\mu}(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\ldots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\chi(x_\mu)\bar{\psi}_\rho(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi'_\varkappa(x_\mu)}$$

gleich Null, ist aber

$$\tau=\rho+1-h,$$

so hat dieselbe den Werth

$$(-1)^{m+1}\frac{\bar{a}_\rho^{(\rho)}\left|\psi_{\rho+m+1-\sigma}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)\right|}{\bar{a}_{\rho+m}^{(\rho+m)}\left|\psi_{\rho+m-\sigma}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)\right|}c_{\rho-h+1}\sum_{\mu=1}^{\mu=x}\frac{a_{x-\rho-1,\mu}^{(x)}\psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu)\psi_x'(x_\mu)}\gtrless 0.$$

Sind die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_x$ des x^{ten} Näherungsnenners

$$\psi_x(x)=a_x^{(x)}x^x+a_{x-1}^{(x)}x^{x-1}+\ldots+a_1^{(x)}x+a_0^{(x)}$$

der wenigstens bis zum x^{ten} Theilnenner einschliesslich regulären Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ sämmtlich von einander verschieden, bezeichnet ferner $\bar{\psi}_\rho(x)$ den ρ^{ten} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots .(x-y_r)^{\nu_r}f_1(x)$ $(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r=m)$, und sind ρ und σ zwei nicht negative ganzen Zahlen, deren Summe kleiner als $2x+1-h-m$ ist, so hat, falls x nicht kleiner als die grössere der beiden Zahlen $\rho+m$, $\sigma+m$ ist, die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x}\frac{a_{x-h,\mu}^{(x)}(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\ldots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\bar{\psi}_\rho(x_\mu)\bar{\psi}_\sigma(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu)\psi_x'(x_\mu)}$$

den Werth 0 oder

$$(-1)^{m+1}\frac{\bar{a}_\rho^{(\rho)}\left|\psi_{\rho+m+1-\alpha}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)\right|}{\bar{a}_{\rho+m}^{(\rho+m)}\left|\psi_{\rho+m-\alpha}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)\right|}\bar{a}_\sigma^{(\sigma)}\sum_{\mu=1}^{\mu=x}\frac{a_{x-\rho-1,\mu}^{(x)}\psi_\rho(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu)\psi_x'(x_\mu)}=(-1)^{m+1}\frac{\bar{a}_\sigma^{(\sigma)}\left|\psi_{\sigma+m-\alpha+1}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)\right|}{\bar{a}_{\sigma+m}^{(\sigma+m)}\left|\psi_{\sigma+m-\alpha}^{(\tau_\lambda)}(y_\lambda)\right|}\bar{a}_\rho^{(\rho)}\sum_{\mu=1}^{\mu=x}\frac{a_{x-\sigma-1,\mu}^{(x)}\psi_\sigma(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu)\psi_x'(x_\mu)}\gtrless 0,$$

je nachdem $|\rho-\sigma|>h-1$ oder gleich $h-1$ ist. $(\lambda=1,2,\ldots,r;\ \tau_\lambda=0,1,2,\ldots,\nu_\lambda-1;\ \alpha=1,2,\ldots,m)$

Sind die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ des $\varkappa^{\text{ten}}$ Näherungsnenners

$$\psi_\varkappa(x) = a_\varkappa^{(\varkappa)} x^\varkappa + a_{\varkappa-1}^{(\varkappa)} x^{\varkappa-1} + \ldots + a_1^{(\varkappa)} x + a_0^{(\varkappa)}$$

der regulären Kettenbruchentwicklung einer nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ sämmtlich von einander verschieden, bezeichnet ferner $\overline{\psi}_\rho(x)$ den ρ^{ten} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots(x-y_r)^{\nu_r} f_1(x)$, und sind ρ und σ zwei nicht negative ganze Zahlen, deren Summe kleiner als $2\varkappa-m$ ist, so ist, falls $\varkappa$ nicht kleiner als die grössere der beiden Zahlen $\rho+m$, $\sigma+m$ ist, die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa} \frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\ldots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\overline{\psi}_\rho(x_\mu)\overline{\psi}_\sigma(x_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\mu)\psi'_\varkappa(x_\mu)}$$

gleich Null oder von Null verschieden, je nachdem $\rho \gtrless \sigma$ oder $\rho = \sigma$ ist.

Ist $\vartheta(x)$ eine im reellen Intervalle $a \ldots b$ reelle und positive Function ebenso wie $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots(x-y_r)^{\nu_r}$ $(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r=m)$, bezeichnet ferner $\psi_\varkappa(x)$, beziehungsweise $\overline{\psi}_\varkappa(x)$, den $\varkappa^{\text{ten}}$ Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_a^b \frac{\vartheta(z)\,dz}{x-z}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \int_a^b \frac{(z-y_1)^{\nu_1}(z-y_2)^{\nu_2}\ldots(z-y_r)^{\nu_r}\vartheta(z)\,dz}{x-z},$$

so sind die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\varkappa$ der Gleichung $\psi_\varkappa(x) = 0$ sämmtlich von einander verschieden, und es ist, falls ρ und σ zwei nicht negative ganze Zahlen vorstellen, deren Summe kleiner als $2\varkappa-m$ ist, für alle $\varkappa$, welche nicht kleiner als die grössere der beiden Zahlen $\rho+m$, $\sigma+m$ sind, die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=x} \frac{(x_\mu - y_1)^{\nu_1}(x_\mu - y_2)^{\nu_2} \dots (x_\mu - y_r)^{\nu_r} \bar{\psi}_\rho(x_\mu)\, \bar{\psi}_\sigma(x_\mu)}{\psi_{x-1}(x_\mu)\, \psi'_x(x_\mu)}$$

gleich Null oder von Null verschieden, je nachdem $\rho \gtrless \sigma$ oder $\rho = \sigma$ ist.

Von den speciellen Relationen, welche in diesen Theoremen enthalten sind, mögen die folgenden besonders angeführt werden.

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sin^{2r} \frac{(2\mu-1)\pi}{4n} \cos^{2s} \frac{(2\mu-1)\pi}{4n} T_{\lambda, r+\frac{1}{2}, s+\frac{1}{2}}\left(\cos \frac{(2\mu-1)\pi}{2n}\right) T_{\nu, r+\frac{1}{2}, s+\frac{1}{2}}\left(\cos \frac{(2\mu-1)\pi}{2n}\right) =$$

$$= \frac{\delta_{\lambda,\nu}\, 2^{2\lambda-1}\, n\, \Gamma(\lambda+1)\, \Gamma\left(r+\lambda+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s+\lambda+\frac{1}{2}\right) \Gamma(r+s+\lambda)}{\Gamma(r+s+2\lambda)\, \Gamma(r+s+2\lambda+1)\, \pi} \qquad (\lambda+\nu < 2n-r-s)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sin^{2r+2} \frac{\mu\pi}{2n+2} \cos^{2s+2} \frac{\mu\pi}{2n+2} T_{\lambda, r+\frac{3}{2}, s+\frac{3}{2}}\left(\cos \frac{\mu\pi}{n+1}\right) T_{\nu, r+\frac{3}{2}, s+\frac{3}{2}}\left(\cos \frac{\mu\pi}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{\delta_{\lambda,\nu}\, 2^{2\lambda-1}\, (n+1)\, \Gamma(\lambda+1)\, \Gamma\left(r+\lambda+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(s+\lambda+\frac{3}{2}\right) \Gamma(r+s+\lambda+2)}{\Gamma(r+s+2\lambda+2)\, \Gamma(r+s+2\lambda+3)\, \pi} \qquad (\lambda+\nu < 2n-r-s)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sin^{2r+2} \frac{\mu\pi}{2n+1} \cos^{2s} \frac{\mu\pi}{2n+1} T_{\lambda, r+\frac{3}{2}, s+\frac{1}{2}}\left(\cos \frac{2\mu\pi}{2n+1}\right) T_{\nu, r+\frac{3}{2}, s+\frac{1}{2}}\left(\cos \frac{2\mu\pi}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{2^{2\lambda-2}\, \delta_{\lambda,\nu}\, (2n+1)\, \Gamma(\lambda+1)\, \Gamma\left(r+\lambda+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(s+\lambda+\frac{1}{2}\right) \Gamma(r+s+\lambda+1)}{\Gamma(s+r+2\lambda+1)\, \Gamma(r+s+2\lambda+2)\, \pi} \qquad (\lambda+\nu < 2n-r-s)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \frac{E_n^{\alpha}(x_\mu)\, C_\lambda^{\alpha,\rho}(x_\mu)\, C_\nu^{\alpha,\rho}(x_\mu)}{C_{n-1}^{\alpha+1}(x_\mu)} = (-1)^{\rho}\, \frac{\delta_{\lambda,\nu}\, \Pi(\lambda-\rho)\, \Pi(\lambda+\rho+2\alpha-1)\, \alpha\, \Pi(2\alpha)}{\lambda+\alpha} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{2^{2\rho-\lambda+1}\, \Pi(\alpha+\rho-1)\, \Pi\left(\alpha+\rho-\frac{1}{2}\right)}{\Pi(\lambda+\alpha-1)\, \Pi(2\alpha+2\rho-1)\, \Pi\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)}\right]^2, \qquad (\lambda+\nu<2n;\ C_n^{\alpha}(x_\mu)=0)$$

wo

$$E_n^{\alpha}(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-y^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} \{C_n^{\alpha}(x) - C_n^{\alpha}(y)\}\, dy}{x-y}$$

ist. Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar die specielle F. Neumann'sche Relation

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} a_\mu\, P_{\lambda,\rho}(x_\mu)\, P_{\nu,\rho}(x_\mu) = \frac{2\delta_{\lambda,\nu}}{2\lambda+1}\, \frac{\Pi(\lambda+\rho)}{\Pi(\lambda-\rho)} \qquad (\lambda+\nu<2n)$$

wo, wie oben, die Grössen a_μ die Coëfficienten der Gauss'schen Formel für die mechanische Quadratur und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln der Kugelfunction $P_n(x)$ sind.

Bekanntlich lassen sich alle Näherungsnenner einer regulären Kettenbruchentwicklung durch zwei unmittelbar aufeinander folgende von ihnen $\psi_{x-1}(x), \psi_x(x)$ in folgender Weise darstellen:

$$\psi_{x+\mu}(x) = \tilde{\psi}_\mu(x)\psi_x(x) - \tilde{\varphi}_\mu(x)\psi_{x-1}(x) \qquad (\mu \geqq 0)$$
$$\psi_{x-\mu-1}(x) = \overset{*}{\psi}_\mu(x)\psi_{x-1}(x) - \overset{*}{\varphi}_\mu(x)\psi_x(x)$$

wo die ganzen Functionen $\tilde{\psi}_\mu(x)$, $\overset{*}{\psi}_\mu(x)$ und $\tilde{\varphi}_\mu(x)$, $\overset{*}{\varphi}_\mu(x)$ von dem Grade μ, beziehungsweise $\mu-1$, wieder Näherungsnenner, beziehungsweise Näherungszähler, von regulären Kettenbrüchen sind, welche einen bestimmten Theil der vorliegenden Kettenbruchentwicklung bilden, und demnach bestehen für jede Wurzel x_λ des Näherungsnenners $\psi_x(x)$ die Relationen

$$\psi_{\varkappa+}(x_\lambda) = -\tilde{\varphi}_\mu(x_\lambda)\,\psi_{\varkappa-1}(x_\lambda)$$
$$\psi_{\varkappa-\mu-1}(x_\lambda) = \overset{*}{\psi}_\mu(x_\lambda)\,\psi_{\varkappa-1}(x_\lambda).$$

Setzt man nun in der Gleichung 6) für $\rho+m \geqq \varkappa \geqq \rho$ $x = x_\lambda$, so ergibt sich die Formel

$$(x_\lambda - y_1)^{\nu_1}(x_\lambda - y_2)^{\nu_2}\dots(x_\lambda - y_r)^{\nu_r}\bar{\psi}_\rho(x_\lambda) = \frac{a_\rho^{(\rho)}\psi_{\varkappa-1}(x_\lambda)}{a_{\rho+m}^{(\rho+m)}\left|\psi_{\rho+m-\sigma}^{(\tau_{\lambda_1})}(y_{\lambda_1})\right|}.$$

$$\begin{vmatrix}
-\tilde{\varphi}_{\rho+m-\varkappa}(x_\lambda), & -\tilde{\varphi}_{\rho+m-\varkappa-1}(x_\lambda), & \dots, & -1, & 0, & 1, & \overset{*}{\psi}_1(x_\lambda), & \dots, & \overset{*}{\psi}_{\varkappa-\rho}(x_\lambda), & \overset{*}{\psi}_{\varkappa-\rho-1}(x_\lambda) \\
\psi_{\rho+m}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi_{\varkappa+1}(y_1), & \psi_\varkappa(y_1), & \psi_{\varkappa-1}(y_1), & \psi_{\varkappa-2}(y_1), & \dots, & \psi_{\rho+1}(y_1), & \psi_\rho(y_1) \\
\psi'_{\rho+m}(y_1), & \psi'_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi'_{\varkappa+1}(y_1), & \psi'_\varkappa(y_1), & \psi'_{\varkappa-1}(y_1), & \psi'_{\varkappa-2}(y_1), & \dots, & \psi'_{\rho+1}(y_1), & \psi'_\rho(y_1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi_{\rho+m}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \dots, & \psi_{\varkappa+1}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_\varkappa^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_{\varkappa-1}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_{\varkappa-2}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \dots, & \psi_{\rho+1}^{(\nu_1-1)}(y_1), & \psi_\rho^{(\nu_1-1)}(y_1) \\
\psi_{\rho+m}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi_{\varkappa+1}(y_2), & \psi_\varkappa(y_2), & \psi_{\varkappa-1}(y_2), & \psi_{\varkappa-2}(y_2), & \dots, & \psi_{\rho+1}(y_2), & \psi_\rho(y_2) \\
\psi'_{\rho+m}(y_2), & \psi'_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi'_{\varkappa+1}(y_2), & \psi'_\varkappa(y_2), & \psi'_{\varkappa-1}(y_2), & \psi'_{\varkappa-2}(y_2), & \dots, & \psi'_{\rho+1}(y_2), & \psi'_\rho(y_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi_{\rho+m}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \dots, & \psi_{\varkappa+1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_\varkappa^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\varkappa-1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\varkappa-2}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \dots, & \psi_{\rho+1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_\rho^{(\nu_2-1)}(y_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi_{\rho+m}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}(y_r), & \dots, & \psi_{\varkappa+1}(y_r), & \psi_\varkappa(y_r), & \psi_{\varkappa-1}(y_r), & \psi_{\varkappa-2}(y_r), & \dots, & \psi_{\rho+1}(y_r), & \psi_\rho(y_r) \\
\psi'_{\rho+m}(y_r), & \psi'_{r+m-1}(y_r), & \dots, & \psi'_{\varkappa+1}(y_r), & \psi'_\varkappa(y_r), & \psi'_{\varkappa-1}(y_r), & \psi'_{\varkappa-2}(y_r), & \dots, & \psi'_{\rho+1}(y_r), & \psi'_\rho(y_r) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi_{\rho+m}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \dots, & \psi_{\varkappa+1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_\varkappa^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\varkappa-1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\varkappa-2}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \dots, & \psi_{\rho+1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_\rho^{(\nu_r-1)}(y_r)
\end{vmatrix}$$

$(\lambda_1 = 1, 2, \dots, r;\ \tau_{\lambda_1} = 0, 1, 2, \dots, \nu_{\lambda_1}-1;\ \sigma = 1, 2, \dots, m)$

Aus derselben ergeben sich folgende Theoreme:

Sind die Coëfficienten von x in den einzelnen Theilnennern der regulären Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ wenigstens bis zum ρ^{ten} inclusive sämmtlich positiv, bezeichnet ferner $\psi_\rho(x)$ den ρ^{ten} Näherungsnenner dieser Entwicklung und ist

$$\psi_{\rho+\mu}(x) = \tilde{\psi}_\mu(x)\psi_\rho(x) - \tilde{\varphi}_\mu(x)\psi_{\rho-1}(x)$$
$$\psi_{\rho-\mu-1}(x) = \psi_\mu(x)\overset{*}{\psi}_{\rho-1}(x) - \overset{*}{\varphi}_\mu(x)\psi_\rho(x)$$

verschwindet endlich keine der beiden ganzen Functionen $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}$ $(\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r=m)$ und

$$\begin{vmatrix}
\tilde{\varphi}_m(x), & \tilde{\varphi}_{m-1}(x), & \dots, & \tilde{\varphi}_2(x), & 1, & 0 \\
\psi_{\rho+m}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi_{\rho+2}(y_1), & \psi_{\rho+1}(y_1), & \psi_\rho(y_1) \\
\psi'_{\rho+m}(y_1), & \psi'_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi'_{\rho+2}(y_1), & \psi'_{\rho+1}(y_1), & \psi'_\rho(y_1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+m}(y_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+2}(y_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+1}(y_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_\rho(y_1) \\
\psi_{\rho+m}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi_{\rho+2}(y_2), & \psi_{\rho+1}(y_2), & \psi_\rho(y_2) \\
\psi'_{\rho+m}(y_2), & \psi'_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi'_{\rho+2}(y_2), & \psi'_{\rho+1}(y_2), & \psi'_\rho(y_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi^{(\nu_2-1)}_{\rho+m}(y_2), & \psi^{(\nu_2-1)}_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi^{(\nu_2-1)}_{\rho+2}(y_2), & \psi^{(\nu_2-1)}_{\rho+1}(y_2), & \psi^{(\nu_2-1)}_\rho(y_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi_{\rho+m}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}(y_r), & \dots, & \psi_{\rho+2}(y_r), & \psi_{\rho+1}(y_r), & \psi_\rho(y_r) \\
\psi'_{\rho+m}(y_r), & \psi'_{\rho+m-1}(y_r), & \dots, & \psi'_{\rho+2}(y_r), & \psi'_{\rho+1}(y_r), & \psi'_\rho(y_r) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+m}(y_r), & \psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+m-1}(y_r), & \dots, & \psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+2}(y_r), & \psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+1}(y_r), & \psi^{(\nu_r-1)}_\rho(y_r)
\end{vmatrix}$$

in dem Intervalle, innerhalb dessen die Wurzeln von $\psi_\rho(x)$ liegen, so sind sämmtliche Wurzeln des ρ^{ten} Näherungsnenners der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}f_1(x)$ reell und ungleich und werden durch die Wurzeln von $\psi_\rho(x)$ von einander getrennt.

Sind die Coëfficienten von x in den einzelnen Theilnennern der regulären Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ wenigstens bis zum $(\rho+1)^{\text{ten}}$ inclusive sämmtlich positiv, bezeichnet ferner $\psi_{\rho+1}(x)$ den $(\rho+1)^{\text{ten}}$ Näherungsnenner dieser Entwicklung und ist

$$\psi_{\rho+\mu+1}(x) = \tilde{\psi}_\mu(x)\,\psi_{\rho+1}(x) - \tilde{\varphi}_\mu(x)\,\psi_\rho(x)$$

verschwindet endlich keine der beiden ganzen Functionen $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}$ $(\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r=m)$ und

$$\begin{vmatrix}
\tilde{\varphi}_{m-1}(x), & \tilde{\varphi}_{m-2}(x), & \dots, & \tilde{\varphi}_2(x), & 1, & 0, & -1 \\
\psi_{\rho+m}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi_{\rho+3}(y_1), & \psi_{\rho+2}(y_1), & \psi_{\rho+1}(y_1), & \psi_\rho(y_1) \\
\psi'_{\rho+m}(y_1), & \psi'_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi'_{\rho+3}(y_1), & \psi'_{\rho+2}(y_1), & \psi'_{\rho+1}(y_1), & \psi'_\rho(y_1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+m}(y_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+3}(y_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+2}(y_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+1}(y_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_\rho(y_1) \\
\psi_{\rho+m}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi_{\rho+3}(y_2), & \psi_{\rho+2}(y_2), & \psi_{\rho+1}(y_2), & \psi_\rho(y_2) \\
\psi'_{\rho+m}(y_2), & \psi'_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi'_{\rho+3}(y_2), & \psi'_{\rho+2}(y_2), & \psi'_{\rho+1}(y_2), & \psi'_\rho(y_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi^{(\nu_2-1)}_{\rho+m}(y_2), & \psi^{(\nu_2-1)}_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi^{(\nu_2-1)}_{\rho+3}(y_2), & \psi^{(\nu_2-1)}_{\rho+2}(y_2), & \psi^{(\nu_2-1)}_{\rho+1}(y_2), & \psi^{(\nu_2-1)}_\rho(y_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi_{\rho+m}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}(y_r), & \dots, & \psi_{\rho+3}(y_r), & \psi_{\rho+2}(y_r), & \psi_{\rho+1}(y_r), & \psi_\rho(y_r) \\
\psi'_{\rho+m}(y_r), & \psi'_{\rho+m-1}(y_r), & \dots, & \psi'_{\rho+3}(y_r), & \psi'_{\rho+2}(y_r), & \psi'_{\rho+1}(y_r), & \psi'_\rho(y_r) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+m}(y_r), & \psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+m-1}(y_r), & \dots, & \psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+3}(y_r), & \psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+2}(y_r), & \psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+1}(y_r), & \psi^{(\nu_r-1)}_\rho(y_r)
\end{vmatrix}$$

in dem Intervalle, innerhalb dessen die Wurzeln von $\psi_{\rho+1}(x)$ liegen, so sind sämmtliche Wurzeln des ρ^{ten} Näherungsnenners der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}f_1(x)$ reell und ungleich, und es liegt zwischen je zwei Wurzeln von $\psi_{\rho+1}(x)$ eine der eben genannten.

Sind die Coëfficienten von x in den einzelnen Theilnennern der regulären Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ wenigstens bis zum ρ^{ten} inclusive sämmtlich positiv, bezeichnet ferner $\psi_\varkappa(x)$ $(\rho+m\geqq\varkappa>\rho+1)$ den $\varkappa^{\text{ten}}$ Näherungsnenner dieser Entwicklung, und ist

$$\psi_{\varkappa+\mu}(x)=\overline{\psi}_\mu(x)\,\psi_\varkappa(x)-\overline{\varphi}_\mu(x)\,\psi_{\varkappa-1}(x)$$
$$\psi_{\varkappa-\mu-1}(x)=\overset{*}{\psi}_\mu(x)\,\psi_{\varkappa-1}(x)-\overset{*}{\varphi}_\mu(x)\,\psi_\varkappa(x)$$

verschwindet endlich die ganze Function $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}$ $(\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r=m)$ in dem Intervalle, innerhalb dessen die Wurzeln von $\psi_\varkappa(x)$ liegen, nicht, so gibt es mindestens $\varkappa-\rho-1$ Paare von aufeinander folgenden Wurzeln von $\psi_\varkappa(x)$, zwischen deren Gliedern je eine ungerade Anzahl von Wurzeln der ganzen Function

$$\begin{array}{|cccccccccc|}
-\overline{\varphi}_{\rho+m-\varkappa}(x), & -\overline{\varphi}_{\rho+m-\varkappa-1}(x), & \dots, & -1, & 0, & 1, & \overset{*}{\psi}_1(x), & \dots, & \overset{*}{\psi}_{\varkappa-\rho}(x), & \overset{*}{\psi}_{\varkappa-\rho-1}(x) \\
\psi_{\rho+m}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi_{\varkappa+1}(y_1), & \psi_\varkappa(y_1), & \psi_{\varkappa-1}(y_1), & \psi_{\varkappa-2}(y_1), & \dots, & \psi_{\rho+1}(y_1), & \psi_\rho(y_1) \\
\psi'_{\rho+m}(y_1), & \psi'_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi'_{\varkappa+1}(y_1), & \psi'_\varkappa(y_1), & \psi'_{\varkappa-1}(y)_1, & \psi'_{\varkappa-2}(y_1), & \dots, & \psi'_{\rho+1}(y_1), & \psi'_\rho(y_1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+m}(y_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi^{(\nu_1-1)}_{\varkappa+1}(y_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_\varkappa(y_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_{\varkappa-1}(y_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_{\varkappa-2}(y_1), & \dots, & \psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+1}(y_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_\rho(y_1) \\
\psi_{\rho+m}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi_{\varkappa+1}(y_2), & \psi_\varkappa(y_2), & \psi_{\varkappa-1}(y_2), & \psi_{\varkappa-2}(y_2), & \dots, & \psi_{\rho+1}(y_2), & \psi_\rho(y_2) \\
\psi'_{\rho+m}(y_2), & \psi'_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi'_{\varkappa+1}(y_2), & \psi'_\varkappa(y_2), & \psi'_{\varkappa-1}(y_2), & \psi'_{\varkappa-2}(y_2), & \dots, & \psi'_{\rho+1}(y_2), & \psi'_\rho(y_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
\psi_{\rho+m}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \cdots, & \psi_{\varkappa+1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\varkappa}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\varkappa-1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\varkappa-2}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \cdots, & \psi_{\rho+1}^{(\nu_2-1)}(y_2), & \psi_{\rho}^{(\nu_2-1)}(y_2) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\psi_{\rho+m}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}(y_r), & \cdots, & \psi_{\varkappa+1}(y_r), & \psi_{\varkappa}(y_r), & \psi_{\varkappa-1}(y_r), & \psi_{\varkappa-2}(y_r), & \cdots, & \psi_{\rho+1}(y_r), & \psi_{\rho}(y_r) \\
\psi'_{\rho+m}(y_r), & \psi'_{\rho+m-1}(y_r), & \cdots, & \psi'_{\varkappa+1}(y_r), & \psi'_{\varkappa}(y_r), & \psi'_{\varkappa-1}(y_r), & \psi'_{\varkappa-2}(y_r), & \cdots, & \psi'_{\rho+1}(y_r), & \psi'_{\rho}(y_r) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\psi_{\rho+m}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \cdots, & \psi_{\varkappa+1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\varkappa}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\varkappa-1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\varkappa-2}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \cdots, & \psi_{\rho+1}^{(\nu_r-1)}(y_r), & \psi_{\rho}^{(\nu_r-1)}(y_r)
\end{array}\right|$$

sich befinden.

Von den speciellen Fällen dieser Theoreme mögen die folgenden erwähnt werden:

Das Intervall $\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2n+1} \ldots \cos\frac{2\lambda\pi}{2n+1}$ kann höchstens zwei, das Intervall $\cos\frac{2\lambda\pi}{2n+1} \ldots \cos\frac{(2\lambda+1)\pi}{2n+1}$ aber höchstens eine Wurzel der ersten Ableitung der Kugelfunction n^{ter} Ordnung enthalten.

Das Intervall $\cos\frac{\lambda\pi}{n+1} \ldots \cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2n}$ kann höchstens zwei, das Intervall $\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2n} \ldots \cos\frac{(\lambda+1)\pi}{n+1}$ aber höchstens eine Wurzel der ersten Ableitung der Kugelfunction n^{ter} Ordnung enthalten.

Sind die Coëfficienten von x in den einzelnen Theilnennern der regulären Kettenbruchentwicklung der nach ganzen negativen Potenzen von x fortschreitenden Function $f_1(x)$ wenigstens bis zum ρ^{ten} inclusive sämmtlich positiv, liegen ferner die Wurzeln des ρ^{ten} Näherungsnenners $\psi_\rho(x)$ derselben innerhalb der Grenzen a und b und bezeichnen $\bar{\psi}_\rho(x)$, $\tilde{\psi}_\rho(x)$, $\dot{\psi}_\rho(x)$ beziehungsweise den ρ^{ten} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Productes $(x-a)f_1(x)$, $(x-b)f_1(x)$, $(x-a)(x-b)f_1(x)$, so sind die Wurzeln der eben genannten drei ganzen Functionen sämmtlich reell und ungleich, und es werden die Wurzeln

$\bar{\psi}_\rho(x)$ sowohl durch die Wurzeln von $\psi_\rho(x)$ als auch durch die Wurzeln von $(x-b)\tilde{\psi}_\rho(x)$,
$\tilde{\psi}_\rho(x)$ sowohl durch die Wurzeln von $\psi_\rho(x)$ als auch durch die Wurzeln von $(x-a)\bar{\psi}_\rho(x)$,
$\psi_\rho(x)$ durch die Wurzeln von $(x-a)(x-b)\dot{\psi}_{\rho-1}(x)$, endlich die Wurzeln von
$\dot{\psi}_{\rho-1}(x)$ durch die Wurzeln von $\psi_\rho(x)$

von einander getrennt.

Das letzte Theorem enthält als ganz specielle Fälle die folgenden zwei, von Herrn Possé in seinem interessanten Werke „Sur quelques applications des fractions continues algébriques“ aufgestellten Sätze:

Bleibt die Function $f(x)$ innerhalb der reellen Grenzen $a \ldots b$ $(a<b)$ reell und positiv und sind $U_n(x)$, $V_n(x)$ die n^{ten} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklungen der Integrale $\int_a^b \frac{(y-a)f(y)dy}{x-y}$, $\int_a^b \frac{(b-y)f(y)dy}{x-y}$, so werden die Wurzeln der Gleichung $U_n(x)=0$ durch die Wurzeln der Gleichung $(x-b)V_n(x)=0$, und umgekehrt die Wurzeln der Gleichung $V_n(x)=0$ durch die Wurzeln der Gleichung $(x-a)U_n(x)=0$ von einander getrennt.

Bleibt die Function $f(x)$ innerhalb des reellen Intervalles $a \ldots b$ $(a<b)$ reell und positiv und sind $\varphi_n(x)$, $W_n(x)$ die n^{ten} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung der Integrale $\int_a^b \frac{f(y)dy}{x-y}$, $\int_a^b \frac{(y-a)(b-y)f(y)dy}{x-y}$, so werden die Wurzeln der Gleichung $\varphi_n(x)=0$ durch die Wurzeln der Gleichung $(x-a)(x-b)W_{n-1}(x)=0$ und umgekehrt die Wurzeln der Gleichung $W_{n-1}(x)=0$ durch die Wurzeln der Gleichung $\varphi_n(x)=0$ von einander getrennt.

§. 4. Die in den vorigen Paragraphen entwickelten Formeln gestatten auch die Aufstellung von neuen Interpolationsformeln und Ausdrücken für die näherungsweise Berechnung von bestimmten Integralen, von denen einige in diesem Abschnitte angegeben werden mögen.

Sind die Grössen $y_1, y_2, \ldots, y_r$ so beschaffen, dass Näherungsnenner $\overline{\psi}_\rho(x)$ von allen Graden existiren und die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_\tau$ des τ^{ten} von ihnen unter einander verschieden sind, so hat man bekanntlich für jede ganze Function $\varphi(x)$ von nicht höherem als dem Grade $\tau-1$ folgende Entwicklung nach den Functionen $\overline{\psi}_\rho(x)$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\tau-1} b_\lambda x^\lambda = \varphi(x) = \sum_{\rho=0}^{\rho=\tau-1} \bar{a}_\rho \overline{\psi}_\rho(x),$$

wo die Constanten $\bar{a}_\rho$ mit Hilfe der Werthe, welche die Function $\varphi(x)$ an den Nullstellen von $\overline{\psi}_\tau(x)$ annimmt, sich in folgender Weise darstellen lassen:

$$\bar{a}_\rho = \bar{\alpha}_{\rho+1} \sum_{\mu=1}^{\mu=\tau} \frac{\varphi(x_\mu)\,\overline{\psi}_\rho(x_\mu)}{\overline{\psi}_{\tau-1}(x_\mu)\,\overline{\psi}'_\tau(x_\mu)}.$$

Sind die Werthe der darzustellenden Function aber nicht für die Nullstellen von $\overline{\psi}_\tau(x)$, sondern für die Wurzeln $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\varkappa$ des Näherungsnenners $\psi_\varkappa(x)\,(\tau+m \leqq \varkappa)$ gegeben, so ergibt sich mit Hilfe der obigen Entwicklungen, wie man sofort sieht, die folgende neue interpolatorische Darstellung von $\bar{a}_\rho$:

$$\bar{a}_\rho = \frac{\displaystyle\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa} \frac{(x'_\mu - y_1)^{\nu_1}(x'_\mu - y_2)^{\nu_2} \ldots (x'_\mu - y_r)^{\nu_r}\,\varphi(x'_\mu)\,\psi_\rho(x'_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x'_\mu)\,\psi'_\varkappa(x'_\mu)}}{\displaystyle\sum_{\mu=1}^{\mu=\varkappa} \frac{(x'_\mu - y_1)^{\nu_1}(x'_\mu - y_2)^{\nu_2} \ldots (x'_\mu - y_r)^{\nu_r}\,\overline{\psi}^2_\rho(x'_\mu)}{\psi_{\varkappa-1}(x'_\mu)\,\psi'_\varkappa(x'_\mu)}},$$

welche allerdings die Kenntniss von mindestens $\tau+m$ Werthen von $\varphi(x)$ erfordert, dennoch aber der früheren vorzuziehen sein wird, wenn für die auf die Näherungsnenner $\psi_\varkappa(x)$ bezügliche interpolatorische Darstellung Hilfstabellen berechnet sind, während für die auf die Functionen $\psi_\rho(x)$ bezügliche keine solchen existiren. Für diese Darstellung der Constanten $\bar{a}_\rho$ lässt sich sofort folgende bemerkenswerthe Eigenschaft erweisen:

Verfährt man bei der Bildung der Grössen $\bar{a}_\rho$ so, als wenn $\varphi(x)$ eine ganze Function vom Grade $\tau-\sigma$ wäre, d. i. interpolirt man dieselben mit Hilfe der letzten Formel nicht aus den Functionswerthen an den Nullstellen von $\psi_{\tau+m}(x)$, sondern aus jenen Werthen, welche sie für die Wurzeln von $\psi_{\tau-\sigma+m}(x)$ annimmt, so ist der bei dieser Bestimmung des Coëfficienten $\bar{a}_\rho$ gemachte Fehler nur von den Grössen $b_{2\tau-2\sigma+m-\rho}$, $b_{2\tau-2\sigma+m-\rho+1}$, …, $b_{\tau-1}$ abhängig, und demnach gleich Null, wenn $\tau+m \geqq 2\sigma+\rho$ ist.

Von den speciellen Interpolationsformeln, welche in der eben aufgestellten allgemeinen enthalten sind, mögen die folgenden besonders angeführt werden:

Ist die ganze Function $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}(x-y_r)^{\nu_r}$ innerhalb der Grenzen $-1 \ldots +1$ reell und positiv, so bestehen für jede ganze Function $\varphi(x)$ von nicht höherem als dem Grade $\tau-1$ die interpolatorischen Darstellungen

$$\varphi(x) = \sum_{\rho=0}^{\rho=\tau-1} \frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\tau+m} \left(\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m}-y_1\right)^{\nu_1}\left(\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m}-y_2\right)^{\nu_2}\cdots}{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\tau+m} \left(\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m}-y_1\right)^{\nu_1}\left(\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m}-y_2\right)^{\nu_2}\cdots} \cdot$$

$$\cdot \frac{\cdots\left(\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m}-y_r\right)^{\nu_r}\varphi\left(\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m}\right)\psi_\rho\left(\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m}\right)}{\cdots\left(\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m}-y_r\right)^{\nu_r}\psi_\rho^2\left(\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2\tau+2m}\right)}\psi_\rho(x)$$

$$\varphi(x)=\sum_{\rho=0}^{\rho=\tau-1}\frac{\sum_{\rho=1}^{\lambda=\tau+m}\left(\cos\frac{\lambda\pi}{\tau+m+1}-y_1\right)^{\nu_1}\left(\cos\frac{\lambda\pi}{\tau+m+1}-y_2\right)^{\nu_2}\cdots}{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\tau+m}\left(\cos\frac{\lambda\pi}{\tau+m+1}-y_1\right)^{\nu_1}\left(\cos\frac{\lambda\pi}{\tau+m+1}-y_2\right)^{\nu_2}\cdots}\cdot$$

$$\cdot\frac{\cdots\left(\cos\frac{\lambda\pi}{\tau+m+1}-y_r\right)^{\nu_r}\varphi\left(\cos\frac{\lambda\pi}{\tau+m+1}\right)\overline{\psi}_\rho\left(\cos\frac{\lambda\pi}{\tau+m+1}\right)\sin^2\frac{\lambda\pi}{\tau+m+1}}{\cdots\left(\cos\frac{\lambda\pi}{\tau+m+1}-y_r\right)^{\nu_r}\overline{\psi}_\rho^2\left(\cos\frac{\lambda\pi}{\tau+m+1}\right)\sin^2\left(\frac{\lambda\pi}{\tau+m+1}\right)}\overline{\psi}_\rho(x)$$

$$\varphi(x)=\sum_{\rho=0}^{\rho=\tau-1}\frac{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\tau+m}\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1}-y_1\right)^{\nu_1}\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1}-y_2\right)^{\nu_2}\cdots}{\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\tau+m}\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1}-y_1\right)^{\nu_1}\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1}-y_2\right)^{\nu_2}\cdots}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1}-y_r\right)^{\nu_r}\varphi\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1}\right)\Psi_\rho\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1}\right)\sin^2\left(\frac{\lambda\pi}{2\tau+2m+1}\right)}{\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1}-y_r\right)^{\nu_r}\sin^2\left(\frac{\lambda\pi}{2\tau+2m+1}\right)\Psi_\rho^2\left(\frac{2\lambda\pi}{2\tau+2m+1}\right)}\Psi_\rho(x),$$

wo die ganzen Functionen ρ^{ten} Grades $\psi_\rho(x)$, $\bar{\psi}_\rho(x)$, $\Psi_\rho(x)$ der Reihe nach die Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklungen der Integrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(z-y_1)^{\nu_1}(z-y_2)^{\nu_2}\dots(z-y_r)^{\nu_r}\,dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}}, \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{(z-y_1)^{\nu_1}(z-y_2)^{\nu_2}\dots(z-y_r)^{\nu_r}\sqrt{1-z^2}\,dz}{x-z},$$

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\,\frac{(z-y_1)^{\nu_1}(z-y_2)^{\nu_2}\dots(z-y_r)^{\nu_r}\,dz}{x-z}$$

vorstellen.

Aus der obigen allgemeinen Interpolationsformel folgen ferner folgende Theoreme über die Vertheilung der Wurzeln einer ganzen Function sowie der negativen Vorzeichen in der Reihe der Entwicklungscoëfficienten von zwei in gewissem Zusammenhange stehenden, nach bestimmten ganzen Functionen entwickelten ganzen Functionen:

Sind $\vartheta(x)$ und $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}$ (ν_λ ganzzahlig, nicht negativ; $\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r=m$) im reellen Intervalle $-a\dots b$ ($b, a>0$) reell, positiv und so beschaffen, dass die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$[(x+a)(x-b)(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}\vartheta(x)y_n']' = c_n(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}\vartheta(x)y_n$$
$$(c_n>c_m>0;\ n>m)$$

für jedes ganzzahlige, nicht negative n eine ganze Function n^{ten} Grades $\psi_n(x)$, in welcher der Coëfficient der höchsten Potenz von x positiv genommen werden soll, als particuläres Integral besitzt, sind ferner in der Entwicklung der ganzen Function $(\tau-1)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi(x)$ nach den ganzen Functionen $\psi_n(x)$ genau r_1 Glieder mit

den Indices $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r_1}$ wirklich vorhanden, so ist die Anzahl der ausserhalb des Intervalles $-a \ldots b$ liegenden Wurzeln dieser Function nach dem Modul 2 congruent dem Ausdrucke

$$\sum_{x=1}^{x=r_1-1}{}' \operatorname{sign}.\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\ldots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\varphi(x_\mu)\psi_{\lambda_x}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu)\Psi'_{\tau+m}(x_\mu)}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m}\frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\ldots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\varphi(x_\mu)\psi_{\lambda_{x+1}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu)\Psi'_{\tau+m}(x_\mu)}\right)\pm r_1-1,$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Werthe von x zu nehmen sind, für welche die Summe $\lambda_x+\lambda_{x+1}$ gerade ist und die Grössen x_μ die Wurzeln des einen positiven Coëfficienten von $x^{\tau+m}$ besitzenden $(\tau+m)^{\text{ten}}$ Näherungsnenners $\Psi_{\tau+m}(x)$ der Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-a}^{+b}\frac{\Im(z)\,dz}{x-z}$$

sind, während die Anzahl der im Intervalle $-a \ldots b$ (mit Ausschluss der Grenzen) befindlichen Wurzeln mit der Summe

$$\tau\pm r_1\pm\sum_{x=1}^{x=r_1-1}{}' \operatorname{sign}.\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m}\frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\ldots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\varphi(x_\mu)\psi_{\lambda_x}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu)\Psi'_{\tau+m}(x_\mu)}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m}\frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\ldots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\varphi(x_\mu)\psi_{\lambda_{x+1}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu)\Psi'_{\tau+m}(x_\mu)}\right)$$

denselben Charakter in Bezug auf den Modul 2 besitzt.

Ist a eine reelle, endliche, nicht negative Zahl, sind ferner $\vartheta(x)$ und $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}\vartheta(x)$ (ν_λ ganzzahlig, nicht negativ; $\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r=m$) im Intervalle $-a\dots\infty$ reell, endlich positiv und so beschaffen, dass der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$[(x+a)^{\varkappa+1}(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}\vartheta(x)y_n']' = c_n(x+a)^{\varkappa}(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}\vartheta(x)y_n$$
$$(c_n > c_m > 0;\ n > m)$$

für jedes ganzzahlige, nicht negative n eine ganze Function n^{ten} Grades $\psi_n(x)$, in welcher der Coëfficient der höchsten Potenz von x positiv genommen werden soll, als particuläres Integral genügt, ist weiter $(-a-y_1)^{\nu_1}\cdot(-a-y_2)^{\nu_2}\dots(-a-y_r)^{\nu_r}\vartheta(-a)$ von Null verschieden und $\lim_{x=\infty}\dfrac{1}{(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}\vartheta(x)}$ stärker unendlich als jede Potenz, sind endlich in der Entwicklung der ganzen Function $(\tau-1)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi(x)$ nach den Functionen $\psi_n(x)$ genau r_1 Glieder mit den Indices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r_1}$ wirklich vorhanden, so ist die Anzahl derjenigen negativen Wurzeln von $\varphi(x)$, deren absoluter Betrag nicht kleiner als a ist, nach dem Modul 2 congruent dem Ausdrucke

$$\frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r_1-1}\left\{1+(-1)^{\lambda_\varkappa+\lambda_{\varkappa+1}-1}\operatorname{sign}.\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m}\frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\dots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\varphi(x_\mu)\psi_{\lambda_\varkappa}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu)\Psi'_{\tau+m}(x_\mu)}\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m}\frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\dots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\varphi(x_\mu)\psi_{\lambda_{\varkappa+1}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu)\Psi'_{\tau+m}(x_\mu)}\right)\right\},$$

wo die Grössen x_μ die Wurzeln des, ebenso wie $\Psi_{\tau+m-1}(x)$ einen positiven Coëfficienten der höchsten Potenz von x besitzenden $(\tau+m)^{\text{ten}}$ Näherungsnenners $\Psi_{\tau+m}(x)$ der Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-a}^{\infty} \frac{\vartheta(z)\,dz}{x-z}$$

vorstellen, während die Anzahl der dem Intervalle $-a \ldots \infty$ (mit Ausschluss der Grenzen) angehörigen Würzeln mit der Differenz

$$-1+\tau-\frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r_1-1}\left\{1+(-1)^{\lambda_\varkappa+\lambda_{\varkappa+1}-1}\,\text{sign.}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m}\frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\ldots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\,\varphi(x_\mu)\,\psi_{\lambda_\varkappa}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu)\,\Psi'_{\tau+m}(x_\mu)}\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m}\frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\ldots(x_\mu-y_r)\,\varphi(x_\mu)\,\psi_{\lambda_{\varkappa+1}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu)\,\Psi'_{\tau+m}(x_\mu)}\right)\right\}$$

gleichen Charakter in Bezug auf den Modul 2 besitzt.

Sind a, b, c, d endliche reelle nicht negative Grössen, sind ferner die Functionen $\vartheta(x)$ und $(x-y)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots$ $\ldots(x-y_r)^{\nu_r}$ im Intervalle $-a \ldots b$, die Functionen $\vartheta_1(x)$ und $(x-z_1)^{\mu_1}(x-z_2)^{\mu_2}\ldots(x-z_s)^{\mu_s}$ (ν_λ und μ_λ ganzzahlig, nicht negativ, $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_s=m$) im Intervalle $-c \ldots d$ reell, endlich, positiv und so beschaffen, dass die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$[(x+a)(x-b)(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots(x-y_r)^{\nu_r}\,\vartheta(x)\,y'_n]' = c_n(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots(x-y_r)^{\nu_r}\,\vartheta(x)\,y_n$$
$$(c_n > c_m > 0;\ n > m)$$

$$[(x+c)(x-d)(x-z_1)^{\mu_1}(x-z_2)^{\mu_2}\ldots(x-z_s)^{\mu_s}\,\vartheta_1(x)\,y'_n]' = d_n(x-z_1)^{\mu_1}(x-z_2)^{\mu_2}\ldots(x-z_s)^{\mu_s}\,\vartheta_1(x)\,z_n$$
$$(d_n > d_m > 0;\ n > m)$$

für jedes ganzzahlige, nicht negative n ganze Functionen n^{ten} Grades $\psi_n(x)$, $\chi_n(x)$, in welchen der Coëfficient der höchsten Potenz von x positiv genommen werden soll, zu particulären Integralen haben, sind endlich in der Entwicklung der ganzen Function $(\tau-1)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi(x)$ nach den Functionen $\psi_n(x)$ genau r_1 Glieder mit den

Indices $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r_1}$, in der Entwicklung von $\varphi\left(\frac{(a+b)x+ac-bd}{c+d}\right)$ nach den Functionen $\chi_n(x)$ genau s_1 Glieder mit den Indices $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_{s_1}$ wirklich vorhanden, so ist

$$\sum_{x=1}^{x=r_1-1}{}' \operatorname{sign}. \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\ldots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\varphi(x_\mu)\psi_{\lambda_x}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu)\Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\ldots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\varphi(x_\mu)\psi_{\lambda_{x+1}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu)\Psi'_{\tau+m}(x_\mu)} \right) + r_1 \equiv \sum_{x=1}^{x=s_1-1}{}' \operatorname{sign}. \left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x'_\mu-z_1)^{\mu_1}(x'_\mu-z_2)^{\mu_2}\ldots(x'_\mu-z_s)^{\mu_s}}{X_{\tau+m-1}(x'_\mu)X'_{\tau+m}(x'_\mu)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \varphi\left(\frac{(a+b)x'_\mu+ac-bd}{c+d}\right)\chi_{\lambda'_x}(x'_\mu) \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m} \frac{(x'_\mu-z_1)^{\mu_1}(x'_\mu-z_2)^{\mu_2}\ldots(x'_\mu-z_s)^{\mu_s}}{X_{\tau+m-1}(x'_\mu)X_{\tau+m}(x'_\mu)} \cdot \varphi\left(\frac{(a+b)x'_\mu+ac-bd}{c+d}\right)\chi_{\lambda'_{x+1}}(x'_\mu), \pmod 2 \right)$$

wo die Marken an den Summenzeichen andeuten, dass nur jene Indices λ, beziehungsweise λ', zu nehmen sind, für welche die Summe $\lambda_x+\lambda_{x+1}$, beziehungsweise $\lambda'_x+\lambda'_{x+1}$, gerade ist und die Grössen x_μ, beziehungsweise x'_μ, die Wurzeln des, wie alle vorhergehenden, mit positivem Coëfficienten der höchsten Potenz von x genommenen $(\tau+m)^{\text{ten}}$ Näherungsnenners der Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-a}^{b} \frac{\vartheta(z)\,dz}{x-z}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \int_{-c}^{d} \frac{\vartheta_1(z)\,dz}{x-z},$$

vorstellen.

Sind a, b endliche reelle, nicht negative Zahlen, sind ferner die Functionen $\vartheta(x)$ und $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots$ $\ldots(x-y_r)^{\nu_r}$ im Intervalle $-a \ldots b$, die Functionen $(x-z_1)^{\mu_1}(x-z_2)^{\mu_2}(x-z_s)^{\mu_s}\,\vartheta_1(x)$ (ν_λ und μ_λ ganzzahlig nicht negativ; $\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_s=m$) und $\vartheta_1(x)$ für alle nicht negativen x endlich und positiv und so beschaffen, dass $\lim_{x=\infty} \frac{1}{\vartheta_1(x)}$ stärker unendlich wird als jede Potenz, und für jedes ganzzahlige nicht negative n die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$[(x+a)(x-b)(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}\vartheta(x)y_n']' = c_n(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}\vartheta(x)y_n$$
$$(c_n > c_m > 0;\ n > m)$$

$$[x^{\varkappa+1}\vartheta_1(x)(x-z_1)^{\mu_1}(x-z_2)^{\mu_2}\dots(x-z_s)^{\mu_s}z_n']' = d_n(x-z_1)^{\mu_1}(x-z_2)^{\mu_2}\dots(x-z_s)^{\mu_s}\vartheta_1(x)z_n$$
$$(d_n > d_m > 0;\ n > m)$$

ganze Functionen vom Grade n $\psi_n(x)$ und $\chi_n(x)$, in denen der Coëfficient von x^n positiv genommen werden soll, zu particulären Integralen haben, sind endlich in der Entwicklung der ganzen Function $(\tau-1)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi(x)$ nach den Functionen $\psi_n(x)$ genau r_1 Glieder mit den Indices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, in der Entwicklung von $(1+x)^{\tau-1}\varphi\left(\frac{b-ax}{1+x}\right)$ nach den Functionen $\chi_n(x)$ genau s_1 Glieder mit den Indices $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{s_1}$ wirklich vorhanden, so ist

$$r-1+\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=r_1-1}{}' \operatorname{sign}.\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m}\frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\dots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\varphi(x_\mu)\psi_{\lambda_\varkappa}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu)\Psi'_{\tau+m}(x_\mu)}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m}\frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\dots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\varphi(x_\mu)\psi_{\lambda_{\varkappa+1}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu)\Psi'_{\tau+m}(x_\mu)}\right) \equiv \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s_1-1}\left\{1+(-1)^{\lambda'_\varkappa+\lambda'_{\varkappa+1}-1}\cdot\right.$$
$$\cdot\operatorname{sign}.\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m}\frac{(x'_\mu-z_1)^{\mu_1}(x'_\mu-z_2)^{\mu_2}\dots(x'_\mu-z_s)^{\mu_s}(1+x'_\mu)^{\tau-1}\varphi\left(\frac{b-ax'_\mu}{1+x'_\mu}\right)\chi_{\lambda'_\varkappa}(x'_\mu)}{X_{\tau+m-1}(x'_\mu)X'_{\tau+m}(x'_\mu)}\cdot\right.$$
$$\left.\left.\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m}{}'\frac{(x'_\mu-z_1)^{\mu_1}(x'_\mu-z_2)^{\mu_2}\dots(x'_\mu-z_s)^{\mu_s}(1+x'_\mu)^{\tau-1}\varphi\left(\frac{b-ax'_\mu}{1+x'_\mu}\right)\chi_{\lambda'_{\varkappa+1}}(x'_\mu)}{X_{\tau+m-1}(x'_\mu)X'_{\tau+m}(x'_\mu)}\right\}\right. \quad (\text{mod. } 2),$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Indices λ zu nehmen sind, für welche die Summe $\lambda_\varkappa+\lambda_{\varkappa+1}$ gerade ist und die Grössen x_μ, beziehungsweise x'_μ, die Wurzeln des, wie alle vorhergehenden, mit positivem Coëfficienten der höchsten Potenz von x genommenen $(\tau+m)^{\text{ten}}$ Näherungsnenners der Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-a}^{b}\frac{\vartheta(z)\,dz}{x-z}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \int_{0}^{\infty}\frac{z^\varkappa\,\vartheta_1(z)\,dz}{x-z},$$

vorstellen.

Sind a, b endliche, reelle, nicht negative Zahlen, sind ferner die Functionen $\vartheta(x)$ und $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots$ $\dots(x-y_r)^{\nu_r}$ (ν_λ ganzzahlig, nicht negativ; $\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r=m$) im Intervalle $-a\dots b$, die Functionen $\vartheta_1(x)$ und $(x-z_1)^{\mu_1}(x-z_2)^{\mu_2}\dots(x-z_s)^{\mu_s}\vartheta_1(x)$ (μ_λ ganzzahlig, nicht negativ; $\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_s=m$) für alle nicht negativen x endlich positiv und so beschaffen, dass $\lim_{x=\infty}\frac{1}{\vartheta_1(x)}$ stärker unendlich wird als jede Potenz und für jedes ganzzahlige, nicht negative n die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$[(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}(x+a)(x-b)\vartheta(x)y'_n]'=c_n(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}\vartheta(x)y_n \quad (c_n>c_m>0;\,n>m)$$

$$[x^{\varkappa+1}(x-z_1)^{\mu_1}(x-z_2)^{\mu_2}\dots(x-z_s)^{\mu_s}\vartheta_1(x)y'_n]'=d_n(x-z_1)^{\mu_1}(x-z_2)^{\mu_2}\dots(x-z_s)^{\mu_s}x^\varkappa\vartheta_1(x)z_n \quad (d_n>d_m>0;\,n>m)$$

ganze Functionen n^{ten} Grades $\psi_n(x)$ und $\chi_n(x)$, in denen der Coëfficient von x^n positiv genommen werden soll, zu particulären Integralen haben, sind endlich in der Entwicklung der ganzen Function $(\tau-1)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi(x)$ nach den Functionen $\psi_n(x)$ genau r_1 Glieder mit den Indices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{r_1}$, in der Entwicklung von $\varphi(-a+x^2)$, beziehungsweise $\varphi(b+x^2)$, nach den Functionen $\chi_n(x)$ genau s_1, beziehungsweise t_1, Glieder mit den Indices $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{s_1}$, beziehungsweise $\lambda''_1, \lambda''_2, \dots, \lambda''_{t_1}$, wirklich vorhanden, so ist

$$(r-1)+\sum_{\varkappa+1}^{\varkappa=r_1-1}\operatorname{sign}.\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m}{}'\frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\dots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\,\varphi(x_\mu)\psi_{\lambda_\varkappa}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu)\,\Psi'_{\tau+m}(x_\mu)}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=\tau+m}\frac{(x_\mu-y_1)^{\nu_1}(x_\mu-y_2)^{\nu_2}\dots(x_\mu-y_r)^{\nu_r}\,\varphi(x_\mu)\psi_{\lambda_{\varkappa+1}}(x_\mu)}{\Psi_{\tau+m-1}(x_\mu)\,\Psi'_{\tau+m}(x_\mu)}\right)\equiv\frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=s_1-1}\left\{1+(-1)^{\lambda'_\varkappa+\lambda'_{\varkappa+1}-1}\cdot\right.$$

$$\cdot\operatorname{sign}.\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=2\tau+m}\frac{(x'_\mu-z_1)^{\mu_1}(x'_\mu-z_2)^{\mu_2}\dots(x'_\mu-z_s)^{\mu_s}\,\varphi(-a+x'^2_\mu)\,\chi_{\lambda'_\varkappa}(x'_\mu)}{X_{2\tau+m-1}(x'_\mu)\,X'_{2\tau+m}(x'_\mu)}\cdot\right.$$

$$\left.\left.\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=2\tau+m}\frac{(x'_\mu-z_1)^{\mu_1}(x'_\mu-z_2)^{\mu_2}\dots(x'_\mu-z_s)^{\mu_s}\,\varphi(-a+x'^2_\mu)\,\chi_{\lambda'_{\varkappa+1}}(x'_\mu)}{X_{2\tau+m-1}(x'_\mu)\,X'_{2\tau+m}(x'_\mu)}\right)\right\}\pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=t_1-1}\left\{1+(-1)^{\lambda''_\varkappa+\lambda''_{\varkappa+1}-1}\operatorname{sign}.\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=2\tau+m}\frac{(x'_\mu-z_1)^{\mu_1}(x'_\mu-z_2)^{\mu_2}\dots(x'_\mu-z_s)^{\mu_s}\,\varphi(b+x'^2_\mu)\,\chi_{\lambda''_\varkappa}(x'_\mu)}{X_{2\tau+m-1}(x'_\mu)\,X'_{2\tau+m}(x'_\mu)}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\sum_{\mu=1}^{\mu=2\tau+m}\frac{(x'_\mu-z_1)^{\mu_1}(x'_\mu-z_2)^{\mu_2}\dots(x'_\mu-z_s)^{\mu_s}\,\varphi(b+x'^2_\mu)\,\chi_{\lambda''_{\varkappa+1}}(x'_\mu)}{X_{2\tau+m-1}(x'_\mu)\,X'_{2\tau+m}(x'_\mu)}\right)\right\}\pmod 2,$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Indices λ zu nehmen sind, für welche die Summe $\lambda_\varkappa+\lambda_{\varkappa+1}$ gerade ist, und die Grössen x_μ, beziehungsweise x'_μ, die Wurzeln des, wie alle vorhergehenden, mit positivem Coëfficienten der höchsten Potenz von x genommenen $(\tau+m)^{\text{ten}}$, beziehungsweise $(2\tau+m)^{\text{ten}}$ Näherungsnenners der Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-a}^{b} \frac{\vartheta(z)\,dz}{x-z}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \int_{0}^{\infty} \frac{z^{x}\,\vartheta_1(z)\,dz}{x-z},$$

vorstellen.

Aus der aufgestellten Interpolationsformel folgt ferner das auch aus meinen früheren einschlägigen Untersuchungen leicht sich ergebende Theorem aus der Theorie der mechanischen Quadraturen.

Sind $\vartheta(x)$ und $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}$ (ν_λ ganzzahlig, nicht negativ; $\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r=m$) im reellen Intervalle $a\dots b$ reell und positiv, bezeichnet ferner $\psi_x(x)$, beziehungsweise $\overline{\psi}_x(x)$, den x^{ten} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{a}^{b} \frac{\vartheta(z)\,dz}{x-z}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \int_{a}^{b} \frac{(z-y_1)^{\nu_1}(z-y_2)^{\nu_2}\dots(z-y_r)^{\nu_r}\,\vartheta(z)\,dz}{x-z},$$

so ist

$$\int_{a}^{b} (x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}\,\varphi(x)\,\vartheta(x)\,\overline{\psi}_\rho(x)\,dx = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa} \frac{(x_\lambda-y_1)^{\nu_1}(x_\lambda-y_2)^{\nu_2}\dots(x_\lambda-y_r)^{\nu_r}\,\varphi(x_\lambda)\,\overline{\psi}_\rho(x_\lambda)}{\psi_{\varkappa-1}(x_\lambda)\,\psi'_\varkappa(x_\lambda)} + \Delta,$$

wo die Grössen $x_1, x_2, \dots, x_\varkappa$ die Wurzeln des Näherungsnenners $\psi_\varkappa(x)$ sind und der Rest Δ für alle ganzen Functionen $\varphi(x)$ von nicht höherem als dem Grade $2\varkappa-m-\rho-1$ verschwindet.

Von den speciellen Fällen, welche in diesem Satze enthalten sind, mögen die folgenden besonders erwähnt werden:

Ist die ganze Function $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}$ innerhalb der Grenzen $-1\dots+1$ reell und positiv und bezeichnet $\psi_\rho(x)$ den ρ^{ten} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(z-y_1)^{\nu_1}(z-y_2)^{\nu_2}\dots(z-y_r)^{\nu_r}\,dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}},$$

so ist

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots x-y_r)^{\nu_r}\,\varphi(x)\,\psi_\rho(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{\varkappa}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa}\left\{\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2\varkappa}-y_1\right\}^{\nu_1}\left\{\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2\varkappa}-y_2\right\}^{\nu_2}\dots\left\{\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2\varkappa}-y_r\right\}^{\nu_r}\varphi\left(\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2\varkappa}\right)\psi_\rho\left(\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{2\varkappa}\right),$$

wo Δ für alle ganzen Functionen $\varphi(x)$ von nicht höherem als dem Grade $2\varkappa-\nu_1-\nu_2-\dots-\nu_r-\rho-1$ verschwindet.

Sind $x_1, x_2, \dots, x_\varkappa$ die Wurzeln der Kugelfunction $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung, $a_1, a_2, \dots, a_\varkappa$ die Coëfficienten der derselben entsprechenden Gauss'schen Formel für die mechanische Quadratur, und bezeichnet $P_{\rho,i}(x)$ die i^{te} Zugeordnete der ρ^{ten} Kugelfunction (nach der F. Neumann'schen Terminologie), so ist

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)(1-x^2)^{\frac{i}{2}}P_{\rho,i}(x)\,dx = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa}a_\lambda(1-x_\lambda^2)^{\frac{i}{2}}\varphi(x_\lambda)P_{\rho,i}(x_\lambda)+\Delta,$$

wo Δ für alle ganzen Functionen $\varphi(x)$ von nicht höherem als dem Grade $2\varkappa-i-\rho-1$ verschwindet.

Es mag noch hervorgehoben werden, dass man auf Grund der früheren Auseinandersetzungen die Coëfficienten $\bar{a}_\rho$ der oft erwähnten allgemeinen Interpolationsformel mit Hilfe der Coëfficienten A_ρ der Entwicklung von $\varphi(x)$ nach den Näherungsnennern $\psi_\rho(x)$ in folgender Weise darstellen kann:

$$\bar{a}_\rho = \frac{(-1)^m \left|\psi^{(\tau_\lambda)}_{\rho+m+1-\sigma}(y_\lambda)\right|}{\left|\psi^{(\tau_\lambda)}_{\rho+m-\sigma}(y_\lambda)\right|}$$

$$\begin{vmatrix}
\alpha_{\rho+m+1}A_{\rho+m}, & \alpha_{\rho+m}A_{\rho+m-1}, & \dots, & \alpha_{\rho+2}A_{\rho+1}, & \alpha_{\rho+1}A_\rho \\
\psi_{\rho+m}(y_1), & \psi_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi_{\rho+1}(y_1), & \psi_\rho(y_1) \\
\psi'_{\rho+m}(y_1), & \psi'_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi'_{\rho+1}(y_1), & \psi_\rho(y_1) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+m}(y_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+m-1}(y_1), & \dots, & \psi^{(\nu_1-1)}_{\rho+1}(y_1), & \psi^{(\nu_1-1)}_\rho(y_1) \\
\psi_{\rho+m}(y_2), & \psi_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi_{\rho+1}(y_2), & \psi_\rho(y_2) \\
\psi'_{\rho+m}(y_2), & \psi'_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi'_{\rho+1}(y_2), & \psi_\rho(y_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi^{(\nu_2-1)}_{\rho+m}(y_2), & \psi^{(\nu_2-1)}_{\rho+m-1}(y_2), & \dots, & \psi^{(\nu_2-1)}_{\rho+1}(y_2), & \psi^{(\nu_2-1)}_\rho(y_2) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi_{\rho+m}(y_r), & \psi_{\rho+m-1}(y_r), & \dots, & \psi_{\rho+1}(y_r), & \psi_\rho(y_r) \\
\psi'_{\rho+m}(y_r), & \psi'_{\rho+m-1}(y_r), & \dots, & \psi'_{\rho+1}(y_r), & \psi'_\rho(y_r) \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+m}(y_r), & \psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+m-1}(y_r), & \dots, & \psi^{(\nu_r-1)}_{\rho+1}(y_r), & \psi^{(\nu_r-1)}_\rho(y_r)
\end{vmatrix}$$

Es soll nun eine Relation abgeleitet werden, in welcher eine gewisse Specialisirung der von mir[1] abgeleiteten Verallgemeinerung der von Herrn Christoffel in seiner wichtigen Abhandlung[2]: „Über die Gauss'sche Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben" aufgestellten Formel zur möglichst vortheilhaften näherungs-

[1] „Zur Theorie der mechanischen Quadraturen." Diese Sitzungsberichte, 78. Bd., II. Abth., S. 768—778.

[2] Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle, 55. Bd.

weisen Berechnung eines bestimmten Integrales, falls ein Theil der Werthe des Argumentes, für welche die zu integrirende Function gegeben ist, nicht willkürlich gewählt werden kann, sondern im Vorhinein bestimmt ist, als specieller Fall enthalten ist.

Kennt man die Werthe, welche eine Function $\varphi(x)$ nebst $(\nu_\lambda - 1)$ aufeinanderfolgenden Ableitungen an den vollkommen willkürlich nur im Endlichen gewählten Stellen y_λ annimmt, für $\lambda = 1, 2, \ldots, r+\varkappa$, so hat man bekanntlich nach der verallgemeinerten Lagrange'schen Interpolationsformel die Relation

$$\varphi(x) = \sum_{\lambda=1,\,\rho=0}^{\lambda=r+\varkappa,\,\rho=\nu_\lambda-1} \frac{A_{\lambda,\rho}(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots(x-y_{\lambda-1})^{\nu_{\lambda-1}}(x-y_\lambda)^{\rho}(x-y_{\lambda+1})^{\nu_{\lambda+1}}(x-y_{\lambda+2})^{\nu_{\lambda+2}}\ldots(x-y_{r+\varkappa})^{\nu_{r+\varkappa}}}{\Pi(\rho)\,(y_\lambda-y_1)^{\nu_1}(y_\lambda-y_2)^{\nu_2}\ldots(y_\lambda-y_{\lambda-1})^{\nu_{\lambda-1}}(y_\lambda-y_{\lambda+1})^{\nu_{\lambda+1}}(y_\lambda-y_{\lambda+2})^{\nu_{\lambda+2}}\ldots(y_\lambda-y_{r+\varkappa})^{\nu_{r+\varkappa}}} +$$

$$+\frac{(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots(x-y_{r+\varkappa})^{\nu_{r+\varkappa}}}{\Pi(\nu_1-1)\,\Pi(\nu_2-1)\ldots\Pi(\nu_{r+\varkappa}-1)}\int_0^1 dz_{r+\varkappa}\int_0^{z_{r+\varkappa}} dz_{r+\varkappa-1}\int_0^{z_{r+\varkappa-1}} dz_{r+\varkappa-2}\ldots\int_0^{z_2}\varphi^{(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_{r+\varkappa})}\{(x-y_1)z_1+(y_1-y_2)\cdot$$

$$\cdot z_2+\ldots+(y_{r+\varkappa-1}-y_{r+\varkappa})z_{r+\varkappa}+y_{r+\varkappa}\}(z_2-z_1)^{\nu_1-1}(z_3-z_2)^{\nu_2-1}\ldots(z_{r+\varkappa}-z_{r+\varkappa-1})^{\nu_{r+\varkappa-1}-1}(1-z_{r+\varkappa})^{\nu_{r+\varkappa}-1}\,dz_1,$$

wo die Constanten $A_{\lambda,\rho}$ durch die Gleichungen

$$\varphi^{(\sigma)}(y_\lambda) = \sum_{\tau=0}^{\tau=\nu_\lambda-1}(\nu_{\lambda_\tau}-1)\,\varphi_{\lambda,\tau}^{(\sigma-\tau)}(y_\lambda)\,A_{\lambda,\tau} \qquad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots, \nu_\lambda-1;\ \lambda = 1, 2, \ldots, r+\varkappa)$$

bestimmt werden, wenn $\varphi_{\lambda,\tau}(x)$ der Coëfficient von $A_{\lambda,\tau}$ in der auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehenden ganzen Function von x ist.

Es seien nun die Functionen $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots(x-y_r)^{\nu_r}$ und $\vartheta(x)$ innerhalb des reellen Intervalles $a\ldots b$ reell und stets positiv oder negativ, ferner $y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_{r+\varkappa}$ die Wurzeln des $\varkappa^{\text{ten}}$ Näherungsnenners $\overline{\psi}_\varkappa(x)$ der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_a^b \frac{(z-y_1)^{\nu_1}(z-y_2)^{\nu_2}\ldots(z-y_r)^{\nu_r}\,\vartheta(z)\,dz}{x-z} \qquad (\nu_\lambda \text{ ganzzahlig, nicht negativ}).$$

Beachtet man, dass das Integral

$$\int_a^b \frac{(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots(x-y_r)^{\nu_r}\,\vartheta(x)\,\overline{\psi}_\varkappa(x)\,dx}{(z-x)^\tau}$$

die mit $\frac{(-1)^{\tau-1}}{\Pi(\tau-1)}$ multiplicirte $(\tau-1)^{\text{te}}$ Ableitung der $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Restfunction $\overline{f}_{\varkappa+1}(z)$ dieser Kettenbruchentwicklung ist, sowie dass für jede ganze Function $\chi(x)$ von nicht höherem als dem Grade $\varkappa-1$

$$\int_a^b (x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots(x-y_r)^{\nu_r}\,\vartheta(x)\,\chi(z)\,\overline{\psi}_\varkappa(x)\,dx = 0$$

ist, so leitet man aus der angeführten Relation sofort die Formel

$$\int_a^b \varphi(x)\,\vartheta(x)\,dx =$$

$$= -\sum_{\lambda=1,\,\rho=0}^{\lambda=r+\varkappa,\,\rho=\nu_\lambda-1} \frac{A_{\lambda,\rho}\,\overline{f}_{\varkappa+1}^{(\nu_\lambda-\rho-1)}(y_\lambda)}{\Pi(\rho)\Pi(\nu_\lambda-\rho-1)(y_\lambda-y_1)^{\nu_1}(y_\lambda-y_2)^{\nu_2}\ldots(y_\lambda-y_{\lambda-1})^{\nu_{\lambda-1}}(y_\lambda-y_{\lambda+1})^{\nu_{\lambda+1}}(y_\lambda-y_{\lambda+2})^{\nu_{\lambda+2}}\ldots(y_\lambda\ \ y_{r+\varkappa})^{\nu_{r+\varkappa}}} +$$

$$+\frac{\varphi^{(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_r+2\varkappa)}(\xi)}{\Pi(\nu_1-1)\Pi(\nu_2-1)\ldots\Pi(\nu_r-1)\Pi(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_r+2\varkappa-1)\{[\bar{\psi}_\varkappa(x)]_{x^\varkappa}\}^2}\cdot$$

$$\cdot\int_a^b \bar{\psi}_\varkappa^2(x)(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\ldots(x-y_r)^{\nu_r}\vartheta(x)dx \qquad (\nu_{r+1}=\nu_{r+2}=\ldots=\nu_{r+\varkappa}=1)$$

ab, welche die möglichst vortheilhafte angenäherte Ermittlung eines bestimmten Integrales aus den Werthen, welche die zu integrirenden Functionen nebst einer Reihe von aufeinanderfolgenden Ableitungen derselben an vorgeschriebenen und die Function an passend gewählten Stellen annimmt, gestattet. In derselben bedeutet ξ eine zwischen a und b liegende Zahl.

Setzt man in dieser Formel

$$\nu_1=\nu_2=\ldots=\nu_r=1,$$

so erhält man meine oben erwähnte Relation in dem speciellen Falle, dass die Kettenbruchentwicklung des Integrales

$$\int_a^b \frac{\vartheta(z)dz}{x-z}$$

regulär ist, wenn man berücksichtigt, dass

$$\bar{f}_{\varkappa+1}(x_\lambda)=-\bar{\varphi}_\varkappa(x_\lambda)$$

ist.

Die eben abgeleitete Formel, welche, wie ich demnächst zu zeigen gedenke, zu einer bedeutenden Verallgemeinerung der berühmten Tchebychef'schen Ungleichungen führt, liefert sofort folgenden Satz, aus welchem sich durch Specialisirung einige speciellere Theoreme des Herrn Markof ergeben.

Ändern die Functionen $(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}$ (ν_λ ganzzahlig, nicht negativ) $\varphi^{(\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r+2\varkappa)}(x)$ und $\vartheta(x)$ in dem reellen Intervalle $a\dots b$ ihr Zeichen nicht, so ist:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\vartheta(x)\,dx \gtrless$$

$$\gtrless -\sum_{\lambda=1,\rho=0}^{\lambda=r+\varkappa,\ \rho=\nu_\lambda-1} \frac{A_{\lambda,\rho}\,\bar{f}_{\varkappa+1}^{(\nu_\lambda-1)}(y_\lambda)}{\Pi(\rho)\Pi(\nu_\lambda-\rho-1)(y_\lambda-y_1)^{\nu_1}(y_\lambda-y_2)^{\nu_2}\dots(y_\lambda-y_{\lambda-1})^{\nu_{\lambda-1}}(y_\lambda-y_{\lambda+1})^{\nu_\lambda+1}(y_\lambda-y_{\lambda+2})^{\nu_\lambda+2}\dots(y_\lambda-y_{r+\varkappa})^{\nu_{r+\varkappa}}},$$

je nachdem das Product $-\varphi^{(\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_r+2\varkappa)}(x)\,\vartheta(x)\,(x-y_1)^{\nu_1}(x-y_2)^{\nu_2}\dots(x-y_r)^{\nu_r}$ für alle im Intervalle $a\dots b$ befindlichen Werthe von x das positive oder das negative Vorzeichen besitzt.

In der Physik, Astronomie, Meteorologie, Mineralogie u. s. f. handelt es sich häufig darum, eine über eine Oberfläche sich ausdehnende unbekannte Function wenigstens annäherungsweise auf Grund einer Reihe von Beobachtungen zu bestimmen. Solche für die ganze Erdoberfläche existirende Functionen sind beispielsweise die Constanten des Erdmagnetismus, die Temperatur der Erde u. s. f., für die Oberfläche eines Krystalles die Ätzfiguren u. s. w. Da sich bekanntlich jede endliche eindeutige Function $f(\vartheta,\psi)$ des Ortes auf der Oberfläche einer Kugel nach Kugelfunctionen in eine gleichmässig convergirende Reihe von folgender Gestalt entwickeln lässt

$$f(\vartheta,\psi)=\sum_{n=0}^{n=\infty} Y_n(\vartheta,\varphi), \qquad (0\leqq\vartheta\leqq\pi;\ 0\leqq\varphi\leqq 2\pi)$$

wo

$$Y_n(\vartheta,\psi)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(A'_{n,\lambda}\cos\lambda\varphi+B'_{n,\lambda}\sin\lambda\varphi)\,P_{n,\lambda}(\cos\vartheta)$$

ist, so ist in einem solchen Falle die Aufgabe zu lösen, möglichst viele aufeinanderfolgende Constanten $A'_{n,\lambda}$, $B'_{n,\lambda}$ dieser Entwicklung, welche bekanntlich durch die Gleichungen

$$A'_{n,\lambda} = \frac{(2n+1)\varepsilon_r}{2\pi} \frac{\Pi(n-\lambda)}{\Pi(n+\lambda)} \int_0^\pi \int_0^\pi f(\vartheta,\varphi) P_{n,\lambda}(\cos\vartheta) \cos n\varphi \, d\vartheta \, d\varphi \qquad (\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_r = 2; r > 0)$$

$$B'_{n,\lambda} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{\Pi(n-\lambda)}{\Pi(n+\lambda)} \int_0^\pi \int_0^\pi f(\vartheta,\varphi) P_{n,\lambda}(\cos\vartheta) \sin n\varphi \, d\vartheta \, d\varphi$$

bestimmt sind, mit Hilfe der gegebenen, beziehungsweise beobachteten Functionswerthe zu berechnen. Die für die Praxis geeignetste Methode wird demnach offenbar diejenige sein, bei welcher einerseits bei verlangter Genauigkeit dieser Ermittlung die Anzahl der zur Bestimmung einer vorgeschriebenen Anzahl von Constanten erforderlichen Beobachtungen möglichst klein, und anderseits, da es sich bei praktischen Zwecken um Zeitersparniss handelt, die nothwendige Rechenarbeit ein Minimum ist. Hiebei wird oft zu beachten sein, dass es aus in der Natur der Untersuchung liegenden Gründen sich empfehlen wird, das Verfahren so einzurichten, dass durch dasselbe nicht alle Constanten mit derselben Genauigkeit bestimmt werden, sondern dass die Genauigkeit für die das Schlussresultat am meisten beeinflussenden Constanten dadurch vergrössert wird, dass man bei den übrigen grössere Fehler zulässt, als eine gleichmässige Berücksichtigung aller erfordern würde. Schon im Jahre 1838 hat, wie in der Einleitung erwähnt wurde, Herr F. Neumann eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Constanten bis zu jeder beliebig vorgeschriebenen Ordnung der Kugelfunctionen, bei der die Genauigkeit der Bestimmung mit wachsendem Index der Coëfficienten abnimmt, angegeben, welche voraussetzt, dass die $2n(n+1)$ Beobachtungsorte an denjenigen Punkten der Erdoberfläche liegen, in welchen $2n$ gleich weit von einander abstehende Meridiane von $n+1$ durch die Wurzeln der Kugelfunction $P_{n+1}(x)$ bestimmten Parallelkreisen

geschnitten werden. Es hat übrigens schon Herr C. Neumann hervorgehoben, „dass es nicht einmal nothwendig ist, dass die Beobachtungsorte genau nach diesem Gesetze auf der Erdoberfläche vertheilt sind, da man die an den eigentlich verlangten Orten vorhandenen Werthe durch gewöhnliche Interpolation aus den an den benachbarten Orten angestellten Beobachtungen ableiten kann". Die in der vorliegenden Mittheilung enthaltenen Auseinandersetzungen zeigen nun, dass man einerseits unter Verringerung der Genauigkeit in der Bestimmung der anfänglichen Coëfficienten eine erheblich präcisere Ermittlung der späteren erreichen kann, wenn man für die Breiten der Beobachtungsorte nicht die Wurzeln der Kugelfunction $P_{n+1}(x)$, sondern einer Ableitung einer solchen Function von höherer Ordnung nimmt, anderseits, dass auch unter Beibehaltung des F. Neumann'schen Genauigkeitsgesetzes und demnach der von dieser Methode geforderten Breiten die Rechenarbeit durch eine passende Wahl der Längen der Beobachtungsorte wesentlich reducirt werden kann. Nur die letztere Behauptung soll hier kurz erhärtet werden.

Die eigentlich gesuchten Constanten werden bei der F. Neumann'schen Methode aus gewissen intermediären Constanten C_λ, S_λ berechnet, welche durch folgende Integrale gegeben sind:

$$C_\lambda = \frac{\varepsilon_\lambda}{\pi}\int_0^\pi f(\vartheta, \varphi)\cos\lambda\varphi\, d\varphi$$

$$S_\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\vartheta, \varphi)\sin\lambda\varphi\, d\varphi.$$

Nun bestehen aber nach den in diesem und dem Paragraphe 2) enthaltenen Entwicklungen die Relationen

$$\int_0^\pi f(\vartheta, \varphi)\cos\lambda\varphi\, d\varphi = \frac{1}{n}\sum_{\mu=1}^{\mu=n} f\left(\vartheta, \frac{(2\mu-1)\pi}{2n}\right)\cos\frac{(2\mu-1)\lambda\pi}{2n} + \Delta$$

$$\int_0^{\pi} f(\vartheta, \varphi) \sin d\varphi \, d\varphi = \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=1}^{\mu=n} f\left(\vartheta, \frac{\mu\pi}{n+1}\right) \sin \frac{\lambda\mu\pi}{n+1} + \Delta_1,$$

wo Δ und Δ_1 für ganze Functionen von $\cos\varphi$, beziehungsweise $\sin\varphi$, von nicht höherem als dem Grade $2n-\lambda-1$ verschwindet. Sind also die geographischen Längen der gewählten Beobachtungsorte $\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \ldots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}$; $\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1}, \frac{3\pi}{n+1}, \ldots, \frac{n\pi}{n+1}$ und verwendet man nur die Beobachtungen an den ersten n Orten bei der Ermittlung der intermediären Constanten C_λ, die Beobachtungen an den anderen für die Bestimmung der S_λ, so erreicht man bei halber Rechenarbeit dieselbe Genauigkeit, wie bei der F. Neumann'schen Methode.

§. 5. Aus der von mir für jede reguläre Kettenbruchentwicklung abgeleiteteten Relation

$$\frac{1}{x-y} \begin{vmatrix} \psi_\sigma(x), & \psi_\sigma(y) \\ \psi_{\sigma-1}(x), & \psi_{\sigma-1}(y) \end{vmatrix} = \sum_{r=0}^{r=\sigma-1} \alpha_{r+1} \psi_r(x) \psi_r(y)$$

folgt, da die Functionen $C_\sigma^\nu(x)$ sich von den Näherungsnennern der regulären Kettenbruchentwicklung der hypergeometrischen Reihe $x^{-1} F\left(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right)$ nur durch multiplicative Constanten unterscheiden, die Gleichung

$$\frac{1}{x-y} \begin{vmatrix} C_\sigma^\nu(x), & C_\sigma^\nu(y) \\ C_{\sigma-1}^\nu(x), & C_{\sigma-1}^\nu(y) \end{vmatrix} = \sum_{r=0}^{r=\sigma-1} a_r C_r^\nu(x) C_r^\nu(y).$$

Um die Coëfficienten a_r zu ermitteln, multiplicirt man dieselbe zunächst mit $x-y$, wodurch sie wegen der Relation

$$r\,C_r^\nu(x) - 2(r+\nu-1)\,C_{r-1}^\nu(x) + (r+2\nu-2)\,C_{r-2}^\nu(x) = 0$$

in die folgende übergeht:

$$C_\sigma^\nu(x)\,C_{\sigma-1}^\nu(y) - C_{\sigma-1}^\nu(x)\,C_\sigma^\nu(y) =$$

$$= \sum_{r=0}^{r=\sigma} \left\{ -a_r \frac{(r+1)\,C_{r+1}^\nu(y) + (r+2\nu-1)\,C_{r-1}^\nu(y)}{2(r+\nu)} + \frac{r\,a_{r-1}\,C_{r-1}^\nu(y)}{2(r+\nu-1)} + \frac{(r+2\nu)\,a_{r+1}\,C_{r+1}^\nu(y)}{2(r+\nu+1)} \right\} C_r^\nu(x) \cdot$$

$$(a_{-1} = a_\sigma = a_{\sigma+1} = 0)$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C_\mu^\nu(x)\,dx$ und integrirt bezüglich x von -1 bis $+1$, so entstehen die Relationen

$$a_{\sigma-1} = \frac{2(\sigma+\nu-1)}{\sigma}$$

$$a_{\sigma-2} = \frac{2(\sigma+\nu-2)(\sigma+2\nu-2)}{\sigma(\sigma-1)}$$

$$a_{r+1}\,\frac{(r+2\nu)\,C_{r+1}^\nu(y)}{2(r+\nu+1)} + a_{r-1}\,\frac{r\,C_{r-1}^\nu(y)}{2(r+\nu-1)} = a_r\,\frac{(r+1)\,C_{r+1}^\nu(y) + (r+2\nu-1)\,C_{r-1}^\nu(y)}{2(r+n)}, \qquad (r \leqq \sigma-2)$$

welche die Formel

$$a_{\sigma-\lambda} = \frac{2(\sigma+\nu-\lambda)\,\Pi(\sigma-\lambda)\,\Pi(\sigma+2\nu-2)}{\Pi(\sigma)\,\Pi(\sigma+2\nu-\lambda-1)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

liefern, so dass man also die Gleichung

$$\frac{1}{x-y}\begin{vmatrix} C_\sigma^\nu(x), & C_\sigma^\nu(y) \\ C_{\sigma-1}^\nu(x), & C_{\sigma-1}^\nu(y) \end{vmatrix} = \frac{2\Pi(\sigma+2\nu-2)}{\Pi(\sigma)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} \frac{\Pi(\lambda)(\lambda+\nu)}{\Pi(\lambda+2\nu-1)} C_\lambda^\nu(x) C_\lambda^\nu(y)$$

hat, aus welcher für $x=y$ die neue Relation

$$C_{\sigma-1}^{\nu+1}(x) C_{\sigma-1}^\nu(x) - C_{\sigma-2}^{\nu+1}(x) C_\sigma^\nu(x) = \frac{\Pi(\sigma+2\nu-2)}{\nu\Pi(\sigma)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} \frac{\Pi(\lambda)(\lambda+\nu)}{\Pi(\lambda+2\nu-1)} \{C_\lambda^\nu(x)\}^2$$

folgt.

Die eben abgeleitete Gleichung zeigt zunächst, dass für jede ganze Function $\varphi(x)$ von nicht höherem als dem Grade $\sigma-1$ die Formel

$$\varphi(x) = \frac{\Pi(\sigma)}{\Pi(\sigma+2\nu-2)} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^\nu \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(y)\{C_\sigma^\nu(y) C_{\sigma-1}^\nu(x) - C_\sigma^\nu(x) C_{\sigma-1}^\nu(y)\}(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} dy}{x-y}$$

besteht, und es ergibt sich aus ihr für die Summe aller jener Glieder der Entwicklung einer beliebigen Function $\psi(x)$ nach den Functionen $C_n^\nu(x)$, welche auf das σ^{te} folgen, der für $\nu=\frac{1}{2}$ schon von Herrn G. Bauer aufgestellte elegante Ausdruck

$$\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^\nu \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 \frac{\Pi(\sigma)}{\Pi(\sigma+2\nu-2)} \begin{vmatrix} C_\sigma^\nu(x), & C_{\sigma-1}^\nu(x) \\ A_\sigma^\nu(\sigma), & A_{\sigma-1}^\nu(x) \end{vmatrix},$$

wo

$$A_\lambda^\nu(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{\psi(x)-\psi(y)}{x-y} C_\lambda^\nu(y)(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\, dy$$

ist. Von anderen Relationen, welche sich aus den eben aufgestellten Gleichungen ergeben, mögen die folgenden erwähnt werden:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} (-1)^\lambda \frac{(\lambda+\nu)\Pi(\lambda+2\nu-1)}{\Pi(\lambda)} = (-1)^{\sigma-1}\frac{\Pi(\sigma+2\nu-1)}{2\Pi(\sigma-1)}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{\sigma-1}{2}\right]} (-1)^\lambda \frac{\Pi(\lambda+\nu-1)(2\lambda+\nu)}{\Pi(\lambda)} = (-1)^{\sigma-1+\left[\frac{\sigma}{2}\right]} \frac{\Pi\left(\left[\frac{\sigma}{2}\right]+\nu-1\right)\Pi(\sigma)\,\Pi\left(2\left[\frac{\sigma+1}{2}\right]+2\nu-2\right)}{2\Pi\left(\left[\frac{\sigma}{2}\right]\right)\Pi(\sigma+2\nu-2)\,\Pi\left(2\left[\frac{\sigma+1}{2}\right]-1\right)}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} \frac{(\lambda+\nu)\,\Pi(\lambda+2\nu-1)}{\Pi(\lambda)} = \frac{(2\sigma+2\nu-1)\,\Pi(\sigma+2\nu-1)}{\Pi(\sigma-1)}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} \frac{(2\lambda+\nu)\,\Pi(2\lambda)\,[\Pi(\lambda+\nu-1)]^2}{\Pi(2\lambda+2\nu-1)[\Pi(\lambda)]^2} = \frac{\Pi(2\sigma+1)\,\Pi(\sigma+\nu-1)\,\Pi(\sigma+\nu)}{\Pi(2\sigma+2\nu-1)[\Pi(\sigma)]^2}$$

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{\{C_\sigma^\nu(x)C_{\sigma-1}^\nu(y)-C_\sigma^\nu(y)C_{\sigma-1}^\nu(x)\}[(1-x^2)(1-y^2)]^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx\,dy}{(x-y)(1-ax)^\mu(1-bx)^\rho} = \left[\frac{2^\nu\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^4 \frac{[\Pi(\nu-1)]^2\Pi(\sigma+2\nu-2)}{\Pi(\mu-1)\Pi(\rho-1)\Pi(\sigma)}.$$

$$\cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} \frac{\Pi(\mu+\lambda-1)\Pi(\rho+\lambda-1)\Pi(\lambda+2\nu-1)}{2^{4\lambda+1}(\lambda+\nu)\Pi(\lambda)[\Pi(\lambda+\nu-1)]^2}(ab)^\lambda F\left(\frac{\mu+\lambda}{2}, \frac{\mu+\lambda+1}{2}, \lambda+\nu+1, a^2\right) F\left(\frac{\rho+\lambda}{2}, \frac{\rho+\lambda+1}{2}, \lambda+\nu+1, b^2\right)$$

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{\{C_{2\sigma}^\nu(x)C_{2\sigma+1}^\nu(y) - C_{2\sigma}^\nu(y)C_{2\sigma+1}^\nu(x)\}\log(1+y)(1-x^2)^{\frac{2\nu-3}{2}}(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx\,dy}{x-y} =$$

$$= \left[\frac{2^\nu \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^4 \frac{\Pi(2\sigma+2\nu-1)\Pi(2\nu-2)}{\Pi(2\sigma+1)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma} \frac{(2\lambda+\nu)\Pi(2\lambda)}{\Pi(2\lambda+2\nu-1)\lambda(\lambda+\nu)}$$

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{\{C_{2\sigma}^\nu(x)C_{2\sigma+1}^\nu(y) - C_{2\sigma}^\nu(y)C_{2\sigma+1}^\nu(x)\}\log(1+y)(1-x^2)^{\nu-1}(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dx\,dy}{x-y} =$$

$$= \left[\frac{2^\nu \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^3 \frac{\Pi(2\sigma+2\nu-1)\Pi(\nu-1)}{\Pi(2\sigma+1)\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma} \frac{\Pi(2\lambda-1)\Pi(\lambda+\nu-1)\Pi\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)(2\lambda+\nu)}{(\lambda+2\nu)\Pi(\lambda)\Pi\left(\lambda+\nu-\frac{1}{2}\right)}$$

47*

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{\{C_{2\sigma}^\nu(x)C_{2\sigma+1}^\nu(y) - C_{2\sigma}^\nu(y)C_{2\sigma+1}^\nu(x)\}[(1-x^2)(1-y^2)]^{\frac{2\nu-3}{2}}\,dx\,dy}{x-y} =$$

$$= \frac{2^{4\nu-4}\Pi(2\sigma+2\nu-1)\left[\Pi\left(\frac{2\sigma-3}{2}\right)\right]^4}{[\Pi(2\nu-2)]^2\Pi(2\sigma+1)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma} \frac{(2\lambda+\nu)\Pi(2\lambda)}{\Pi(2\lambda+2\nu-1)}$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\{C_\sigma^\nu(\cos\varphi)C_{\sigma-1}^\nu(\cos\vartheta) - C_{\sigma-1}^\nu(\cos\varphi)\,C_\sigma^\nu(\cos\vartheta)\}\,e^{\alpha i\cos\varphi\cos\psi}\,J^{\frac{2\nu-1}{2}}_{(\alpha\sin\varphi\sin\psi)}(\rho_1^2+\rho_2^1-2\rho_1\rho_2\cos\vartheta)^{-\frac{\nu}{2}}}{\sin\frac{\vartheta+\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta-\varphi}{2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{J^\nu(\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos\vartheta})\sin^{\frac{2\nu+1}{2}}\varphi\sin^{2\nu}\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta}{\sin\frac{\vartheta+\varphi}{2}\sin\frac{\vartheta-\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{2^{7\nu-1}\Pi(\sigma+2\nu-2)\sin^{\frac{2\nu-1}{2}}\psi}{\Pi(\sigma)(\rho_1\rho_2)^\nu}\left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^4[\Pi(\nu-1)]^3\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\sigma-1} i^\lambda(\lambda+\nu)J^{\lambda+\nu}(\alpha)J^{\lambda+\nu}(\rho_1)J^{\lambda+\nu}(\rho_2)C_\lambda^\nu(\cos\psi).$$

Ich habe vor Kurzem im 58. Bande der Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften[1] Integralausdrücke für die Functionen $C_n^\nu(\cos x)$ mitgetheilt, welche eine Verallgemeinerung der Mehler'schen und Dirichlet'schen Integrale für die Kugelfunctionen erster Art bilden. Dieselben lassen sich auf einem von dem damals gewählten verschiedenen Wege aus den daselbst aufgestellten Formeln

$$C_n^\nu(\cos x) = \frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{2^{\frac{2\nu-1}{2}}\Pi(2\nu-1)\sin^{\frac{2\nu-1}{2}}\frac{x}{2}}\int_0^\infty J^{2(n+\nu)}(y)\,J^{\frac{2\nu-1}{2}}\left(y\sin\frac{x}{2}\right)y^{\frac{2\nu-1}{2}}\,dy$$

[1] „Einige Sätze über die Functionen $C_n^\nu(x)$".

$$C_n^{\nu}(\cos x) = \frac{(-1)^n \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{2^{\frac{2\nu-1}{2}} \Pi(2\nu-1) \cos^{\frac{2\nu-1}{2}} \frac{x}{2}} \int_0^{\infty} J^{2(n+\nu)}(y)\, J^{\frac{2\nu-1}{2}}\left(y \cos\frac{x}{2}\right) y^{\frac{2\nu-1}{2}}\, dy$$

ableiten. Führt man in dieselben nämlich den durch die Gleichung

$$J^{\frac{2\nu-1}{2}}(\alpha y) = \frac{(\alpha y)^{\frac{2\nu-1}{2}}}{2^{\frac{2\nu-1}{2}} \sqrt{\pi}\, \Pi(\nu-1)} \int_{-1}^{+1} \cos(\alpha y z)\,(1-z^2)^{\nu-} \, dz$$

angegebenen Werth von $J^{\frac{2\nu-1}{2}}\left(y \sin\frac{x}{2}\right)$, beziehungsweise $J^{\frac{2\nu-1}{2}}\left(y \cos\frac{x}{2}\right)$, ein, so erhält man durch Umkehrung der Integrationsordnung die Relationen

$$C_n^{\nu}(\cos x) = \frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{2^{2\nu-1} \Pi(2\nu-1)\, \Pi(\nu-1)\, \sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^{\nu-1} dz \int_0^{\infty} J^{2(n+\nu)}(y) \cos\left(yz \sin\frac{x}{2}\right) y^{2\nu-1}\, dy$$

$$C_n^{\nu}(\cos x) = \frac{(-1)^n \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{2^{2\nu-1} \Pi(2\nu-1)\, \Pi(\nu-1)\, \sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^{\nu-1} dz \int_0^{\infty} J^{2(n+\nu)}(y) \cos\left(yz \cos\frac{x}{2}\right) y^{2\nu-1}\, dy.$$

Nun ist aber, wie ich a. a. O. gezeigt habe, für $|x|<1$

$$C_{2r}^{\nu}(x)=\frac{(-1)^r}{2^{\nu-1}\Pi(\nu-1)}\int_0^{\infty}J^{2r+\nu}(y)\cos(xy)\,y^{\nu-1}dy$$

und demnach kann man die letzten zwei Formeln, wenn man beachtet, dass die nach z zu integrirende Function gerade ist, in folgender Weise schreiben:

$$C_n^{\nu}(\cos x)=(-1)^n\frac{2\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(\nu-1)\sqrt{\pi}}\int_0^1 C_{2n}^{2\nu}\left(z\sin\frac{x}{2}\right)(1-z^2)^{\nu-1}dz$$

$$C_n^{\nu}(\cos x)=\frac{2\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(\nu-1)\sqrt{\pi}}\int_0^1 C_{2n}^{2\nu}\left(z\cos\frac{x}{2}\right)(1-z^2)^{\nu-1}dz$$

Setzt man in dieser Gleichung für ν: $\nu+\frac{1}{2}$, so kann man sie wegen der Relation

$$C_{r+1}^{2\nu+1}(x)=\frac{1}{4\nu}\left[C_r^{2\nu}(x)\right]'$$

durch partielle Integration in die folgenden verwandeln

$$C_n^{\nu+\frac{1}{2}}(\cos x)=\frac{(-1)^n\Pi(\nu-1)}{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)\sin\frac{x}{2}}\int_0^1 C_{2n+1}^{2\nu}\left(z\sin\frac{x}{2}\right)z\,(1-z^2)^{\nu-\frac{3}{2}}dz$$

$$C_n^{\nu+\frac{1}{2}}(\cos x) = \frac{\Pi(\nu-1)}{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)\cos\frac{x}{2}} \int_0^1 C_{2n+1}^{2\nu}\left(z\cos\frac{x}{2}\right) z\,(1-z^2)^{\nu-\frac{3}{2}}\,dx.$$

Die eben abgeleiteten Gleichungen führen nun, wie a. a. O. gezeigt ist, unmittelbar zu den dort aufgestellten Erweiterungen der Mehler'schen und der Dirichlet'schen Kugelfunctionenintegrale.

Es mag bei dieser Gelegenheit auf eine andere Verallgemeinerung dieser Formeln, welche sich auf eine allgemeine Functionenclasse bezieht, von der die Kugelfunctionen ein ganz specieller Fall sind, aufmerksam gemacht werden. Dieselbe lautet:

Hat die reciproke Gleichung geraden Grades

$$f(\alpha) = a_0\alpha^{2n} + a_1\alpha^{2n-1} + \ldots + a_{n+1}\alpha^{n+1} + a_n\alpha^n + a_{n+1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

in den ersten zwei Quadranten nur eine Wurzel $\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$ $(0<\varphi_1<\pi)$ mit dem absoluten Betrage 1, ist ferner $f(\alpha)$ im Intervalle $0\ldots\varphi_1$ positiv und besteht, wenn die Coëfficienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ bestimmte Functionen einer Veränderlichen x sind, für alle einem gewissen Bereiche angehörigen x und wenigstens für alle α, deren absoluter Betrag die Einheit nicht übersteigt, die im gleichen Grade convergirende Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{a_0\alpha^{2n} + a_1\alpha^{2n-1} + \ldots + a_{n+1}\alpha^{n+1} + a_n\alpha^n + a_{n+1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_n}} = \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} B_\mu(x)\,\alpha^n$$

so bestehen für die Functionen $B_\mu(x)$ folgende Relationen

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} B_\mu(x) = \int_0^{\varphi_1} \frac{\cos\frac{n\varphi}{2}\cos\mu\varphi\,d\varphi}{\sqrt{a_0\cos n\varphi + a_1\cos(n-1)\varphi + \ldots + a_n}} + \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\mu\varphi\,d\varphi}{\sqrt{-a_0\cos n\varphi - a_1\cos(n-1)\varphi - \ldots - a_n}}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} B_\mu(x) = -\int_0^{\varphi_1} \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\mu\varphi\, d\varphi}{\sqrt{a_0\cos n\varphi + a_1\cos(n-1)\varphi + \ldots + a_n}} + \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\mu\varphi\, d\varphi}{\sqrt{-a_0\cos n\varphi - a_1\cos(n-1)\varphi - \ldots - a_n}}$$

$$\pi\sqrt{2}\, B_\mu(x) = \int_0^{\varphi_1} \frac{\cos\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{a_0\cos n\varphi + a_1\cos(n-1)\varphi + \ldots + a_n}} + \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{\sin\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{-a_0\cos n\varphi - a_1\cos(n-1)\varphi - \ldots - a_n}}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} B_\mu(x) = \int_0^{\varphi_1} \frac{\cos\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{a_0\cos n\varphi + a_1\cos(n-1)\varphi + \ldots + a_n}}$$

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} B_\mu(x) = \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{\sin\left(\mu+\frac{n}{2}\right)\varphi\, d\varphi}{\sqrt{-a_0\cos n\varphi - a_1\cos(n-1)\varphi - \ldots - a_n}}.$$

Integrirt man die von mir aufgestellte Relation[1]

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\Pi(\nu-1)}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^3 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(2n+\nu)\,\Pi(2n)\,\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(2n+2\nu-1)\,\Pi(n)\,\Pi\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)} C_{2n}^{\nu}(x)$$

[1] „Zur Theorie der Functionen $C_n^\nu(x)$." Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, 48. Band.

nach x innerhalb der Grenzen $0 \ldots x$ und berücksichtigt die Formeln

$$C_n^{\nu}(x) = \frac{\nu}{n+\nu}\{C_n^{\nu+1}(x) - C_{n-2}^{\nu+1}(x)\}$$

$$C_{2n+1}^{\nu}(0) = 0$$

so erhält man die Entwicklung

$$\arcsin x = \frac{8\Pi(\nu)}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^3 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(2n+\nu+1)\,\Pi(2n)\,\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+\nu)}{\Pi(2n+2\nu+1)\,\Pi(n)\,\Pi\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)(2n+2\nu+1)} C_{2n+1}^{\nu}(x),$$

während sich durch Multiplication mit x auf Grund von bekannten Beziehungen die Relation

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\Pi(\nu-1)}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^3 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Pi(2n)\,\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+\nu)(2n+1)(2n+\nu+1)}{\Pi(2n+2\nu)\,\Pi(n)\,\Pi\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)} C_{2n+1}^{\nu}(x)$$

ergibt. Aus der angeführten und der letzten Gleichung folgen die Relationen

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\nu}} = \frac{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^5 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(n)\,\Pi\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)} \alpha^n$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos\varphi \sin^{2\nu-1}\varphi\, d\varphi}{(1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^\nu} = \frac{2^{2\nu}\,\Pi(\nu-1)}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^5 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Pi\left(n-\frac{1}{2}\right)\Pi(n+\nu)}{\Pi(n)\,\Pi\left(n+\nu-\frac{1}{2}\right)}\alpha^n.$$

Mit Hilfe von Formeln, welche ich früher aufgestellt habe, kann man endlich leicht die folgenden Formeln beweisen:

$$\int_0^\pi \operatorname{arctang}\left(\frac{p\sin 2x}{1-p\cos 2x}\right)\sin x\; C_{2n}^\nu(\cos x)\, dx = 0$$

$$\int_0^\pi \operatorname{arctang}\left(\frac{p\sin 2x}{1-p\cos 2x}\right)\sin x\; C_{2n-1}^\nu(\cos x)\, dx = \frac{\pi}{4}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{\Pi(\nu+\lambda-1)\,\Pi(\nu-\lambda+2n-2)}{[\Pi(\nu-1)]^2\,\Pi(\lambda)\,\Pi(2n-\lambda-1)}\left\{\frac{p^{2n-2\lambda-1}}{2n-2\lambda-1}-\frac{p^{2n-2\lambda-2}}{2n-2\lambda-2}\right\}$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x\; C_{2n+1}^\nu(\cos x)\, dx = 0$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x\; C_{2n}^\nu(\cos x)\, dx = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{\Pi(\nu+\lambda-1)\,\Pi(\nu-\lambda+2n-1)}{[\Pi(\nu-1)]^2\,\Pi(\lambda)\,\Pi(2n-\lambda)}\left\{\frac{1}{(2n-2\lambda+1)^2}+\frac{1}{(2n-2\lambda-1)^2}\right\}$$

$$\int_0^\infty \frac{J^r(ax)}{x^r}\, C_n^\nu(\cos x)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^r\,\Pi\left(r-\frac{1}{2}\right)} \sum_{\lambda=\varepsilon}^{\lambda=\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\Pi(\nu+\lambda-1)\,\Pi(\nu-\lambda+n-1)}{[\Pi(\nu-1)]^2\,\Pi(\lambda)\,\Pi(n-\lambda)}\left(a^2-n^2-4\lambda^2+4n\lambda\right)^{r-\frac{1}{2}}$$

$$(\varepsilon = 0 \text{ für } a > n;\ \varepsilon = \left[\frac{n-a}{2}\right]+1 \text{ für } a < n)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{C_n^{\nu}(\cos x)\,dx}{\prod_1^r{}_{\lambda}\,(1-2b_{\lambda}\cos x+b_{\lambda}^2)^{\mu_{\lambda}}} = \frac{\pi}{\Pi(\mu_1-1)\,\Pi(\mu_2-1)\ldots(\mu_r-1)}\,\frac{d^{\mu_1-1}}{dy_1^{\mu_1-1}}\,\frac{d^{\mu_2-1}}{dy_2^{\mu_2-1}}\cdots\frac{d^{\mu_r-1}}{dy_r^{\mu_r-1}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{y_1^{\mu_1-1}y_2^{\mu_2-1}\ldots y_r^{\mu_r-1}}{(1-y_1)^{\mu_1}(1-y_2)^{\mu_2}\ldots(1-y_r)^{\mu_r}}\left(1-\frac{y_1}{b_1}\right)^2\left(1-\frac{y_2}{b_2}\right)^2\ldots\left(1-\frac{y_r}{b_r}\right)^2\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{\lambda=0,\,\rho=1}^{\lambda=\left[\frac{n}{2}\right],\,\rho=r}\frac{\Pi(\nu+\lambda-1)\,\Pi(\nu+n-\lambda-1)\,y_{\rho}^{r+n-2\lambda-1}}{[\Pi(\nu-1)]^2\,\Pi(\lambda)\,\Pi(n-\lambda)\,b_{\rho}^{r+n-2\lambda-1}\left(1-\frac{y_{\rho}}{b_{\rho}}\right)^2\left(\frac{y_{\rho}}{b_{\rho}}-\frac{y_1}{b_1}\right)\left(\frac{y_{\rho}}{b_{\rho}}-\frac{y_2}{b_2}\right)\ldots\left(\frac{y_{\rho}}{b_{\rho}}-\frac{y_{\rho-1}}{b_{\rho-1}}\right)\left(\frac{y_{\rho}}{b_{\rho}}-\frac{y_{\rho+1}}{b_{\rho+1}}\right)\ldots\left(\frac{y_{\rho}}{b_{\rho}}-\frac{y_r}{b_r}\right)}\right\},$$

wo nach vollzogener Differentiation y_{ρ} durch b_{ρ}^2 zu ersetzen ist.

Die Änderung der Bodentemperatur mit der Exposition

von

Dr. **Fritz Kerner v. Marilaun.**

(Mit 2 Tafeln.)

Über die Änderung der Bodentemperatur mit der Exposition lag bisher aus dem Alpengebiete nur eine Reihe von Beobachtungen vor,[1] welche mein Vater in den Jahren 1867, 1868 und 1869 im Innthale angestellt hat. An acht gegen die Hauptrichtungen des Compasses geneigten Gehängen eines ziemlich isolirten, gleichmässig gerundeten Hügels[2] wurde um die Mitte jedes Monates die Bodentemperatur nach der Bischoff'schen Methode bestimmt. Bei einigen von den auf diese Weise gewonnenen Resultaten lag es im Vorhinein nahe, dass sich ihre Giltigkeit über das Beobachtungsgebiet hinaus erstrecken werde, bei andern liess es sich jedoch, da keinerlei Vergleichsmaterial zu Gebote stand, nicht sicher entscheiden, ob sie von allgemeiner oder nur von localer Bedeutung seien.

Während der letzten drei Jahre wurde nun auf Veranlassung meines Vaters der Einfluss der Exposition auf die Bodentemperatur ganz in derselben Weise wie einst im Innthale in dem zur Stubaier Gebirgsgruppe gehörenden Gschnitzthale untersucht und dadurch die Möglichkeit geschaffen, die genannten geophysikalischen Verhältnisse auf Grund einer vergleichenden Betrachtung zweier Beobachtungsreihen zu studiren.

Die beiden Untersuchungsreihen sind nicht nur zeitlich durch zwei Decennien getrennt, sondern auch in Bezug auf Höhe und

---

[1] A. Kerner: Über Wanderungen des Maximums der Bodentemperatur. Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie, März 1871.

[2] Judenbüchl zwischen Sct. Nicolaus und Mühlau bei Innsbruck.

Lage des Beobachtungsortes verschieden. Die eine bezieht sich auf ein weites Längsthal an der Grenze zwischen den Nord- und Centralalpen und auf die Seehöhe von 780 *m*; die andere auf ein kleines Thal in den Centralalpen und auf ein um 560 *m* höheres Niveau. Es ist darum gewiss der Schluss berechtigt, dass jenen Erscheinungen, welche in beiden Untersuchungsreihen in ganz analoger Weise auftreten, eine allgemeinere Bedeutung zukommen müsse, dass dieselben nicht etwa nur das Resultat der Witterungsverhältnisse gewisser Jahrgänge sind und auch nicht für eine bestimmte Höhenregion oder orographische Lage allein eine Geltung besitzen. Der Verlauf der Witterungserscheinungen, insbesondere das Verhalten der Winde ist hingegen an beiden Beobachtungsorten ganz ähnlich, und in Betreff der allgemeinen Situation stimmen die zwei Beobachtungshügel insofern überein, als beide am Fusse von nach Süd abdachenden Berggehängen sich befinden. Bei jenen übereinstimmenden Resultaten, welche auf die an beiden Orten ähnlichen klimatischen und örtlichen Verhältnisse zurückzuführen sind, bleibt natürlich die allgemeine Giltigkeit noch fraglich.

Die Incongruenzen zwischen den Resultaten der beiden Untersuchungsreihen sind, ausser durch die Verschiedenheit der Jahrgänge, wohl auch durch die ungleiche Lage und Seehöhe der Beobachtungsorte bedingt; sie sind aber das Ergebniss des vereinigten Zusammenwirkens dieser drei Momente, und es ist nicht möglich zu erkennen, welcher Antheil an der Gesammtwirkung jedem einzelnen derselben zukommt.

Die acht Schachte, welche im Gschnitzthale im Umkreise eines aus Kalkschutt bestehenden, mit spärlichem Gras und niedrigem Gestrüpp bewachsenen, sehr gleichmässig gerundeten Hügels[1] gegraben wurden, befanden sich in einer Seehöhe von 1340 *m* und waren 70 *cm* tief. Die Vorsicht, dem Wasser Spiritus zuzusetzen, um ein Zerspringen der Flaschen bei allfälligem Sinken der Temperatur unter den Gefrierpunkt zu verhindern, hatte sich bei den im Innthale angestellten Beobachtungen als überflüssig herausgestellt, im Gschnitzthale aber als nothwendig erwiesen. Tabelle I enthält die mit einem in 0·1 C. getheilten

[1] Sct. Barbarahügel westlich von Trins.

Kappeller'schen Quellenthermometer von 1887 bis 1890 von Herrn Peter Tost im Gschnitzthale gemachten Temperaturablesungen.

Tabelle I.

Bodentemperaturen in 70 *cm* Tiefe an den 8 Hauptexpositionen im Gschnitzthale.

1887—1888	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
October....	5·1	5·6	6·2	7·1	7·5	7·7	7·8	7·3
November..	3·7	3·2	2·6	3·4	4·5	5·3	5·2	4·5
December..	1·7	1·8	1·7	2·3	3·2	4·1	3·9	3·3
Jänner.....	1·0	1·3	0·8	0·6	1·4	2·5	2·2	1·7
Februar....	0·4	0·6	0·5	0·9	0·8	1·9	2·0	1·6
März	0·5	0·6	0·7	2·7	3·1	3·3	3·1	1·8
April.....	0·6	0·7	1·1	5·8	5·2	4·1	4·0	2·0
Mai	4·2	5·8	8·1	10·5	9·4	8·9	8·8	7·5
Juni.....	10·1	10·3	11·7	12·0	12·3	11·5	11·2	10·6
Juli	11·0	11·0	11·7	12·3	12·2	12·2	12·1	11·4
August	12·6	12·7	14·3	15·4	15·6	14·5	14·4	13·4
September .	11·3	11·4	12·3	13·8	13·7	13·1	13·1	12·4
1888—1889								
October....	5·4	5·9	6·0	6·9	8·2	8·4	8·3	7·7
November..	2·6	3·1	3·7	5·8	6·8	6·8	6·2	5·2
December..	1·4	1·6	0·8	2·0	4·0	4·4	3·7	3·1
Jänner.....	—0·2	0·2	—0·9	1·1	2·5	3·0	2·3	1·8
Februar....	—1·1	—0·9	—1·4	0·4	1·3	2·3	1·5	—0·3
März	0·2	0·3	—0·7	2·5	2·6	2·5	2·4	1·0
April.....	0·6	0·7	0·5	4·8	5·1	5·1	4·7	3·0
Mai	8·6	7·9	9·4	12·0	10·8	9·7	9·4	8·5
Juni.....	11·0	11·6	13·0	13·8	13·7	12·8	12·4	11·6
Juli	14·0	14·5	15·3	16·8	16·7	15·8	15·4	14·5
August	11·5	11·7	12·0	12·6	13·0	13·1	12·8	12 3
September .	8·9	9·4	9·8	12·0	12·4	12·2	11·8	11·2
1889—1890								
October...	5·8	6·3	7·2	8·5	9·6	9·4	8·9	7·8
November..	3·4	3·6	3·0	5·7	6·6	7·0	6·5	5·7
December..	2·5	2·6	1·3	3·0	3·5	4·2	3·8	3·4
Jänner.....	0·8	1·1	0·6	1·8	2·9	3·5	2·8	2·1
Februar....	—1·5	—0·4	—0·1	1·1	1·4	2·0	1·7	1·3
März	—0·8	0·2	0·3	4·7	4·6	4·2	2·7	0·8
April.....	1·9	2·7	4·4	7·1	6·9	6·8	6·4	5·1
Mai	6·6	10·1	11·9	10·5	9·7	9·2	8·8	7·6
Juni.....	9·0	9·6	10·5	11·2	10·9	11·0	10·8	10·0
Juli	8·6	9·7	11·2	11·2	11·3	11·0	10·6	9·9
August	12·7	13·5	14·1	15·7	15·0	14·3	13·9	13·2
September .	8·1	8·7	9·2	12·3	12·4	12·0	11·7	10·6

Tabelle II enthält die für das Inn- und Gschnitzthal sich ergebenden dreijährigen Monats-, Jahreszeiten- und Jahresmittel für die Bodentemperatur an den einzelnen Expositionen und für die mittlere Bodentemperatur im Umkreise des Hügels, sowie die örtlichen und zeitlichen Amplituden.

Die Extreme sind in der Richtung der Verticalreihen (zeitlicher Verlauf) durch Sternchen, in der Richtung der Horizontalzeilen (örtliche Änderung) durch fette Schrift hervorgehoben.

In Tabelle III sind die Abweichungen von der mittleren Gehängetemperatur enthalten.

Tabelle II.

Bodentemperaturen in 70 *cm* Tiefe an den 8 Hauptexpositionen, Mittel aus 3 Jahren.

	Innthal									
Zeit	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Mittel	Amp.
Dec.	5·2	5·4	**4·8**	5·8	6·2	**7·5**	6·2	5·6	5·8	2·7
Jänn. . . .	3·9	4·3	**3·4***	4·3*	4·5*	**5·8***	4·7*	4·0	**4·4***	**2·4***
Febr. . . .	**3·5***	3·6*	3·8	5·2	5·3	**6·4**	5·5	3·8*	4·6	2·9
März . . .	**3·6**	4·2	4·8	6·5	6·5	**7·5**	6·7	4·2	5·5	3·9
April . . .	**6·3**	7·4	8·1	9·4	9·5	**10·0**	9·4	6·9	8·4	3·7
Mai	**11·6**	13·3	14·9	**16·6**	16·0	15·4	15·3	12·3	**14·4**	**5·0***
Juni	**14·0**	15·7	17·3	**18·5**	18·1	17·1	17·1	14·6	16·6	4·5
Juli	**15·8**	17·4	19·1	**20·2**	19·8	18·8	19·0	16·5	18·3	**4·4***
August .	**16·0***	17·9*	19·5*	**20·5***	20·1	19·0	19·5*	17·0*	**18·7***	4·5
Sept. . . .	**14·9**	16·9	17·9	19·5	**20·1***	19·1*	18·9	16·2	17·9	**5·2***
Oct.	**11·4**	13·0	13·5	15·3	**15·8**	15·5	14·7	12·8	14·0	4·4
Nov.	**7·2**	7·8	7·9	9·1	9·8	**10·3**	9·1	8·0	8·7	3·1
Winter . .	4·2	4·4	**4·0**	5·1	5·3	**6·6**	5·5	4·5	5·0	2·6
Frühling	**7·2**	8·3	9·3	10·8	10·7	**11·0**	10·5	7·8	9·5	3·8
Sommer .	**15·3**	17·0	18·6	**19·7**	19·3	18·3	18·5	16·0	17·8	4·4
Herbst . .	**11·2**	12·6	13·1	14·6	**15·2**	15·0	14·2	12·3	13·5	4·0
Jahr	**9·5**	10·6	11·3	12·6	12·6	**12·7**	12·2	10·2	11·5	3·2
Ampl. . .	**12·5**	14·3	16·1	**16·2**	15·6	13·3	14·8	13·2	14·3	

Gschnitzthal										
Zeit	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Mittel	Amp.
Dec..	1·9	2·0	**1·8**	2·4	3·6	**4·2**	3·8	3·3	2·8	2·9
Jänn.	0·5	0·9	**0·2**	1·2	2·3	**3·0**	2·4	1·9	1·6	2·8*
Febr.	—0·7*	—0·2*	—0·3*	0·8*	1·2*	**2·1***	1·7*	0·9*	0·7*	2·8
März	**0·0**	0·4	0·1	3·3	**3·4**	3·3	2·7	1·2	1·8	3·4
April	**1·0**	1·4	2·0	**5·9**	5·7	5·3	5·0	3·4	3·7	4·9*
Mai	**6·5**	7·9	9·8	**11·0**	10·0	9·3	9·0	7·9	8·9	4·5
Juni	**10·0**	10·5	11·7	**12·3**	12·3	11·8	11·5	10·7	11·4	2·3
Juli	**11·2**	11·7	12·7	**13·4**	13·4	13·0	12·7	11·9	12·5	2·2*
Aug.	**12·3***	12·6*	13·5*	**14·6***	14·5*	14·0*	13·7*	13·0*	13·5*	2·3
Sept.	**9·4**	9·8	10·4	12·7	**12·8**	12·4	12·2	11·4	11·4	3·4*
Oct.	**5·4**	5·9	6·5	7·5	8·4	**8·5**	8·3	7·6	7·3	3·1
Nov.	**3·2**	3·3	3·1	5·0	6·0	**6·4**	6·0	5 1	4·8	3·2
Wint.	0·6	0·9	**0·4**	1·5	2·4	**3·1**	2·6	2·0	1·7	2·7
Frühl.	**2·5**	3·2	4·0	**6·7**	6·4	6·0	5·6	4·2	4·8	4·2
Som.	**11·2**	11·6	12·6	**13·4**	13·4	12·9	12·6	11·9	12·5	2·2
Herbst	**6·0**	6·3	6·7	8·4	**9·1**	9·1	8·8	8·0	7·8	3·1
Jahr	**5·1**	5·5	5·9	7·5	7·8	**7·8**	7·4	6·5	6·7	2·7
Ampl.	13·0	12·8	13·8	**13·8**	13·3	**11·9**	12·0	12·1	12·8	

Tabelle III.

Abweichungen von der mittleren Gehängetemperatur.

Innthal								
Monat	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
December ..	—0·6	—0·4	**—1·0**	0·0	+0·4	**+1·7**	+0·4	—0·2
Jänner.....	—0·5	—0·1	**—1·0**	—0·1	+0·1	**+1·4**	+0·3	—0·4
Februar....	**—1·1**	—1·0	—0·8	+0·6	+0·7	**+1·8**	+0·9	—0·8
März	**—1·9**	—1·3	—0·7	+1·0	+1·0	**+2·0**	+1·2	—1·3
April	**—2·1**	—1·0	—0·3	+1·0	+1·1	**+1·6**	+1·0	—1·5
Mai.....	**—2·8**	—1·1	+0·5	**+2·2**	+1·6	+1·0	+0·9	—2·1
Juni.....	**—2·6**	—0·9	+0·7	**+1·9**	+1·5	+0·5	+0·5	—2·0
Juli.....	**—2·5**	—0·9	+0·8	**+1·9**	+1·5	+0·5	+0·7	—1·8
August	**—2·7**	—0·8	+0·8	**+1·8**	+1·4	+0·3	+0·8	—1·7
September .	**—3·0**	—1·0	0·0	+1·6	**+2·2**	+1·2	+1·0	—1·7
October....	**—2·6**	—1·0	—0·5	+1·3	**+1·8**	+1·5	+0·7	—1·2
November..	—1·5	—0·9	—0·8	+0·4	+1·1	**+1·6**	+0·4	—0·7
Winter.....	—0·8	—0·6	**—1·0**	+0·1	+0·3	**+1·6**	+0·5	—0·5
Frühling ...	**—2·3**	—1·2	—0·2	+1·3	+1·2	**+1·5**	+1·0	—1·7
Sommer....	**—2·5**	—0·8	+0·8	**+1·9**	+1·5	+0·5	+0·7	—1·8
Herbst.....	**—2·3**	—0·9	—0·4	+1·1	+1·7	+1·5	+0·7	—1·2
Jahr.....	**—2·0**	—0·9	—0·2	+1·1	+1·1	**+1·2**	+0·7	—1·3

Gschnitzthal								
Zeit	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
December..	−0·9	−0·8	−1·5	−0·4	+0·8	+1·4	+1·0	+0·5
Jänner.....	−1·1	+0·7	−1·4	−0·4	+0·7	+1·4	+0·8	+0·3
Februar....	−1·4	−0·9	−1·0	+0·1	+0·5	+1·4	+1·0	+0·2
März	−1·8	−1·4	−1·7	+1·5	+1·6	+1·5	+0·9	−0·6
April.....	−2·7	−2·3	−1·7	+2·2	+2·0	+1·6	+1·3	−0·3
Mai.....	−2·4	−1·0	+0·9	+2·1	+1·1	+0·4	+0·1	−1·0
Juni.....	−1·4	−0·9	+0·3	+0·9	+0·9	+0·4	+0·1	−0·7
Juli	−1·3	−0·8	+0·2	+0·9	+0·9	+0·5	+0·2	−0·6
August	−1·2	−0·9	0·0	+1·1	+1·0	+0·5	+0·2	−0·5
September .	−2·0	−1·6	−1·0	+1·3	+1·4	+1·0	+0·8	0·0
October....	−1·9	−1·4	−0·8	+0·2	+1·1	+1·2	+1·0	+0·3
November..	−1·6	−1·5	−1·7	+0·2	+1·2	+1·6	+1·2	+0·3
Winter	−1·1	−0·8	−1·3	−0·2	+0·7	+1·4	+0·9	+0·3
Frühling ...	−2·3	−1·6	−0·8	+1·9	+1·6	+1·2	+0·8	−0·6
Sommer ...	−1·3	−0·9	+0·1	+0·9	+0·9	+0·4	+0·1	−0·6
Herbst.....	−1·8	−1·5	−1·1	+0·6	+1·3	+1·3	+1·0	+0·2
Jahr.....	−1·6	−1·2	−0·8	+0·8	+1·1	+1·1	+0·7	−0·2

In Folge der geringen Anzahl von Beobachtungsjahren lassen sich über die mittlere Veränderlichkeit der Bodentemperatur keine genauen Aufschlüsse, vielmehr nur einige Andeutungen gewinnen, welche eine ungefähre Vorstellung vom Grade der Verlässlichkeit der in den vorigen Tabellen enthaltenen Mittelwerthe zu geben vermögen. Die folgende Tabelle enthält die mittlere Abweichung der Bodentemperatur (t) und die mittlere Veränderlichkeit der Temperaturdifferenz zwischen den benachbarten Expositionen (Δ), und zwar für die einzelnen Monate den Durchschnittswerth aus den acht Expositionen und für die einzelnen Expositionen das Mittel aus den zwölf Monaten. Die neben den mittleren Temperaturabweichungen der Expositionen in der Columne Δ stehenden Werthe beziehen sich auf die Veränderlichkeit der Temperaturdifferenz zwischen der betreffenden und der ihr rechts benachbarten Exposition, also der Werth neben N auf die Temperaturdifferenz zwischen N und NE u. s. w.

	Innthal		Gschnitzthal			Innthal		Gschnitzthal	
	t	Δ	t	Δ		t	Δ	t	Δ
December ...	0·75	0·21	0·37	0·28	Winter.....	0·70	0·23	0·42	0·31
Jänner.....	0·41	0·20	0·42	0·26	Frühling	0·74	0·31	0·83	0·53
Februar.....	0·93	0·28	0·46	0·39	Sommer.....	0·65	0·26	1·13	0·24
März	0·54	0·29	0·72	0·66	Herbst.....	0·90	0·28	0·62	0·22
April.....	1·17	0·21	0·94	0·40	N	0·61	0·25	0·80	0·28
Mai.....	0·52	0·43	0·83	0·53	NE.....	0·56	0·27	0·71	0·31
Juni.....	0·53	0·27	0·76	0·19	E	0·79	0·44	0·91	0·57
Juli	0·30	0·18	1·86	0·27	SE	1·09	0·29	1·01	0·37
August	1·11	0·33	0·76	0·26	S	0·89	0·21	0·81	0·24
September ..	0·74	0·25	0·82	0·27	SW	0·74	0·18	0·60	0·23
October.....	1·27	0·16	0·45	0·17	W.....	0·76	0·35	0·56	0·22
November...	0·70	0·44	0·58	0·22	NW	0·54	0·18	0·59	0·48

Im Durchschnitt aus den zwölf Monaten oder aus den acht Hauptexpositionen ergibt sich die mittlere Abweichung der Bodentemperatur für beide Beobachtungsorte zufällig übereinstimmend zu 0·75°, die mittlere Veränderlichkeit der Temperaturdifferenz zwischen den benachbarten Expositionen zu 0·27° im Innthale und 0·33° im Gschnitzthale. Es entsprechen diesen Werthen wahrscheinliche Fehler von 0·63°, 0·23° und 0·28°.

Allen diesen aus nur dreijährigen Mitteln bestimmten Zahlenwerthen kommt als solchen keine Bedeutung zu, sie sind noch völlig unzureichend, um über die von Jahreszeit und Exposition abhängigen Variationen der mittleren Veränderlichkeit einen Aufschluss zu geben, sie lassen aber die eine Thatsache erkennen, dass die Unsicherheit der mittleren örtlichen Temperaturdifferenzen viel geringer ist als die der Temperaturmittel selbst. Es erinnert diese Erscheinung an das von Lamont für die Lufttemperatur nachgewiesene Verhältniss zwischen der Veränderlichkeit der absoluten Werthe und der Veränderlichkeit der Temperaturunterschiede benachbarter Stationen. Die wahrscheinlichen Fehler der in Tabelle III enthaltenen örtlichen Temperaturdifferenzen ergeben sich für das Innthal als dreimal, für das Gschnitzthal als mehr

denn doppelt so gering, als die Fehler der in Tabelle II stehenden Temperaturmittel.

Die geringe Verlässlichkeit der Mitteltemperaturen kommt insoferne wenig in Betracht, als ja eine Vergleichung der absoluten Temperaturwerthe beider Beobachtungsorte ohnedies ziemlich unfruchtbar wäre. Die relativ grosse Sicherheit hingegen, welche die Temperaturdifferenzen aufweisen, die Berechtigung der Annahme, dass die Beziehungen zwischen den Temperaturverhältnissen der verschiedenen Expositionen bereits in diesen dreijährigen Beobachtungsresultaten ziemlich richtig zum Ausdrucke kommen, liess es der Mühe werth erscheinen, die Untersuchung dieser Temperaturbeziehungen, welche sich ja von vornherein als Hauptaufgabe ergibt, mit grosser Sorgfalt und Genauigkeit vorzunehmen.

Aus den vorigen Tabellen sind die Eigenthümlichkeiten des örtlichen und zeitlichen Temperaturverlaufes zum Theile nur unzureichend, zum Theile noch gar nicht ersichtlich. Ich habe desshalb, um ein möglichst klares und genaues Bild der Bodentemperaturverhältnisse beider Beobachtungsorte zu bekommen und die Vergleichung zu erleichtern, die räumlich geometrische Darstellung gewählt und nach der von Erk ausführlich beschriebenen Methode[1] Isothermen (Thermo-Isoplethen) construirt, welche, da sie zugleich eine räumliche und zeitliche Temperaturvertheilung zur Anschauung bringen, als Choro-Chrono-Isothermen zu bezeichnen wären.

Auf die x-Axe wurden die Zeiten, längs der y-Axe die Expositionen und entlang der z-Axe die Temperaturwerthe aufgetragen. Die so erhaltene ideale Temperaturfläche wurde durch äquidistante, der Horizontalebene parallele Ebenen geschnitten und die hiebei entstandenen Schnittcurven wurden auf die Horizontalebene projicirt. Auf Tafel I und II sind diese Curvenprojectionen (Isothermen) zur Darstellung gebracht. Die Entfernung zwischen je zwei Isothermen entspricht einer Temperaturdifferenz von 1° C. Die Isothermen von 0°, 5°, 10°, 15° und 20° sind durch stärkere Linien hervorgehoben.

[1] F. Erk: Zwei Studien über die Anwendung einer räumlich-geometrischen Darstellung auf Probleme der Meteorologie. München 1887. A. S. 9.

Die beiden Isothermentafeln gestatten es, die Änderung der Bodentemperatur mit der Exposition für jeden beliebigen Jahrestag und die Änderung der Bodentemperatur mit der Zeit für jede beliebige Weltgegend zu bestimmen und gewähren so im Gegensatz zur discontinuirlichen Darstellung durch die Monatsmittel der acht Hauptexpositionen ein continuirliches Bild der Temperaturvertheilung.

Die Tafeln ermöglichen es ferner, die Grösse der verschiedenen örtlichen und zeitlichen Schwankungen bis auf einzelne Winkelgrade, beziehungsweise Jahrestage genau anzugeben, während mit Hilfe der Tabelle der Monatsmittel die genannten Schwankungen nur bis auf den achten, beziehungsweise zwölften Theil der Kreisperipherie genau erkannt werden können.

Die Modification, welche diese räumlichen Darstellungen durch eine längere Beobachtungsdauer erfahren würden, bestünde nach dem an früherer Stelle über die Veränderlichkeit Gesagten viel weniger in einer Gestaltveränderung, als vielmehr in einer Verticalverschiebung der Temperaturfläche. Es würde also mehr der Zahlenwerth als der Verlauf der Isothermen sich ändern und dementsprechend auch das ganze Isoplethendiagramm nur eine geringe Modification erleiden.

Die Berührungspunkte der an die zusammenhängenden Isoplethen parallel zur *X*-Axe gezogenen Tangenten, sowie die Berührungspunkte der an die zusammenhängenden und zerfallenden Isoplethen parallel zur *Y*-Axe gezogenen Tangenten wurden durch punktirte Linien verbunden. Diese punktirten Curvenzüge stellen die Drehung der örtlichen Extreme und die Verschiebung der Jahresextreme der Bodentemperatur dar.

Im Folgenden habe ich die wichtigsten übereinstimmenden Resultate, welche eine vergleichende Betrachtung dieser Curven ergibt, hervorgehoben und auf ihre Ursachen hingewiesen, die Unterschiede zwischen den Temperaturverhältnissen beider Beobachtungsorte aber nur kurz berührt, da sich die Bedeutung derselben — eingangs erwähnter Complicationen wegen — noch nicht mit Klarheit erkennen lässt. Für die Maxima, Minima und Amplituden habe ich bei den in der *YZ*-Ebene verlaufenden Curven die Bezeichnung „örtlich“ verwendet, bei den in der *XZ*-Ebene verlaufenden dagegen nicht das Beiwort „zeitlich“ als

nähere Bestimmung hinzugefügt, sondern die geläufigen Ausdrücke Sommermaxima, Winterminima und Jahresamplituden gewählt.

I. Die jährliche Änderung der örtlichen Temperaturvertheilung.

Für die Lage des örtlichen Maximums der Bodentemperatur ergeben sich nachstehende Grenzwerthe:

Innthal		Gschnitzthal	
S 55° W	15. Februar	S 55° W	12. December
E 42° S	20. Mai	E 40° S	12. Mai

Die extremen Abweichungen vom Meridian zeigen eine auffallende Übereinstimmung: 55° westlich, 48° und 50° östlich, Oscillation 103° und 105°, ebenso die Eintrittszeiten der östlichsten Lage, dagegen sind die Eintrittstage des westlichsten Standes 2 Monate von einander entfernt.

Das Temperaturmaximum der SW-Seite wurde in der eingangs citirten Abhandlung meines Vaters darauf zurückgeführt, dass in Folge des am Nachmittage eintretenden Minimums der Luftfeuchtigkeit die auf das SW-Gehänge fallenden Sonnenstrahlen die geringste Wärmeabsorption erleiden.[1] Das Temperaturmaximum der SE-Seite wurde hingegen damit erklärt, dass in Folge der grossen Trockenheit der E- und SE-Winde das von diesen bestrichene Gehänge die stärkste Austrocknung erfährt. Die temperaturerhöhende Wirkung der SE-Winde macht sich nur während der schneefreien Jahreszeit geltend, sie ist aber viel bedeutender als der fortdauernde Einfluss der nachmittägigen Lufttrockenheit, so dass sie diesen zunächst compensirt, alsdann aber allein thätig erscheint.

Die naheliegende Idee, die genannten Drehungen des Maximums der Bodentemperatur durch die gleichzeitigen und parallel laufenden Richtungsänderungen des Maximums der Windwärme zu erklären, musste fallen gelassen werden, da der SW im Innthale in Folge localer Ablenkung als S auftritt und anderseits der die SE-Gehänge dieses Thales bestreichende Wind ein durch

[1] In einer dortselbst mitgetheilten Reihe von Heliometermessungen von Prof. Pfaundler verhielt sich die Vormittags- zur Nachmittagsintensität der Sonnenstrahlung wie 7 : 8.

Terrainverhältnisse abgelenkter E-Wind ist. Von Hann[1] wurde auf den in den Sommermonaten gut ausgeprägten täglichen Gang der Bewölkung als eine Ursache des südöstlichen Temperaturmaximums hingewiesen.

Für das südöstliche Maximum des im Gschnitzthale stehenden Beobachtungshügels kommt jedenfalls die Austrocknung des Bodens sehr in Betracht, da dieser Hügel dem SE-Winde des Wippthalgebietes, dem sogenannten Tuxerwind, stark exponirt ist; dass aber auch im Sommer der tägliche Verlauf der Himmelsbedeckung von grosser Bedeutung ist, zeigt sich aus nachstehenden Resultaten einer grösseren Anzahl von Bewölkungsschätzungen, welche ich im Laufe des letzten Sommers im Gschnitzthale 1—2-stündlich angestellt habe. Es war die Bewölkung im Mittel:

1 Stunde	vor	Mittag	um	6%	geringer	als	1 Stunde	nach	Mittag,
2 Stunden	„	„	„	9	„	„	2 Stunden	„	„
3	„	„	„	14	„	„	3	„	„	„
4	„	„	„	18	„	„	4	„	„	„
5	„	„	„	21	„	„	5	„	„	„

Um auch den Einfluss des täglichen Ganges der Luftfeuchtigkeit auf die Vertheilung der Bodenwärme durch im Gebiete der Temperaturmessungen gemachte Feuchtigkeitsbeobachtungen zu illustriren, mögen hier die Resultate einer Reihe von Hygrometerablesungen Platz finden, welche ich im letzten Jahre im Gschnitzthale vorgenommen habe.[2] Dieselben beziehen sich allerdings gerade auf eine Jahreszeit (Aug.—Sept.), in welcher das Temperaturmaximum nicht auf die SW-Seite fällt, da aber der tägliche Gang der relativen Feuchtigkeit sich während des ganzen Jahres ähnlich bleibt und das durch ihn bedingte südwestliche Maximum während der wärmeren Jahreshälfte nur durch andere Einflüsse verdeckt erscheint, sind die erwähnten, hier folgenden Beobachtungen dennoch geeignet, das eben genannte Maximum zu erklären.

---

[1] J. Hann: Handbuch der Klimatologie, Allgem. Theil, II, 2.

[2] Die Beobachtungen fanden an 10 Tagen stündlich, an 15 Tagen 2—3stündlich von 7^h *a. m.*—10^h *p. m.* statt und wurden mit einem Koppeschen Procent-Haarhygrometer mit Controlvorrichtung (von Usteri-Reinacher in Zürich) angestellt.

Die relative Feuchtigkeit betrug im Mittel aus 25 Tagen:

7h a.m.	8	9	10	11	12	1h p.m.	2	3	4	5
83·7	78·4	73·1	67·3	63·3	60·6	57·9	55·5	55·2	56·7	60·8

Sie war also:

1 Stunde	vor	Mittag	um	5·4%	grösser	als	1 Stunde	nach	Mittag
2 Stunden	„	„	„	11·8	„	„	2 Stunden	„	„
3 „	„	„	„	17·9	„	„	3 „	„	„
4 „	„	„	„	21·7	„	„	4 „	„	„
5 „	„	„	„	22·9	„	„	5 „	„	„

Für das südwestliche Bodentemperaturmaximum im Gschnitzthale ist jedenfalls auch der Föhn von Bedeutung, indem dieser im genannten Thale, der Richtung desselben entsprechend, besonders die SW-Gehänge austrocknet und erwärmt. (Im Innthale tritt er als S-Wind auf.)

Da die in je einem Beispiel vorgeführten täglichen periodischen Änderungen der relativen Feuchtigkeit und Sommerbewölkung allgemein verbreitet sind, dürfte die mit ihnen zusammenhängende jährliche Oscillation des örtlichen Maximums der Bodentemperatur eine in den ganzen Alpen anzutreffende Erscheinung sein. Allerdings mag dieselbe, je nachdem der tägliche Gang der genannten klimatischen Elemente mehr oder minder deutlich ausgeprägt ist, und je nach dem Verhalten der localen Winde in den verschiedenen Alpengebieten ungleich entwickelt sein.

Für die Lage des örtlichen Minimums der Bodentemperatur ergeben sich nachstehende Grenzwerthe:

Innthal		Gschnitzthal	
E 3° S	7. Jänner	E...	15. Jänner
W 83° N...	15. Mai	N...	15. April—15. August

Die extremen östlichen Abweichungen von der Nordexposition zeigen eine grosse Übereinstimmung in Bezug auf Lage und Eintrittszeit, die Drehung des Minimums nach Osten erfolgt im Gschnitzthale einen Monat früher, die Zurückbewegung nach Norden aber zu gleicher Zeit, so dass das Minimum im Gschnitzthale länger am E-Gehänge verweilt. Während der Zeit, während welcher die tiefste Temperatur auf die E-Seite fällt, erhält sich

nach dem übereinstimmenden Ergebnisse beider Beobachtungsreihen ein zweites Minimum an der Nordexposition, das vom ersteren durch eine ganz flache Temperaturwelle getrennt ist.

Bei dem Minimum der Bodentemperatur zeigt sich keine durch atmosphärische Zustände veranlasste Oscillation um die dem solaren Klima entsprechende Mittellage, wie dies beim Maximum der Fall. Die Erscheinung, dass im Winter, obwohl die Temperatur von N gegen NE in sehr schwacher Zunahme begriffen ist, das Hauptminimum auf die E-Seite fällt, ist mit der Lage der beiden Beobachtungshügel am Fusse von nach S abdachenden Berggehängen in Zusammenhang zu bringen. In Folge des durch diese Lage bedingten Windschutzes ist an beiden Orten die N-Seite fast ganz, die NE-Seite noch einigermassen vor zwei abkühlenden Einflüssen bewahrt, welche an der E-Abdachung stark zur Geltung kommen, vor der grossen Kälte der aus den Richtungen N bis E wehenden Winde und vor der durch diese Winde theils durch Verwehung, theils durch Verdunstung verursachten Dickenverminderung der Schneelage.

Da die östlichen Minima der beiden Beobachtungsorte ihre Abhängigkeit von den Localverhältnissen nicht verläugnen, fragt es sich, wo an einem allseitig freistehenden Hügel das örtliche Minimum im Winter zu treffen ist. Aus dem Umstande, dass während des Winters die kältesten Winde aus NE kommen und die als Schutz vor Kälte wirkende Schneedecke an der N-Seite am wenigsten durch Abschmelzen verdünnt werden kann, liesse sich theoretisch folgern, dass das Minimum der Bodentemperatur im Winter ganz allgemein in den Alpen eine östliche Deviation zeigen müsse; da aber die Winde in den Gebirgsländern in Bezug auf Richtung und Temperatur durch das Terrain verändert werden, und ebenso das Verhältniss zwischen den Schneehöhen der verschiedenen Expositionen je nach Localumständen variirt, dürfte es auch von localen Verhältnissen abhängen, ob die Bodentemperatur im Winter von N gegen E noch etwas sinkt oder gleich bleibt oder steigt.

Die periodischen Drehungen des örtlichen Maximums und Minimums der Bodentemperatur erfolgen in gleicher Richtung und betragen bei beiden Extremen ungefähr 100°. Sie vollziehen sich aber ungleich rasch und zu verschiedener Zeit. Es sind

darum auch die von den Richtungen der beiden Extreme eingeschlossenen Winkel einer periodischen Änderung unterworfen. Dieselben erreichen folgende Grenzwerthe:

Innthal				Gschnitzthal			
7. Jänner	135°	und	225°	15. Jänner ...	140°	und	220°
15. März	230	„	130	15. Februar ..	190	„	170
20. Mai	143	„	217	15. Mai	130	„	230
15. November .	190	„	170	15. October ..	190	„	170

Die Winter- und Sommerextreme stimmen in Bezug auf Winkelwerth und Eintrittszeit gut überein, die Frühlings- und Herbstextreme sind im Gschnitzthale einen Monat verfrüht.

An folgenden Tagen befinden sich die höchste und tiefste Bodentemperatur in genau entgegengesetzten Richtungen der Windrose:

Innthal	Gschnitzthal
3. Februar	12. Februar
27. April	7. März
15. October	7. October
23. November	25. October

II. Die jährliche Änderung der örtlichen Temperaturschwankung.

Für die Zahlenwerthe der örtlichen Extreme der Bodentemperatur ergeben sich nachstehende Grenzen:

Für das Maximum:

Innthal		Gschnitzthal	
15. Jänner	5·8	13. Februar	2·2
4. September.	20·8	25. August	15·0

Für das Minimum:

Innthal		Gschnitzthal	
5. März	3·3	23. Februar	—0·8
23. August ..	16·1	17. August.....	12·4

Die jährlichen Schwankungen des Minimums sind ziemlich übereinstimmend (12·8 und 13·2), von den Schwankungen des Maximums ist die im Innthale etwas grösser. Zwischen den

Jahrescurven der örtlichen Extreme besteht der zwischen dem Temperaturgang an den südlichen und dem an den nördlichen Expositionen vorhandene, durch eine entgegengesetzte zeitliche Verrückung der Winter- und Sommerextreme bedingte Unterschied, dessen Erklärung im nächsten Abschnitte gegeben wird. In Folge dieses ungleichen Verlaufes der Jahrescurven des örtlichen Maximums und Minimums ist auch die Temperaturdifferenz zwischen der kältesten und wärmsten Abdachung einer periodischen Änderung unterworfen. Es werden hiebei nachstehende Grenzwerthe erreicht:

Innthal		Gschnitzthal	
10.—15. Jänner	2·2	15.—30. Jänner	2·8
5.—15. Mai	5·3	15.—20. April	5·2
20. Juni—15. August	4·5	25. Juni—5. August	2·4
15.—20. September	5·4	10.—15. September	4·0

Diese aus den Isothermentafeln direct nicht genau ablesbaren Zeit- und Temperaturwerthe wurden durch separate Curvenconstruction ermittelt.

Die Eintrittszeiten der extremen örtlichen Temperaturamplituden weichen bis auf die des Frühlingsmaximums, das sich im Innthal fast um einen Monat verspätet, nicht viel von einander ab. Erwähnenswerth ist die lange Constanz des Temperaturunterschiedes während des Sommers. In Bezug auf die Grösse stimmen die Frühlingswerthe überein, dagegen sind die Sommeramplituden im Innthale viel grösser.

Die beiden Maxima der örtlichen Schwankung der Bodenwärme entsprechen dem grossen Besonnungsgegensatze zwischen N- und S-Abdachung, welcher im Frühlinge und Herbste besteht, die beiden Minima fallen mit der Verminderung des genannten Gegensatzes zur Zeit des hohen und tiefen Sonnenstandes zusammen. Im Folgenden sind für den im Gschnitzthal stehenden Beobachtungshügel (47° 5′ geogr. Breite) die Bestrahlungsintensitäten der S- und N-Abdachung (36° 30′ Neigung), sowie ihre Differenz für das Winter- und Sommersolstitium und 11 dazwischenliegende um den sechsten Theil der Declination (3° 54′ 40″) abstehende Sonnenhöhen in relativen Zahlen angegeben. Es ist hiebei die Insolationsintensität an der Grenze der Atmosphäre

bei senkrechtem Auffallen der Strahlen als 1000 gesetzt und der Absorptionscoefficient zu 0·75 angenommen.

Sonnenhöhe	Bestrahlung Südexpos.	Nordexpos.	Differenz
19°27′ 0″	585·5	0	585·5
23 21 40	620·1	0	620·1
27 16 20	651·0	0	651·0
31 11 0	677·9	0	677·9
35 5 40	700·7	0	700·7
39 0 20	719·3	0·1	719·2
42 55 0	733·6	8·5	725·1
46 49 40	743·5	36·0	707·5
50 44 20	748·9	76·4	672·5
54 39 0	749·8	123·7	626·1
58 33 40	746·2	174·6	571·6
62 28 20	738·2	227·0	511·2
66 23 0	725·7	279·7	446·0

Das Maximum der Insolationsdifferenz fällt auf die Zeit des Äquinoctiums; das Sommerminimum ist etwas kleiner als das des Winters. Die Schneedecke ist im Winter geeignet, die örtliche Differenz der Bodentemperatur zu vermindern, indem die grössere Mächtigkeit des Schnees an den N-Gehängen daselbst das Eindringen der Kälte erschwert; zu Beginn des Frühlings, wenn die S-Gehänge bereits aper sind, hilft dagegen die Schneedecke der N-Gehänge den örtlichen Temperaturunterschied vergrössern, indem sie diesen Gehängen die ohnedies geringe Zufuhr von Sonnenwärme völlig entzieht. In Bezug auf die absoluten Werthe des örtlichen Temperaturunterschiedes ist zu bemerken, dass dieselben durch die Lage der Beobachtungsorte am Fusse südlicher Gehänge beeinflusst sind. Es ist klar, dass sich an einer im Vergleich zum Areal des gesammten insolationsbegünstigten Thalgehänges verschwindend kleinen nördlich exponirten Terrainfläche im Bereiche dieses Gehänges die Bodentemperatur höher stellen wird, als an der gegenüberliegenden Schattenseite des Thales.

Mit zunehmender Seehöhe vergrössert sich bei sonst gleichbleibenden Umständen der Wärmeunterschied zwischen N- und

S-Seite in Folge des Wachsens der Intensität der Sonnenstrahlung.[1] Dass nichtsdestoweniger die örtliche Wärmeschwankung für den um 560 *m* höher liegenden Hügel im Gschnitzthal etwas (—0·7°) geringer ausfällt, erscheint dadurch bedingt, dass, wie schon erwähnt, die Unterschiede zwischen den Resultaten beider Beobachtungsreihen keineswegs nur durch die ungleiche Höhenlage, sondern durch verschiedene Momente bedingt sind, welche zum Theil einander entgegengesetzte Wirkungen auf die Bodentemperatur ausüben.

Die Raschheit der Temperaturänderung von der kältesten zur wärmsten Exposition ist von dem Temperaturunterschied und dem Winkelabstand der beiden örtlichen Extreme abhängig. Da diese zwei Grössen einen verschiedenen Jahresverlauf zeigen, ist auch die Raschheit der örtlichen Temperaturänderung (das örtliche Temperaturgefälle) einer jährlichen Variation unterworfen. Die hiebei erreichten Grenzwerthe sind im Folgenden durch den Expositionsunterschied ausgedrückt, welchem eine Wärmezunahme um 1° C. entspricht:

In der Richtung von N über E nach S:

Innthal		Gschnitzthal	
10. Februar	70°17′	10. December	52°22′
20. Mai.....	26 49	5. Mai.....	27 8
15. August	34 32	5. August.....	69 15
10. September	29 19	15. September....	40 27

In der Richtung von N über W nach S:

Innthal		Gschnitzthal	
5. Jänner .....102°12′		5. Jänner	82° 4′
25. März.....	33 22	5. April.....	39 54
25. Juli.....	47 21	25. Juli.....	84 58
10. September	36 43	25. September	44 38

Diese Extreme stimmen mit Ausnahme des ersten hinsichtlich ihrer Eintrittszeit ganz gut überein. In Betreff der Winkelwerthe fällt besonders die grosse Verschiedenheit der Sommerminima auf.

[1] Indirecte, auf dem Verhalten von Vegetationsgrenzen beruhende Beweise hiefür in A. v. Kerner's „Pflanzenleben", I. Bd., VI, 2.

Die Temperaturzunahme von der kältesten zur wärmsten Abdachung erfolgt in der Richtung von N über E nach S während des ganzen Jahres ziemlich gleichmässig (besonders von Mai bis Ende August), nur im Gschnitzthale im März und April zuerst langsam (bis zur Ostexposition), dann rasch; in der entgegengesetzten Richtung vollzieht sie sich im Innthale von December bis April zuerst langsam, dann rasch, in den übrigen Monaten zuerst rasch (bis zur W-Seite), dann langsam, im Gschnitzthale im Winter und Sommer ziemlich gleichmässig, im Frühling und Herbste zuerst schnell und dann langsam.

Von den im Bereiche eines Kreisoctanten vor sich gehenden Temperaturänderungen ist jene die schnellste, welche sich zu Anfang April zwischen der E- und SE-Seite im Gschnitzthale vollzieht. Es steigt daselbst die Bodenwärme längs einem Bogen von 45° um 4 Temperaturgrade, was einer Zunahme von 1° C. für 11 Winkelgrade entspricht. Im Gegensatze hiezu bleibt während des Sommers zwischen der W- und SW-Seite im Innthale die Bodentemperatur völlig constant.

III. Die Änderung des jährlichen Temperaturganges mit der Exposition.

Für den Eintrittstag des Sommermaximums der Bodentemperatur ergeben sich folgende Grenzwerthe:

Innthal		Gschnitzthal	
N	23. August	W 80° N ..	17. August
S 30° W...	12. September	S 45° W...	27. August

Diese Extreme stimmen in Bezug auf ihre Lage gut überein, werden aber im Innthale später erreicht und sind daselbst weiter von einander entfernt (20 und 10 Tage). Die Ursache des verzögerten Eintrittes des Temperaturmaximums an den südlichen Abhängen ist in den Insolationsverhältnissen zu suchen. An der N-Seite wird die Erdoberfläche zur Zeit der Sommersonnenwende am stärksten erwärmt, an der S-Seite fallen hingegen auf Gehänge, deren Neigung grösser ist als die Zenithdistanz der Sonne zur Zeit des Sommersolstitiums, die Sonnenstrahlen einige Zeit vor

und nach dem Solstitium senkrecht auf. Da das zweite Insolationsmaximum einen schon stark erwärmten Boden trifft, muss das Temperaturmaximum der Erdoberfläche mit demselben zeitlich zusammenfallen.

Es ist jedoch anzunehmen, dass mit wachsender Tiefe diese Verspätung der Wärmeculmination sich verringern werde und dass sie auch in einer bestimmten Tiefe umsoweniger mit der Zeitdifferenz zwischen dem Solstitium und den Insolationsmaximis gleichen Schritt halten könne, je mehr sich die genannte Differenz vergrössert, je steiler also ein Gehänge wird.

In Anbetracht der schon bei früherer Gelegenheit erwähnten Störungen, welche die solarklimatische Vertheilung der Bodenwärme durch atmosphärische Zustände erleidet, kann ferner auch nicht erwartet werden, dass die grösste Verspätung des Temperaturmaximums genau auf die Südexposition falle.

Der im Gschnitzthale stehende Beobachtungshügel hat nach der Specialkarte eine geographische Breite von 47° 4′ 56·6″. Die Neigung seiner NNE- und SSW-Seite ergibt sich nach einer Photographie übereinstimmend zu 36° 30′. Bei der grossen Regelmässigkeit des Hügels kann dieser Winkel mit grösster Wahrscheinlichkeit auch für die N- und S-Abdachung angenommen werden. Es ergibt sich dann für die Südexposition als Eintrittstag des Temperaturmaximums der Bodenoberfläche der 23. August, somit eine Verspätung von 63 Tagen gegenüber dem Solstitium. Hiemit stimmt die für 70 *cm* Tiefe sich ergebende Wärmeculmination zu Ende August ganz gut überein; dass jedoch auch an der N-Seite das Temperaturmaximum sich bis Mitte August verzögert, beruht auf der Abflachung local bedingter Anomalien durch den überwiegenden Einfluss der auf einem grösseren Flächenraume vorhandenen mittleren Temperaturverhältnisse.

Da die Insolation an dem N-Gehänge bis zum Sommersolstitium verhältnissmässig rasch wächst und dann wieder rasch sich vermindert, an der Südexposition dagegen eine Zeitlang vor dem Solstitium allmälig ab- und dann wieder allmälig zunimmt, hat im Sommer die Curve der Bodentemperatur an der S-Seite einen flacheren Scheitel als die Curve des N-Gehänges.

Für den Eintrittstag des Winterminimums der Bodentemperatur ergeben sich folgende Grenzwerthe:

Innthal		Gschnitzthal	
E 30° S ...	10. Jänner	E 40° S ...	7. Februar
N 5° E....	5. März	W 40° N...	1. März

Die ersteren zwei dieser Extreme stimmen bezüglich ihrer Lage, die letzteren zwei in Betreff ihrer Eintrittszeit gut überein, dagegen differiren erstere hinsichtlich ihres Eintrittes um einen Monat, letztere in Bezug auf ihre Lage um mehr als 45°. (Die Entfernung der Extreme beträgt 54 und 21 Tage.)

Die Ursache der Verspätung des Winterminimums an den nördlichen Expositionen ist in den Insolationsverhältnissen zu suchen. Durch die Schneedecke erfährt der Eintritt des Minimums an allen Expositionen eine Verzögerung, indem die nach dem tiefsten Sonnenstande wieder beginnende oder zunehmende Insolation eine Zeit lang zur Schneeschmelze verbraucht wird und alsdann noch das eiskalte Schmelzwasser einen abkühlenden Einfluss ausübt.[1]

Die so bedingte Verspätung des Minimums ist nun an der N-Seite viel grösser, denn während an den S-Gehängen alsbald nach dem Eintritt des Wintersolstitiums die Sonnenstrahlung wieder zunimmt, bleiben alle nördlichen Gehänge, deren Neigung grösser ist als die Sonnenhöhe zur Zeit der Wintersonnenwende, noch längere Zeit ganz im Schatten. Die Schneeschmelze geht an der N-Seite auch langsamer vor sich, da die Insolation viel geringer, die Schneedecke dagegen mächtiger ist. Es zeigt darum, entgegen dem Verhalten im Sommer, während des Winters die Temperaturcurve der nördlichen Exposition einen flacheren Scheitel als die Curve des S-Gehänges.

Für den im Gschnitzthal stehenden Beobachtungshügel ergibt sich der 5. März als Beginn der Insolation an der N-Seite nach 147tägiger continuirlicher Beschattung derselben. Die Winterschneedecke schmilzt in der Seehöhe der Beobachtungsorte im Mittel an folgenden Tagen ab:

Innthal		Gschnitzthal	
S...	21. Februar	S...	25. März
N...	12. März	N...	17. April

[1] Woeikoff: Der Einfluss einer Schneedecke auf Boden, Klima und Wetter, Cap. I und IX. Penck's geogr. Abhandlungen, III, 3.

Das Minimum der Bodentemperatur tritt demzufolge im Inn- und Gschnitzthale lange Zeit vor dem Abschmelzen der Schneedecke ein. Diese eigenthümliche Erscheinung ist wohl durch den Föhn bedingt, welcher in beiden Thälern nicht selten gegen Ende des Winters die unteren Gehänge vom Schnee befreit, der Insolation zugänglich macht und selbst erwärmt, alsdann aber Feuchtigkeit mitbringt, welche sich als neue Schneedecke niederschlägt und bei Wiedereintritt kalter Witterung den Boden vor dem vollständigen Verluste der während der Föhntage erworbenen Wärme schützt. Die Temperaturzunahme nach dem Minimum ist übrigens zuerst nur eine äusserst geringe, und ein Vergleich der Zeit, in welcher die Frühlingsisothermen näher zusammenzurücken beginnen, mit dem Zeitpunkt des Abschmelzens der Winterschneedecke zeigt, dass auch in den genannten Thälern das letzterwähnte Ereigniss das eigentliche Signal zum Ansteigen der Bodenwärme bildet.

Schneeschmelze und Ansteigen der Bodentemperatur beginnen an den N-Abhängen der beiden Beobachtungshügel in Folge ihrer Lage im Bereiche insolationsbegünstigter Thalseiten früher als an den Schattenseiten der betreffenden Thäler.

Da die besprochenen Verschiebungen der Jahresextreme der Bodentemperatur durch die für die mittleren Nordbreiten allgemein geltenden Insolationszustände bedingt sind, müssen dieselben unter gleichen Terrainverhältnissen in den ganzen Alpen in analoger Weise vorhanden sein; dagegen werden sich in Bezug auf die genannten Erscheinungen im Bereiche desselben Thales grosse, von den Neigungswinkeln der Gehänge abhängige Verschiedenheiten zeigen.

Die zeitlichen Verschiebungen des Sommermaximums und Winterminimums der Bodentemperatur erfolgen in ungleicher Weise und in entgegengesetzter Richtung. Es erfährt darum auch das Verhältniss des auf- und absteigenden Astes der Temperaturcurve eine Änderung mit der Exposition. Es werden hiebei nachstehende Grenzwerthe erreicht:

	Inntha			Gschnitzthal	
	Steigen	Fallen		Steigen	Fallen
N 5° E	171	194	W 80° N	174	191
S 30° W	241	124	E 40° S	197	168

Das kürzeste Steigen und längste Sinken der Bodentemperatur findet an beiden Orten ungefähr an derselben, das längste Steigen und kürzeste Sinken dagegen an etwas abweichenden Expositionen statt. Die Formen der Temperaturcurven sind an der N-Seite ganz übereinstimmend, an der S-Seite ist hingegen die Curve im Innthale viel mehr asymmetrisch. In nachfolgenden Richtungen der Windrose hat die Temperaturcurve (von secundären Unregelmässigkeiten abgesehen) eine symmetrische Gestalt:

Innthal	Gschnitzthal
N 35° E	N 35° E
W 65° N	W 20° N

An den zwischen diesen Compassrichtungen liegenden nördlichen Expositionen dauert das Sinken der Bodentemperatur länger als das Steigen, an den übrigen Abhängen verhält es sich umgekehrt. Bei Vergleich der nördlichen mit der südlichen Thalseite würde sich ein noch grösserer Unterschied in Bezug auf das Zeitverhältniss des Auf- und Absteigens ergeben, da die Nordcurve der Beobachtungsorte, wie schon erwähnt, eine Assimilation an die Temperaturverhältnisse der Südexposition zeigt und ein späteres Sommer- und früheres Winterminimum aufweist, als der Schattenseite des Thales entsprechen würde.

IV. Die Änderung der jährlichen Temperaturschwankung mit der Exposition.

Für die Zahlenwerthe des Sommer- und Winterextrems der Bodentemperatur ergeben sich nachstehende Grenzen:

Für das Sommermaximum:

Innthal		Gschnitzthal	
N.....	16·1	N.....	12·4
E 67° S...	20·8	E 76° S...	15·0

Für das Winterminimum:

Innthal		Gschnitzthal	
N 7° E.....	3·3	N 13° E.....	—0·8
S 50° W....	5·8	S 38° W.....	2·2

Die örtlichen Schwankungen des Minimums differiren nicht viel (2·5° und 3°), von den Schwankungen des Maximums ist die im Innthale bedeutend grösser. Die Compassrichtungen der extremen Werthe stimmen ziemlich gut überein. Das Sommermaximum und Winterminimum der Bodentemperatur culminiren in Folge der früher besprochenen Drehungen der örtlichen Extreme an etwas abweichenden Expositionen. Es erfährt darum auch die jährliche Temperaturschwankung eine Änderung mit der Exposition. Es werden hiebei nachstehende Grenzwerthe erreicht:

Innthal		Gschnitzthal	
E 40°—67° S...	16·4	E 35°—45° S...	14·3
W 80° N—N....	12·8	S 38°—57° W..	12·3

Diese Winkel- und Temperaturwerthe wurden wie die früher mitgetheilten Extreme der örtlichen Wärmeschwankung durch separate Curvenconstruction bestimmt. Die Richtungen der grössten Jahresamplituden stimmen zum Theile ganz überein, die Lagen der geringsten jährlichen Schwankung sind dagegen gänzlich verschieden (im Innthale N, im Gschnitzthale SW). Dem Zahlenwerthe nach ist die maximale Amplitude im Innthale grösser (um 2·1°).

Indem die SE-Seite sich in Bezug auf ihre Temperaturverhältnisse im Winter an die nördlichen, im Sommer an die südlichen Expositionen anschliesst, erreicht an ihr die jährliche Wärmeschwankung des Erdbodens den grössten Werth. Auf der Isothermentafel des Innthales befindet sich ein den Richtungen E 11°—31° S entsprechender 20° breiter Streifen, welcher sämmtliche Isothermen schneidet und auf der Isothermentafel des Gschnitzthales gibt es wenigstens eine der Richtung E 13° 30′ S entsprechende Linie, welche die tiefste und höchste Isotherme noch tangirt.

Im Gegensatz hiezu ist an der SW-Seite, indem hier die Temperatur im Winter am wenigsten tief sinkt, im Sommer aber nicht so hoch wie im SE steigt, die jährliche Temperaturschwankung am geringsten. Im Innthale fällt zwar der geringste Werth auf die N-Seite, doch hat die SW-Seite wenigstens die zweitkleinste Amplitude.

Wenngleich den eingangs mitgetheilten, aus nur dreijährigen Beobachtungen gerechneten Zahlenwerthen der mittleren Abweichung fast gar keine Bedeutung zukommt, so dürfte es doch kein Zufall sein, dass in beiden Beobachtungsreihen die grösste mittlere Abweichung auf die Exposition der grössten periodischen Temperaturschwankung fällt und die kleinste Veränderlichkeit in die Nähe der geringsten Jahresamplitude zu liegen kommt.

Auf dem im Gschnitzthale stehenden Beobachtungshügel wurden an den vier Hauptrichtungen der Windrose im Herbste 1887 gleichzeitig mit den Wasserflaschen auch Kappeller'sche Maximum- und Minimumthermometer neuer Construction (mit nur einer Alkoholröhre und kurzem Quecksilberfaden) versenkt und im Herbste 1890 wieder herausgehoben. Die dünnwandigen Holzkästchen, in welchen die Thermometer in feinem Sand eingebettet lagen, befanden sich unmittelbar neben den Flaschen und genau in der Tiefe derselben. Im Folgenden sind die an diesen Thermometern abgelesenen extremen Werthe mit jenen verglichen, welche sich durch graphische Extrapolation der entsprechenden Expositionstemperaturcurve jenes Beobachtungsjahres ergeben, welches in demselben Sinne die extremste Abweichung darbot.

Maximum	N	E	S	W
Thermometer	13·9	16·8	17·7	15·5
Flaschenmessung...	14·0	16·4	17·4	15·5

Minimum	N	E	S	W
Thermometer	—2·5	—4·0	0·3	1·0
Flaschenmessung...	—2·2	—1·7	0·3	1·2

Diese Werthe differiren mit Ausnahme der zwei für das Minimum der E-Seite durchschnittlich nur um 0·17° C., so dass der mehr als 13mal so grosse Unterschied von 2·3° zwischen den genannten Minimis wohl auf irgend einen Beobachtungsfehler zurückzuführen ist. Die aus den Maximum- und Minimumthermometern sich ergebenden Temperaturdifferenzen sind:

N	E	S	W
16·4	20·8	17·4	14·5

In diesen aperiodischen Amplituden kommt der Gegensatz zwischen den excessiven östlichen und limitirten westlichen Expo-

sitionen sehr deutlich zum Ausdrucke und würde bei Vergleichung der SE- und SW-Exposition vielleicht noch schärfer hervortreten.

Die Raschheit des Ansteigens und Fallens der Bodentemperatur hängt von der Grösse der jährlichen Temperaturschwankung und der zeitlichen Entfernung der beiden Jahresextreme ab. Da diese zwei Grössen einen verschiedenen örtlichen Verlauf zeigen, ist auch die Raschheit des Steigens und Fallens der Bodenwärme einer Änderung mit der Exposition unterworfen. Die hiebei erreichten Grenzwerthe sind im Folgenden durch die Anzahl der Tage ausgedrückt, denen eine Temperaturänderung von 1° C. entspricht:

Ansteigen:

Innthal		Gschnitzthal	
N 35° E	12·7	N 45° E	13·3
S 55° W	17·1	S 50° W	15·9

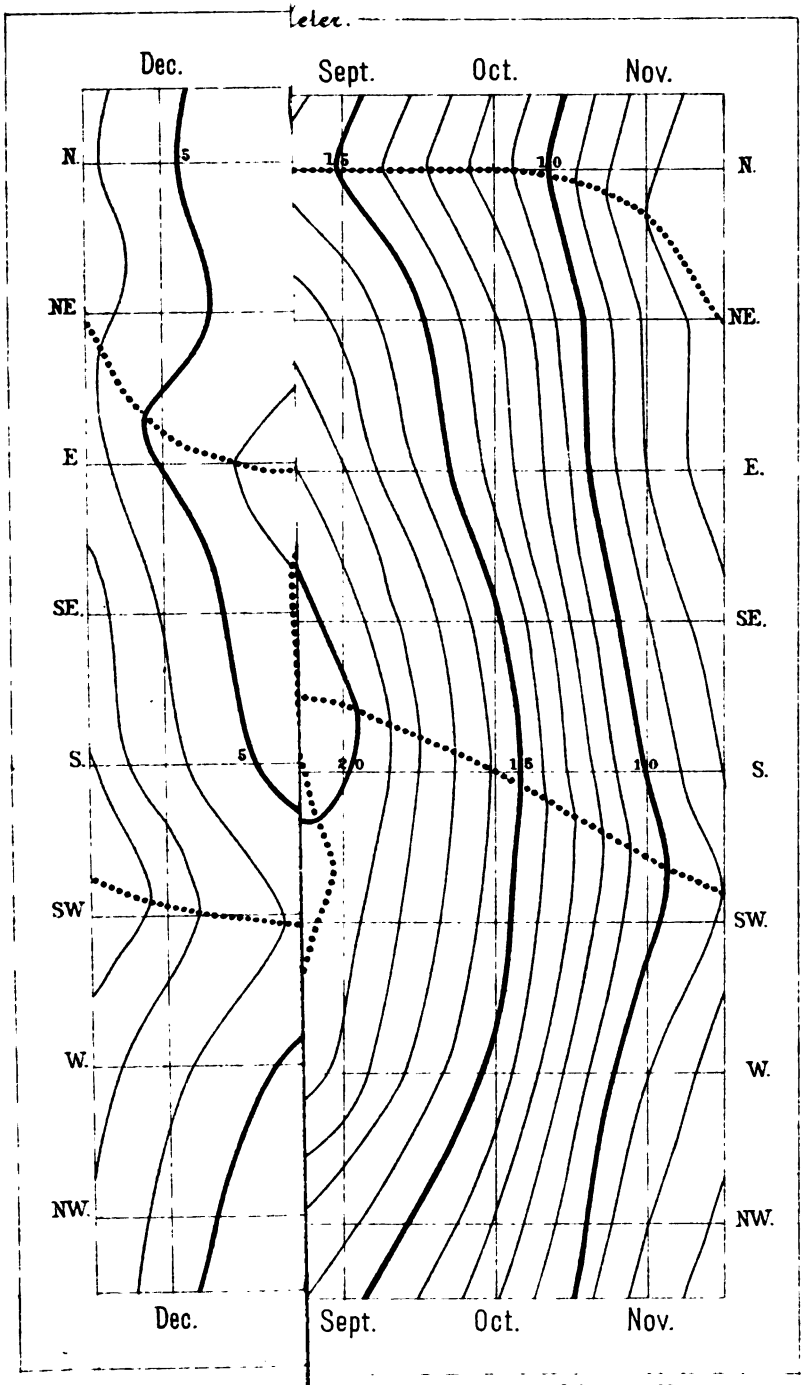
Fallen:

Innthal		Gschnitzthal	
W 85° N	15·0	W 65° N	15·2
E 65° S	7·7	E 45° S	11·5

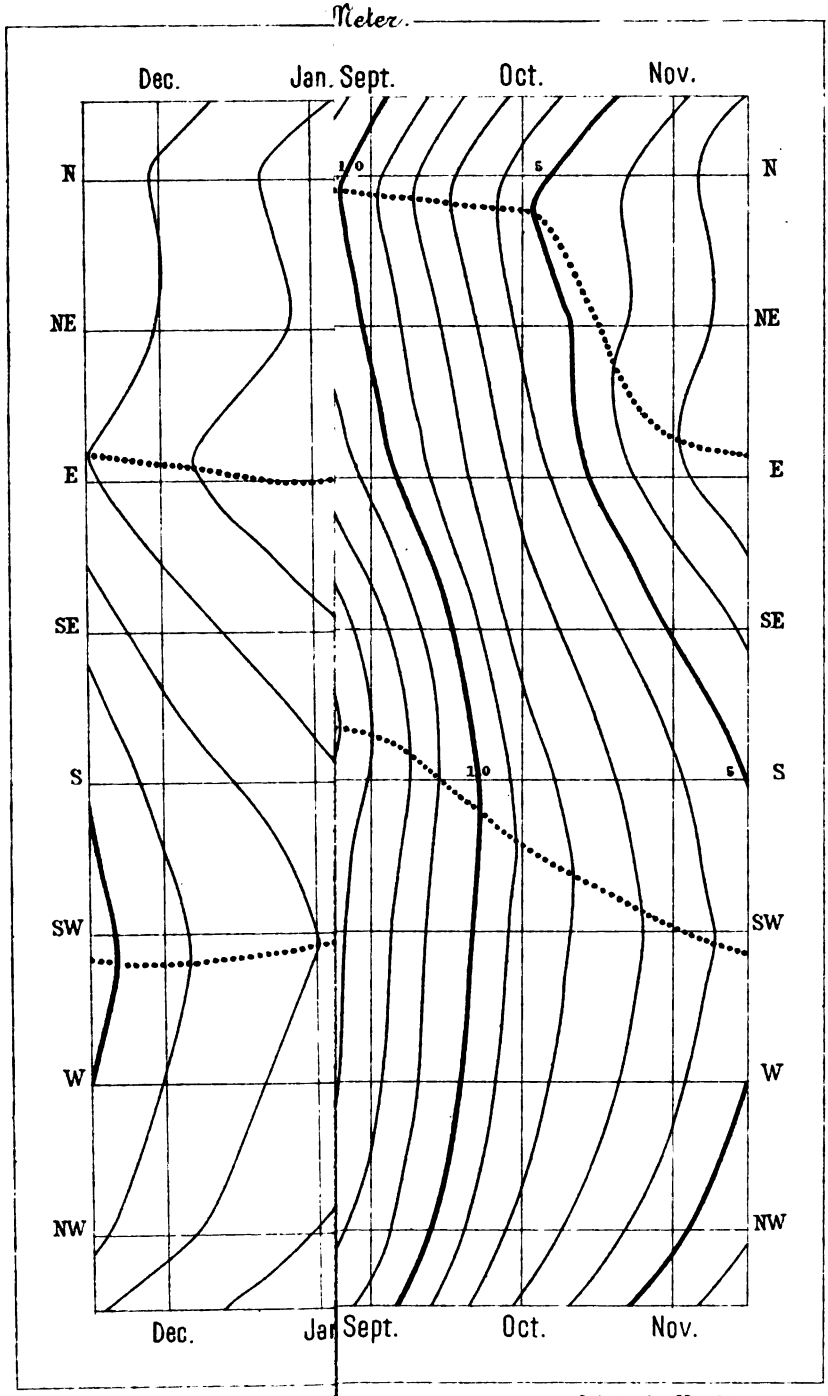
Diese Extreme stimmen in Bezug auf Lage und Zeitwerth ziemlich überein, nur das rascheste Sinken der Temperatur vollzieht sich im Innthale schneller.

Das Ansteigen der Temperatur erfolgt nicht gleichmässig, sondern an allen Expositionen zuerst allmälig, dann von Mitte April bis Mitte Mai sehr schnell, hierauf wieder langsam, das Fallen geht zuerst rasch, dann (im Innthale von Anfang November an, im Gschnitzthale von Mitte October an) langsamer vor sich. Von den im Laufe eines Monates sich vollziehenden Temperaturänderungen ist jene die schnellste, welche von Mitte April bis Mitte Mai an der E-Seite im Gschnitzthale geschieht. Es steigt daselbst die Bodenwärme um 7·7° C., was einer Zunahme von 1° C. in 4 Tagen entspricht. Im Gegensatz hiezu zeigt die Bodentemperatur zwischen der SSW- und WSW-Seite von Mitte Juli bis gegen Ende September im Innthale fast gar keine Veränderung.

Zum Schlusse mögen die theilweise schon mitgetheilten Coordinaten der vier charakteristischen Punkte der Temperatur-



Lith. Anstalt v. J. Barth, Wien, Fünfhaus



Lith. Anstalt v. J. Barth, Wien, Fünfhaus.

fläche, nämlich des höchsten Punktes der Kuppe, des tiefsten Sattelpunktes der Kammlinie, des höchsten Sattelpunktes zwischen den zwei Thälern und des tiefsten Punktes der Mulde nochmals in übersichtlicher Zusammenstellung folgen:

Schnittpunkt der Curve des örtlichen Maximums mit der Curve des Sommermaximums:

Innthal		Gschnitzthal	
E 67° S	4. September . . 20·8	E 76° S	25. August . . . . . 15·0

Schnittpunkt der Curve des örtlichen Maximums mit der Curve des Winterminimums:

Innthal		Gschnitzthal	
S 50° W	15. Jänner . . . . . 5·8	S 38° W	13. Februar . . . . 2·2

Schnittpunkt der Curve des örtlichen Minimums mit der Curve des Sommermaximums:

Innthal		Gschnitzthal	
N	23. August . . . . . 16·1	N	17. August . . . . . 12·4

Schnittpunkt der Curve des örtlichen Minimums mit der Curve des Winterminimums:

Innthal		Gschnitzthal	
N 7° E	5. März . . . . . 3·3	N 13° E	23. Februar . . . —0·8.

Die Differenz zwischen der wenigst hohen Temperatur, bis zu welcher der Boden im Sommer sich erwärmt, und der wenigst tiefen, bis zu welcher er im Winter erkaltet, beträgt im Innthale 10·3°, im Gschnitzthale 10·2° C. Der Unterschied zwischen dem höchsten Werth, welchen die Bodentemperatur im Sommer erreicht, und dem tiefsten, bis zu welchem sie im Winter sinkt, beträgt im Innthale 17·5°, im Gschnitzthale 15·8°. Die ersten zwei Werthe stimmen ganz überein, die absolute periodische Temperaturamplitude ist im Gschnitzthale etwas kleiner.

Über die Absorption des Lichtes in trüben Medien

von

Anton Lampa.

Mit 1 Tafel.)

1.

Das optisch eigenthümliche Verhalten der trüben Medien ist von Clausius[1] und in jüngerer Zeit von Lord Rayleigh[2] benützt worden, um die Farbenerscheinungen der Atmosphäre zu erklären. Die diesen Erklärungsversuchen zu Grunde liegende Thatsache, dass trübe Medien blaues Licht in bedeutend höherem Maasse reflectiren als rothes, war lange bekannt. Schon Leonardo da Vinci benützte sie zur Erklärung der blauen Farbe des Himmels; später wurde ihr von Göthe als „Urphänomen" in der Farbenlehre fundamentale Bedeutung beigelegt; wissenschaftlich aber wurde sie zuerst von Brücke[3] behandelt.

Letzterer zeigt an der Hand der Fresnel'schen Formel für die Intensität des reflectirten Lichtes, dass bei jeder Reflexion Licht kürzerer Wellenlänge stärker zurückgeworfen wird, als Licht grösserer Wellenlänge; während nun bei einmaliger Reflexion dieser Umstand wenig ins Gewicht fällt, wird er sich bei oftmaliger Reflexion, wie sie in einem trüben Medium stattfindet, so stark geltend machen, dass das zurückgeworfene Licht zum grössten Theil Licht kurzer Wellenlänge enthalten, d. h. blau erscheinen muss.

---

[1] Clausius, Pogg. Ann., 72, S. 294 (1847); 76, S. 161 und 188 (1849); 88, S. 543 (1853).

[2] Damals noch Hon. J. W. Strutt, Phil. Mag., 41, p. 107, 274 und 447 (1871).

[3] Brücke, Diese Berichte. 9, S. 530 (1852).

Das Licht grösserer Wellenlänge dagegen geht durch das Medium ungehindert hindurch.

Eine Absorption im gewöhnlichen Sinne des Wortes findet also in einem trüben Medium nicht statt; jedoch soll diese Benennung beibehalten werden zur Bezeichnung der Thatsache, dass die trüben Medien Licht verschiedener Wellenlänge in verschiedenem Maasse durchlassen.

Sowohl Clausius als Rayleigh haben auf Grundlage theoretischer Betrachtungen (l. c.) Formeln für die Intensität des durchgelassenen Lichtes aufgestellt. Clausius, ausgehend von Brechung und Reflexion als Grund der in dem trüben Medium stattfindenden Diffusion des Lichtes, gibt die Formel

$$I = I_0 . e^{-\varkappa\lambda^{-2}l},$$

während Rayleigh's Theorie, welche annimmt, dass die gewöhnlichen Gesetze der Brechung und Reflexion für den Fall, dass die diffundirenden Partikeln klein im Verhältniss zur Wellenlänge sind, nicht mehr gelten, und die diffundirenden Partikeln daher als Störungscentra der einfallenden Wellenbewegung auffasst, die Beziehung

$$I = I_0 . e^{-\varkappa_1\lambda^{-4}l}$$

ergibt. I ist dabei die Intensität des durchgelassenen, I_0 die des einfallenden Lichtes, λ seine Wellenlänge, $\varkappa$ und $\varkappa_1$ Constanten, l die Dicke der absorbirenden Schicht.

Es bleibt Sache des Experiments, diese Formeln zu prüfen und für die eine oder andere der beiden Theorien zu entscheiden. Es liegen zwar Untersuchungen, welche sowohl das sichtbare, als auch das Wärmespectrum betreffen, vor;[1] ein entscheidendes Urtheil ist aber auf Grundlage derselben nicht möglich, so dass eine Wiederaufnahme dieser Frage wünschenswerth erschien. Im Folgenden sollen die Resultate meiner diesbezüglich angestellten Untersuchung mitgetheilt werden.

---

[1] Dr. E. L. Nichols, Trans. Kansas Acad. of Science, 10, 1886. — Dr. N. Mänz, Spectrophotometrische Untersuchungen an trüben Medien. Inaug.-Diss. Marburg 1885. — Abney und Festing, Proc. Roy. Soc., London, 40, p. 378, 1886. — Knut Ängström, Wied. Ann., 36, p. 715, 1889.

2.

Das bei meiner Untersuchung verwendete Instrument war Glan's Spectrophotometer;[1] als Lichtquelle diente ein Argandbrenner, welcher, um paralleles Licht zu erhalten, in den Brennpunkt einer Sammellinse gestellt war. Obzwar ich mich bemühte, die Intensität der Lichtquelle so viel als möglich constant zu halten, war dies in vollem Maasse selbstverständlich nicht möglich. Jedoch überzeugte ich mich, dass das Intensitätsverhältniss des einfallenden zum durchgelassenen Lichte von der absoluten Intensität des einfallenden Lichtes unabhängig ist, so dass die Helligkeitsschwankungen der Lampe auf die Messungen ohne Einfluss blieben. Die Lampe war bis auf einen rechteckigen Ausschnitt abgeblendet, das Arbeitszimmer abgedunkelt, der Apparat vor dem Eindringen fremden Lichtes ausserdem sorgfältig geschützt.

Die absorbirenden Medien brachte ich in planparallelen Glaströgen in der Weise vor der Collimatorspalte an, dass das Vergleichslicht ebenfalls die Wände des nur zur Hälfte gefüllten Troges zu durchsetzen hatte, wodurch die durch Reflexion an den Wänden des Troges hervorgerufene Lichtschwächung für die beiden zu vergleichenden Spectra gleich wurde. Die durch das Wasser, in welchem die diffundirenden Partikeln vertheilt waren, hervorgerufene Absorption war bei den angewendeten Trogdicken überhaupt nicht wahrnehmbar.

Zur Messung selbst musste das Spectrum in Bezirke getheilt werden. Ich wählte dieselben so, dass jeder dem Auge möglichst homogen gefärbt erschien. In Fig. 1 ist diese Eintheilung angegeben.

Was nun das trübe Medium anbelangt, so erschien von allen, welche ich mir herstellte, alkoholische Mastixlösung in Wasser emulgirt, als das geeignetste. Es zeigt dieses trübe Medium die bekannten optischen Eigenthümlichkeiten in hohem Grade; der Bedingung, dass die diffundirenden Partikeln klein im Vergleich zur Wellenlänge sein sollen, genügt es auf das vollkommenste; konnten ja die Partikeln keiner der benützten Emulsionen unter dem Mikroskope wahrgenommen werden, obzwar sie sich bei

[1] P. Glan, Wied. Ann., 1, S. 351, 1877.

einem Durchmesser von $0{\cdot}2\,\mu$ der Beobachtung nicht hätten entziehen können; endlich zeigen die Absorptionscurven, welche Mänz (l. c.) bei seinen Untersuchungen gewonnen hat, bei diesem trüben Medium den regelmässigsten Verlauf, so dass die Aussicht auf die Möglichkeit eines zahlenmässigen Vergleiches mit den Formeln bei Benützung dieses trüben Mediums am grössten war.[1]

Brücke gibt als die zur Herstellung dieses trüben Mediums geeignetste Lösung 1 *g* Mastix auf 87 *g* Alkohol an. Ich benützte folgende Lösungen: Zu den Versuchsreihen

I—XXI, Lösung *A*: 100 *g* absoluten Alkohols, 4·062 *g* Mastix;

XXII—XXV, Lösung *B*: 100 *g* absoluten Alkohols, 5·562 *g* Mastix.

Die Lösung wurde tropfenweise in das ruhig gehaltene Wasser eingeführt, hierauf das Ganze so rasch als möglich verschüttelt. Einzelne der angewendeten Emulsionen stellte ich durch Verdünnung der concentrirteren dar. Durch Vergleichung einer derselben mit einer direct hergestellten überzeugte ich mich, dass das Verdünnen auf die Beschaffenheit des trüben Mediums ohne Einfluss bleibt. Mit der Zeit ändern sich die Emulsionen jedenfalls nur sehr wenig. Ich war nicht im Stande, an einer sechs Wochen aufbewahrten weder mit dem Mikroskop, noch mit dem Spectrophotometer eine Veränderung wahrzunehmen.

3.

Die folgenden Tabellen enthalten die Beobachtungsresultate. Die erste Abtheilung der Tabellen enthält in der ersten Columne den Spectralbezirk, in der zweiten die beobachteten Intensitäten des durchgelassenen Lichtes, die des einfallenden $= 100$ gesetzt.

Die Beobachtungen wurden hierauf durch empirische Formeln dargestellt, welche zur Berechnung der den Wellenlängen

$$\lambda_1 = 0{\cdot}6708\ \mu$$
$$\lambda_2 = 0{\cdot}6563$$
$$\lambda_3 = 0{\cdot}5892$$
$$\lambda_4 = 0{\cdot}5349$$
$$\lambda_5 = 0{\cdot}4861$$

[1] Erst nach Vollendung dieser Arbeit lernte ich die gleichfalls sehr schöne Kreolinemulsion kennen.

zukommenden Intensitäten des absorbirten Lichtes angewendet wurden. Neben diesen Werthen habe ich mit Hilfe der für eine Wellenlänge (λ_1) gefundenen Intensität die den übrigen zugehörigen sowohl nach der Rayleigh'schen, als nach der Clausius'schen Formel berechnet, um einen zahlenmässigen Vergleich zu ermöglichen. Die Resultate dieser Berechnungen sind in der zweiten Abtheilung der Tabellen enthalten.

Die Versuchsreihen I, II, V—VII, IX, XI—XIII, XVII, XXI bis XXIII, XXV mussten wegen allzugrosser Unregelmässigkeit von vornherein von den Vergleichsrechnungen ausgeschlossen werden.

Im Allgemeinen wurden für jeden Spectralbezirk vier Ablesungen gemacht, bei XIII und XV sechzehn, bei XXII—XXV zwanzig, ohne, wie die Resultate zeigen, eine grössere Genauigkeit zu erreichen.

Erste Abtheilung.

Emulsion: H_2O 100 cm^3, Lösung A 1·5 cm^3.

I. $l = 2{\cdot}56$ mm.		II. $l = 3{\cdot}98$ mm.		III. $l = 16{\cdot}14$ mm.		IV. $l = 30{\cdot}1$ mm.	
1	98·98	1	92·40	1	47·40	1	28·23
2	95·75	2	93·88	2	44·49	2	24·30
3	93·21	3	91·69	3	43·79	3	23·27
4	92·66	4	80·19	4	40·4	4	20·02
5	89·2	5	79·32	5	36·69	5	17·93
6	88·03	6	78·68	6	34·09	6	15·83
7	90·01	7	75·96	7	34·48	7	14·19
8	87·79	8	77·16	8	32·85	8	11·72
9	80·96	9	74·43	9	31·04	9	11·41
10	82·25	10	73·69	10	29·74	10	9·77
11	83·83	11	74·30	11	27·05	11	8·35
12	84·04	12	73·30	12	23·77	12	6·88
13	82·33	13	73·96	13	21·31	13	5·63
14	82·60	14	69·34	14	18·93	14	4·5
15	80·63	15	69	15	15·74	15	2·85
16	76·66	16	62·61	16	13·46	16	2·43
17	69·40	17	60·79	17	12·98	17	1·89
18	71·21	18	53·34	18	11·58	18	1·42
19	71·12	19	53·78	19	9·06	19	0·91
20	67·19	20	52·02	20	7·03	20	0·33

Emulsion: H_2O 91·5 cm^3, Lösung *A* 0·9 cm^3.

	V. $l = 2{\cdot}56$ mm.		VI. $l = 3{\cdot}98$ mm.		VII. $l = 16{\cdot}14$ mm.		VIII. $l = 30{\cdot}1$ mm.
1	100	1	96·37	1	63·92	1	40·70
2	100	2	98·83	2	58·12	2	37·90
3	99·76	3	94·52	3	58·45	3	36·64
4	97·91	4	95·30	4	60·65	4	32·47
5	99·62	5	88·38	5	58·23	5	30·79
6	97·90	6	86·10	6	56·29	6	27·95
7	93·42	7	84·99	7	55·02	7	26·87
8	97·17	8	86·72	8	54·12	8	24·55
9	96·45	9	84·79	9	50·09	9	23·80
10	96·33	10	85·90	10	49·54	10	22·39
11	96·77	11	81·91	11	45	11	19·75
12	96·60	12	82·89	12	42·98	12	17·26
13	96·09	13	85·55	13	40·62	13	15·93
14	94·52	14	84·29	14	37·95	14	13·82
15	91·77	15	80·18	15	36·43	15	12·10
16	91·35	16	78·37	16	31·98	16	9·70
17	83·31	17	75·51	17	28·66	17	7·76
18	85·60	18	77·53	18	27·14	18	6·81
19	85·24	19	76·56	19	25·79	19	6·54
20	89·06	20	71·22	20	22·78	20	5·18

Emulsion: H_2O 73·85 cm^3, Lösung *A* 0·39 cm^3.

	IX. $l = 16{\cdot}14$ mm.		X. $l = 30{\cdot}1$ mm.
1	79·79	1	61·08
2	77·44	2	60·38
3	74·25	3	59·04
4	74·07	4	56·29
5	69·13	5	54·88
6	64·63	6	51·69
7	65·66	7	49·41
8	66·15	8	46·95
9	66·72	9	44·08
10	65·43	10	44·91
11	67·37	11	43·14
12	67·46	12	38·99
13	67·36	13	37·46
14	65·59	14	34
15	62·67	15	30·54
16	56·79	16	28·31
17	58·30	17	27·14
18	59·26	18	25·83
19	53·57	19	24·23
20	48·90	20	20·72

Emulsion: H_2O 100 cm^3, Lösung *A* 1 cm^3.

	XII. $l = 10$ mm.		XIII. $l = 10$ mm.
1	82·60	λ_1	69·8
2	81·14	λ_2	68·79
3	82·79	λ_3	58·96
4	78	λ_4	49·98
5	71	λ_5	35·87
6	70·40		
7	68·54		
8	67·71		
9	69·80		
10	67·71		
11	66·40		
12	59·26		
13	59·63		
14	57·05		
15	52·63		
16	48·90		
17	46·97		
18	45·33		
19	43·56		
20	39·10		

Anmerkung. XI, eine Wiederholung von I, wurde mit diesem vereinigt.

Emulsion wie bei XII und XIII.

XIV. $l=30{\cdot}1\,mm$.	
1	35·82
2	34·73
3	31·68
4	31·09
5	27·64
6	25·39
7	24·15
8	22·76
9	21·03
10	19·80
11	16·51
12	14·49
13	13·25
14	11·80
15	10·42
16	9·66
17	6·02
18	5·18
19	3·98
20	3·15

XV. $l=30{\cdot}1\,mm$.	
λ_1	34·24
λ_2	30·55
λ_3	20·72
λ_4	12·47
λ_5	5·32

Emulsion: H_2O 50 cm^3, Lös. A 1 cm^3.

XVI. $l=16{\cdot}14\,mm$.	
1	38·03
2	37·72
3	34·88
4	34·24
5	34·48
6	32·57
7	27·39
8	28·14
9	28·96
10	24·84
11	23·73
12	20·75
13	18·06
14	15·75
15	11·83
16	9·92
17	7·72
18	5·92
19	6·07
20	4·30

Emulsion: H_2O 93·24 cm^3, Lös. A 1 cm^3.

XVIII. $l=30{\cdot}1\,mm$.	
1	28·23
2	26·24
3	25·75
4	24·03
5	21·53
6	18·90
7	16·64
8	14·57
9	14·21
10	12·98
11	10·79
12	9·31
13	7·68
14	6·59
15	5·29
16	4·31
17	3·29
18	2·50
19	1·83
20	1·30

Emulsion: H_2O 50 cm^3, Lösung A 1 cm^3.

XIX. $l=10{\cdot}mm$.	
1	59·41
2	56·29
3	53·85
4	52·42
5	50·06
6	45·03
7	42·58
8	40·45
9	40·01
10	36·58
11	34·34
12	30·64
13	25·67
14	24
15	20·51
16	19
17	15·40
18	12·93
19	11·33
20	9·64

Emulsion: H_2O 75 cm^3, Lösung A 1 cm^3.

XX. $l=10\,mm$.	
1	66·56
2	66·40
3	65·91
4	62·9
5	60·45
6	58·74
7	57·50
8	54·47
9	53·24
10	50·71
11	47·71
12	45·93
13	42·58
14	39·09
15	34·78
16	32·9
17	30·37
18	28·91
19	23·88
20	21·99

Emulsion: H_2O 100 cm^3, Lösung A 1 cm^3.

XXI. $l=10\,mm$.	
1	82·50
2	77·35
3	76·98
4	74·34
5	71·35
6	71
7	70·74
8	66·56
9	63·6
10	64·23
11	64·07
12	62·51
13	59·56
14	54·81
15	56·57
16	46·72
17	42·86
18	44·91
19	35·32
20	31·91

Anmerkung. XVII war eine Wiederholung von XVI.

Emulsion: H_2O 50 cm^3, Lösung B 0·8 cm.

XXII. l=2·56 mm.		XXIII. l=3·98 mm.		XXIV. l=16·14 mm.		XXV. l=30·1 mm.	
1	100	1	78·28	1	25·12	1	5·13
7	83·29	7	65·19	7	11·55	7	0·83
13	70·57	13	52·16	13	4·35	13	0·04
17	56·79	17	41·11	17	1·04	17	0·008
20	45·69	20	31·23	20	0·13	20	0

Zweite Abtheilung.

III.

Well. l.	Beob.	Rayleigh	Clausius
λ_1	46·9	46·9	46·9
λ_2	44·4	43·8	45·4
λ_3	33·7	28·1	37·5
λ_4	21·9	15·4	30·4
λ_5	12·1	6·4	23·7

IV.

Well. l.	Beob.	Rayleigh	Clausius
λ_1	28·7	28·7	28·7
λ_2	25·5	25·6	27·1
λ_3	13·2	12·3	19·8
λ_4	4·5	4·5	14
λ_5	1·6	1·9	9·3

VIII.

Well. l.	Beob.	Rayleigh	Clausius
λ_1	41·2	41·2	41·2
λ_2	38·3	38	39·6
λ_3	26·6	22·6	31·7
λ_4	16·2	11·2	24·8
λ_5	8·1	4	18·5

X.

Well. l.	Beob.	Rayleigh	Clausius
λ_1	61·4	61·4	61·4
λ_2	58·9	58·8	60·1
λ_3	48·3	44·1	53·2
λ_4	37·8	30	46·5
λ_5	27·5	17·1	39·6

XIV.

Well. l.	Beob.	Rayleigh	Clausius
λ_1	36·2	36·2	36·2
λ_2	33·7	33	34·6
λ_3	23·2	18·2	26·8
λ_4	14·1	8·1	20·21
λ_5	6·8	2·5	14·4

XV.

Well. l.	Beob.	Rayleigh	Clausius
λ_1	34·2	34·2	34·2
λ_2	30·6	31	32·6
λ_3	20·7	16·5	24·9
λ_4	12·5	7·1	18·5
λ_5	5·3	2·1	13

XVI.

Well.l.	Beob.	Rayleigh	Clausius
λ_1	39·3	39.3	39·3
λ_2	37·2	36·1	37·7
λ_3	28·3	20·8	29·8
λ_4	19·1	9·9	23
λ_5	9·5	3·4	16·9

XVIII.

Well.l.	Beob.	Rayleigh	Clausius
λ_1	28·6	28·6	28·6
λ_2	26·3	25·5	27
λ_3	17·2	12·2	19·7
λ_4	9·1	4·5	14
λ_5	3·1	1·1	9·2

XIX.

Well.l.	Beob.	Rayleigh	Clausius
λ_1	59·9	59·9	59·9
λ_2	56·6	57·1	58·5
λ_3	42·4	42·3	51·5
λ_4	28·5	28·2	44·7
λ_5	15	15·5	37·7

XX.

Well.l.	Beob.	Rayleigh	Clausius
λ_1	70·4	70·4	70·4
λ_2	67·6	68	69·3
λ_3	55·8	55·5	63·5
λ_4	42·6	41·9	57·6
λ_5	28·8	28	51·3

XXIV.

Well.l.	Beob.	Rayleigh	Clausius
λ_1	25·1	25·1	25·1
λ_2	22·4	22·1	23·6
λ_3	10·5	9·8	16·7
λ_4	4·2	3·3	11·4
λ_5	0·9	0·7	7·2

Ein Überblick über diese zweite Abtheilung der Tabellen zeigt, dass die Beobachtungsresultate den nach Rayleigh's Formel berechneten Werthen näher kommen als den nach der Formel von Clausius bestimmten; jedenfalls entspricht der allgemeine Gang der Beobachtungen insoferne der Rayleigh'schen Theorie besser als der Clausius'schen, als die Differenzen der den aufeinanderfolgenden λ entsprechenden Intensitäten des durchgelassenen Lichtes stets den entsprechenden nach Rayleigh's Formel näher kommen, als denselben nach der Formel

Fig. 3.

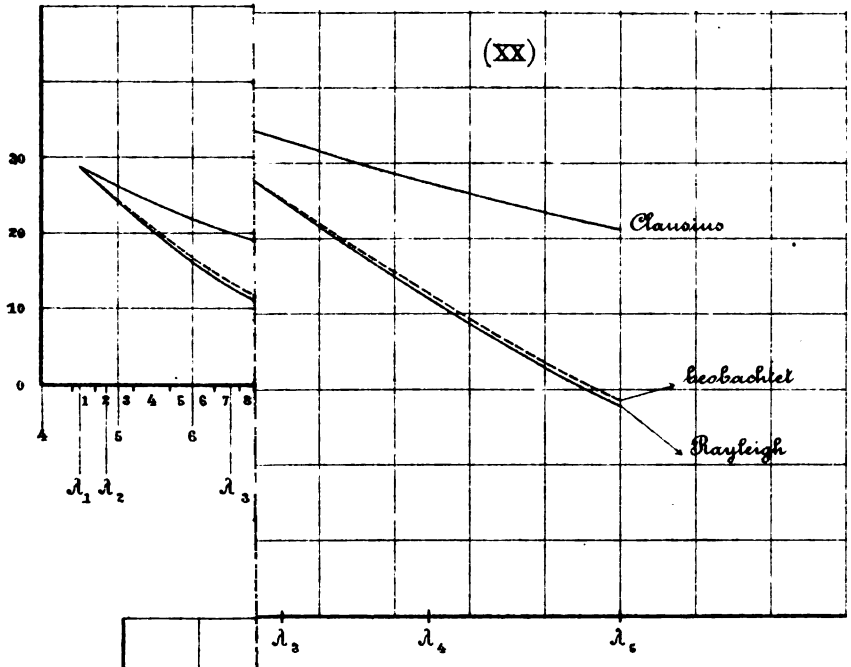
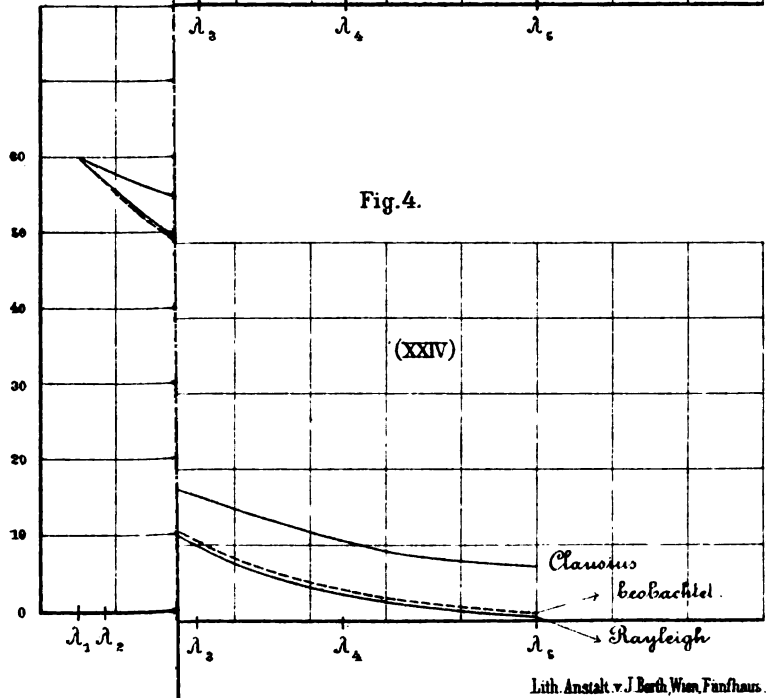


Fig. 4.



Lith. Anstalt v. J. Barth, Wien, Fünfhaus.

von Clausius gefundenen. Die Resultate IV, XIX, XX und XXIV (welche in den Fig. 1, 2, 3 und 4 graphisch dargestellt sind), entscheiden aber die Frage vollkommen zu Gunsten der Rayleigh'schen Theorie.

4.

Ich habe im Verlaufe dieser Arbeit auch die Frage zu beantworten gesucht, ob die relative Dichtigkeit des trüben Mediums auf die Absorption einen Einfluss hat oder nicht. Ich habe mir zu diesem Zwecke Emulsionen hergestellt von der Art, dass ihre Concentrationen sich verhielten umgekehrt wie zwei Trogdicken; die zweite Emulsion enthielt dann auf eine grössere Strecke ebenso viele Partikeln, wie die erste auf eine kürzere. In dieser Beziehung zu einander stehen die Messungen VI und I, X und VII, XVIII und XVI.

Sie sprechen dafür, dass das verdünntere Medium stärker absorbirt als das dichtere. Ein bestimmtes Urtheil lässt sich aber auf Grundlage dieser bei so geringem Dickenunterschiede der Tröge durchgeführten Messungen über diesen Punkt nicht abgeben.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. Band. VI. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

XIII. SITZUNG VOM 4. JUNI 1891.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer in Wien übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz, betitelt: „Oxydationsversuche in der Chinolinreihe", von G. v. Georgievics.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Constantin Freih. v. Ettingshausen übersendet eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Prof. Franz Krašan in Graz verfasste Abhandlung, betitelt: „Untersuchungen über Deformationen im Pflanzenreiche".

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: „Über die Ringfunctionen".

Der Secretär legt eine von Prof. Wilhelm Binder in Wiener-Neustadt eingelangte Abhandlung vor, betitelt: „Zur Theorie der circularen Plancurven dritter Ordnung vom Geschlechte $p = 0$".

Herr Prof. Dr. J. Puluj in Prag zeigt an, dass er die in den Sitzungen vom 23. April und 8. Mai l. J. vorgelegten beiden Arbeiten in eine Abhandlung vereinigt habe und übersendet dieselbe unter dem Titel: „Über die Wirkungen gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduction".

Herr Johann Robitschek, emerit. Hochschul-Assistent in Baden (bei Wien) übersendet eine Mittheilung über die *Phylloxera vastatrix* und übermittelt ein versiegeltes Schreiben behufs

Wahrung der Priorität, welches die Aufschrift führt: „Beiträge zur Kenntniss der *Phylloxera vastatrix*".

Der Secretär der Classe, Prof. E. Suess, legt eine Abhandlung unter dem Titel vor: „Beiträge zu einer morphologischen Eintheilung der Bivalven" aus den hinterlassenen Schriften des c. M. Prof. M. Neumayr, mit einem Vorworte von dem w. M. E. Suess.

Selbständige Werke, oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Marenzeller, E. v., Zur Erforschung der Meere und ihrer Bewohner. Gesammelte Schriften des Fürsten Albert I. von Monaco. (Aus dem Französischen.) (Mit 49 Abbildungen.) Wien 1891, 8°.

Über die Ringfunctionen

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Die Kugelfunctionen erster und zweiter Art $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ bilden einerseits ein Fundamentalsystem von Integralen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$$

anderseits sind sie, abgesehen von constanten Factoren, die Näherungsnenner und Restfunctionen der regulären Kettenbruchentwicklung der Function $\log\frac{1+x}{1-x}$. Aus der letzten Eigenschaft folgt für die Kugelfunctionen zweiter Art sofort das zuerst von Herrn F. E. Neumann in seiner Abhandlung „Über eine Entwicklung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reciproken Entfernung zweier Punkte in Reihen, welche nach den Laplace'schen Y^n fortschreiten und Anwendung dieser Reihen zur Bestimmung des magnetischen Zustandes eines Rotationsellipsoides, welcher durch vertheilende Kräfte bewirkt wird“[1] aufgestellte Integral

$$Q_n(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(y)\,dy}{x-y}.$$

Dasselbe führt unmittelbar zu der zuerst von Herrn E. Heine[2] bewiesenen Entwicklung

---

[1] Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle, 37. Bd., S. 21—50.

[2] „Theorie der Anziehung eines Ellipsoides.“ Journal für die reine und angewandte Mathematik von Crelle, 42. Bd.

$$\frac{1}{x-y} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1)\, Q_n(x)\, P_n(y),$$

welche besteht, so lange die durch den Punkt y gelegte Ellipse mit den Brennpunkten -1 und $+1$ von der confocalen durch x gehenden eingeschlossen wird. Ausser der eben angeführten bemerkenswerthen Entwicklung der Function $\frac{1}{x-y}$, welche ein interessantes Seitenstück zu der Darstellung derselben durch eine für alle dem absoluten Betrage nach unterhalb x liegenden y giltige geometrische Reihe bildet, hat Herr E. Heine in der zweiten Auflage seines wichtigen „Handbuches der Kugelfunctionen" noch folgende zwei weitere, innerhalb desselben Bereiches wie die erwähnte Kugelfunctionenreihe geltende Darstellungen für dieselben angegeben

$$\frac{1}{x-\cos y} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (x - \sqrt{x^2-1})^n \cos ny \right\}$$

$$\frac{1}{x-\cos y} = 2 \sum_{n=0}^{n=\infty} (x - \sqrt{x^2-1})^{n+1} \frac{\sin (n+1)y}{\sin y}.$$

Eine andere derselben Kategorie angehörige Entwicklung stellte Herr C. Neumann im Jahre 1864 in seiner interessanten Schrift: „Zur Theorie der Elektricitäts- und Wärmevertheilung in einem Ringe" auf. Da die reciproke Entfernung zweier Punkte mit den dipolaren Coordinaten ρ, ϑ, φ und $\rho_1, \vartheta_1, \varphi_1$, deren man sich bei der Behandlung der auf das Potential eines Ringes bezüglichen Aufgaben mit Vortheil bedient, durch den Ausdruck

$$\frac{\sqrt{\cos i\vartheta - \cos \rho}\, \sqrt{\cos i\vartheta_1 - \cos \rho_1}}{r \sqrt{2} \sqrt{\cos i\vartheta \cos i\vartheta_1 + \sin i\vartheta \sin i\vartheta_1 \cos(\varphi - \varphi_1) - \cos(\rho - \rho_1)}}$$

gegeben ist, so wurde er bei der erwähnten Untersuchung zunächst auf die Aufgabe geführt, einen Ausdruck von der Form $\frac{1}{\sqrt{x-\cos y}}$ nach den Cosinus der Vielfachen von y zu entwickeln. Hiebei ergab sich ein allerdings erst von Herrn E. Heine im Jahre 1880

ausdrücklich hervorgehobenes, äusserst bemerkenswerthes Resultat. Verallgemeinert man nämlich die Definition der Kugelfunctionen zweiter Art dadurch, dass man auch gebrochene Indices zulässt, so lässt sich die von Herrn C. Neumann gefundene Formel in folgender Weise schreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{x-\cos y}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(x) \cos ny,$$

so dass also der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\varphi+\alpha^2}}$ einerseits bei der Entwicklung nach steigenden Potenzen von α die Kugelfunctionen erster Art mit ganzzahligen Indices liefert, während anderseits seine Entwicklung nach den Cosinus der Vielfachen von φ zu den Kugelfunctionen zweiter Art mit Indices, welche ungerade Vielfache von $\frac{1}{2}$ sind, führt. Diese verallgemeinerten Kugelfunctionen zweiter Art und die in gleicher Weise erweiterten Kugelfunctionen erster Art nennt man wegen ihrer Beziehung zu dem Potential eines Ringes Ringfunctionen zweiter, beziehungsweise erster Art. Eigenschaften derselben wurden a. a. O. von den Herren C. Neumann und E. Heine, sodann von dem englischen Mathematiker Hicks[1] und von Herrn Hugo Hübschmann[2] abgeleitet.

Da die Functionen $C_n^{\nu}(x)$ und $D_n^{\nu}(x)$, welche bekanntlich ein Fundamentalsystem von Integralen der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1-x^2)y''-(2\nu+1)xy'+n(n+2\nu)y=0$$

bilden und deren erste einerseits der mit einer Constanten multiplicirte n^{te} Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung der hypergeometrischen Reihe $x^{-1}F\left(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right)$, anderseits der Coëfficient von α^n in der Entwicklung der Function

[1] „On toroidal functions," Philosophical Transactions of the royal society of London. Vol. 173, Part. III, p. 609—653. 1881.

[2] „Die Ringfunctionen und ihre Anwendung auf die elektrostatischen Probleme des Ringes."

$\frac{1}{(1-2\alpha x+\alpha^2)^\nu}$ nach steigenden Potenzen von α ist, die naturgemässe Verallgemeinerung der beiden Arten von Kugelfunctionen bilden, so wird man durch zweckmässige Verallgemeinerung ihrer Definition zu einer entsprechenden Erweiterung der Ringfunctionen gelangen, und es wird durch die Untersuchung dieser allgemeineren Functionen auf die gewöhnlichen Ringfunctionen nicht nur ein neues Licht geworfen werden, sondern auch ähnlich, wie bei den Kugelfunctionen, die Ermittlung ihrer Eigenschaft meistens in einfacherer Weise als bisher erfolgen können. Eine solche geeignete Ausdehnung ergibt sich durch die Entwicklung einer Potenz des Bruches $\frac{1}{x-y}$ nach den Functionen $C_n^\nu(x)$, in der alle bisher erwähnten Darstellungen als specielle Fälle enthalten sind, wodurch auch der zwischen diesen bestehende innige Zusammenhang aufgedeckt wird. Diese Entwicklung soll im ersten Paragraph der vorliegenden kurzen Mittheilung aufgestellt werden, während in den folgenden einige Relationen und Sätze über die verallgemeinerten Ringfunctionen enthalten sind.

§. 1. Die Functionen $D_n^\nu(x)$ wurden von mir durch folgende Gleichung definirt

$$D_n^\nu(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Pi(n+2\nu+2\lambda-1)}{2^{n+2\lambda+1}\,\Pi(n+\nu+\lambda)\,\Pi(\lambda)\,x^{n+2\nu+2\lambda}} \qquad (|x|>1)$$

$$= \frac{\Pi(n+2\nu-1)}{2^{n+1}\,\Pi(n+\nu)\,x^{n+2\nu}} F\left(\frac{n}{2}+\nu, \frac{n+1}{2}+\nu, n+\nu+1, x^{-2}\right),$$

wo n, wie in den folgenden Entwicklungen, eine ganze nicht negative Zahl vorstellt. Da der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Ausdruck einen Sinn behält, so lange keine der Zahlen $n+2\nu-1$ und $n+\nu$ negativ ganzzahlig ist, so kann man die dem unteren Index dieser Function auferlegte Beschränkung fallen lassen und unter demselben irgend eine reelle Zahl verstehen, für welche die angegebene Reihe convergirt.

Es besteht nun, wie ich früher gezeigt habe,[1] für $|x|>1$ die Gleichung

[1] „Zur Theorie der Functionen $C_n^\nu(x)$." Denkschr. der k. Akad. der Wissenschaften, mathem.-naturw. Cl., 48. Bd.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(y)\,dy}{(x-y)^{\nu+\rho}} = \frac{\Pi(\nu-1)\Pi(\nu+\rho+n-1)\Pi(n+2\nu-1)}{2^{n+1}\Pi(n+\nu)\Pi(n)\Pi(\nu+\rho-1)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{2^\nu \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2 \frac{1}{x^{n+\nu+\rho}} F\left(\frac{n+\nu+\rho}{2}, \frac{n+\nu+\rho+1}{2}\, n+\nu+1, x^{-2}\right).$$

Verbindet man dieselbe mit der letzten Relation, so gelangt man sofort zu der Formel

$$D_{n+\nu-\rho}^\rho(x) = \frac{\Pi(n)\Pi(\nu+\rho-1)}{2^{\nu-\rho}\Pi(\nu-1)\Pi(n+2\nu-1)} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^\nu \Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 \cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{+1} \frac{(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(y)\,dy}{(x-y)^{\nu+\rho}} \qquad (|x|>1) \qquad 1)$$

Dieses Integral führt wegen der Relation

$$\int_{-1}^{+1} (1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(y)\, C_m^\nu(y)\, dy =$$

$$= \frac{2^{2\nu-1}\Pi(n+2\nu-1)\,\delta_{n,m}}{(n+\nu)\,\Pi(n)} \left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2 \quad \begin{matrix}(\delta_{m,n}=0,\ m \gtrless n;\\ \delta_{n,n}=1)\end{matrix}$$

zu der Entwicklung

$$\frac{1}{(x-y)^{\nu+\rho}} = \frac{2^{2\nu-1}\Pi(\nu-1)}{\Pi(\nu+\rho-1)} \sum_{n=0}^{n=\infty} (n+\nu)\, D_{n+\nu-\rho}^\rho(x)\, C_n^\nu(y), \qquad 2)$$

welche, wie man leicht zeigen kann, für alle der Bedingung

$$|y-\sqrt{y^2-1}| < (x-\sqrt{x^2-1})$$

genügenden Werthepaare x, y gilt.

Setzt man in dieser allgemeinen Formel der Reihe nach $\rho = 1-\nu, \nu, \frac{1}{2}$; $\nu = \frac{1}{2}$, 1, 0, und berücksichtigt die Gleichungen

$$C_n^1(\cos y) = \frac{\sin(n+1)y}{\sin y}$$

$$\left[\frac{1}{\nu}\, C_n^\nu(\cos y)\right]_{\nu=0} = \frac{2}{n} \cos ny,$$

so erhält man die bemerkenswerthen speciellen Relationen

$$\frac{1}{x-y} = 2^{2\nu}\Pi(\nu-1)\sum_{n=0}^{n=\infty}(n+\nu)D_{n+2\nu-1}^{1-\nu}(x)\,C_n^{\nu}(y)$$

$$\frac{1}{(x-y)^{2\nu}} = \frac{2\Pi(\nu-1)}{\Pi(2\nu-1)}\sum_{n=0}^{n=\infty}(n+\nu)D_n^{\nu}(x)\,C_n^{\nu}(y)$$

$$\frac{1}{(x-y)^{\nu+\frac{1}{2}}} = \frac{2^{2\nu+\frac{3}{2}}\Pi(\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{n=\infty}(n+\nu)\,Q_{n+\nu-\frac{1}{2}}(x)\,C_n^{\nu}(y)$$

$$\frac{1}{(x-y)^{\frac{1}{2}+\rho}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\rho-\frac{1}{2}}\Pi\left(\rho-\frac{1}{2}\right)}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)D_{n-\rho+\frac{1}{2}}^{\rho}(x)\,P_n(y)$$

$$\frac{1}{(x-y)^{\rho+1}} = \frac{1}{2^{\rho}\Pi(\rho)}\sum_{n=0}^{n-\infty}(n+1)D_{n-\rho+1}^{\rho}(x)\,\frac{\sin(n+1)y}{\sin y}$$

$$\frac{1}{(x-y)^{\rho}} = \frac{1}{2^{\rho-2}\Pi(\rho-1)}\sum_{n=0}^{n=\infty}D_{n-\rho}^{\rho}(x)\cos ny. \qquad 3)$$

Die erste von diesen speciellen Gleichungen zeigt, dass die Functionen $D_{n+2\nu-1}^{1-\nu}(x)$, wie ich schon früher angegeben habe, sich von den Restfunctionen der regulären Kettenbruchentwicklung der hypergeometrischen Reihe $x^{-1}F\left(1, \frac{1}{2}, \nu+1, x^{-2}\right)$ nur durch constante Factoren unterscheiden, während sich aus der ersten, dritten und vierten durch passende Specialisirung von ν und ρ die im Anfange erwähnten Heine'schen und C. Neumann-Heine'schen Entwicklungen ergeben.

Benützt man die von mir aufgestellte Formel

$$C_n^{\nu}(x) = \frac{(-2)^n\Pi(n+\nu-1)\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)\Pi(\nu-1)\Pi(2n+2\nu-1)}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\left[(1-x^2)^{\frac{2n+2\nu-1}{2}}\right]^{(n)},$$

so kann man durch n-malige partielle Integration auf der rechten Seite der Gleichung 1) folgende Formel herleiten:

$$D^{\rho}_{n+\nu-\rho}(x) = \frac{2^{n+\rho-\nu}\,\Pi(n+\nu-1)\,\Pi(n+\nu+\rho-1)}{\Pi(2n+2\nu-1)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{2^{\nu}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 \int_{-1}^{+1} \frac{(1-y^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}\,dy}{(x-y)^{n+\nu+\rho}}, \qquad 4)$$

während man mit Hilfe der Relation

$$\left[(1-x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}}\,C^{\nu+1}_{n-1}(x)\right]' = -\frac{n(n+2\nu)}{2\nu}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C^{\nu}_{n}(x)$$

die Formel

$$D^{\rho}_{n+\nu-1}(x) = \frac{\Pi(n-1)\,\Pi(\nu+\rho-1)}{2^{\nu-\rho+1}\,\Pi(\nu)\,\Pi(n+2\nu)}\left[\frac{\Pi(2\nu)}{2^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 \cdot$$

$$\cdot \int_{-1}^{+1} \frac{(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C^{\nu+1}_{n-1}(y)\,dy}{(x-y)^{\nu+\rho+1}} \qquad 5)$$

ermittelt.

Es mag übrigens bemerkt werden, dass man das in der Gleichung 1) auftretende Integral sofort aus der für die Function $D^{\rho}_{n+\nu-\rho}(x)$ angegebenen Reihe ableiten kann, indem man die Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von $\frac{1}{x^2}$ durch bestimmte Integrale ausdrückt. Beachtet man nämlich, dass

$$\int_{-1}^{+1} y^{\varkappa}(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C^{\nu}_{\lambda}(y)\,dy = 0$$

ist, falls $\varkappa < \lambda$ oder $\varkappa+\lambda$ ungerade ist, während in den anderen Fällen die Beziehung

$$\int_{-1}^{+1} y^{\varkappa}(1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}\,C^{\nu}_{\lambda}(y)\,dy =$$

$$= \frac{\Pi(\varkappa)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(\lambda+2\nu-1)}{2^{\varkappa+1}\,\Pi\left(\frac{\varkappa-\lambda}{2}\right)\Pi\left(\frac{\varkappa+\lambda}{2}\right)\Pi(\lambda)}\left[\frac{2^{\nu}\,\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2$$

stattfindet, so kann man der erwähnten Reihe folgende Form geben

$$D^{\rho}_{n+\nu-\rho}(x) = \frac{\Pi(n)\,\Pi(\nu+\rho-1)}{2^{\nu-\rho}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\Pi(\nu+\rho+\lambda-1)}{\Pi(\lambda)\,x^{\nu+\rho+\lambda}} \int_{-1}^{+1} (1-y^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} y^{\lambda} C^{\nu}_{n}(y)\,dy,$$

welche unmittelbar zu dem auf anderem Wege erhaltenen Integralausdrucke führt.

Aus der Gleichung 2) ersieht man, dass die Function $D^{\rho}_{n+\nu-\rho}(x)$, welche desshalb von nun an mit $R^{\rho,\nu}_{n,2}(x)$ bezeichnet werden mag, die naturgemässe Verallgemeinerung der n^{ten} Ringfunction zweiter Art bildet; durch die Gleichung 3) würde man auf die speciellere Function

$$R^{\rho,0}_{n,2}(x) = \frac{2^{\rho-1}\,\Pi(\rho-1)}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\cos ny\,dy}{(x-\cos y)^{\rho}} = \frac{2^{\rho-1}\,\Pi(n+\rho-1)}{1.3.5\ldots(2n-1)\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-y^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dy}{(x-y)^{n+\rho}}$$

geführt werden.

Zu den bisher aufgestellten Integralen für die verallgemeinerte Ringfunction zweiter Art kann man auf Grund von Relationen, welche ich früher mitgetheilt habe, sofort die drei folgenden hinzufügen

$$R^{\rho,\nu}_{n,2}(x) = \frac{x^{\rho-1}}{i^{n+\nu}} \int_{0}^{\infty} e^{-xz}\, z^{\rho-1}\, J^{n+\nu}(iz)\,dz$$

$$R^{\rho,\nu}_{n,2}(x) = \frac{\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi\left(-\frac{n+\nu+\rho+1}{2}\right)}{2^{n+\nu+1}\,\Pi\left(\frac{n+\nu+\rho}{2}-1\right)} \cdot \int_{0}^{\infty} y^{\rho-1}\, J^{n+\nu}(y)\cos(xy)\,dy \qquad \left(\rho < \frac{3}{2}\right)$$

$$R^{\rho,\nu}_{n,2}(x) = \frac{\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi\left(-\frac{n+\nu+\rho}{2}\right)}{2^{n+\nu+1}\,\Pi\left(\frac{n+\nu+\rho-1}{2}\right)} \cdot \int_{0}^{\infty} y^{\rho-1}\, J^{n+\nu}(y)\cos(xy)\,dy \qquad \left(\rho < \frac{3}{2}\right).$$

§. 2. Differentiirt man die Gleichung 1) r-mal nach x, so erhält man die Relation

$$\frac{d^r R^{\rho,\nu}_{n,2}(x)}{dx^r} = (-2)^r R^{\rho+r,\nu}_{n,2}(x)\,. \qquad 6)$$

Verbindet man ferner die Gleichung 5) mit den bekannten Relationen

$$2\nu(1-y^2)\,C^{\nu+1}_{n-1}(y) = (n+2\nu-1)\,C^{\nu}_{n-1}(y) - y\,C^{\nu}_{n}(y)$$
$$2\nu(1-y^2)\,C^{\nu+1}_{n-1}(y) = (n+2\nu)\,y\,C^{\nu}_{n}(y) - (n+1)\,C^{\nu}_{n+1}(y)$$

so erhält man sofort die neuen Gleichungen

$$R^{\rho+1,\nu}_{n-1,2}(x) = x\,R^{\rho+1,\nu}_{n,2}(x) + \frac{(n+\nu-\rho)}{2}\,R^{\rho,\nu}_{n,2}(x) \qquad 7)$$

$$R^{\rho+1,\nu}_{n+1,2}(x) = \frac{n+\nu+\rho}{2}\,R^{\rho,\nu}_{n,2}(x) - x\,R^{\rho+1,\nu}_{n,2}(x)\,. \qquad 8)$$

Aus der Vereinigung der Gleichungen 6), 7) und 8) folgen die weiteren fünf Relationen

$$(n+\nu+\rho)\,R^{\rho,\nu}_{n,2}(x) + (n+\nu-\rho+2)\,R^{\rho,\nu}_{n+2,2}(x) = 2(n+\nu+1)\,x\,R^{\rho,\nu}_{n+1,2}(x)$$
$$(n+\nu+1)\,R^{\rho,\nu}_{n+1,2}(x) = R^{\rho+1,\nu}_{n,2}(x) - R^{\rho+1,\nu}_{n+2,2}(x)$$
$$2(1-x^2)\,R^{\rho+1,\nu}_{n+1,2}(x) = (n+\nu+\rho)\,R^{\rho,\nu}_{n,2}(x) - (n+\nu-\rho+1)\,x\,R^{\rho,\nu}_{n+1,2}(x) \qquad 9)$$
$$2(1-x^2)\,R^{\rho+1,\nu}_{n+1,2}(x) = (n+\nu+\rho+1)\,x\,R^{\rho,\nu}_{n+1,2}(x) - (n+\nu-\rho+2)\,R^{\rho,\nu}_{n+2,2}(x)$$
$$(n+\nu+1)(1-x^2)\,R^{\rho+1,\nu}_{n+1,2}(x) =$$
$$= (n+\nu+\rho)(n+\nu+\rho+1)\,R^{\rho,\nu}_{n,2}(x) - (n+\nu-\rho+1)(n-\nu+\rho+2)\,R^{\rho,\nu}_{n+2,2}(x) \qquad 10)$$

Differentiirt man nun die Gleichung 9) nach x unter Berücksichtigung der Relationen 6) und 8), so erhält man die Beziehung

$$(1-x^2)\,R^{\rho+2,\nu}_{n+1,2}(x) + 2(2\rho+1)\,x\,R^{\rho+1,\nu}_{n+1,2}(x) + 4\{(n+\nu+1)^2 - \rho^2\}\,R^{\rho,\nu}_{n+1,2}(x) = 0$$

und demnach ist die verallgemeinerte Ringfunction zweiter Art ein particuläres Integral der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1-x^2)y'' - (2\rho+1)\,xy' + \{(n+\nu)^2 - \rho^2\}y = 0 \qquad 11)$$

oder

$$\left[(1-x^2)^{\frac{2\rho+1}{2}}y'\right]' = \{\rho^2-(n+\nu)^2\}(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}}y,$$

was selbstverständlich auch aus ihrer Definition durch eine hypergeometrische Reihe hätte erschlossen werden können.

Dieselbe führt einerseits sofort zu der Relation

$$R_{n,2}^{\rho,\nu}(x) = \frac{2^s\Pi(n+\nu-\rho-s+1)}{\Pi(\rho-1)\,\Pi(n+\nu-\rho)\,\Pi(n+\nu+\rho-1)(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}}}\left[(1-x^2)^{\rho+s-\frac{1}{2}}R_{n,2}^{\rho+s,\nu}(x)\right]^{(s)},$$

anderseits liefert sie, wenn man

$$2x = \xi+\xi^{-1}$$

setzt, die Gleichung

$$R_{n,2}^{\rho,\nu}(x) = \frac{2^{2\rho-1}\,\Pi(\rho-1)\,\Pi(n+\nu+\rho-1)}{\Pi(n+\nu)}\,\xi^{-(n+\nu+\rho)}\,F(\rho, n+\nu+\rho, n+\nu+1, \xi^{-2}),$$

welche mit Hilfe des Euler'schen Integrales für die hypergeometrische Reihe in die zwei folgenden umgeformt werden kann

$$R_{n,2}^{\rho,\nu}(x) = \frac{(-i)^{2\rho-1}\,\Pi(n+\nu+\rho-1)}{\Pi(n+\nu-\rho)}\int_0^{\infty}\frac{\sin^{2\rho-1} it\,dt}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos it)^{n+\nu+\rho}}$$

$$R_{n,2}^{\rho,\nu}(x) = \frac{(-1)^{2\rho}\,i^{n+\nu+\rho}\,\Pi(n+\nu+\rho-1)}{\Pi(n+\nu-\rho)}\int_0^{\log\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}(x-\sqrt{x^2-1}\cos it)^{n+\nu-\rho}\sin^{2\rho-1} it\,dt\,.$$

Durch Vergleichung der Formeln 1) und 5) ergibt sich die bemerkenswerthe Relation

$$R^{\rho,\nu+1}_{n-1,2}(x) = (\nu+\rho)\, R^{\rho,\nu}_{n,2}(x).$$

Die oben aufgestellten Relationen werden aber auch von den durch die Gleichung

$$R^{\rho,\nu}_{n,1}(x) = \frac{\Pi(n+\nu+\rho-1)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2\,\Pi(n+\nu-\rho)}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho}\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi \qquad 12)$$

definirten Functionen $R^{\rho,\nu}_{n,1}(x)$ und $-\rho R^{\rho+1,\nu}_{n,1}(x)$ erfüllt, so dass die erste von ihnen ein particuläres Integral der Differentialgleichung 11) ist und demnach die den früheren Erörterungen entsprechende Verallgemeinerung der Ringfunctionen erster Art vorstellt.

Um dies zu erhärten, braucht man nur zu beweisen, dass dieselbe eine der Gleichung 6) im Wesentlichen analoge Relation und die Formeln 9) und 10) befriedigt.

Differentiirt man die Gleichung 12) nach x, so entsteht die Beziehung

$$\frac{dR^{\rho,\nu}_{n,2}(x)}{dx} = \frac{\Pi(n+\nu+\rho-1)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2\Pi(n+\nu-\rho-1)}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho-1}(\sqrt{x^2-1}+x\cos\varphi)\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi,$$

aus welcher wegen

$$\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho}\cos\varphi\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi = \frac{(n+\nu-\rho)\sqrt{x^2-1}}{2\rho}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho-1}\sin^{2\rho+1}\varphi\, d\varphi$$

die Relationen

$$\frac{dR_{n,1}^{\rho,\nu}(x)}{dx} = 2\rho R_{n,1}^{\rho,\nu}(x) \qquad 13)$$

$$\sqrt{x^2-1}\, R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x) = \frac{\Pi(n+\nu-\rho)}{2^{2\rho}\Pi(\rho-1)\Pi(\rho)\Pi(n+\nu-\rho)}\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho}\cos\varphi\,\sin^{2\rho-1}\varphi\,d\varphi \qquad 14)$$

folgen.

Schreibt man in der letzten Gleichung für n: $n+1$ und multiplicirt sodann mit $2\rho\sqrt{x^2-1}$, so verwandelt sie sich in

$$2\rho(x^2-1)R_{n+1,1}^{\rho+1,\nu}(x) = \frac{\Pi(n+\nu+\rho+1)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2\Pi(n+\nu-\rho)}\cdot$$
$$\cdot\left\{\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho+2}\sin^{2\rho+1}\varphi\,d\varphi - x\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho-1}\sin^{2\rho-1}\varphi\,d\varphi\right\}$$

oder nach 12):

$$2\rho(x^2-1)\,R_{n+1,1}^{\rho+1,\nu}(x) = (n+\nu-\rho+2)\,R_{n+1,1}^{\rho,\nu}(x) - (n+\nu+\rho+1)\,x\,R_{n+1,1}^{\rho,\nu}(x).$$

Multiplicirt man die Gleichung 13) mit $(n+\nu+\rho)(x^2-1)$, die Gleichung 14) aber mit $2\rho(n+\nu-\rho)\sqrt{x^2-1}$ und addirt die so entstehenden Relationen, so erhält man

$$\rho(n+\nu)(x^2-1)\,R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x) = \frac{\Pi(n+\nu+\rho)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2\Pi(n+\nu-\rho-1)}\cdot$$
$$\cdot\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu-\rho}\sin^{2\rho-1}\varphi\left\{x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}\right\}d\varphi$$

und daher nach 12)

$$\rho(n+\nu)(x^2-1)\,R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x) = (n+\nu-\rho)(n+\nu-\rho+1)\,R_{n+1,1}^{\rho,\nu}(x) - (n+\nu+\rho-1)(n+\nu+\rho)\,R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x).$$

Hiemit ist die obige Behauptung vollständig erwiesen.

Dass die Function $R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)$ der Differentialgleichung 11) genügt, erkennt man übrigens sofort, wenn man beachtet, dass ein mit $R_{n,2}^{\rho,\nu}(x)$ ein Fundamentalsystem derselben bildendes particuläres Integral durch die hypergeometrische Reihe

$$x^{-(n+\nu+\rho)}F\left(\frac{n+\nu+\rho}{2}, \frac{n+\nu+\rho+1}{2}, \nu+\rho+\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\Pi(2\rho-1)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2}\int_0^\pi \frac{\sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+\nu+\rho}}$$

angegeben wird, und dass, so lange x einen positiven reellen Theil besitzt, das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Integral durch die Substitution

$$\cos\psi = \frac{x\cos\varphi + \sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}$$

mit der Bedingung, dass für $\varphi=0$ auch $\psi=0$ ist, bekanntlich in das oben angeführte transformirt werden kann.

Da die Function $R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)$, falls $\nu-\rho$ eine ganze Zahl ist, eine mit den Coëfficienten der Entwicklung der Function $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\rho}$ nach steigenden Potenzen von α zusammenfallende ganze Function ist, so wird in dieser Mittheilung $\nu-\rho$ stets als nicht ganzzahlig vorausgesetzt.

Zum Schlusse dieses Paragraphes mag noch erwähnt werden, dass die beiden speciellen Ringfunctionen $R_{n,1}^{\rho,\frac{1}{2}}(x)$ und $R_{n,2}^{\rho,\frac{1}{2}}(x)$ im Wesentlichen mit den Functionen

$$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{4}}}\int_\sigma \frac{\cos\frac{2\rho-1}{2}\varphi\, d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}, \quad \text{beziehungsweise} \quad \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{4}}}\int_\sigma \frac{\sin\frac{2\rho-1}{2}\varphi\, d\varphi}{(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{n+1}}$$

zusammenhängen, wo die Integration über eine in der φ-Ebene gelegene geschlossene Curve σ auszudehnen ist.

Aus der Definition der verallgemeinerten Ringfunction erster Art folgt endlich die Beziehung

$$R_{n,1}^{\rho,\nu}(+1) = \frac{\Pi(n+\nu+\rho-1)}{\Pi(2\rho-1)\,\Pi(n+\nu-\rho)}. \tag{14a}$$

§. 3. Aus den im vorigen Paragraphe aufgestellten Relationen leitet man leicht die folgenden her:

$$[(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}} R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)]' = (n+\nu+\rho-1)(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}\{R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x) - x\,R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\}$$

$$[(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}} R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\,R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x)]' = (1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}\{(n+\nu+\rho-1)(R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x))^2 - (n+\nu-\rho)(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x))^2\} \tag{15}$$

$$2\rho(1-x)\{R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x) + R_{n-1,1}^{\rho+1,\nu}(x)\} = (n+\nu+\rho-1)R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x) - (n+\nu-\rho)R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)$$

$$2\rho(1+x)\{R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x) - R_{n-1,1}^{\rho+1,\nu}(x)\} = (n+\nu+\rho-1)R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x) + (n+\nu-\rho)R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)$$

$$4\rho^2(1-x^2)\{(R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x)) - (R_{n-1,1}^{\rho+1,\nu}(x))^2\} = (n+\nu+\rho-1)^2(R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x))^2 - (n+\nu-\rho)^2(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x))^2 \tag{16}$$

$$\frac{d\{(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x))^2 + (R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x))^2\}}{dx} = 2x\frac{d(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\,R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x))}{dx} + (2\rho-1)R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\,R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x). \tag{17}$$

Integrirt man die Gleichung 15) innerhalb der Grenzen $+1$ und x, so entsteht die Formel

$$\int_1^x \{(n+\nu+\rho-1)(R^{\rho,\nu}_{n-1,1}(x))^2-(n+\nu-\rho)(R^{\rho,\nu}_{n,1}(x))^2\}(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}dx=(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}}R^{\rho,\nu}_{n,1}(x), \qquad \left(\rho<\frac{1}{2}\right)$$

welche zu folgenden neuen Relationen führt:

$$(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{R^{\rho,\nu}_{\lambda,1}(x)\,R^{\rho,\nu}_{\lambda-1,1}(x)}{\lambda+\nu-\rho}=(2\rho-1)\int_1^x(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{(R^{\rho,\nu}_{\lambda-1,1}(x))^2}{\lambda+\nu-\rho}dx+$$
$$+\int_1^x\{(R^{\rho,\nu}_{0,1}(x))^2-(R^{\rho,\nu}_{n,1}(x))^2\}(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}dx$$

$$(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{R^{\rho,\nu}_{\lambda,1}(x)\,R^{\rho,\nu}_{\lambda-1,1}(x)}{\lambda+\nu+\rho-1}=(2\rho-1)\int_1^x(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{R^{\rho,\nu}_{\lambda-1,1}(x)}{\lambda+\nu+\rho-1}dx+$$
$$+\int_1^x\{(R^{\rho,\nu}_{0,1}(x))^2-(R^{\rho,\nu}_{n,1}(x))^2\}(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}dx$$

$$(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}R^{\rho,\nu}_{\lambda,1}(x)\,R^{\rho,\nu}_{\lambda-1,1}(x)=2\rho\int_1^x(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}(R^{\rho,\nu}_{\lambda-1,1}(x))^2dx+$$
$$+(\rho-\nu)\int_1^x(R^{\rho,\nu}_{0,1}(x))^2(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}dx-(n-\nu+\rho)\int_1^x(R^{\rho,\nu}_{n,1}(x))^2(1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}dx$$

$$(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda-1} \frac{R_{\lambda,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{\lambda-1,1}^{\rho,\nu}(x)}{\lambda+\nu-\rho} = (2\rho-1)\int_1^x (1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda-1} \frac{\left(R_{\lambda-1,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2}{\lambda+\nu-\rho}\, dx +$$

$$+\int_1^x \left\{ \left(R_{0,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 + 2 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} (-1)^{\lambda-1} \left(R_{\lambda,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 + (-1)^n \left(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 \right\} (1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}\, dx$$

$$(1-x^2)^{\frac{2\rho-1}{2}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{R_{\lambda,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{\lambda-1,1}^{\rho,\nu}(x)}{(\lambda+\nu-\rho)(\lambda+\nu+\rho-1)} = \int_1^x \left\{ \left(R_{0,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 - \frac{\left(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2}{n+\nu+\rho-1} + \right.$$

$$\left. + (2\rho-2) \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n-1} \frac{\left(R_{\lambda,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2}{(\lambda+\nu+\rho-1)(\lambda+\nu-\rho+1)} \right\} (1-x^2)^{\frac{2\rho-3}{2}}\, dx.$$

Aus 16) und 17) entstehen durch Integration die Beziehungen

$$\left(R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 + \left(R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x)\right)^2 - 2x\, R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x) = (2\rho-3)\int_1^x R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x) + \left[\frac{\Pi(n+\nu+\rho-2)}{\Pi(2\rho-2)\,\Pi(n+\nu-\rho)}\right]^2$$

$$\int_1^x x^{\frac{2\rho-3}{2}} \left\{ R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{n,1}^{\rho+1,\nu}(x) + R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{n-1,1}^{\rho+1,\nu}(x) \right\} dx = \frac{x^{\frac{2\rho-1}{2}}}{2\rho} R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)\, R_{n-1,1}^{\rho,\nu}(x).$$

Mit Hilfe des oben aufgestellten Integralausdruckes der verallgemeinerten Ringfunction beweist man ferner die folgenden Gleichungen

$$\sum_{n=0}^{n=r} \frac{2^n \Pi(\mu+n-1)\Pi(n+\nu-\rho)}{\Pi(n+\nu+\rho-1)\Pi(n)} C_{r-n}^{\mu+n}(y) R_{n,1}^{\rho,\nu}(x) = \frac{\Pi(\mu-1)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2} \cdot$$
$$\cdot \int_0^{\pi} (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho} C_r^{\mu}(y+x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi) \sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\Pi(n+\nu-\rho) J^{\mu+\nu}(\sqrt{y})\, R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)}{2^n y^{\frac{n}{2}} \Pi(n+\nu+\rho-1)\Pi(n)} = \frac{y^{\frac{\mu}{2}}}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2} \cdot$$
$$\cdot \int_0^{\pi} (y+x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{-\frac{\mu}{2}} (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho} J^{\mu}(\sqrt{y+x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}) \sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Pi(n+\nu-\rho) J^{\mu-n}(\sqrt{y})\, R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)}{2^n \Pi(n)\Pi(n+\nu+\rho-1)\, y^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2 y^{\frac{\mu}{2}}} \cdot$$
$$\cdot \int_0^{\pi} (y+x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\frac{\mu}{2}} (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho} J^{\mu}(\sqrt{y+x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}) \sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\left[\frac{r}{2}\right]} (-1)^{\sigma} \frac{\Pi(r+\nu-\rho-2\sigma)\Pi(\mu+r-\sigma-1)}{2^{2\sigma}\Pi(r+\nu+\rho-2\sigma-1)\Pi(r-2\sigma)\Pi(\sigma)} R_{r-2\sigma,1}^{\rho,\nu}(x) = \frac{\Pi(\mu-1)}{2^{r+2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2} \cdot$$
$$\cdot \int_0^{\pi} (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho} C_r^{\mu}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi) \sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

$$\sum_{n=0}^{n=r} \frac{2^n \Pi(n+\nu-\rho)\,\Pi(n+r+2\mu-1)\,\Pi(n+\mu-1)}{\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi(n)\,\Pi(r-n)} R_{n,1}^{\rho,\nu}(x) = \frac{\Pi(\mu-1)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho} C_r^\mu (x+1+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi) \sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

$$\sum_{n=0}^{n=r} (-1)^{r-n} \frac{2^n \Pi(n+\nu-\rho)\,\Pi(n+r+2\mu-1)\,\Pi(n+\mu-1)}{\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi(n)\,\Pi(r-n)} R_{n,1}^{\rho,\nu}(x) = \frac{\Pi(\mu-1)}{2^{2\rho-1}[\Pi(\rho-1)]^2} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho} C_r^\mu (x-1+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi) \sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \Pi(n+\nu-\rho)\, R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)}{2^{2n}\,\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi(n)\,\Pi(n+\mu)} = \frac{1}{2^{2\rho-\mu-1}[\Pi(\rho-1)]^2} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{-\frac{\mu}{2}+\nu-\rho} J^\mu (\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi}) \sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

$$\sum_{n=0}^{n=r} \frac{\Pi(n+\nu-\rho)\, T_{r-n,\,\alpha+n,\,\beta+n}(y)\, R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)}{\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi(n)\,\Pi(r-n)} = \frac{1}{2^{2\rho-1}\,\Pi(r)[\Pi(\rho-1)]^2} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho} T_{r,\alpha,\beta}(y+x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi) \sin^{2\rho-1}\varphi\, d\varphi$$

$$\sum_{n=0}^{n=r} \frac{\Pi(n+\nu-\rho)\,\Pi(\alpha+\beta+r+n-2)\,R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)}{2^n\,\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi(n)\,\Pi(r-n)\,\Pi(\beta+n-1)} = \frac{\Pi(\alpha+\beta+2\rho-2)}{2^{r+2\rho-1}\,\Pi(r)\,\Pi(\beta+r-1)\,[\Pi(\rho-1)]^2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho}\,T_{r,\alpha,\beta}(x+1+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)\,\sin^{2\rho-1}\varphi\,d\varphi$$

$$\sum_{n=0}^{n=r}(-1)^n\frac{\Pi(n+\nu-\rho)\,\Pi(\alpha+\beta+r+n-2)\,R_{n,1}^{\rho,\nu}(x)}{2^n\,\Pi(n+\nu+\rho-1)\,\Pi(n)\,\Pi(r-n)\,\Pi(\alpha+n-1)} = \frac{\Pi(\alpha+\beta+2r-2)}{2^{r+2\rho-1}\,\Pi(r)\,\Pi(\alpha+r-1)\,[\Pi(\rho-1)]^2}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\pi}(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^{\nu-\rho}\,T_{r,\alpha,\beta}(x-1+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)\,\sin^{2\rho-1}\varphi\,d\varphi.$$

Die Functionen $R_{n,1}^{\rho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)$ und $R_{n,2}^{\rho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)$ sind particuläre Integrale der partiellen Differentialgleichung

$$(1-x_1^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}-(2\rho+1)\,x_1\frac{\partial y}{\partial x_1}+\frac{1}{1-x_1^2}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+(2\rho-1)\operatorname{cotang}\varphi\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right\}+\{(n+\nu)^2-\rho^2\}y=0.$$

Setzt man

$$R_{n,1}^{\rho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}A_\lambda\,C_\lambda^{\rho-\frac{1}{2}}(\cos\varphi),$$

so erhält man, da $C_\lambda^{\rho-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u''+(2\rho-1)\operatorname{cotang}\varphi\,.\,u'+\lambda(\lambda+2\rho-1)\,u=0$$

genügt, zur Bestimmung von A_λ als Function von x_1 die Differentialgleichung

$$(1-x_1^2)\frac{d^2A_\lambda}{dx_1^2}-(2\rho+1)x_1\frac{dA_\lambda}{dx_1}+\left\{(n+\nu)^2-\rho^2-\frac{\lambda(\lambda+2\rho-1)}{1-x_1^2}\right\}A_\lambda=0,$$

deren vollständiges Integral, wie man sofort mit Hilfe von 11) ableitet,

$$A_\lambda=(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}\{a\,R_{n,1}^{\rho+\lambda,\nu}(x_1)+b\,R_{n,2}^{\rho+\lambda,\nu}(x_1)\}$$

ist. Beachtet man, dass $R_{n,2}^{\rho+\lambda,\nu}(x_1)$ für $x_1=1$ unendlich wird, sowie, dass das Argument $x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi$ in Bezug auf x_1 und x_2 vollkommen symmetrisch ist, so erhält man die Relation

$$R_{n,1}^{\rho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)=\sum_{\lambda=0}^{\infty}a_\lambda R_{n,1}^{\rho+\lambda,\nu}(x_1)R_{n,1}^{\rho+\lambda,\nu}(x_2)(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_2^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}C_\lambda^{\rho-\frac{1}{2}}(\cos\varphi),$$

wo a_λ eine Constante ist, welche durch die Gleichung

$$\int_0^\pi R_{n,1}^{\rho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)\,C_\lambda^{\rho-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\sin^{2\rho-1}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{2^{2\rho-2}\Pi(\lambda+2\rho-2)\,[\Pi(\rho-1)]^2}{[\Pi(2\rho-2)]^2\,\Pi(\lambda)\left(\lambda+\rho-\frac{1}{2}\right)}a_\lambda(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_2^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}R_{n,1}^{\rho+\lambda,\nu}(x_1)R_{n,1}^{\rho+\lambda,\nu}(x_2)$$

bestimmt ist. Nun ist aber

$$\int_0^\pi R_{n,1}^{\rho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)\,C_\lambda^{\rho-\frac{1}{2}}(\cos\varphi)\sin^{2\rho-1}\varphi\,d\varphi=(-1)^\lambda\frac{2^{2\rho}\left[\Pi\left(\lambda+\rho-\frac{3}{2}\right)\right]^2\Pi(\lambda+2\rho-2)}{\Pi(\lambda)\left[\Pi\left(\rho-\frac{3}{2}\right)\right]^2\Pi(2\lambda+2\rho-2)}\cdot$$

$$\cdot(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_2^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}\int_0^\pi R_{n,1}^{\rho+\lambda,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)\sin^{2\lambda+2\rho-1}\varphi\,d\varphi$$

und daher erhält man, wenn man $x_1=1$ setzt, aus der letzten Gleichung folgenden Werth von a_λ:

$$a_\lambda=(-1)^\lambda\left[\frac{4^\lambda\Pi(2\rho-2)\,\Pi\left(\lambda+\rho-\frac{3}{2}\right)\Pi(\lambda+\rho-1)}{\Pi(\rho-1)\,\Pi\left(\rho-\frac{3}{2}\right)}\right]^2\frac{\Pi(n+\nu-\lambda-\rho)\,(2\lambda+2\rho-1)}{\Pi(2\lambda+2\rho-2)\,\Pi(n+\nu+\rho+\lambda-1)}.$$

Man hat also schliesslich die Entwicklung

$$R_{n,1}^{\rho,\nu}(x_1x_2-\sqrt{x_1^2-1}\sqrt{x_2^2-1}\cos\varphi)=$$

$$=\left[\frac{\Pi(2\rho-2)}{\Pi(\rho-1)\,\Pi\left(\rho-\frac{3}{2}\right)}\right]^2\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{4^{2\lambda}\left[\Pi\left(\lambda+\rho-\frac{3}{2}\right)\right]^2[\Pi(\lambda+\rho-1)]^2\Pi(n+\nu-\lambda-\rho)}{\Pi(2\lambda+2\rho-2)\,\Pi(n+\nu+\rho+\lambda-1)}\cdot$$

$$\cdot(2\lambda+2\rho-1)(x_1^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}(x_2^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}R_{n,1}^{\lambda+\rho,\nu}(x_1)\,R_{n,1}^{\rho+\lambda,\nu}(x_2)\,C_\lambda^{\rho-\frac{1}{2}}(\cos\varphi).$$

Ein ähnliches Additionstheorem lässt sich auch für die verallgemeinerten Ringfunctionen zweiter Art ableiten.

Aus der Verbindung der Gleichungen 10) und 14a) ergibt sich weiter die folgende Verallgemeinerung der ersten von ihnen:

$$(1-x^2)^s R_{n,2}^{\rho+s,\nu}(x) = \frac{\Pi(n+\nu-s)\,\Pi(n+\nu+\rho+s-1)}{\Pi(n+\nu)\,\Pi(n+\nu+\rho-s-1)} \left| \frac{2^\lambda \Pi(\lambda)\,\Pi(n-s+\nu+\rho+\lambda+2\mu+1)}{\Pi(2\rho+\lambda-1)\,\Pi(n-s+\nu-\rho-\lambda+2\mu+2)} \right| .$$

$$\left| \begin{array}{c} R_{n-s,2}^{\rho,\nu}(x), \quad R_{n-s+2,2}^{\rho,\nu}(x), \quad \ldots, \quad R_{n+s,2}^{\rho,\nu}(x) \\ \frac{\Pi(n-s+\nu+\rho-1)}{\Pi(n-s+\nu-\rho)\,\Pi(2\rho-1)}, \quad \frac{\Pi(n-s+\nu+\rho+1)}{\Pi(n-s+\nu-\rho+2)\,\Pi(2\rho-1)}, \quad \ldots, \quad \frac{\Pi(n+s+\nu+\rho-1)}{\Pi(n+s+\nu-\rho)\,\Pi(2\rho-1)} \\ \frac{\Pi(n-s+\nu+\rho)}{\Pi(n-s+\nu-\rho-1)(2\rho+1)\,\Pi(2\rho-1)}, \quad \frac{\Pi(n-s+\nu+\rho+2)}{\Pi(n-s+\nu-\rho+1)(2\rho+1)\,\Pi(2\rho-1)}, \quad \ldots, \quad \frac{\Pi(n+s+\nu+\rho)}{\Pi(n+s+\nu-\rho-1)(2\rho+1)\,\Pi(2\rho-1)} \\ \frac{\Pi(n-s+\nu+\rho+1)}{\Pi(n-s+\nu-\rho-2)(2\rho+3)(2\rho+1)\,\Pi(2\rho-1)}, \\ \frac{\Pi(n-s+\nu+\rho+3)}{\Pi(n-s+\nu-\rho)(2\rho+3)(2\rho+1)\,\Pi(2\rho-1)}, \quad \ldots, \quad \frac{\Pi(n+s+\nu+\rho+1)}{\Pi(n+s+\nu-\rho-2)(2\rho+3)(2\rho+1)\,\Pi(2\rho-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{2^{s-1}\Pi(s-1)\,\Pi(n+\nu+\rho-2)}{\Pi(2\rho+s-2)\,\Pi(n+\nu-\rho-2s+1)}, \quad \frac{2^{s-1}\Pi(s-1)\,\Pi(n+\nu+\rho)}{\Pi(2\rho+s-2)\,\Pi(n+\nu-\rho-2s+3)}, \quad \ldots, \quad \frac{2^{s-1}\Pi(s-1)\,\Pi(n+\nu+\rho+2s-2)}{\Pi(2\rho+s-2)\,\Pi(n+\nu-\rho+1)} \end{array} \right|$$

$$(\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots, s-1).$$

Eine analoge Relation besteht selbstverständlich auch für die verallgemeinerte Ringfunction erster Art.

Über die Wirkungen gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduction

von

J. Puluj,

Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Mit 2 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Mai 1891.)

In einer Drahtrolle, welche um eine gegen die Richtung eines homogenen magnetischen Feldes geneigte Axe gleichmässig gedreht wird, entstehen bekanntlich durch Induction sinusartige elektromotorische Kräfte, deren Richtung nach jeder halben Umdrehung wechselt. Ist die Drahtrolle noch mit einem zweitheiligen Commutator versehen, so entstehen im äusseren Stromkreise sinusartige Stromimpulse, welche aber nur in einer Richtung verlaufen. Um die Gesetze einer solchen Elektricitätsströmung in einem Leiter mit Selbstinduction untersuchen zu können, muss für die elektromotorische Kraft ein mathematischer Ausdruck gefunden werden, welcher die Eigenschaft besitzt, dem einfachen Sinusgesetz zu genügen, aber für jede beliebige Zeit nur positive Werthe anzunehmen.

Ist eine $f(x)$ von $x = 0$ bis $x = \pi$ endlich und stetig, so gilt bekanntlich die Beziehung

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots$$

für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = \pi$ inclusive diese Grenzen und die Constanten der periodischen Reihe sind durch das Integral

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) . \cos nx . dx$$

gegeben. Für $f(x) = \sin x$ ergibt sich

$$A_n = -\frac{2}{\pi}\,\frac{1+\cos n\pi}{n^2-1}$$

und daher

$$\sin x = \frac{2}{\pi}\left[1-\frac{2}{1\cdot 3}\cos 2x-\frac{2}{3\cdot 5}\cos 4x-\ldots\right].$$

Diese Gleichung ist aber an die Bedingung $0 \leqq x \leqq \pi$ gebunden und gilt ausserhalb dieser Grenzen nicht mehr. Für Werthe $x<0$ und $x>\pi$ ist die Summe der periodischen Reihe eine Function $F(x)$, welche in endlicher Form sich zwar nicht

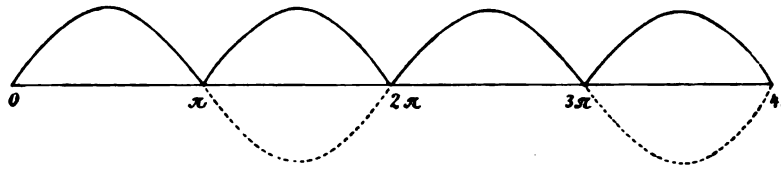


Fig. 1.

ausdrücken lässt, aber die gleichgerichtete Sinuscurve Fig. 1 darstellt, wie aus dem Resultat der folgenden Transformation deutlich zu ersehen ist.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{2}{\pi}\left[1-\frac{2}{1\cdot 3}\cos 2x-\frac{2}{3\cdot 5}\cos 4x-\ldots\right]\\
&= \frac{2}{\pi}\left[1-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)\cos 2x-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cos 4x-\ldots\right]\\
&= \frac{2}{\pi}\left[(1-\cos 2x)+\frac{1}{3}(\cos 2x-\cos 4x)+\ldots\right]\\
&= \sin x\,.\,\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots\right].
\end{aligned}$$

Nun hat aber bekanntlich die Reihe

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{1}{5}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\ldots\right]$$

den Werth $+1$ zwischen 0 und π, 2π und 3π, 4π und 5π, ... -1 zwischen π und 2π, 3π und 4π, 5π und 6π,... und

den Werth Null für $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ Die Transformation zeigt somit, dass die ausgezogene Curve, Fig. 1, durch Umkehrung aller negativen Zweige der einfachen Sinuscurve entsteht.

Nach diesem Ergebniss kann die gesuchte sinusartige elektromotorische Kraft, welche für jede beliebige Zeit nur positive Werthe annehmen soll, durch die periodische Reihe

$$e = \frac{2}{\pi} E_0 \left[1 - \frac{2}{1\cdot 3} \cos \frac{4\pi}{T} t - \frac{2}{3\cdot 5} \cos \frac{8\pi}{T} t - \ldots\right] \quad \ldots 1)$$

dargestellt werden, in welcher E_0 die Amplitude der elektromotorischen Kraft, T die Periode und t die Zeit bedeutet.

Es entsteht nun die Frage, wie ändert sich die Stromstärke in einem Leiter mit Selbstinduction L und Widerstand R, wenn die äussere elektromotorische Kraft durch die letzte periodische Reihe normirt ist.

Mit Benützung der bekannten Helmholtz'schen Grundgleichung

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E \quad \ldots 2)$$

erhalten wir, wenn $\frac{L}{R} = \tau$ gesetzt wird,

$$\frac{d(ie^{\frac{t}{\tau}})}{dt} = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{R\tau} e^{\frac{t}{\tau}} \left[1 - \frac{2}{1\cdot 3} \cos \frac{4\pi}{T} t - \frac{2}{3\cdot 5} \cos \frac{8\pi}{T} t - \ldots\right]$$

$$ie^{\frac{t}{\tau}} = \frac{2}{\pi} \frac{E_0}{R\tau} \int e^{\frac{t}{\tau}} \left[1 - \frac{2}{1\cdot 3} \cos \frac{4\pi}{T} t - \frac{2}{3\cdot 5} \cos \frac{8\pi}{T} t - \ldots\right] dt,$$

$$i = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{E_0}{R} \cdot \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \int e^{\frac{t}{\tau}} \left[1 - \frac{2}{1\cdot 3} \cos \frac{4\pi}{T} t - \frac{2}{3\cdot 5} \cos \frac{8\pi}{T} t - \ldots\right] dt.$$

Die Reihe enthält Integrale von der bekannten Form

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Wird nach der Ausführung der Integration

$$\frac{4\pi L}{RT} = \operatorname{tang} \psi_1, \quad \frac{8\pi L}{RT} = \operatorname{tang} \psi_2, \quad \frac{12\pi L}{RT} = \operatorname{tan} \psi_3 \quad \ldots 3)$$

gesetzt und ferner berücksichtigt, dass für den dauernden Zustand der Elektricitätsströmung die Summe aus sämmtlichen Integrationsconstanten und dem Factor vor dem Integralzeichen also der Ausdruck

$$[C_1+C_2+C_3+\ldots]\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}\cdot\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}=0$$

wird, so ergibt sich für die momentane Stromstärke:

$$i=\frac{2}{\pi}\left[\frac{E_0}{R}-\frac{2}{1\cdot3}\cdot\frac{E_0\cos\left(\frac{4\pi}{T}\,t-\psi_1\right)}{\sqrt{R^2+\left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3\cdot5}\cdot\frac{E_0\cos\left(\frac{8\pi}{T}t-\psi_2\right)}{\sqrt{R^2+\left(\frac{8\pi L}{T}\right)^2}}-\ldots\right] \quad \ldots 4)$$

Darin bedeuten ψ_1, ψ_2, ψ_3,... die Phasenverschiebungen der einzelnen elektromotorischen Kraftcomponenten.

Die momentane Stromstärke variirt zwischen einem grössten und einem kleinsten Werthe, ohne je den Werth Null zu erreichen, und genügt dem Gesetze der Superposition der Wirkungen der einzelnen Kraftcomponenten, von denen jede so wirkt, als ob sie allein im Stromkreise vorhanden wäre.

Unter der Voraussetzung der allgemeinen Richtigkeit dieses Gesetzes könnte die momentane Stromstärke noch auf folgende einfache Weise aus der Gleichung 2) bestimmt werden. Es sei das Integral der Gleichung

$$i=A+B_1\cos\left(\frac{4\pi}{T}t-\psi_1\right)+B_2\cos\left(\frac{8\pi}{T}t-\psi_2\right)+\ldots \quad \ldots 5)$$

Die Constanten A, B_1, B_2... mögen die Amplituden der einzelnen Partialströme und ψ_1, ψ_2... ihre Phasenverschiebungen bedeuten. Nach vorgenommener Substitution der angenommenen Reihe in die Grundgleichung 2) erhalten wir:

$$RA+RB_1\cos\left(\frac{4\pi}{T}t-\psi_1\right)+RB_2\cos\left(\frac{8\pi}{T}t-\psi_2\right)+\ldots$$

$$-LB_1\frac{4\pi}{T}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t-\psi_1\right)-LB_2\frac{8\pi}{T}\sin\left(\frac{8\pi}{T}t-\psi_2\right)-\ldots$$

$$=\frac{2}{\pi}E_0\left(1-\frac{2}{1\cdot3}\cos\frac{4\pi}{T}t-\frac{2}{3\cdot5}\cos\frac{8\pi}{T}t-\ldots\right).$$

Sollen die einzelnen Kraftcomponenten von einander unabhängig wirken, so müssen folgende Gleichungen zu jeder Zeit bestehen:

$$RA=\frac{2}{\pi}E_0 \qquad \ldots 6)$$

$$RB_1\cos\left(\frac{4\pi}{T}t-\psi_1\right)-LB_1\frac{4\pi}{T}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t-\psi_1\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1\cdot3}E_0\cos\frac{4\pi}{T}t \qquad \ldots 7)$$

$$RB_2\cos\left(\frac{8\pi}{T}t-\psi_2\right)-LB_2\frac{8\pi}{T}\sin\left(\frac{8\pi}{T}t-\psi_2\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{3\cdot5}E_0\cos\frac{8\pi}{T}t \qquad \ldots 8)$$

. . . . . .

Aus der Gleichung 6) ergibt sich der Werth der Constanten

$$A=\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}.$$

Aus der Gleichung 7) erhalten wir für $t=0$ und $t=\frac{T}{8}$

$$RB_1\cos\psi_1+LB_1\frac{4\pi}{T}\sin\psi_1=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1\cdot3}\cdot E_0 \qquad \ldots a)$$

$$RB_1\sin\psi_1-LB_1\frac{4\pi}{T}\cos\psi_1=0 \qquad \ldots b)$$

Beide Gleichungen quadrirt und addirt geben die Constante

$$B_1=\pm\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{1\cdot3}\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}}.$$

Aus der Gleichung *b*) folgt ferner für die Phasenverschiebung

$$\text{tang}\,\psi_1 = \frac{4\pi L}{RT}.$$

Aus dieser Beziehung ist zunächst zu ersehen, dass, wie gross L, R und T sein mögen, die Phasenverschiebung ψ_1 höchstens den Werth 90° erreichen kann. Daraus folgt weiter, dass $\sin\psi_1$ und $\cos\psi_1$ positive Grössen sind und somit für die Constante B_1 mit Rücksicht auf die Gleichung *a*) das negative Zeichen zu wählen ist.

In ähnlicher Weise erhält man aus der Gleichung 8) für $t = 0$ und $t = \frac{T}{16}$ die Gleichungen

$$RB_2 \cos\psi_2 + LB_2 \sin\psi_2 = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{3\cdot5}E_0,$$

$$RB_2 \sin\psi_2 - LB_2 \cos\psi_2 = 0$$

und daraus

$$B_2 = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{3\cdot5}\frac{E_0}{\sqrt{R^2+\left(\frac{8\pi L}{T}\right)^2}} \quad \text{und} \quad \text{tang}\,\psi_2 = \frac{8\pi L}{RT}.$$

Ähnlich können die übrigen Constanten $B_3 B_4 \ldots$ $\psi_3 \psi_4 \ldots$ bestimmt werden.

Für die mittlere Stromstärke erhalten wir, da sämmtliche Integrale die Form

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{4k\pi}{T}\,t - \psi_k\right) dt = 0$$

haben, den Ausdruck

$$M(i) = \frac{2}{\pi}\,\frac{E_0}{R}. \qquad \ldots 9)$$

Die mittlere Stromstärke ist somit von der Selbstinduction, also auch von der Phasenverschiebung unabhängig.

Wie aus der Gleichung 4) zu ersehen ist, besteht die momentane Stromstärke aus einem constanten positiven Gliede,

$\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}$, welches numerisch gleich ist der mittleren Stromstärke und einer Anzahl periodisch veränderlicher Glieder, welche sämmtlich negativ sind. Diese negativen Glieder sind von der Selbstinduction abhängig und werden desto kleiner, je grösser die letztere und die Anzahl der Wechselperioden ist. Für $L=\infty$ verschwinden die veränderlichen Glieder, und die momentane Stromstärke erreicht den maximalen Werth $\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}$. Die Selbstinduction verursacht somit keine Schwächung der mittleren Stromstärke, ihre Wirkung besteht bloss darin, die Stromwellen zu ebnen.

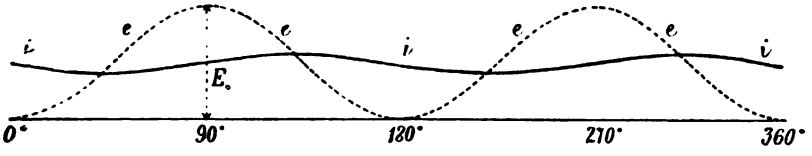


Fig. 2.

In Fig. 2 ist die momentane Stromstärke mit der Curve i für den Fall dargestellt, dass die elektromotorische Kraft durch den Ausdruck

$$e = E_0 \sin^2 \frac{2\pi}{T} t = \frac{E_0}{2}\left(1 - \cos\frac{4\pi}{T} t\right)$$

und die Curve e gegeben ist. In diesem Falle ist die momentane Stromstärke

$$i = \frac{1}{2}\frac{E_0}{R} - \frac{1}{2}\frac{E_0 \cos\left(\frac{4\pi}{T} t - \psi\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}}$$

und

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{4\pi L}{RT}.$$

Die Curve wurde unter der Voraussetzung construirt, dass der Widerstand des Stromkreises $R = 1\,\Omega$ und die Selbstinduction

des letzteren so gross ist, dass der scheinbare Widerstand $R_1 = 5\Omega$ beträgt, somit die Phasenverschiebung $\psi = 39°219$ ist. Wie aus der Fig. 2 zu ersehen ist, erreicht die Stromcurve nie den Werth Null und zeigt eine Stromschwankung von 50% des maximalen Werthes, welcher numerisch gleich ist $\frac{1}{2}\frac{E_0}{R}$. Für $L = \infty$ verschwindet das veränderliche Glied und die Stromcurve i ist eine Gerade, deren Ordinate gleich $\frac{1}{2}E_0$ ist.

Es sei hier noch bemerkt, dass nach dem obigen Ergebniss (Gleichung 4) eine constante Stromstärke als eine mittlere Stromstärke aufgefasst werden könnte, welche durch eine gleichgerichtete, sinusartige, elektromotorische Kraft mit unendlich kleiner Periode erzeugt wird.

Es soll jetzt das mittlere Quadrat der Stromstärke

$$M(i^2) = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} i^2\,dt$$

bestimmt werden.

Mit Rücksicht auf die Beziehung

$$R = \sqrt{R^2 + \left(\frac{4k\pi L}{T}\right)^2}\,.\cos\psi_k$$

kann die momentane Stromstärke etwas einfacher ausgedrückt werden:

$$i = \frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}\left[1 - \frac{2}{1\cdot 3}\cos\psi_1\cos\left(\frac{4\pi}{T}t - \psi_1\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{3\cdot 5}\cos\psi_2\cos\left(\frac{8\pi}{T}t - \psi_2\right) - \ldots\right].$$

Wird nun diese unendliche Reihe quadrirt, so erhält man eine Reihe von Quadraten der einzelnen Glieder und dann eine Reihe von doppelten Producten von der allgemeinen Form

$$M\cos\left(\frac{4k\pi}{T}t - \psi_k\right),$$

beziehungsweise

$$N\cos\left(\frac{4k\pi}{T}t-\psi_k\right)\cos\left(\frac{4m\pi}{T}t-\psi_m\right),$$

in welchen Ausdrücken M und N Constanten und k und m positive ganze Zahlen sind. Nun ist aber

$$\int_0^{\frac{T}{2}}\cos\left(\frac{4k\pi}{T}t-\psi_k\right)dt=0$$

und ebenso

$$\int_0^{\frac{T}{2}}\cos\left(\frac{4k\pi}{T}t-\psi_k\right)\cos\left(\frac{4m\pi}{T}t-\psi_m\right)dt=0;$$

es bleiben daher bloss die quadratischen Glieder. Da ferner

$$\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}\cos^2\left(\frac{4k\pi}{T}t-\psi_k\right)dt=\frac{1}{2}$$

ist, so erhalten wir für das mittlere Quadrat der Stromstärke die nachstehende Reihe:

$$M(i^2)=\left(\frac{2}{\pi}\frac{E_0}{R}\right)^2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\cdot3}\right)^2\cos^2\psi_1+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3\cdot5}\right)^2\cos^2\psi_2+\ldots\right]\cdot\ldots10)$$

Auch aus dieser Reihe ist die Giltigkeit des oben erwähnten Gesetzes der Superposition der Wirkungen zu ersehen, indem das resultirende mittlere Quadrat der Stromstärke gleich ist der Summe der mittleren Quadrate der einzelnen Partialströme. Die elektromotorischen Kraftcomponenten wirken somit unabhängig von einander.

Der Coëfficient von $\cos^2\psi_2$ ist $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3\cdot5}\right)^2=0\cdot00889$ und der von $\cos^2\psi_3$ nur noch $=0\cdot0000053$; wir können daher mit Rücksicht auf die starke Convergenz der Reihe das Glied mit $\cos^2\psi_2$ und die nachfolgenden Glieder vernachlässigen und erhalten einen angenäherten Ausdruck für das mittlere Quadrat der Stromstärke

$$M(i^2) = \left(\frac{2}{\pi}\,\frac{E_0}{R}\right)^2\left[1 + \frac{2}{9}\cos^2\psi_1\right],$$

oder

$$M(i^2) = \left(\frac{2}{\pi}\,\frac{E_0}{R}\right)^2\left[1 + \frac{2}{9}\,\frac{R^2}{R^2 + \left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}\right]. \qquad \ldots 11)$$

Die im Stromkreise von der elektromotorischen Kraft geleistete mittlere Wärmearbeit ist

$$W = M(i^2).R = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} eidt,$$

$$W = \frac{\left(\frac{2}{\pi}E_0\right)^2}{R}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\cdot 3}\right)^2\cos^2\psi_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3\cdot 5}\right)^2\cos^2\psi_2 + \ldots\right] \ldots 12)$$

oder angenähert

$$W = \frac{\left(\frac{2}{\pi}E_0\right)^2}{R} + \frac{2}{9}\,\frac{\left(\frac{2}{\pi}E_0\right)^2}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}}\cdot\cos\psi_1,$$

worin ψ_1 gegeben ist durch die Beziehung

$$\operatorname{tang}\psi_1 = \frac{4\pi L}{RT}.$$

In der Gleichung 12) ist das Product aus dem gemeinsamen Factor und dem ersten Gliede der Reihe

$$W_0 = \frac{\left(\frac{2}{\pi}E_0\right)^2}{R}$$

die Arbeit, welche von dem constanten Theil der elektromotorischen Kraft geleistet wird. Das zweite Product

$$W_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{2}{1\cdot 3}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot E_0\right)^2}{R}\cos^2\psi_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{2}{1\cdot 3}\cdot\frac{2}{\pi}E_0\right)^2}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}}\cos\psi_1,$$

repräsentirt die von der zweiten elektromotorischen Kraftcomponente geleistete Arbeit u. s. w. Die gesammte Arbeit ist somit eine Summe der von den einzelnen Kraftcomponenten geleisteten Arbeiten, entsprechend dem Gesetze der Superposition der Einzelnwirkungen.

Für $L = 0$ erhält man ferner die grösste Arbeit

$$W\max = \frac{\left(\frac{2}{\pi} E_0\right)^2}{R}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\cdot 3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3\cdot 5}\right)^2 + \ldots\right].$$

Wie man sich aber leicht überzeugen kann, ist

$$\frac{4}{\pi^2}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\cdot 3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3\cdot 5}\right)^2 + \ldots\right] = \frac{1}{2},$$

daher

$$W\max = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{R}.$$

Dieselbe mittlere Arbeit wird bekanntlich in einem Leiter ohne Selbstinduction geleistet, wenn die elektromotorische Kraft dem einfachen Sinusgesetz genügt und ihre Richtung periodisch und alternirend ändert. Für $L = \infty$ erreicht die mittlere Arbeit den kleinsten Werth

$$W\min = \frac{4}{\pi^2}\frac{E_0^2}{R},$$

somit die Differenz der beiden Arbeiten

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)\frac{E_0^2}{R} = \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) W\max = 0\cdot 1887\ W\max.$$

Die mittlere Arbeit kann somit durch die Selbstinduction höchstens bis auf $18\cdot 9\%$ des maximalen Betrages herabgedrückt werden, ohne je den Werth Null zu erreichen, was bekanntlich dann der Fall ist, wenn die elektromotorische Kraft eine einfache Sinusfunction der Zeit und die Selbstinduction $L = \infty$ ist.

Ich lasse hier noch das Resultat der Rechnung für den Fall folgen, dass die gleichgerichtete elektromotorische Kraft durch irgend eine periodische Function der Zeit $f(t)$ gegeben ist, sich durch eine Cosinusreihe in der bekannten Weise darstellen

lässt und in einem Leiter mit Selbstinduction L und Widerstand R wirkt, somit die Beziehungen bestehen

$$e = f(t) = \frac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + A_2 \cos \frac{4\pi}{T} t + \ldots$$

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt.$$

In diesem Falle ist die momentane Stromstärke

$$i = \frac{1}{2} \frac{A_0}{R} + \frac{A_1 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \psi_1\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{2\pi L}{T}\right)^2}} + \frac{A_2 \cos\left(\frac{4\pi}{T} t - \psi_2\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{4\pi L}{T}\right)^2}} + \ldots,$$

und

$$\operatorname{tang} \psi_1 = \frac{2\pi L}{RT}, \quad \operatorname{tang} \psi_2 = \frac{4\pi L}{RT}, \quad \operatorname{tang} \psi_3 = \frac{6\pi L}{RT}, \ldots$$

die mittlere Stromstärke

$$M(i) = \frac{1}{2} \frac{A_0}{R},$$

das mittlere Quadrat der Stromstärke

$$M(i^2) = \left(\frac{1}{2} \frac{A_0}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{A_1}{R}\right)^2 \cos^2 \psi_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{A_2}{R}\right)^2 \cos^2 \psi_2 + \ldots$$

und die mittlere Arbeit

$$W = \frac{\left(\frac{1}{2} A_0\right)^2}{R} + \frac{1}{2} \frac{A_1^2}{R} \cos^2 \psi_1 + \frac{1}{2} \frac{A_2^2}{R} \cos^2 \psi_2 + \ldots$$

Wie aus den obigen Gleichungen 9) und 10) zu ersehen ist, hat diese Untersuchung noch zu einem bemerkenswerthen Resultate geführt. Während nämlich das mittlere Quadrat der Stromstärke mit der Selbstinduction sich ändert, ist die mittlere Stromintensität von derselben ganz unabhängig und numerisch gleich $\frac{2}{\pi} \frac{E_0}{R}$, wenn die gleichgerichtete elektromotorische Kraft eine einfache Sinusfunction der Zeit ist. Nach diesem Ergebniss war im Voraus zu erwarten, dass ein Galvanometer unter der

Wirkung von schnell aufeinander folgenden gleichgerichteten Stromimpulsen bei grosser und kleiner Selbstinduction denselben Ausschlag geben wird, während die Ausschläge eines Elektrodynamometers desto kleiner ausfallen werden, je grösser die Selbstinduction des Stromkreises bei sonst unverändertem Ohm'schen Widerstand derselben ist.

Um dieses theoretische Ergebniss durch Versuche zu prüfen, wurde ein Erdinductor, der mit einem zweitheiligen Commutator und zwei Bürsten versehen war, und dessen eingehende Beschreibung einer späteren Abhandlung vorbehalten werden soll, mit dem Spiegelgalvanometer von Prof. v. Lang und einer Drahtrolle zu einem Stromkreise verbunden. Bei einer bestimmten Rotationsgeschwindigkeit des Erdinductors gab das Galvanometer einen Ausschlag, welcher objectiv auf einer $6 \cdot 4\,m$ entfernten Scala beobachtet werden konnte. Die Selbstinduction des Stromkreises wurde durch Einschieben eines $30\,cm$ langen, $1 \cdot 8\,cm$ dicken, weichen Eisenstabes in die Drahtrolle vergrössert, wobei also der Ohm'sche Widerstand unverändert blieb. Die Drahtrolle war ungefär $25\,cm$ lang und hatte ohne Eisen einen Selbstinductionscoëfficienten $= 0 \cdot 12$ Erdquadranten. In Übereinstimmung mit dem theoretischen Resultat zeigte das Galvanometer keinen Unterschied im Ausschlag, wenn die Rolle den Eisenkern enthielt oder nicht. Der Versuch mit dem Elektrodynamometer musste etwas modificirt werden, weil das letztere für schwache Erdinductorströme zu unempfindlich war. Es wurde daher das homogene magnetische Feld der Erde durch ein nicht homogenes eines in der Nähe aufgestellten Elektromagneten verstärkt. Bei constanter Rotationsgeschwindigkeit des Erdinductors wurde an der Scala ein Ausschlag von $49\,cm$ bei Anwendung der Rolle ohne Eisenkern und ein Ausschlag von $56\,cm$ beobachtet, wenn die Rolle den Eisenkern enthielt.

Die Gesetze der Elektricitätsströmung in einem Leiter mit Selbstinduction, in welchem von einer periodisch veränderlichen elektromotorischen Kraft Stromimpulse nur in einer Richtung erzeugt werden, finden ihre Analogie in den Gesetzen der drehenden Bewegung eines schweren Rades, welches unter der Wirkung veränderlicher und gleichgerichteter mechanischer Kräfte rotirt und in den Lagern eine Reibung zu überwinden hat.

Die Kräfte werden nicht bloss diese Reibung überwinden, sondern auch im schweren Rade eine desto grössere kinetische Energie aufspeichern, je grösser sein Trägheitsmoment ist.

Denken wir uns beispielsweise ein Wasserrad, an dessen Umfang die Schaufeln so vertheilt sind, dass jedesmal eine Schaufel mit Wasser sich zu füllen beginnt, wenn die vorangehende sich bereits entleert hat. Das Wasserrad steht in diesem Falle unter der Wirkung veränderlicher Kräfte, welche zu- und abnehmend sämmtlich in demselben Sinne auf das Wasserrad wirken. Ein sehr leichtes Wasserrad wird sich mit veränderlicher Geschwindigkeit drehen, und zwar so, dass die letztere und die mechanische Kraft gleichzeitig die Werthe Null und die maximalen Werthe erreichen. Ist aber das Wasserrad sehr schwer, so kann die Geschwindigkeit der Bewegung den Werth Null nicht erreichen; denn hat die äussere mechanische Kraft bis Null abgenommen, so gibt das Wasserrad seine kinetische Energie ab und bewegt sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit weiter, inzwischen aber beginnt die wirkende Kraft wieder zu wachsen und vergrössert die bereits vorhandene Geschwindigkeit, welche einen desto grösseren Werth erreicht, je öfters in einer bestimmten Zeit der Antrieb des Wasserrades erfolgt und je grösser seine Masse, beziehungsweise seine Trägheit ist.

XIV. SITZUNG VOM 11. JUNI 1891.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Zur Construction der Polargruppen“ (II. Mittheilung), und
2. „Über die Formen fünfter Ordnung auf der cubischen Raumcurve“, beide Arbeiten von Herrn Emil Waelsch, Privatdocenten an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.
3. „Über einen neuen Kapselbacillus *(Bac. capsulatus mucosus)*“, Arbeit aus dem Institute für allgemeine und experimentelle Pathologie an der k. k. Universität in Graz von Dr. Moriz Fasching.

Das w. M. Herr Hofrath Director F. Steindachner übergibt eine Abhandlung, betitelt: „Über einige neue und seltene Reptilien und Amphibien“.

Das w. M. Herr Hofrath C. Claus überreicht die Fortsetzungen des von ihm herausgegebenen Werkes: „Arbeiten aus dem zoologischen Institute der k. k. Universität in Wien und der zoologischen Station in Triest“, Bd. IX, Heft I (1890) und Heft II (1891).

In diesen Heften findet sich auch die Beschreibung einer neuen Peltidie, *Goniopelte gracilis*, welche im Jahre 1890 von der Expedition S. M. Schiffes „Pola“ im östlichen Mittelmeere gefischt worden ist.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der Universität in Bern von Prof. St. v. Kostanecki und E. Schmidt: „Über das Gentisin". (II. Mittheilung.)

Das c. M. Herr Prof. Sigm. Exner überreicht zwei Abhandlungen von Dr. Maximilian Sternberg:

1. „Die Hemmung, Ermüdung und Bahnung der Sehnenreflexe im Rückenmarke."
2. „Über die Beziehung der Sehnenreflexe zum Muskeltonus."

XV. SITZUNG VOM 18. JUNI 1891.

Der Secretär legt das erschienene Heft III—IV (März-April 1891) des XII. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Herr Dr. Franz Ritter v. Haberler, Hof- und Gerichts-Advocat in Wien, übermittelt im Auftrage Sr. k. und k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserl. Akademie, das Werk: Die Insel Menorca. II. Specieller Theil. Sonderabdruck aus dem Werke „Die Balearen". In Wort und Bild geschildert (1890).

Die Apostolische Nuntiatur in Wien übermittelt im Auftrage Sr. Heiligkeit des Papstes Leo XIII. das Werk „Pubblicazioni della Specola Vaticana". (Fascicolo I, 1891.)

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung in Wien übermittelt die diesjährige Kundmachung über die Verleihung von Stipendien und Pensionen aus dieser Stiftung zur Unterstützung bedürftiger und hervorragender Talente auf dem Gebiete der Kunst, Literatur und Wissenschaft.

Herr Dr. J. Jahn in Wien übersendet folgende Mittheilung: „Über die in den nordböhmischen Pyropensanden vorkommenden Versteinerungen der Teplitzer und Priesener Schichten".

Das w. M. Herr Prof. V. v. Lang überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Untersuchung des Herrn Stefan Markovits, welche den Titel führt: „Experimente über die Reibung zwischen Öl und Luft".

Herr Prof. Dr. E. Lippmann in Wien überreicht eine in Gemeinschaft mit Herrn F. Fleissner ausgeführte Arbeit: „Über die Einwirkung von Jodwasserstoff auf Chinin und das Isochinin".

Der Secretär legt einen von Herrn Gejza v. Bukowski eingesendeten Reisebericht aus dem Seengebiete des südwestlichen Kleinasien vor.

Experimente über die Reibung zwischen Öl und Luft

von

Stefan Markovits.

(Mit 1 Textfigur.)

Dass zwischen Wasser und Luft starke Reibung stattfindet, „so starke, dass sie sich kaum von völliger Adhäsion unterscheidet", hat Prof. v. Lang mit Hilfe eines von ihm zu diesem Zwecke construirten Apparates unzweifelhaft bewiesen.[1] Aus einigen wenigen Versuchen, welche er mit anderen Gasen (Leuchtgas, Kohlensäure) angestellt hat, ergab sich dasselbe Resultat.

Bei der Wichtigkeit, welche dieses Phänomen (die Reibung zwischen Flüssigkeiten und Gasen) hat, war es wünschenswerth, die Untersuchungen auf die anderen Flüssigkeiten zu erweitern. Somit habe ich auf den Vorschlag des Herrn Prof. v. Lang zuerst das Öl der Untersuchung unterzogen und mit Hilfe des Lang'schen Apparates die Versuche gemacht.

Die Wahl dieser Flüssigkeit ist dadurch gerechtfertigt, dass erstens das Öl sich vom Wasser durch seine Zähigkeit stark unterscheidet (somit müsste die Abhängigkeit der Reibung von Flüssigkeiten gegen Luft von der Natur derselben sicher auftreten, wenn eine solche überhaupt existiren würde), und zweitens war es seit lange von Wichtigkeit, zu entscheiden: ob ein Unterschied zwischen Wasser und Öl in Bezug auf die Reibung gegen Luft besteht, weil eben diese Frage zuerst zu lösen ist, bei der Erklärung der beruhigenden Wirkung des Öls auf Wasserwellen. Es besteht nämlich in Bezug auf die Erklärung dieser lange

[1] Wied. Ann. d. Phys. u. Chem., N. F., Bd. III.

bekannten Thatsache, „welche den Stempel der physikalischen Antiquität erworben zu haben scheint", eine Anzahl von Theorien. Die eine dieser Theorien geht von der Annahme aus, dass Wasserwellen ihr Entstehen bloss der Reibung an bewegter Luft verdanken und zieht aus der beruhigenden Wirkung des Öls den Schluss: dass die Reibung zwischen dem Öl und der Luft eine geringere sein muss als jene zwischen dem Wasser und Luft, „dass sozusagen das Öl den Wind schmiere". Die Versuche, welche Mr. J. Aitken[1] zur Prüfung dieses supponirten Schlusses im Kleinen angestellt hat, zeigten aber, wie er behauptet, dass die an die beölte Wasseroberfläche geblasene Luft der letzteren dieselbe Bewegungsgrösse mittheilte wie der reinen Wasseroberfläche, „dass das Öl somit die Reibung zwischen der Luft und dem Wasser nicht vermindert." Obwohl man es bei der Anwendung des Öles zur Beruhigung der Wasserwogen mit dünnen Ölschichten zu thun hat, schien es mir für nicht überflüssig, die Experimente über die Reibung zwischen Öl und Luft nach der Methode des Prof. v. Lang auszuführen, weil die Bewegung des dabei benützten Ölstrahls, welcher an der Luft sich reibt, eine viel regelmässigere ist als jene des Ölhäutchens (respective der Luft), mit welcher Mr. J. Aitken operirt hat; diese Regelmässigkeit aber ist bei der Ausführung der Messungen unentbehrlich.

Die Experimente, die ich ausgeführt habe, stimmen mit denjenigen des Mr. J. Aitken darin überein, dass kein nachweisbarer Unterschied zwischen Wasser und Öl bezüglich der Reibung an der Luft besteht. Dadurch verliert die in Rede stehende Theorie über die beruhigende Wirkung des Öls ihre Grundlage; wir haben eine Theorie weniger, und das ist ein Fortschritt.

I.

Die Beschreibung des Apparates, welchen Prof. v. Lang zur Demonstration und Messung der Reibung zwischen Wasser und Luft construirt hat, und welchen ich bei den Experimenten mit Öl benützte, findet man in der oben citirten Abhandlung des Prof. v. Lang und im Novemberheft der Zeitschrift für Instrumenten-

[1] Über die Wirkung des Öles auf eine stürmische See. Proc. Edinb. Roy. soc. 1883.

kunde 1884. Ich muss hier bei der Angabe der nöthigen Modificationen des Apparates diese Beschreibung theilweise wiederholen.

Prof. v. Lang setzte an den Hahn der Wasserleitung einen 1 *m* langen Kautschukschlauch (inn. Durchm. 11 *mm*) und führte diesen in einiger Höhe zu einem kurzen gläsernen Ausflussrohre von gleicher Breite, welches äusserst solid und vertical aufgestellt war. So erzeugte er einen continuirlichen verticalnach abwärts fliessenden Wasserstrahl, dessen Länge innerhalb gewisser Grenzen regulirt werden konnte.

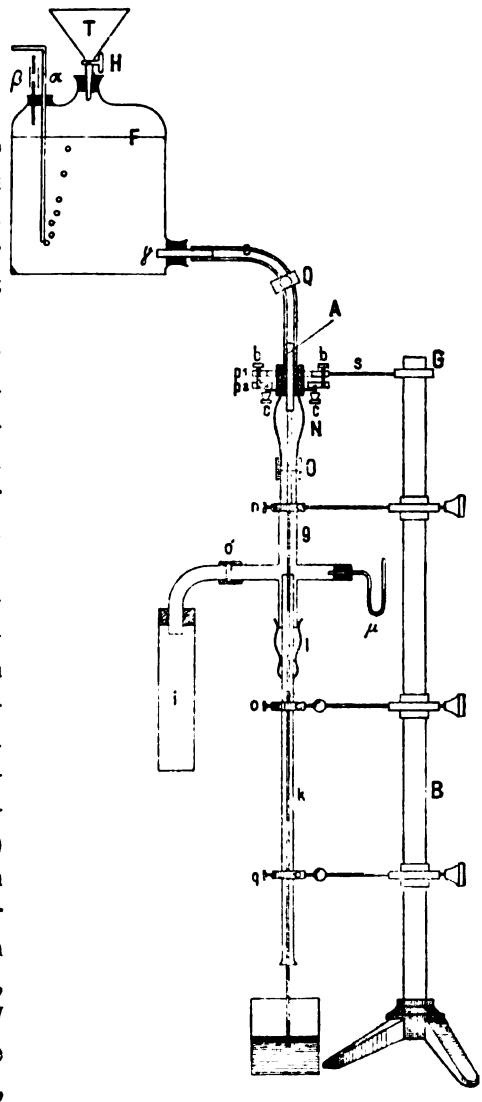


Fig. 1.

An Stelle der Wasserleitung musste ich ein Gefäss nehmen, aus welchem das Öl mit constanter Geschwindigkeit ausfliessen konnte, und als solches benützte ich eine Mariotte'sche Flasche *F* (Fig. 1) von circa 5 *l* Inhalt. In den mittleren Hals der Flasche setzte ich einen Trichter *T* luftdicht ein, welcher mit einem Hahn *H* versehen war, um in die Flasche das Öl eingiessen, beziehungsweise das Innere derselben von der äusseren Luft absperren zu können. In einen zweiten Hals der Flasche waren zwei Röhrchen mittelst

Kork und Siegellack luftdicht eingesetzt. Das eine dieser Röhrchen α war an beiden Enden offen, hatte ungefähr die Länge der Flasche selbst, konnte auf- und abwärts verschoben werden und gestattete dadurch den Druck, unter welchem das Öl ausfliesst, zu ändern. Das zweite Röhrchen β war kurz, oben mittelst eines Kautschukröhrchens und eines Glasstäbchens verschliessbar und hatte den Zweck, beim Füllen der Flasche das Entweichen der Luft aus derselben zu ermöglichen. Die Flasche stand auf einem an die Wand des Zimmers befestigten Brette, um von Erschütterungen frei zu sein. In den seitlichen Hals der Flasche, dort wo das Öl ausfliessen sollte, wurde eine kurze Glasröhre γ (inn. Durchm. 9 *mm*, L. 70 *mm*) mittelst Korkpropfen eingesetzt; an diese brachte ich einen Kautschukschlauch *e* (inn. Durchm. 10 *mm*, L. 250—300 *mm*), welcher dann an die eigentliche Ausflussröhre *a* des Lang'schen Apparates angesetzt wurde. Ich habe zwei solche Ausflussröhren benützt; ihre inneren Durchmesser waren respective 8·5 *mm* und 7 *mm*, L. 90 *mm*. Der Kautschukschlauch trug einen verschiebbaren Quetschhahn *Q*, mit Hilfe dessen die Ausflussmenge des Öls regulirt wurde.

Die übrigen Theile des Apparates von v. Lang wurden beibehalten. Der Ölstrahl ging zunächst durch eine Glasröhre *N* (inn. Durchm. 18 *mm*, L. 105 *mm*), in welche das Ausflussrohr luftdicht eingekittet war. Das letzte Rohrstück *N* ist in seiner Mitte erweitert, damit der Strahl sich nicht anlege, und sein oberes Ende ist in eine röhrenförmige, mit einem Ring versehene metallische Hülse *h* aus Messing (äuss. Durchm. $24^1/_2$ *mm*) eingebettet, welche von einer besonderen Vorrichtung getragen wurde. Zu dem Zwecke dient ein schwerer Träger: eine auf einem Dreifuss *m* befestigte Messingsäule *B*, welche durch eine Messingscheibe *G* gekrönt ist. In diese Scheibe ist von der Seite ein horizontaler Stiel *s* aus Messing (L. 65 *mm*) eingeschraubt, und an diesen schliesst sich eine horizontale ringförmige Messingplatte p_1 (äuss. Durchm. 74 *mm*, inn. Durchm. 42 *mm*, H. 8 *mm*). Von dieser Platte ist eine zweite der ersten nahe parallele Messingplatte p_2 (äuss. Durchm. 74 *mm*, inn. Durchm. 25 *mm*, H. 8 *mm*) mittelst zwei Schrauben *b b* in der Entfernung von 7 *mm* unterhalb der ersten Platte getragen und ihre Lage mittelst zwei

Stemmschrauben (deren Verbindungslinie zu *b b* senkrecht ist) so regulirt, dass die metallische Hülse, welche in die zweite ringförmige Platte von unten eingesetzt und mittelst zwei Klemmschrauben *c c* gehalten wurde und mit ihr die Ausflussröhre vertical gestellt wird. An das Rohr *N* gliedert sich ein aus gleichem Glasrohr verfertigtes Kreuzstück *g*, welches mit dem ersten durch ein Kautschukrohr *O* luftdicht verbunden ist. An dem einen der beiden horizontalen Arme (L. 65 *mm*) des Kreuzstückes ist ein offenes Wassermanometer μ mittelst eines Kautschukpfropfens angesetzt; der andere Arm ist durch ein ähnliches Kautschukrohr *O'* wie *O* mit dem Massrohre luftdicht verbunden. Die letztere Röhre besteht aus zwei Theilen: aus einem knieförmig gebogenen (inn. Durchm. 18 *mm*) und einem cylindrischen (inn. Durchm. 47 *mm*, L. 200 *mm*) Glasrohre; das letzte Rohr bildet die eigentliche Massröhre *i*; beide Theile sind durch Kork und Siegellack luftdicht verbunden. Zur grösseren Sicherheit ist die Massröhre mittelst eines Drahtes an dem zu diesem Zwecke bestimmten Arm *f* der Messingsäule befestigt, welcher der Deutlichkeit halber in der Figur ausgelassen ist. Der Strahl ging dann frei durch eine bis zu dem Kreuzungspunkte des Kreuzstückes hineinreichende Glasröhre (inn. Durchm. 5—8 *mm*, L. bis 480 *mm*), Saugröhre *k*, welche mit dem unteren Schenkel (L. 65 *mm*) des Kreuzes mit Hilfe eines Kautschukmundstückes *l* luftdicht verbunden ist. Das untere Ende der Saugröhre ist trichterförmig erweitert, damit die hier angesammelten Tropfen von dem Strahle genügend entfernt seien.

An der Messingsäule sind schliesslich drei verschiebbare Arme, welche an ihren Enden je einen Ring mit drei Schrauben tragen, angebracht. Der erste dieser Arme *n* dient dazu, das Kreuzstück festzuhalten; die anderen zwei Arme *o* und *q* gestatten vermöge ihrer Construction, die Saugröhre immer coaxial mit dem Strahle zu stellen.

II.

Mit Hilfe des beschriebenen Apparates kann man die Reibung zwischen dem Strahle und der anliegenden Luft, welche sich durch die Bewegung der letzten in der Saugröhre offenbart, in zweifacher Weise demonstriren. Erzeugt man nämlich an dem offenen Ende

des Massrohres Seifenlamellen, was durch successive Berührung desselben mit der Seifenlösung gelingt, so folgen die Seifenlamellen der Luftbewegung in dem Saugrohre, derart, dass, wenn einmal die ganze Massröhre benetzt ist, solche Seifenlamellen sogar bis an die Mündung der Saugröhre gelangen und dort platzen. Oder man führt in die Massröhre etwas Rauch ein — der einer Cigarre genügt dafür — so steigt der Rauch empor, bewegt sich abwärts in der Nähe des Strahles und hüllt den letzten nach dem Verlassen des Saugrohres noch ein, soweit der Strahl ruhig und continuirlich ist; ein Zeichen dafür, dass die Lufttheilchen sehr regelmässig durch das Saugrohr in parallelen Geraden fliessen. Wir sind also zu der Annahme berechtigt: die in der Zeiteinheit ausgesaugte Luftmenge als Mass für die zwischen Strahl und Luft stattfindende Reibung zu nehmen.

Es handelt sich nun darum, diese Grösse zu messen. Es wurde eine Papierskala an dem Massrohre angebracht, eine Seifenlamelle erzeugt, und aus dem Wege, welchen die Lamelle gemacht hat, aus der entsprechenden Zeit und aus dem Durchmesser des Massrohres wurde die in der Zeiteinheit ausgesaugte Luftmenge ausgerechnet.

Dass das Gewicht der Seifenlamelle auf die ausgesaugte Luftmenge keinen beobachtbaren Einfluss hat, zeigte v. Lang dadurch, dass das offene Ende der Massröhre nach aufwärts gerichtet wurde. Die beiden Stellungen der Massröhre gaben für die unter sonst gleichen Bedingungen aspirirte Luftmenge dieselben Zahlen. Damit aber die Reibung der Lamelle möglichst vermindert wird, wurde dafür Sorge getragen, dass die Massröhre mit Seifenlösung immer benetzt war; auch gab man der Röhre eine genügende Weite. Es zeigte sich nämlich, dass weitere Röhren ein grösseres Volumen ausgesaugter Luft gaben, dass aber von einem gewissen Durchmesser an das Volumen nicht mehr wuchs. Es verschwand sodann die nachtheilige Einwirkung der Reibung. Dasselbe bestätigt auch das Verhalten des Wassermanometers. Wenn während der Aussaugung die Massröhre offen war, dann wurde kein Druckunterschied beobachtet; wurde die Röhre mit einer Seifenlamelle geschlossen, so zeigte das Manometer eine umso geringere Druckverminderung, je weitere Massröhren man benützte. Prof. v. Lang gibt an, dass

für seine Versuche mit dem Wasser eine Massröhre von 48 *mm* Durchmesser genügend war. Ich bediente mich zweier Massröhren von 47 und 87 *mm* Durchmesser und fand namentlich beim Öl sehr kleine Differenzen in der ausgesaugten Luftmenge.

Die Versuche von Prof. v. Lang ergaben, dass die aspirirte Luftmenge mit der Länge des Saugrohres sich einem Maximum näherte, dieses jedoch nicht erreichen konnte, wahrscheinlich wegen der konischen Form des Strahles. v. Lang fand,[1] dass ein Saugrohr von 47 *cm* Länge das Maximum der ausgesaugten Luftmenge näherungsweise gibt, wenn sein Halbmesser unter 0·29 *cm* ist. Die Resultate meiner diesbezüglichen Messungen beim Öl sind folgende:

Saugröhre		Ausgesaugte Luftmenge A auf 16 cm^3 des ausgeflossenen Öls
Radius	Länge	
0·3759 *cm*	48 *cm*	27·14 cm^3
„	38	26·85
„	28	25·56
„	18	22·90
0·2964	48	19·54
„	38	18·62
„	28	17·13
0·2627	48	18·93
„	38	18·03
„	28	17·21

Die Zahlen für A sind nicht direct beobachtet, sondern zuerst wurde das Mittel genommen aller Ablesungen für A, für die ausgeflossene Ölmenge in der Nähe von 16 cm^3, und dann wurde die verlangte Grösse aus diesen zwei Mitteln einfach interpolirt.

Für alle drei Saugröhren verringert sich das ausgesaugte Luftvolumen A zunächst langsam (in der Nähe des Maximums), dann schneller, wenn ihre Länge um 10 *cm* abnimmt.

Daraus ist nun ersichtlich, dass ich den Saugröhren mindestens die Länge von 48 *cm* geben musste. Längere Röhren konnte ich nicht nehmen, da in der Distanz $z = 70\,cm$ unterhalb der Mündung des Ausflussrohres die „Anschwellungen" — wenn auch sehr schwache — des Ölstrahles begannen, welche die umliegende Luft viel kräftiger in Bewegung setzten, und nur an dem con-

[1] Wied. Ann., N. F., Bd. III, S. 230.

tinuirlichen Theile des Strahles lässt sich die reine Reibung[1] nachweisen. Da nun mit beschränkter Quantität des Öles es mir nicht gelungen ist, einen noch längeren Ölstrahl zu erzeugen, so wurde ich genöthigt, den langen Schenkel des Kreuzrohres zu kürzen, und zwar so weit, dass der Anfang des Saugrohres 20·5 *cm* von dem Ausflussrohre entfernt war; hingegen betrug diese Distanz bei den Experimenten mit dem Wasser 35 *cm*. Selbstverständlich war es nothwendig, zuerst sich zu überzeugen, dass der Theil des Ölstrahles, welcher in Folge dieser Abkürzung in die Saugröhre aufgenommen wurde, von der cylindrischen Form nur sehr wenig abweiche. Das geschah durch Messung der Dimensionen des Ölstrahles. Ich operirte mit dem käuflichen filtrirten Brennöl (Baumöl). Bei der Ausflussmenge des Öls Ö. = 15·5 cm^3 pro Secunde fand ich für den Radius ρ des Strahles in der Distanz z von der Ausflussöffnung folgende Werthe in Centimetern:

z	ρ	z	ρ
0	0·425	40	0·128
5	0·217	45	0·125
10	0·178	50	0·123
15	0·163	55	0·121
20	0·154	60	$0·118_{,5}$
25	0·146	65	0·116
30	0·138	70	$0·114_{,7}$
35	0·132	75	0·115

Aus der Messung der Dimensionen des Wasserstrahles bei verschiedenen Ausflussmengen und mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate hat v. Lang zwischen dem Radius r des Strahles und der Ausflussmenge W pro Secunde folgende Relation[2] gefunden:

$$r = 0·09246 + 0·002709 \,.\, W + (0·42748 + 0·025918 \,.\, W)\frac{1}{\sqrt{z}},$$

welche den Radius des Wasserstrahles für jede Höhe und Wassermenge in Centimetern gibt. Setzen wir also $W = 15·5\ cm^3$, so bekommen wir folgende Tabelle:

---

[1] v. Lang a. a. O.

[2] v. Lang a. a. O., S. 227.

z	r	z	r
25	0·3003	55	0·2463
30	0·2858	60	0·2415
35	0·2746	65	0·2373
40	0·2656	70	0·2336
45	0·2581	75	0·2302
50	0·2517	80	0·2272

Aus diesen zwei Tabellen lässt sich leicht ersehen, dass der Ölstrahl in allen Höhen innerhalb der Grenzen $z = 20$ und 70 von der cylindrischen Form weniger abweicht, wie der Wasserstrahl innerhalb der Grenzen $z = 35$ und 80 bei derselben Ausflussmenge. Dadurch sind wir zu dem Schlusse berechtigt, dass wir die von v. Lang gegebene angenäherte Theorie der Reibungsversuche mit gleichem Recht für meine Experimente mit dem Öl annehmen dürfen, mit welchem v. Lang diese Theorie für seine Experimente mit dem Wasser gegeben hat. Das letztere wurde von ihm genügend gerechtfertigt.

III.

Unter den Annahmen: 1. dass der Strahl innerhalb der Saugröhre cylindrisch sei, 2. dass, den Rauchexperimenten entsprechend, alle Lufttheilchen durch die Saugröhre zu dem Strahl parallel fliessen, also dass nur in dieser Richtung eine Geschwindigkeit der Lufttheilchen existirt und folglich der Luftdruck in jedem Querschnitte der Saugröhre constant sei und, weil er am Anfang wie am Ende der Röhre gleich dem Druck der Atmosphäre ist, wie das Manometer zeigt, dass der Druck in der ganzen Röhre constant sei; ferner mit Rücksicht darauf, dass die Bewegung der Luft in der Saugröhre eine stetige, von der Zeit unabhängige ist, dass keine äusseren Kräfte thätig sind — leitete v. Lang aus den hydrodynamischen Gleichungen für die Geschwindigkeit u der Lufttheilchen in der Entfernung q von der Axe des Strahles die Gleichung ab:

$$u = L \log \text{nat } q + M.$$

Bezüglich der Bestimmung der Constanten L und M macht man zweierlei Voraussetzungen:

a) Es wird angenommen, dass die Luft sowohl an dem Strahle, als an der inneren Fläche des Saugrohres, welche immer

benetzt war, vollständig adhärirt. Dann findet man mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen, die sich daraus ergeben, für die durch Reibung der Flüssigkeit gegen Luft in der Zeiteinheit ausgesaugte Luftmenge A folgende Gleichung:

$$A = \int_r^R u\, 2\pi q\, dq = Q\left[\frac{R^2 - r^2}{2r^2(\log \text{nat}\, R - \log \text{nat}\, r)} - 1\right].$$

Es war vorauszusehen, dass die Grösse A von den Radien R und r der Saugröhre und des Strahles und von der Geschwindigkeit der Flüssigkeit in dem Strahle abhängig sein muss. Die letzte Grösse ist durch die pro Secunde ausgeflossene Flüssigkeitsmenge Q vertreten. Die Abhängigkeit der ausgesaugten Luftquantität von den Radien R und r ist eine ziemlich complicirte.

Es handelt sich nun darum, die Messungen, welche ich mit dem Öl gemacht habe, mit den aus der letzten Gleichung sich ergebenden Werthen von A zu vergleichen. Es ist zu bemerken: der Radius R der Saugröhren wurde durch die Gewichte der die Röhren füllenden Quecksilberfäden gefunden; die Ermittlung des Radius r des Ölstrahles geschah mit Hilfe eines Kathetometers, dessen Fernrohr ein Ocularmikrometer besass; und zwar wurde für den numerischen Werth von r das Mittel aus den Werthen am Anfang und Ende des Rohres in die Formel eingesetzt. Die ausgesaugte Luftmenge A wurde aus mindestens 10 Ablesungen an der Skala des Massrohres gefunden.

Ich stelle in der folgenden Tabelle die Resultate meiner Messungen zusammen.

R	r	Q	A	A'	$A-A'$	$R-r$
0·2627	0·0887	6·93	19·58	17·93	+1·65	0·1740
	0·1153	11·65	19·16	18·08	+1·08	0·1474
	0·1335	15·99	18·81	18·04	+0·77	0·1292
	0·1344	16·13	18·53	17·92	+0·61	0·1283
	0·1355	16·37	18·51	17·84	+0·67	0·1272
0·2745	0·1432	17·40	17·89	18·36	−0·47	
0·2964	0·1134	11·80	24·11	24·01	+0·10	0·1830
	0·1154	11·77	22·17	23·15	−0·98	0·1810
	0·1254	13·20	20·79	21·99	−1·20	0·1710
	0·1332	14·67	19·76	21·62	−1·86	0·1632
	0·1403	16·00	19·66	21·04	−1·38	0·1564
	0·1429	16·44	19·69	20·76	−1·07	0·1535
	0·1454	17·03	19·42	20·70	−1·28	0·1510
0·3108	0·1348	16·25	23·46	25·72	−2·26	
0·3759	0·1426	17·45	30·18	36·10	−5·92	

Also unter der Supposition vollständiger Adhäsion der an dem Ölstrahl wie an der beölten Saugröhre anliegenden Luftschichten erhalten wir eine ziemlich gute Übereinstimmung zwischen den beobachteten Werthen von A und den berechneten A'. Es lässt sich aus dieser Tabelle insbesondere Folgendes herauslesen:

Die Differenzen $A—A'$ sind bei dem Saugrohre I durchwegs positiv, bei den übrigen Röhren, welche alle grösseren Radius haben, vorwiegend negativ. Bei der Röhre I nimmt die Differenz $A—A'$ ab, wenn die Differenz $R—r$ abnimmt, so dass, wenn es gelingen würde, einen dickeren Ölstrahl durch diese Röhre zu führen, es möglich wäre, die Differenz $A—A'$ zum Verschwinden zu bringen, für welchen Fall eben die Theorie genauer giltig sein dürfte. Da die Differenz $A—A'$ bei der Röhre III vorwiegend negativ ist, so folgt daraus, dass diese Röhre für die angegebene Ölstrahldicke zu weit ist — dass unsere Annahmen, welche wir über die Geschwindigkeit u gemacht haben, nicht genau zutreffen. In der That überschreitet der Radius III die Grenze $0{\cdot}29$ *cm*, welche v. Lang bei den Wasserexperimenten angegeben hat.

Diese Grenze scheint auch bei diesen Experimenten die gleiche zu sein. Bei den Röhren IV und V, deren Radien noch mehr die angegebene Grenze überschreiten, sind die Differenzen $A—A'$ noch grösser. Man würde aber auch bei diesen Röhren übereinstimmende Werthe für A und A' bekommen, wenn sie genügend lang wären und wenn der Strahl genügende Dicke hätte.

Es ist noch zu bemerken, dass die Differenzen $A—A'$ bei den Röhren IV und V kleiner sind als diejenigen, welche v. Lang bei den Röhren von nahe gleichen Radien für Wasser gefunden hat. Dies dürfte in den Verschiedenheiten des Druckes und der Geschwindigkeiten des Strahles seinen Grund haben. Ich operirte bei einem Uberdruck von 18—25 *cm* der Ölhöhe.

Prof. v. Lang hat bei den Experimenten mit dem Wasser auch eine zweite Art der Vergleichung der Beobachtungen mit der Theorie versucht, indem er voraussetzte, dass ein Gleiten der Luft sowohl am Strahle, als an dem Saugrohre stattfindet, und fand für die Gleitungscoëfficienten (welche einander gleich sind, weil die Saugröhre inwendig benetzt war) den Werth $\xi = \psi = = 0{\cdot}029$.

Da aber der auf diesem Wege ermittelte Werth der Gleitungscoëfficienten kein Vertrauen verdient (weil er sogar negativ wird, wenn man nur einen Theil der Beobachtungen zu seiner Bestimmung verwendet); da weiter die Übereinstimmung der beobachteten Werthe A mit den berechneten A', welche auf diesem Wege von v. Lang gefunden wurden, von derselben Ordnung war wie die auf dem ersten Wege gefundene; und da schliesslich gezeigt wurde, dass die erste Art der Vergleichung beim Öl dasselbe ergab, was sie für Wasser ergeben hat: so habe ich es auch nicht nöthig gefunden, diese zweite Art der Vergleichung beim Öl vorzunehmen.

Durch das Vorstehende wird gezeigt, dass zwischen Öl und bewegter Luft eine Reibung stattfindet von derselben Grössenordnung wie zwischen Wasser und Luft. Doch ist dadurch nicht der wahre Werth des Reibungscoëfficienten gegeben; er könnte nur gefunden werden, wenn man die konische Form des Ölstrahles berücksichtigt.

Bemerkung. Die Beobachtungsfehler bei meinen Experimenten sind etwas grösser als diejenigen bei v. Lang. Es ist aber klar, dass ich grösseren Schwierigkeiten begegnete, und dass auch grössere Fehlerquellen beim Experimentiren mit dem Öl vorlagen. Namentlich bestand die grösste Schwierigkeit darin, den Radius des Ölstrahles richtig zu ermitteln, weil man diesen durch die Saugröhre, an welcher verschieden dicke Ölschichten hafteten, anvisiren musste. Weiter habe ich bemerkt, dass beim wiederholten Füllen der Flasche und fortgesetztem Ausfliessenlassen des Öls die Consistenz desselben sich änderte (wahrscheinlich wegen der Erwärmung in Folge der verschiedenen Reibungen), so dass die Ausflussmenge mit der Zeit, wenn auch langsam, wuchs und die Querdimension des Strahles sich änderte. Da nun die Messungen der erforderlichen Grössen immer einen beträchtlichen Zeitraum in Anspruch nahmen, so ist ersichtlich, dass der Einfluss auch dieses Umstandes unvermeidlich war.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. Band. VII. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

XVI. SITZUNG VOM 2. JULI 1891.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—II (Jänner-Februar 1891), Abth. II. a. und das Heft I—IV (Jänner-April 1891), Abth. II. b. des 100. Bandes der Sitzungsberichte, ferner das V. Heft (Mai 1891) des 12. Bandes der Monatshefte für Chemie und die gedruckte Ausgabe der diesjährigen Feierlichen Sitzung vor.

Die Nachricht von dem Ableben des wirklichen Mitgliedes der kaiserl. Akademie, Herrn Hofrath Dr. Ernst Ritter v. Birk, emerit. Vorstandes der k. k. Hofbibliothek in Wien, wurde in der ausserordentlichen Classensitzung vom 27. Mai d. J. zur Kenntniss genommen und das Beileid über diesen Verlust von den anwesenden Mitgliedern ausgedrückt.

Dem Beileide über das Ableben des Ehrenmitgliedes dieser Classe im Auslande, Herrn geheimen Rath und Professor Dr. Wilhelm Eduard Weber in Göttingen, wurde in der Gesammtsitzung der kaiserl. Akademie vom 25. Juni d. J. Ausdruck gegeben.

Das w. M. Herr Hofrath L. K. Schmarda übersendet eine Abhandlung des Dr. Alfred Nalepa, Professor an der k. k. Lehrerbildungsanstalt in Linz, unter dem Titel: „Genera und Species der Fam. *Phytoptida*".

Herr H. Hoefer, Professor an der k. k. Bergakademie in Leoben, übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Erdölstudien. I. Mendelejeff's Hypothese und der thierische Ursprung des Erdöles".

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über das Verhalten gesättigter Dämpfe", von Herrn P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten.
2. „Zur Theorie der biquadratischen Reste", von Dr. Max Mandl, derzeit in Berlin.
3. „Ansichten und Wahrnehmungen in Sachen der Descendenzlehre, insbesondere gegen die Selectionstheorie Darwin's", von Herrn J. Lichtnecker in Wien.

Herr Prof. Dr. A. Adamkiewicz in Krakau übersendet unter Beischluss einiger hierauf bezüglichen photographischen Abbildungen eine fünfte Mittheilung seiner Beobachtungen über die Reactionen der Carcinome und deren Heilwerth.

Herr Dr. Theodor Gross in Berlin übersendet, bezugnehmend auf seine früheren Mittheilungen einen weiteren Bericht über den Schwefel.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus seinem Laboratorium, welche von dem seither verstorbenen Adjuncten Dr. J. Kachler ausgeführt wurde, betitelt: „Über trockene Destillation von Silbersalzen organischer Säuren".

Das w. M. Prof. E. Weyr überreicht eine Abhandlung von Dr. Jan de Vries in Kampen: „Über räumliche Configurationen, welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleiten lassen".

Herr Dr. Gustav Kohn, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: „Zur Theorie der associirten Formen".

XVII. SITZUNG VOM 9. JULI 1891.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—III (Jänner-März 1891) des 100. Bandes, Abtheilung I, der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Ludwig übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für medicinische Chemie an der k. k. Universität in Wien von Dr. Richard Kerry und stud. med. Sigmund Fraenkel: „Über die Einwirkung der Bacillen des malignen Ödems auf Kohlehydrate“ (II. Mittheilung).

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Note über das Legendre-Jacobi'sche Symbol“.

Der Secretär legt eine von Dr. Gottfried Grün im chemischen Laboratorium des Herrn Prof. Dr. W. Gintl an der k. k. deutschen Universität in Prag ausgeführte Arbeit vor, betitelt: „Beiträge zur Kenntniss der Permanganate“.

Das w. M. Herr Hofrath Director F. Steindachner überreicht eine Abhandlung: „Über einige neue und seltene Fische von dem canarischen Archipel, aus den Flüssen Südamerika's und von Madagascar unter dem Titel: ‚Ichthyologische Beiträge‘ (XV)“.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht zwei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

1. „Zur Kenntniss der Trimethyläthylidenmilchsäure“, von C. Glücksmann.

2. Eine Abhandlung von Dr. K. Natterer, Chemiker der Tiefseeexpedition auf S. M. Schiff „Pola“ im Sommer 1890: „Chemische Untersuchungen im östlichen Mittelmeere“.

Herr Dr. Gottlieb Adler, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: „Über eine Bestimmungsmethode der Magnetisirungszahl fester Körper mittelst der Wage“.

Über Formen fünfter Ordnung auf der cubischen Raumcurve

von

Emil Waelsch,

Privatdocent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Juni 1891.)

Die Theorie der binären Formen auf rationalen Curven ist bisher in einigen Arbeiten von Lindemann, Meyer, Sturm u. A. behandelt worden. In der Abhandlung von Sturm[1] und in dem Buche von Meyer[2] findet man die Covarianten binärer Formen dritter und vierter Ordnung construirt, einfache Polarenconstructionen dieser Formen abgeleitet und auch einige Covarianten für höhere Formen in Betracht gezogen. Die Lösung der Aufgabe: „Für Formen höherer Ordnung, welche durch eine Anzahl von Punkten auf einer rationalen Curve repräsentirt sind, Covarianten zu construiren", soll im Folgenden für Formen fünfter Ordnung versucht werden.

Für diese Formen gilt noch die Curve dritter Ordnung des dreidimensionalen Raumes als typischer Träger. Denn die niedrigen Covarianten sind hier durch Elementargebilde des Raumes fixirt: die cubischen Covarianten durch Ebenen, die quadratischen durch Bisecanten, und die biquadratischen Covarianten dadurch, dass eine Gerade angegeben wird, welche die vier Tangenten der Punkte der Covariante schneidet. Ausserdem liegen hier die beiden wichtigen Covarianten H und T auf einfachen covarianten Flächen der fünf Formenpunkte allein.[3]

---

[1] Siehe R. Sturm, Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve. Crelle's Journal, Bd. 86, S. 116.

[2] Siehe F. Meyer, Apolarität und rationale Curven. Tübingen 1883.

[3] Siehe „Über eine geometrische Darstellung in der Theorie der binären Formen". Diese Sitzungsber., S. 574, Art. 4.

Um aber die Aufgabe zu begrenzen, werden im Folgenden die Covarianten eines vollständigen Systems der Form fünfter Ordnung construirt. Die Invarianten anlangend, werden diejenigen Flächen angegeben, welche die Curven dritter Ordnung enthalten, die durch fünf feste Punkte gehen und auf welchen diese Punkte eine dem System angehörende verschwindende Invariante haben. Hierbei schien es zum Zwecke besonders einfacher Construction nothwendig, ein System anzunehmen, welches von den üblichen in zwei Formen abweicht, so zwar, dass die behandelten 23 Formen die folgenden sind:

$$f,\ H=(f,f)^2,\ T=(f,H),\ i=(f,f)^4,\ j=-(f,i)^2$$
$$\tau=(j,j)^2,\ \vartheta=(i,\tau),\ l=(j,\tau),$$
$$\alpha=-(j,i)^2,\ \beta=(i,\alpha),\ \gamma=(\tau,\alpha),\ \delta=(\vartheta,\alpha),$$
$$k=(j,i),\ g=(i,f),\ h=(\tau,f),\ \sigma=(j,H),$$
$$v=(i,H)^2-\frac{1}{5}i^2,\ w=(v,i),\ s=(i,H),$$
$$A=(i,i)^2,\ B=(i,\tau)^2,\ C=(\tau,\tau)^2,\ R=(\beta\gamma)=(\delta\alpha).$$

Die eine abweichende Form ist v, welche sonst (bei Clebsch und Gordan) bloss $(i,H)^2$ ist; die andere Form h kommt nur in dem bei Salmon angegebenen System vor.

§. 1. Die Polargruppen der Form fünfter Ordnung auf $\mathfrak{C}_3$.

1. Es mögen in diesem Artikel einige bekannte Hilfssätze angegeben werden, welche sich in den angeführten Arbeiten von Sturm und Meyer finden.

Das Hyperboloid, welches die beiden Tangenten t_φ der $\mathfrak{C}_3$ in den Punkten eines Punktepaares φ enthält, soll mit $\mathfrak{H}_\varphi$ bezeichnet werden. Legt man von einem Punkte o der $\mathfrak{C}_3$ aus die Transversale über die Tangenten t_φ, so liegt diese in einer Tangentialebene der $\mathfrak{C}_3$, welche in o berührt und $\mathfrak{C}_3$ in dem vierten harmonischen Punkt von o, bezüglich φ schneidet.

Die Punkte $(\psi)_1^o$ der ersten Polargruppe des Poles o für ein Tripel ψ der Curve sind die Berührungspunkte derjenigen Tangentialebenen von $\mathfrak{C}_3$, welche durch o gehen und den Nullpunkt ψ' der Ebene des Tripels bezüglich des Complexes C, der zu $\mathfrak{C}_3$ gehört, enthalten. Der Punkt der gemischten Polare $(\psi)_{11}^{oo'}$ liegt

in der Ebene, welche o, o', ψ' verbindet; die lineare Polare $(\psi)^5_2$ ist daher der dritte Schnittpunkt der Ebene, welche ψ' enthält und $\mathfrak{C}_3$ in o berührt. Die Bisecante der $\mathfrak{C}_3$, welche den Punkt ψ' enthält, schneidet $\mathfrak{C}_3$ in den Punkten der Hesse'schen Covariante η von ψ; die Bisecanten $(\psi)^5_1$ liegen auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}_\eta$. Die Ebene der cubischen Covariante von ψ enthält die conjugirte Gerade der Bisecante η bezüglich des Complexes C und trennt die Ebene ψ von den Punkten von η harmonisch.

Es gibt zwei Transversalen über die vier Tangenten, welche in den Punkten eines Quadrupels (q) die $\mathfrak{C}_3$ berühren; man kann sie „die Begleitgeraden" des Quadrupels nennen. Dieselben sind conjugirt bezüglich des Complexes C, da die vier Tangenten Complexstrahlen sind. Das Quadrupel ist äquianharmonisch, wenn dessen Begleitgeraden zusammenfallen; sie fallen dann in einen Complexstrahl.

Die Begleitgeraden der Quadrupel einer Involution liegen auf einem Hyperboloid, welches „das Begleithyperboloid" der Involution genannt werden soll. Hat ein Quadrupel einen Doppelpunkt, so geht eine der Begleitgeraden durch diesen, daher schneidet das Begleithyperboloid aus $\mathfrak{C}_3$ die Jacobi'sche Covariante der Involution aus.

Die ersten Polargruppen $(q)^5_1$ des Quadrupels werden von den Polarebenen des Punktes o bezüglich des Tetraëders (q) ausgeschnitten;[1] die sämmtlichen Polartripel bilden eine Involution, daher werden sie aus $\mathfrak{C}_3$ von den Ebenen eines Büschels ausgeschnitten. In diesem Büschel gibt es vier Ebenen, welche die $\mathfrak{C}_3$ in den Punkten der Hesse'schen Covariante von (q) berühren. Daher ist die Axe des Büschels eine der Begleitgeraden dieses Hesse'schen Quadrupels und soll „die Hesse'sche Gerade" des Quadrupels (q) genannt werden.

2. Auf der cubischen Raumcurve sei ein Quintupel (a) gegeben, zu einer Form $f = a_x^5$ gehörend; das Polarquadrupel des Poles o bezüglich (a) sei mit $(a)^5_1$ bezeichnet. Die Polarquadrupel sämmtlicher Punkte von $\mathfrak{C}_3$ bilden eine biquadratische Involution J_4. Zu J_4 gehört ein Begleithyperboloid, welches „das Begleit-

[1] Siehe: „Zur Construction der Polargruppen". Diese Berichte, S. 315.

hyperboloid B der Form fünfter Ordnung" heissen möge; es schneidet $\mathfrak{C}_3$ in der Hesse'schen Covariante H des Quintupels.

Die ersten Polartripel der Quadrupel einer Involution bilden eine zweifach unendliche quadratische Mannigfaltigkeit; daher umhüllen die Ebenen, welche diese Tripel ausschneiden, eine Fläche zweiter Classe. Die Hesse'schen Geraden der Quadrupel, durch welche die Ebenen ihrer Polartripel gehen, liegen auf dieser Fläche, welche die Jacobi'sche Covariante der Involution ausschneiden muss, da die Hesse'sche Gerade eines Quadrupels mit Doppelpunkt diesen enthält.

Liegt aber die Polarinvolution J_4 vor, so haben zwei ihrer Quadrupel ein gemeinsames Polartripel, nämlich die gemischte cubische Polare $(a)^{oo'}_{11}$. Daher schneiden sich die Hesse'schen Geraden g^o, $g^{o'}$ dieser Quadrupel, wesshalb die Hesse'schen Geraden aller Quadrupel durch einen Punkt gehen müssen; denn in einer Ebene können sie nicht liegen, weil die Fläche, welche sie bilden, die Covariante H ausschneiden muss. Es ergibt sich demnach: Die Hesse'schen Geraden der Polarquadrupel von (a) erfüllen einen Kegel zweiter Ordnung, welcher auf $\mathfrak{C}_3$ die Hesse'sche Covariante H ausschneidet. Dieser Kegel soll „der Hauptkegel" und sein Scheitel „der Hauptpunkt der Form f" genannt werden.

Durch diesen Hauptpunkt gehen also die Ebenen der gemischten Polartripel $(a)^{oo'}_{11}$ und diese Ebenen schneiden aus dem Hauptkegel die Hesse'schen Geraden g^o, $g^{o'}$ aus. Rücken die Punkte o, o' zusammen, so folgt: Die Ebene, welche die zweite Polargruppe $(a)^o_2$ auf $\mathfrak{C}_3$ ausschneidet, berührt in g^o den Hauptkegel.

Die Ebene $(a)^o_2$ wird, wie sich zeigen lässt,[1] gefunden als Polarebene des Poles o bezüglich des Seitenflachs des Fünfeckes (a).

3. Die Polartripel t_1, t_2 eines Quadrupels (q) haben ein Polarpaar t gemeinsam, das Hyperboloid $\mathfrak{H}_t$ enthält die Bisecanten der Nullpunkte t'_1, t'_2 der Ebenen t_1, t_2; legt man daher von t_1

[1] Allgemein gilt: Die Polargruppe r^{ter} Ordnung eines Punktes o der $\mathfrak{C}_r$ des R_r bezüglich einer Gruppe von m-Punkten dieser Curve wird von der Polarebene von o bezüglich des Seitenflachs des m-Eckes dieser Punkt ausgeschnitten.

über die Tangenten von t die Transversale, so schneidet diese $\mathfrak{C}_3$ in dem Pole o. Folglich: Man bestimme die conjugirte Gerade bezüglich des Complexes C der Schnittlinie der Ebenen t_1 und t_2; diese Gerade liegt mit der Bisecante, die man von dem Nullpunkte t_1' über $\mathfrak{C}_3$ legen kann, in einer Ebene, welche $\mathfrak{C}_3$ noch in dem Pole o des Tripels t_1 schneidet.

Wenn daher von einem Quadrupel die Hesse'sche Gerade gegeben ist, so findet man den Pol des Polartripels, welches eine Ebene dieser Geraden ausschneidet, auch in folgender Weise: Man suche die Axe der $\mathfrak{C}_3$, welche in diese Ebene fällt; diese schneidet die Hesse'sche Gerade in einem Punkt, durch welchen ausser den Schmiegungsebenen, die sich in der Axe schneiden, noch die Schmiegungsebene des gesuchten Poles geht.

Ist nun h die Hesse'sche Gerade eines Polarquadrupels $(a)_1^5$, so liegt sie auf dem Hauptkegel und die Tangentialebene T dieses Kegels für h enthält die Polare $((a)_1^5)_1^4$; daher geht die Schmiegungsebene des Poles o durch den Punkt, in welchem h die Axe der $\mathfrak{C}_3$ schneidet, die in die Ebene T fällt. Für diese Constructionen ist es einfacher, von dem Hauptkegel den Polarkegelschnitt k_2' bezüglich des Complexes C zu suchen; die Ebene desselben ist die Nullebene s' des Hauptpunktes s. Dann schneidet die Nullebene eines Punktes p von k_2' drei Punkte einer zweiten Polargruppe aus; der zugehörige Pol dieser Gruppe ist der dritte Schnittpunkt der Ebene, welche die Tangente von k_2' in p verbindet mit der Bisecante der $\mathfrak{C}_3$, welche p enthält.

Jede Ebene durch den Hauptpunkt s schneidet eine gemischte Polare von (a) aus; die zugehörigen Pole sind diejenigen Punkte, welche den Hesse'schen Geraden entsprechen, die in diese Ebene fallen. Sie werden nach den letzten Constructionen gefunden, oder auch so: Man ziehe von dem Nullpunkte der Ebene die Tangenten an k_2'; die Ebene, welche diese Tangenten mit den Bisecanten ihrer Berührungspunkte verbinden, schneiden die Pole aus.

§. 2. Die Überschiebungsfläche dritter Ordnung der Überschiebungen $(f, \varphi_a^2)^2$.

4. Die gemischte cubische Polare eines Punktepaares auf $\mathfrak{C}_3$, welches einer quadratischen Form φ_a^2 entspricht, wird durch eine

Ebene Φ ausgeschnitten, die durch den Hauptpunkt s geht. Die Beziehung von φ und Φ ist ein-eindeutig. Bleibt ein Punkt von φ fest, während der andere variirt, so beschreibt die gemischte Polare eine Involution; daher dreht sich die Ebene Φ um eine Gerade. Die Beziehung zwischen φ und Φ ist daher der Art, dass Φ ein Büschel beschreibt, wenn φ einen Kegel erzeugt. Hieraus folgt, dass das Bündel der Ebenen Φ collinear ist zu den Ebenenbündeln, welche die Bisecanten φ aus zwei Punkten der $\mathfrak{C}_3$ projiciren. Ferner ergibt sich: Der Ort des Schnittpunktes der Bisecanten mit ihren entsprechenden Ebenen Φ ist eine Fläche dritter Ordnung F_3, welche $\mathfrak{C}_3$ und den Hauptpunkt enthält.

Wird $\varphi_\alpha^2 = p_\alpha . q_\alpha$ gesetzt, so ist

$$(f, \varphi)^2 = (ap)(aq)a_\alpha^3:$$

die gemischte Polare ist identisch mit der zweiten Überschiebung, weshalb die Fläche F_3 auch als „Überschiebungsfläche" bezeichnet werden kann.

Wird $a_\alpha^5 = p_\alpha . q_\alpha . r_\alpha^3$ gesetzt, so ergibt sich als zweite Überschiebung von $p_\alpha q_\alpha$ über a_α^5:

$$3p_\alpha q_\alpha . (rp)(rq)r_\alpha — 4(pq)^2 . r_\alpha^3;$$

daher wird die Ebene Φ, welche der Verbindungslinie zweier Punkte (a) entspricht, durch den Durchstosspunkt dieser Linie mit der Ebene gehen, welche die übrigen Punkte (a) verbindet. Dieser Punkt gehört demnach der Fläche F_3 an: Die Überschiebungsfläche enthält die zehn Diagonalpunkte des Fünfeckes (a).[1]

[1] Herr G. Kohn hat in seiner Arbeit: „Über eine neue Erzeugungsweise der Flächen dritter Ordnung", diese Sitzungsber., Bd. 99, bewiesen, dass der Ort des Punktes, in welchem eine die Punkte (a) enthaltende Curve dritter Ordnung von Complexstrahlen eines linearen Complexes berührt wird, eine Fläche dritter Ordnung ist, welche die zehn Diagonalpunkte des Fünfeckes enthält; daher: Die Überschiebungsfläche ist der Ort des Punktes, in welchem eine Curve dritter Ordnung, welche die Punkte (a) enthält, von Strahlen des Complexes C berührt wird. Die Schmiegungsebenen der $\mathfrak{C}_3$ in (a) sind Tangentialebenen der F_3.

5. Es sei nun (ε) die Regelschaar des Hyperboloids $\mathfrak{H}_\varphi$, zu welcher die Tangenten der Punkte φ gehören; die Erzeugenden dieser Schaar schneiden auf $\mathfrak{C}_3$ Punktepaare aus, welche φ harmonisch trennen. Das Hyperboloid $\mathfrak{H}_\varphi$ schneidet F_3 in einer Curve C_3^φ, welche erzeugt wird durch die Regelschaar (ε) und das ihr projective Ebenenbüschel (E), welches die gemischten Polaren der Punktepaare ε ausschneidet.

Es sei ferner o einer der fünf Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_3$ und C_3^φ, und o' der Punkt, welcher mit o auf der Erzeugenden der Schaar (ε) liegt; dann muss die Ebene, welche die gemischte Polare $(a)_{11}^{oo'}$ enthält, durch o gehen. Folglich geben die fünf Punkte o, mit ihren linearen Polaren o' verbunden, fünf Gerade von (ε). Da dann die fünf Punktepaare oo' das Paar φ harmonisch trennen, so ist o' gleichzeitig die lineare Polare von o bezüglich f und bezüglich φ: o gehört der Überschiebung $(f, \varphi)^1$ an.

Die Axe des Büschels (E) ist die Bisecante, welche sich von s über C_3^φ legen lässt, in Folge dessen gehören die Ebenen der reinen zweiten Polaren der Punkte von φ diesem Büschel an; die Polarebene bezüglich des Hauptkegels dieser Bisecante enthält daher die gemischte Polare von φ. Es ergibt sich demnach:

Die Punkte der Überschiebung $(f, \varphi_2^2)^1$ sind die Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_3$ mit der Curve dritter Ordnung C_3^φ, welche dem Hyperboloid $\mathfrak{H}_\varphi$ und der Überschiebungsfläche gemein ist. Die Punkte der Überschiebung $(f, \varphi_2^2)^2$ liegen in der Polarebene bezüglich des Hauptkegels derjenigen Bisecante von C_3^φ, welche durch den Hauptpunkt geht.

Ist speciell φ ein doppeltgezählter Punkt ψ, so wird $\mathfrak{H}_\varphi$ der Kegel, welcher aus ψ die Curve $\mathfrak{C}_3$ projicirt, und die Curve C_3^φ enthält den Punkt ψ. Die Punkte $(f, \psi)^1$ sind daher die Punkte der ersten Polare des Poles ψ, daher: Der Kegel, welcher $\mathfrak{C}_3$ aus dem Punkte o projicirt, schneidet die Uberschiebungsfläche in einer Curve dritter Ordnung C_3^o, welche $\mathfrak{C}_3$ in dem Punkte der ersten Polare $(a)_1^o$ trifft.

Nach dem vorigen Satze folgt auch, dass die Bisecante der Curve C_3^o, welche durch den Hauptpunkt geht, die Hesse'sche Gerade des Quadrupels $(a)_1^o$ ist; daher: Der Hauptkegel ist

der Ort der Bisecanten vom Hauptpunkt s über die Curven C_3°.

Durch einen Punkt von $(a)_1^\circ$ gehen demnach die beiden dem Kegel und F_3 gemeinsamen Curven; daher berühren sich diese Flächen in den Punkten $(a)_1^\circ$. Hieraus ergibt sich: Die erste Polarfläche eines Punktes von $\mathfrak{C}_3$ bezüglich der Uberschiebungsfläche schneidet $\mathfrak{C}_3$ in den Punkten $(a)_1^\circ$. Ferner: Die Gerade, welche o mit seiner linearen Polare $(a)_4^\circ$ verbindet, ist Tangente der Überschiebungsfläche.

6. Es gibt sechs Bisecanten der $\mathfrak{C}_3$, welche auf F_3 liegen; für jede dieser Bisecanten φ_ν enthält die Ebene Φ_ν der gemischten Polare wieder die Punkte φ_ν, wie dies aus der Erzeugung der Überschiebungsfläche durch drei collineare Bündel (siehe Art. 4) folgt. Daher sind die Punktepaare φ_ν die zweigliedrigen Polarcyclen von f, d. h. Paare von Punkten, von denen jeder zur ersten Polare des anderen gehört. Die sechs Geraden der F_3, welche Bisecanten von $\mathfrak{C}_3$ sind, schneiden $\mathfrak{C}_3$ in den zweigliedrigen Polarcyclen von f.

Nimmt man zwei der Geraden φ_ν, z. B. φ_1, φ_2, so bestimmen dieselben mit $\mathfrak{C}_3$ ein Hyperboloid, welches F_3 noch in einer Geraden ε_{12} schneidet, die einpunktige Secante von $\mathfrak{C}_3$ ist. Bestimmt man nun das Punktepaar φ_{12}, welches die Paare φ_1 und φ_2 harmonisch trennt, so wird das Hyperboloid $\mathfrak{H}\varphi_{12}$ die Geraden φ_1, φ_2 enthalten und daher auch die Gerade ε_{12}. Es folgt demnach (siehe Art. 5), dass sich als die fünf Punkte $(f, (\varphi_1, \varphi_2))^1$ wieder die Punkte φ_1, φ_2 und der Punkt ε_{12} ergeben: Daher: Die Functionaldeterminante von f mit der Functionaldeterminante zweier zweigliedrigen Polarcyclen φ_μ, φ_ν enthält diese Cyclen und den Punkt $\varepsilon_{\mu\nu}$.

F_3 hat ausserdem noch sechs Gerade γ_ν, welche $\mathfrak{C}_3$ nicht schneiden; γ_ν schneidet aber fünf Gerade φ, nur φ_ν nicht. Jede γ_ν ist Axe einer cubischen Involution auf $\mathfrak{C}_3$, so dass sich ergibt. Fünf der Polarcyclen sind Theile von Tripeln einer cubischen Involution; ist φ_μ einer dieser Cyclen und φ_ν deren sechstes, so gehört der Punkt $\varepsilon_{\mu\nu}$ zu demselben Tripel wie φ_μ.

7. Die Gleichung der Überschiebungsfläche ist, wenn die Bezeichnungen von Seite 575 verwendet werden und $f_i' = f'(\alpha_i)$ gesetzt wird:

$$\sum_{i,k=1}^{5} \frac{(\alpha_i-\alpha_k)^3}{f_i' f_k'} x_i^2 x_k = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird auch erhalten, indem man in der Determinante fünften Grades

$$(1, \alpha_i, \alpha_i^2, x_i, x_i^2)$$

das Glied, welches den Factor $x_i^2 x_k$ hat, mit $(\alpha_i-\alpha_k)^3$ multiplicirt.

Die Gleichung der Ebene, welche die Gruppe dritter Ordnung ψ aus $\mathfrak{C}_3$ schneidet ist, wenn $\psi_i = \psi(\alpha_i)$ gesetzt wird:

$$\sum \frac{\psi_i}{f_i'} x_i = 0;$$

daher hat die Schmiegungsebene eines Punktes α der Curve die Gleichung:

$$\sum \frac{(\alpha-\alpha_i)^3}{f_i'} x_i = 0.$$

Die Schmiegungsebene des Punktes a_k, dessen Parameter $\alpha = \alpha_k$ ist, hat demnach die Gleichung

$$A_x^{(k)} \equiv \sum_i \frac{(\alpha_k-\alpha_i)^3}{f_i'} x_i,$$

so dass die Gleichung der Überschiebungsfläche ist:

$$\sum \frac{A_x^{(k)}}{f_i'} x_k^2 = 0,$$

welche wieder in der Form:

$$(1, \alpha_i, \alpha_i^2, \alpha_i^3, A_x^{(i)} . x_i^2) = 0$$

geschrieben werden kann.

§. 3. Die Covarianten H, T und die Covarianten zweiter und dritter Ordnung.

8. Die Punkte i^ν der quadratischen Covariante i haben äquianharmonische erste Polaren $(a)_1^\nu$. Die Covariante j ist die zweite Uberschiebung von i über f oder die gemischte Polare der Punkte i^ν.

Ist das Polarquadrupel äquianharmonisch, so ist seine einzige Begleitgerade ein Complexstrahl; da dann auch die Hesse'sche Covariante des Quadrupels äquianharmonisch ist, so ist auch die Hesse'sche Gerade des Quadrupels ein Complexstrahl. Die Hesse'schen Geraden der äquianharmonischen Quadrupel $(a)_1^\nu$ liegen demnach im Complexe C, da sie aber auch nach Art. 2 auf dem Hauptkegel liegen müssen, so sind sie die Schnittlinien η_ν des Hauptkegels mit der Nullebene des Hauptpunktes s. Diese Ebenen schneidet ferner nach Art. 2 die gemischte Polare der Pole i^ν aus, so dass sich ergibt:

Die Covariante j liegt in der Nullebene j des Hauptpunktes s.

Die Pole i_ν von j werden nach Art. 3 gefunden, indem man für die Gerade η_ν die Tangentialebene des Hauptkegels bestimmt und von diesen die Nullpunkte; von diesen Punkten lassen sich Bisecanten über $\mathfrak{C}_3$ legen, die mit ihren Geraden η_ν und den Punkten i^ν in einer Ebene liegen. Ist v die Polargerade der Ebene j bezüglich des Hauptkegels und v' ihre Conjugirte bezüglich des Complexes C, so werden demnach die Punkte i gefunden als Schnittpunkte der Ebenen, welche die Geraden η_ν verbinden mit den Bisecanten, die durch die gemeinsamen Punkte von v' und der Geraden η^ν gehen.

Nach Art. 1 ist es leicht, die Covarianten von j zu construiren. Die Bisecante, welche sich vom Hauptpunkte über $\mathfrak{C}_3$ legen lässt, schneidet $\mathfrak{C}_3$ in den Punkten der Covariante τ. Ist τ' die conjugirte Gerade von τ bezüglich des Complexes C, so schneidet die Ebene, welche durch τ' geht und die beiden Punkte der Covariante τ von der Ebene j harmonisch trennt, die Curve $\mathfrak{C}_3$ in der Covariante l.

Nach einem Satze über die Functionaldeterminante einer quadratischen und einer cubischen Form[1] muss τ' die lineare Polare des Hauptpunktes bezüglich des Dreieckes j sein. Nach demselben Satze verbindet die Ebene der Covariante k die Polargerade bezüglich des Dreieckes des Durchstosspunktes der Bisecante i mit der Ebene j und den vierten harmonischen Punkt dieses Durchstosspunktes bezüglich der Punkte i.

Die Covariante $\mathfrak{I}$ trennt i und τ harmonisch, daher liegen die Tangenten der Punkte von $\mathfrak{I}$ auf dem Hyperboloid $\mathfrak{H}_6$, welches durch $\mathfrak{C}_3$ und die Geraden i und τ bestimmt ist.

9. Die Hesse'sche Covariante H wird (siehe l. c. S. 582.) von der Hauptfläche des Fünfeckes (a) ausgeschnitten, die Covariante T von der Diagonalfläche dritter Ordnung seines Gegenflaches (A). Die Hesse'sche Covariante liegt ferner nach Art. 2 auf dem Hauptkegel und auf dem Begleithyperboloid B der Form f. Wir beweisen zunächst:

Die Covariante k liegt in der Polarebene des Hauptpunktes bezüglich der Hauptfläche.

Hierzu bemerken wir, dass eine Covariante g^{ten} Grades von f ein Punktsystem g^{ten} Grades beschreibt, wenn f in einer Involution variirt; d. h. durch einen Punkt sind g der Covarianten bestimmt. Die Polarebene des Hauptpunktes s bezüglich der Hauptfläche müsste demnach auf $\mathfrak{C}_3$ ein Punktsystem fünften Grades ausschneiden, wenn die Punktgruppe (a) in einer Involution auf $\mathfrak{C}_3$ variirt. Ist dies der Fall, so muss die ausgeschnittene Covariante mit k identisch sein, da es keine andere Covariante dritter Ordnung fünften Grades gibt.

Wenn f in einer Involution variirt, so beschreibt die zweite Polare des Punktes o auch eine Involution, ihre Ebene ein Ebenenbüschel. Diese Ebenenbüschel für drei Pole sind projectiv aufeinander bezogen, entsprechende Ebenen schneiden sich in

---

[1] Es gilt allgemein: Die Gruppe der Functionaldeterminante der Punktgruppen $a_1 \ldots a_\nu$ und $a_{\nu+1} \ldots a_n$ auf $\mathfrak{C}_{n-2}$ des R_{n-2} wird von der Ebene ausgeschnitten, welche den gemeinsamen Raum der Gegenebenen $A_1 \ldots A_\nu$ des n-Eckes $a_1 \ldots a_n$ mit dem gemeinsamen Raum der Ebenen $A_{\nu+1} \ldots A_n$ verbindet.

dem zu f gehörigen Hauptpunkt. Daher ist der Ort des Hauptpunktes eine Curve dritter Ordnung $\mathfrak{C}_3'$.[1]

Die Hauptflächen (H) der Gruppen f bilden ein Flächensystem vom zweiten Grade, da durch jeden Punkt der $\mathfrak{C}_3$ zwei Flächen gehen, denn die Hesse'schen Covarianten, welche diese Flächen aus $\mathfrak{C}_3$ ausschneiden, bilden ein Punktsystem zweiten Grades. Dieses Flächensystem ist den Hauptpunkten s der Curve $\mathfrak{C}_3'$ projectiv zugeordnet.

Es ist also zu zeigen, dass die Polarebenen der Punkte s einer Curve dritter Ordnung bezüglich der ihnen projectiv zugeordneten Flächen zweiter Ordnung eines Systems zweiten Grades eine Curve fünfter Classe umhüllen, dass also durch jeden Punkt des Raumes fünf dieser Ebenen gehen. Es ist zu zeigen, dass fünfmal eine Polarebene von p bezüglich einer Fläche H den entsprechenden Punkt s enthält.

Einem Punkte s entsprechen nun die drei Schnittpunkte σ der Polarebene P des Punktes p bezüglich der Fläche H, welche dem Punkte s entspricht. Wird ein Punkt σ angenommen, so gibt es zwei Flächen (H), für welche σ zu p conjugirt ist; daher entsprechen einem Punkte σ zwei Punkte s. Folglich geschieht es fünfmal, dass ein Punkt s mit einem seiner entsprechenden σ zusammenfällt, wodurch unsere Behauptung erwiesen ist.

Es ist nun leicht, die Coordinaten des Hauptpunktes s zu bestimmen. Denn die Gleichung der Ebene k ist

$$\sum \frac{k^i}{f_i'} x_i = 0;$$

die Coordinaten ihres Poles s bezüglich der Hauptfläche sind daher:

$$x_i = \frac{k(\alpha_i)}{f_i'}.$$

10. Auch das Begleithyperboloid B der Form f schneidet die Hesse'sche Covariante H aus; daher variirt B in einem Flächensystem zweiten Grades, wenn f eine Involution beschreibt.

---

[1] Die Nullebenen der Punkte dieser Curve bezüglich des Complexes C bilden eine Curve dritter Classe, schneiden daher auf $\mathfrak{C}_3$ ein Punktsystem dritten Grades aus; daher schneidet, wie hier von Neuem folgt, die Nullebene des Hauptpunktes s von f, die Covariante j aus.

Hieraus folgt wie oben, dass auch die Polarebene des Hauptpunktes bezüglich des Begleithyperboloids die Covariante k enthält.

Da nun die Hauptfläche und das Begleithyperboloid dieselbe Polarebene des Hauptpunktes haben, so wird die Schnittcurve dieser Flächen aus s durch einen Kegel zweiter Ordnung projicirt, welcher die sechs Punkte der Hesse'schen Covariante H enthält, da beide Flächen diese Covarianten ausschneiden. Dieser Kegel ist daher mit dem Hauptkegel, welcher auch H enthält, identisch; es ergibt sich:

Der Hauptkegel, die Hauptfläche und das Begleithyperboloid von f gehören einem Büschel an.

Die Covariante i beschreibt, wenn f in einer Involution variirt, ein Punktsystem (i) zweiten Grades. Die Hyperboloide, welche durch $\mathfrak{C}_3$ und einen Punkt im Raume gehen, enthalten die Bisecante der $\mathfrak{C}_3$, auf welcher dieser Punkt liegt; unter den Paaren des Systems (i) gibt es zwei, welche die Schnittpunkte dieser Bisecante mit $\mathfrak{C}_3$ harmonisch trennen. Daher gehen von den Hyperboloiden $\mathfrak{H}_{(i)}$ zwei durch jeden Raumpunkt; die Hyperboloide $\mathfrak{H}_{(i)}$ gehören demnach einem Flächensystem zweiten Grades an. Hieraus folgt wieder: Die Polarebene des Hauptpunktes bezüglich des Hyperboloids $\mathfrak{H}_i$ ist die Ebene k.

Unter den Flächen des obigen Büschels gibt es eine, welche die Raumcurve $\mathfrak{C}_3$ enthält. Unter den Flächen zweiter Ordnung, welche $\mathfrak{C}_3$ enthalten, gibt es anderseits im Allgemeinen keine, welche eine gegebene Ebene zur Polare eines Punktes hat, wenn es aber eine gibt, so nur diese; denn wäre eine zweite Fläche vorhanden, so müsste s ein Eckpunkt des gemeinsamen Polartetraëders sein, also auf $\mathfrak{C}_3$ liegen. Es ergibt sich demnach:

Die Fläche $\mathfrak{H}_i$, welche $\mathfrak{C}_3$ und deren Tangenten in den Punkten der Covariante i enthält, gehört auch dem obigen Büschel an.

Da die Covariante k die Functionaldeterminante (i, j) ist, so kann nun i auch in folgender Weise construirt werden: Man suche den Schnitt der Ebene j mit einer der Flächen des obigen Büschels, ferner die Polargerade des Hauptpunktes bezüglich dieses Kegelschnittes; dann ist der Pol dieser Geraden bezüglich des Dreieckes j ein Punkt der Bisecante i.

§. 4. Die weiteren Covarianten.

11. Da die lineare Covariante α die gemischte Polare der Punkte i bezüglich j ist, so ist α nach Art. 1 der dritte Schnittpunkt der Ebene, welche durch den Hauptpunkt geht und die Punkte i enthält.

Die linearen Covarianten β, γ, δ sind die vierten harmonischen Punkte von α bezüglich der Covarianten i, τ, ϑ. Daher liegen diese linearen Covarianten auch auf der Erzeugenden der Hyperboloide $\mathfrak{H}_i$, $\mathfrak{H}_\tau$, $\mathfrak{H}_\vartheta$, welche den Punkt α enthalten. Oder aber: Die Verbindungslinien des Punktes α und der Schnittpunkte seiner Schmiegungsebene mit den Geraden i, τ, ϑ werden von den Tangenten der Punkte β, γ, δ geschnitten.

Die Tangenten der Covariante ϑ schneiden die Gerade $\alpha\beta$; in der That ist $(j, \alpha) = -\vartheta$.

Die Ebene j und die Ebene, welche i und α ausschneidet, gehen durch den Hauptpunkt, durch welchen auch die Gerade τ geht. Daher muss es eine Ebene geben, welche dem Büschel $j, \alpha i$ angehört und welche die Punkte der Covariante τ gleichzeitig mit einer linearen Covariante ξ_α ausschneidet.

Zwischen diesen Covarianten muss demnach eine Beziehung

$$c_1 j + c_2 \alpha i + c_3 \xi \tau = 0$$

bestehen. Überschiebt man diese Gleichung zweimal hintereinander über α, so erhält man,[1] wenn

$$M = 2AB - 3C, \quad N = \frac{1}{2}(AC - B^2)$$

gesetzt wird:

$$c_1 \delta + c_2 M\alpha + 2c_3(\xi\alpha)\gamma + c_3 M\xi = 0;$$

diese Gleichung über α und δ geschoben gibt die Gleichungen:

$$-c_1 R + 3c_3 N(\xi\alpha) = 0, \quad -c_2 + c_3\{(MC - BN)(\xi\alpha) + N(\xi\delta)\} = 0.$$

---

[1] Wegen der zu verwendenden Hilfsformeln siehe Clebsch, Binäre Formen, S. 279 ff.

Diese Gleichungen werden erfüllt, wenn $\xi = \delta$ und $c_1 = 3MN$, $c_2 = 3(MC - BN)$, $c_3 = M$ gesetzt wird; daher:

Dem Ebenenbüschel, welches die Ebenen j und αi enthält, gehört auch die Ebene $\delta\tau$ an; zwischen diesen Covarianten besteht die Syzygie:

$$3MNj + 3(MC - BN)\alpha i + M\delta\tau = 0.$$

Vermöge der Relation

$$(\tau, f)^2 = -\frac{2}{3}Aj - \alpha i$$

gehört auch die Ebene der gemischten Polare von τ diesem Büschel an.

12. Die Covarianten fünfter Ordnung g und h werden nach Art. 6 aus $\mathfrak{C}_3$ von den Curven dritter Ordnung ausgeschnitten, welche auf den Hyperboloiden $\mathfrak{H}_i$, respective $\mathfrak{H}_\tau$ und der Überschiebungsfläche F_3 liegen.

Die Covariante siebenter Ordnung wird gleichzeitig mit τ von der Fläche dritter Ordnung ausgeschnitten, welche die Jacobi'sche Fläche der Ebene j des Hauptkegels und zweier Hyperboloide $\mathfrak{H}$ ist, welche $\mathfrak{C}_3$ und s enthalten. Denn diese Covariante ist mit j zusammen die Functionaldeterminante $(H, (j)^2)$, daher besteht sie aus den Berührungspunkten der Flächen zweiter Ordnung eines Büschels, von welchem eine Fläche zweimal die Punkte j und eine andere Fläche die Punkte H ausschneidet; als letztere Fläche kann man den Hauptkegel wählen. Diese Berührungspunkte werden aber ausgeschnitten von der Jacobi'schen Fläche des Gebüsches, welches durch die Fläche (j^2), den Hauptkegel und zwei Flächen, welche $\mathfrak{C}_3$ enthalten, bestimmt ist, oder aber durch eine dieser Flächen, (j^2) und das Büschel des Art. 10.

Wählt man als Hyperboloide, welche $\mathfrak{C}_3$ enthalten, diejenigen, auf welchen die Gerade τ liegt, z. B. die beiden Kegel, welche aus den Punkten von τ die Curve projiciren, so wird die Fläche dritter Ordnung die Gerade τ enthalten und die Polargerade v der Ebene j bezüglich des Hauptkegels. Ferner enthält diese Fläche eine Curve dritter Ordnung, welche nur von $\mathfrak{C}_3$ und j abhängt. Diese Curve enthält die Eckpunkte des Diagonaldreieckes des Viereckes, welches aus den Punkten j und dem Haupt-

punkte besteht, ferner die Punkte τ, und hat in jedem dieser Punkte als Tangente die Schnittlinie seiner Schmiegungsebene mit der Ebene, welche ihn mit der Tangente des anderen Punktes τ verbindet.

13. Die Covariante vierten Grades v ist durch dasjenige Quadrupel gegeben, dessen Begleitgerade die Polargerade der Ebene j bezüglich des Hauptkegels ist. Nach Art. 8 schneidet die Ebene j den Hauptkegel in zwei Geraden η_ν, in welchen der Hauptkegel von den Ebenen berührt wird, welche die zweiten Polaren der Punkte von i ausschneiden. Diese beiden Ebenen schneiden sich in v; sie bestimmen auf $\mathfrak{C}_3$ eine cubische Involution, deren Doppelpunkte eben die gesuchte Covariante v bilden. Um ihren Ausdruck zu finden, muss demnach die Jacobi'sche Determinante der zweiten Polaren der Punkte i bestimmt werden.

Wird $i_\alpha^2 = p_\alpha q_\alpha$ gesetzt, so ist

$$v = ((ap)^2 a_\alpha^3, (bq)^2 b_\alpha^3) = (ap)^2 (bq)^2 ((ab)^2 a_\alpha^2 b_\alpha^2$$

$$= \frac{1}{2}(ab) a_\alpha^2 b_\alpha^2 \{(ap)^2 (bq)^2 - (aq)^2 (bp)^2\} = (pq) a_\alpha^2 b_\alpha^2 (ap)(bq);$$

die zu bestimmende Covariante ist demnach

$$(ab)^2 a_\alpha^2 b_\alpha^2 (ap)(bq).$$

Nun ist die quadratische Polare der Hesse'schen Covariante H bekanntlich gegeben durch

$$\frac{1}{5} i(\alpha\beta)^2 + (ab)^2 a_\alpha^2 b_\alpha^2 a_\beta b_\beta,$$

welche zweimal über $p_\beta q_\beta$ geschoben gibt:

$$(i, H)^2 = \frac{1}{5} i^2 + (ab)^2 a_\alpha^2 b_\alpha^2 (ap)(bq);$$

demnach ist die gesuchte Covariante mit der Covariante

$$(i, H)^2 - \frac{1}{5} i^2$$

identisch.

Die Covariante vierter Ordnung sechsten Grades $w = (v, i)$ ist mit i zusammen die Functionaldeterminante von v und des Quadrates von i. Daher ist sie gegeben durch die Doppelpunkte

der biquadratischen Involution, welche die Gruppe v und die Gruppe $(i)^2$ enthält, und wird demnach von dem Begleithyperboloide dieser Involution ausgeschnitten. Dieses Hyperboloid enthält aber die Geraden v und i und ferner alle Strahlen des Complexes C, welche v und i schneiden; daher: Die Punkte der Covariante w liegen auf den vier Strahlen des Complexes C, welche die Geraden i und v schneiden.

14. Es erübrigt nun noch, die Covariante sechster Ordnung vierten Grades $s = (i, H)$ zu construiren. Dieselbe ist mit $(i)^2$ zusammen die Functionaldeterminante $((i)^2, H)$, besteht demnach aus den Berührungspunkten von $\mathfrak{C}_3$ mit den Flächen zweiter Ordnung eines Büschels. Eine Fläche dieses Büschels schneidet H aus, eine andere ist das Product der Schmiegungsebenen der $\mathfrak{C}_3$ für die Punkte von i. Die Covariante s wird mit $(i)^3$ zusammen von der Jacobi'schen Fläche vierter Ordnung eines Flächengebüsches ausgeschnitten, welches sonst aus denselben Flächen besteht wie das oben verwendete, nur dass an Stelle der Fläche $(j)^2$ das Product der beiden Schmiegungsebenen der Punkte i tritt.

Die Punkte der Covariante s ergeben sich ferner als Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_3$ mit einer der Kernflächen einer Reciprocität. Nimmt man von einem Punkte die Polarebene an $\mathfrak{H}_i$, von dieser den Nullpunkt für C, von diesem die Polarebene für den Hauptkegel, so ist dies die entsprechende Ebene für den angenommenen Punkt; die Kernfläche ist der Ort des Punktes, der auf seiner entsprechenden Ebene liegt. Oder anders ausgedrückt: Diese Punkte sind diejenigen auf $\mathfrak{C}_3$, deren Tangentialebenen für $\mathfrak{H}_i$ sich mit der Polarebene bezüglich des Hauptkegels in einem Complexstrahl schneiden, oder da der Hauptkegel und $\mathfrak{H}_i$ dem Büschel des Art. 10 angehören: Die Schnittpunkte von $\mathfrak{C}_3$ mit der Fläche zweiter Ordnung, deren Punkte Polargerade bezüglich dieses Büschels haben, welche Complexstrahlen sind. Die Punkte der Covariante s haben bezüglich des Hauptkegels und der Hauptfläche Polarebenen, die sich in einem Strahl des Complexes C schneiden.

§. 5. Die Invariantenflächen.

15. Nach l. c. S. 578 gehört zu jeder Invariante der Form f eine „Invariantenfläche", welche von denjenigen, die Punkte

(a) enthaltenden Curven dritter Ordnung $\mathfrak{C}_3$ erfüllt wird, für welche die Invariante der Punkte (a) verschwindet. Die Ordnungen der Invariantenflächen der Invarianten A, B, C, R sind nach l. c. S. 583 gleich 10, 20, 30, 45, und diese Flächen haben in den Punkten (a) 6-, 12-, 18-, 27-fache Punkte.

Für die Hermite'sche Invariante R wurde l. c. S. 584 bewiesen, dass ihre Invariantenfläche in 15 Flächen dritter Ordnung zerfällt. Man bestimme das Diagonaldreieck des Vierseits der Schnittlinien der Gegenebene A_t mit den übrigen Ebenen (A); die $\mathfrak{C}_3$, welche eine der Dreiecksseiten schneiden, erfüllen eine dieser Flächen. Es wurden dort auch einige Eigenschaften dieser Flächen angegeben und die Zerlegung von R in die 15 Hermite'schen Factoren gefolgert.

Wenn die Invariante C verschwindet, liegt der Hauptpunkt auf einer Tangente von $\mathfrak{C}_3$. Für $C = 0$ lässt sich die Form in die Gestalt

$$a\alpha_1^5 + b\alpha_1\alpha_2^4 + c\alpha_2^5$$

setzen. Nun ist, wenn $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ ist, a_2 das Leitglied der Covariante H und a_3 das Leitglied von T. Wenn a_2 und a_3 gleichzeitig verschwinden sollen, muss es daher auf $\mathfrak{C}_3$ einen Punkt geben, welcher den H und T entsprechenden Covariantenflächen $\Sigma x_i^2 = 0$ und $\Sigma x_i^3 = 0$ gemeinsam ist. Es folgt demnach:

Die Invariantenfläche C wird gebildet von den Curven $\mathfrak{C}_3$, welche die Schnittcurve sechster Ordnung der Hauptfläche und der Diagonalfläche des Pentaeders (A) schneiden. Es ergibt sich ferner, dass diese $\mathfrak{C}_3$ die Hauptfläche in den Punkten dieser Schnittcurve berühren, dass also die Fläche C von den $\mathfrak{C}_3$ erfüllt wird, welche die Hauptfläche berühren.

16. Die Invariante B verschwindet dann und nur dann,[1] wenn f eine erste Polare hat, die ein volles Quadrat ist.

Wenn ein Quadrupel auf $\mathfrak{C}_3$ aus zwei doppeltgezählten Punkten φ besteht, so ist eine seiner Begleitgeraden die Bisecante φ; da hier ferner alle ersten Polaren die Punkte φ ent-

[1] Siehe Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgegeben von Kerschensteiner, S. 263.

halten, so ist φ auch die Hesse'sche Gerade des Quadrupels. Nun liegt nach Art. 2 die Begleitgerade des Quadrupels auf dem Begleithyperboloid B, seine Hesse'sche Gerade auf dem Hauptkegel; diese beiden Flächen haben demnach die Bisecante φ gemein. Diese Flächen bilden aber nach Art. 10 ein Büschel, welchem auch die Hauptfläche angehört; daher liegt die Bisecante φ auf der Hauptfläche und es ergibt sich:

Die Invariantenfläche B wird erfüllt von denjenigen $\mathfrak{C}_3$, welche die Erzeugenden der Hauptfläche zu Bisecanten haben. Sie zerfällt demnach in zwei Flächen zehnter Ordnung, welche in den Punkten (a) sechsfache Punkte haben.

Da die Invariante A verschwindet, wenn i ein volles Quadrat ist, so besteht die Invariantenfläche A aus den $\mathfrak{C}_3$, welche die Covariantenfläche für i berühren. Diese Fläche ist nach l. c. S. 583 eine Fläche vierter Ordnung, welche in den fünf Punkten (a) Doppelpunkte hat, daher wird ihre Gleichung sein: $13(\Sigma x_i^2)^2 - 20\Sigma x_i^4 = 0$.

Eine anschaulichere Bestimmung der Invariantenfläche A kann leicht in folgender Weise gegeben werden: Die Fläche der Discriminante $D = 64B - A^2$ besteht nach (B), Art. 3 aus den doppeltgezählten Ebenen des Seitenflachs S des Fünfeckes (a): $D = S^2$. Es ist daher

$$64B = A^2 + S^2;$$

die beiden Theile, in welche B zerfällt, gehören demnach dem Büschel $\lambda A + S = 0$ an. Es folgt hieraus:

Die Invariantenfläche A und die von dem Seitenflach S gebildete Fläche gehören dem Büschel an, welches durch die beiden Theile der Invariantenfläche B bestimmt ist, und zwar trennen sie in dem Büschel diese Theile harmonisch.

Über räumliche Configurationen, welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleiten lassen

von

Dr. **Jan de Vries** in Kampen.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Juli 1891.)

Herr Reye hat in seiner Abhandlung „Die Hexaëder- und die Oktaëderconfigurationen $(12_6, 16_3)$“, Acta Mathematica, Bd. I, S. 97, gezeigt, wie die von Poncelet bei den Ähnlichkeitspunkten von vier Kugeln bemerkte Cf. collinear bezogen werden kann auf die Cf., welche durch die Ecken, den Mittelpunkt und die unendlich fernen Kantenpunkte eines Würfels bestimmt ist, oder auch auf jene Cf., welche sich aus den Ecken und unendlich fernen Kantenpunkten eines regelmässigen Oktaëders ergibt.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun diejenigen Cf. betrachtet werden, für welche die regelmässigen Polyeder überhaupt die Quelle sind.

Nachdem das von Herrn Reye für räumliche Cf. eingeführte Symbol nicht ausreicht, wenn die Anzahl der Punkte von der Anzahl der Ebenen verschieden ist, möchte ich nachstehende Bezeichnung vorschlagen, welche sich derjenigen anschliesst, deren ich mich in meinen Arbeiten über ebene Cf.[1] bedient habe.

Es möge

$$(A_b^c, B_a^\gamma, C_a^\beta)$$

eine Cf. bezeichnen, welche aus A Punkten, B Geraden und C Ebenen derart zusammengesetzt ist, dass jeder Punkt mit b Geraden und c Ebenen, jede Gerade mit a Punkten und

[1] Acta Math., XII, S. 63. Diese Berichte, XCVII, S. 1307, XCVIII, S. 446 und 1290. Math. Ann., XXXIV, S. 227 und XXXV, S. 401.

γ Ebenen, jede Ebene mit α Punkten und β Geraden incident ist. Selbstverständlich genügen jene neun Zahlen den Gleichungen

$$Ab = Ba,\ B\gamma = C\beta,\ C\alpha = Ac.$$

Diese Cf. lässt sich offenbar zerlegen in drei einfachere Cf., welche je nur zwei Arten von Elementen enthalten. Sie umschliesst nämlich:

I. Die aus Punkten und Geraden gebildete Cf.

$$(A_b,\ B_a).$$

II. Die aus Geraden und Ebenen gebildete Cf.

$$(B^\gamma,\ C^\beta).$$

III. Die aus Punkten und Ebenen gebildete Cf.

$$(A^c,\ C_\alpha).$$

Beispielsweise gilt für die durch die 27 Geraden der kubischen Fläche bestimmte Cf. die Bezeichnung $(135^9_2,\ 27^5_{10},\ 45^3_{27})$ und die Zerlegung in

$$(135_2,\ 27_{10}) + (27^5,\ 45^3) + (135^9,\ 45_{27}).$$

Bei der Aufzählung der aus Punkten und Ebenen gebildeten Cf., welche sich aus den regelmässigen Polyedern ergeben, übergehe ich alle jene „elementaren“ Cf., wo jeder Punkt nur drei Ebenen, beziehungsweise jede Ebene nur drei Punkte trägt.

---

1. Die Ecken, Flächen und vierpunktigen Diagonalebenen eines Würfels bilden offenbar eine $(8^6,\ 12_4)$, welche collinear bezogen werden kann auf die Cf., zu der man gelangt, wenn man aus der Reye'schen Hexaëderconfiguration vier getrennte Punkte fortlässt.

Die Ebenen der $(8^6,\ 12_4)$ bestimmen demnach vier gleichberechtigte Sextupel, indem die sechs Ebenen einer solchen Gruppe einen der Cf. nicht angehörenden Punkt gemein haben. Jeder der unendlich fernen Kantenpunkte trägt nämlich vier Würfelflächen und zwei Diagonalebenen, während der Mittelpunkt mit allen Diagonalebenen incident ist.

Es mögen 1, 2, 3, 4 vier Würfelecken bezeichnen, welche ein Tetraëder bestimmen, und 5, 6, 7, 8 beziehungsweise die Gegenecken andeuten. Ferner sollen e_{ik} und f_{ik} die beiden Ebenen sein, welche zwei durch i und k gekennzeichneten Sextupeln gemein sind. Die obige Cf. wird alsdann dargestellt durch:

e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{34}	e_{24}	e_{23}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{34}	f_{24}	f_{23}
1	1	1	1	1	1	3	2	2	3	2	2
2	3	4	2	3	4	4	4	3	4	4	3
5	5	5	7	6	6	7	6	6	5	5	5
6	7	8	8	8	7	8	8	7	6	7	8

(1)

Ein Ebenenpaar, welches durch sämmtliche Punkte der Cf. hindurchgeht, soll als ein „Hauptzweiflach“ angedeutet werden.

Durch Ausscheidung eines solchen Paares entsteht eine $(8^5, 10_4)$.

2. Die Entfernung von zwei Hauptzweiflachen führt auf zwei verschiedene $(8^4, 8_4)$, je nachdem die betreffenden Ebenenpaare demselben Sextupel oder verschiedenen Sextupeln angehören.

Lässt man beispielsweise die Ebenen $e_{14} f_{14} e_{23} f_{23}$ aus, so ergibt sich die Cf.:

e_{12}	e_{34}	e_{13}	f_{24}	f_{12}	f_{34}	f_{13}	e_{24}
1	1	1	2	3	3	4	3
2	2	5	5	4	4	6	6
5	7	7	7	8	6	8	8
6	8	3	4	7	5	2	1

(A)

Sie ist gleichartig mit der von Moebius bemerkten Figur zweier einander um- und einbeschriebener Tetraëder, hier 1257 und 3468.

Aus der Tabelle erhellt, dass die Schnittlinie der Ebenen e_{12} und f_{12} die sechs Punkte

(12, 78) (15, 37) (16, 38)
(56, 34) (26, 48) (25, 47)

enthält.

Die Gegenseitenpaare des vollständigen Vierecks 1256 werden daher durch die Gegenseitenpaare des Vierecks 3478 in drei Punktepaaren einer Involution geschnitten. Dabei ist zu bemerken, dass drei zusammenlaufende Seiten des einen Vierecks allemal von drei ein Dreieck bildenden Seiten des zweiten Vierecks getroffen werden.

Hieraus ergibt sich nachstehende Construction der $(8^4, 8_4)$ *A*.

„Die Seiten eines beliebigen ebenen Vierecks 1256 werden mit einer beliebigen Geraden in den sechs Punkten 12, 56; 15, 26; 16, 25 geschnitten. Auf einer durch den Punkt 12 gelegten Geraden werden die weiteren Punkte 7 und 8 gewählt, wonach 7 mit 15 und 25, 8 mit 16 und 26 verbunden wird. Der Schnittpunkt 3 der Geraden 7(15) und 8(16) ist dann der siebente, der Schnitt 4 von 7(25) und 8(26) der achte Punkt der Cf.“

Wenn die Transversale des Vierecks 1256 den Schnittpunkt (16, 25) mit dem Schnitte (15, 26) verbindet, wobei der Punkt (16, 38) mit (25, 47) und (15, 37) mit (26, 48) zusammenfällt, so enthält die Figur noch die Ebenen 1467, 2358, 1458, 2367, welche die $(8^4, 8_4)$ zu einer mit der obigen gleichartigen $(8^6, 12_4)$ ergänzen.

3. Entzieht man der $(8^6, 12_4)$ die Ebenen $e_{12} f_{12} e_{14} f_{14}$, so entsteht die Cf.:

e_{34}	f_{34}	e_{24}	f_{24}	e_{23}	f_{23}	e_{13}	f_{13}
1	3	1	2	1	2	1	2
2	4	3	4	4	3	3	4
7	5	6	5	6	5	5	6
8	6	8	7	7	8	7	8

(*B*)

Hier werden die Seiten 13, 68; 16, 38; 18, 36 des Vierecks 1368, beziehungsweise durch die Seiten 57, 24; 47, 25; 27, 45 des Vierecks 2457 geschnitten. Die beiden Vierecke liegen demnach perspectivisch; allerdings treffen sich die Geraden 17, 35, 64, 82 in ihrem unendlich fernen Punkte.

Die $(8^4, 8_4)B$ lässt sich daher auf diese Weise herstellen:

„Man schneidet vier nach einem Punkte zusammenlaufende Gerade durch zwei Ebenen; die acht Schnittpunkte bilden mit jenen beiden Ebenen und den sechs durch je zwei der Geraden gelegten Ebenen die fragliche Cf.“

Wird die zweite Ebene durch zwei Nebenecken des von der ersten erzeugten Vierecks geführt, so gibt es in der Figur weitere vier Ebenen durch je vier Configurationspunkte, welche die Cf. zu einer $(8^6, 12_4)$ ergänzen.

Die Cf. *A* und *B* können einfach hierdurch unterschieden werden, dass in *A* jeder Punkt mit sechs Punkten zweifach verbunden ist, in *B* jeder Punkt mit einem Punkte dreimal, mit drei Punkten zweimal, mit drei Punkten einmal verbunden erscheint.

Beide Cf. besitzen, wie aus obigen Constructionen erhellt, im Allgemeinen 17 Freiheitsgrade.

Das duale Gegenbild der $(8^4, 8_4)B$ ist eine Cf., deren acht Ebenen die Seiten eines vollständigen Vierseits aus zwei beliebigen Punkten projiciren. Sie wird dargestellt durch:

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 7 & 8 & 7 & 8 & 7 & 8 \end{array}\right| \qquad (C)$$

Von den 15 Paaren, welche aus den Hauptzweiflachen der $(8^6, 12_4)$ gebildet werden können, liefern deren drei eine Cf. *A*, die übrigen 12 eine Cf. *B*. Nachdem die Reye'sche $(12^6, 12_6)$ drei $(8^6, 12_4)$ und drei $(12^4, 8_6)$ umschliesst, lassen sich aus ihr im Ganzen 81 Cf. $(8^4, 8_4)$ hervorheben, nämlich 9 Cf. *A*, 36 Cf. *B* und 36 Cf. *C*.

4. Die Mitte der Würfelkante, welche die Ecken *i* und *k* verbindet, soll durch *ik* dargestellt werden. Aus den 12 Punkten *ik* können drei mit der obigen $(8^6, 12_4)$ gleichartige Cf. gebildet werden, welche beziehungsweise die Punkte enthalten:

$$\left.\begin{array}{l} 16,\ 17,\ 25,\ 28,\ 35,\ 38,\ 46,\ 47; \\ 17,\ 18,\ 27,\ 28,\ 35,\ 36,\ 45,\ 46; \\ 16,\ 18,\ 25,\ 27,\ 36,\ 38,\ 45,\ 47. \end{array}\right\}$$

Diese Cf. haben paarweise eine der drei Symmetrieebenen

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 16 & 17 & 18 \\ 25 & 28 & 27 \\ 38 & 35 & 36 \\ 47 & 46 & 45 \\ \hline\end{array} \qquad (2)$$

gemein.

Die Kantenmitten sind bekanntlich die Ecken von vier regelmässigen Sechsecken, deren Ebenen zu den Würfeldiagonalen senkrecht stehen; jede dieser Ebenen

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 16 & 16 & 17 & 27 \\ 17 & 18 & 18 & 28 \\ 25 & 25 & 35 & 36 \\ 27 & 28 & 38 & 38 \\ 35 & 45 & 45 & 46 \\ 36 & 46 & 47 & 47 \\ \hline\end{array} \qquad (3)$$

gehört zu jeder der drei Cf.

Die 12 Punkte liegen ferner zu vieren in den Würfelflächen:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 16 & 17 & 16 & 25 & 25 & 35 \\ 17 & 18 & 18 & 27 & 28 & 36 \\ 46 & 27 & 36 & 45 & 35 & 45 \\ 47 & 28 & 38 & 47 & 38 & 46 \\ \hline\end{array} \qquad (4)$$

Hiernach bilden die Kantenmitten eine Cf. $(12^7, 21_4)$, von deren Ebenen sechs mit den Würfelflächen zusammenfallen, drei zu je zwei Würfelflächen und die übrigen 12 paarweise einer vierpunktigen Diagonalebene des Würfels parallel laufen.

5. Es lassen sich aus dieser $(12^7, 21_4)$ mehrere einfache Cf. herstellen; zunächst liefert die Entfernung der drei Ebenen (2) eine $(12^6, 18_4)$, die Ausscheidung der sechs Ebenen (4) eine $(12^5, 15_4)$ und die Abtrennung beider Gruppen eine $(12^4, 12_4)$ mit nachstehender Tabelle:

α_1	α_2	α_3	α_4	β_1	β_2	β_3	β_4	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
17	17	18	27	16	16	17	25	16	16	18	25
18	27	28	28	17	35	25	35	18	36	25	36
36	45	35	35	28	38	28	46	27	45	27	38
46	46	36	45	38	46	47	47	47	47	38	45

(5)

Diese Cf. besitzt sechs Paare getrennter Ebenen und sechs Paare getrennter Punkte. Jeder Punkt (jede Ebene) ist mit je zwei Punkten (Ebenen) doppelt verbunden, mit je acht einmal.

Jede Würfeldiagonale ist sechs Ebenen dieser Cf. parallel. Werden die vier unendlich fernen Punkte 15, 26, 37, 48 der Diagonalen und die sechs Ebenen der Tabelle (3) in die Figur der Cf. (5) aufgenommen, so entsteht eine $(16^6, 16_6)$, wo

$$\begin{aligned} 15 &\text{ mit } \alpha_2\alpha_3\beta_2\beta_3\gamma_2\gamma_3, \\ 26 &\text{ mit } \alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_4\gamma_1\gamma_4, \\ 37 &\text{ mit } \alpha_1\alpha_4\beta_1\beta_4\gamma_2\gamma_3, \\ 48 &\text{ mit } \alpha_1\alpha_4\beta_2\beta_3\gamma_1\gamma_4 \end{aligned}$$

incident ist.

Diese Cf. ist mit der bekannten Kummer'schen Cf. gleichartig (vergl. z. B. H. Schroeter, Über das Fünfflach und Sechsflach und die damit zusammenhängende Kummer'sche Configuration. Journal von Crelle, Bd. C., S. 231). Demnach:

„Bestimmt man für jeden von vier getrennten Punkten der Reye'schen $(12^6, 12_6)$ die vier Punkte, welche ihn harmonisch trennen von den vier mit ihm allineirten Punktepaaren der Cf., so ergibt sich eine durch die neuen 16 Punkte bestimmte Kummer'sche $(16^6, 16_6)$."

6. Ersetzt man zwei getrennte Ebenen der obigen $(12^4, 12_4)$ durch zwei die nämlichen acht Punkte enthaltenden Ebenen der Tabelle (2), so entsteht eine neue $(12^4, 12_4)$, wo, wie oben, vier Punkte je zwei Doppelbindungen und acht einfache Bindungen besitzen, die übrigen acht aber mit je sieben Punkten einfach, mit je einem Punkte zweifach und mit je einem dreifach verbunden sind.

Die Ersetzung von zwei getrennten Ebenen der Cf. (5) durch zwei Ebenen der (4) liefert gleichfalls eine $(12^4, 12_4)$ der zweiten Art.

Es mögen nun die Ebenen $\beta_1\beta_4\gamma_1\gamma_4$ durch die 1., 3., 4. und 5. Ebene der (4) ersetzt werden; die dadurch entstandene $(12^4, 12_4)$ besitzt vier Punkte 16, 25, 38, 47, welche je vier einfache und vier doppelte Bindungen aufweisen, indess die übrigen acht je mit sieben Punkten einfach, mit einem zweifach und mit einem dreifach verbunden sind.

Die Ebenen $\alpha_1\alpha_4\beta_1\beta_4\gamma_1\gamma_4$ bilden mit den sechs Ebenen der (4) eine $(12^4, 12_4)$,

16	16	16	16	17	17	25	25	27	25	25	35
17	17	18	18	18	18	27	28	28	35	45	36
28	46	27	36	27	36	45	35	35	46	36	45
38	47	47	38	28	46	47	38	45	47	38	46

(6)

wo jeder Punkt (jede Ebene) mit vier anderen einfach, mit vier weiteren zweifach verbunden erscheint.

Die Cf. $(12^5, 15_4)$, welche aus (6) durch Hinzufügung der Ebenen (2) entsteht, ist von der oben erwähnten verschieden; jeder Punkt besitzt nämlich zwei dreifache, zwei doppelte und fünf einfache Bindungen, indess die obige $(12^5, 15_4)$ für jeden Punkt zwei dreifache und neun einfache Bindungen aufweist.

7. Die Mitten der Kanten des Tetraëders 1234 (zugleich Mittelpunkte der Würfelflächen) bezeichne ich durch 12, 13, 14, 34, 24, 23. Nachdem nun jede durch drei Würfelecken gelegte Ebene drei dieser Punkte und jede vierpunktige Diagonalebene deren zwei enthält, ergibt sich eine Cf. $(14^6, 14_6)$, nämlich:

1	1	1	2	5	5	5	6	1	1	1	2	2	3
2	2	3	3	6	6	7	7	2	3	4	3	4	4
3	4	4	4	7	8	8	8	5	5	5	6	6	7
12	12	13	23	14	13	12	12	6	7	8	7	8	8
13	14	14	24	24	23	23	13	12	13	14	14	13	12
23	24	34	34	34	34	24	14	34	24	23	23	24	34

(7)

Diese aus den Ecken, Flächenmittelpunkten und Diagonalebenen des Würfels zusammengesetzte Cf. besitzt keine getrennten Punkte; acht Punkte haben je drei einfache, drei zweifache und sieben dreifache Bindungen, die übrigen sechs aber je neun zweifache und vier dreifache Bindungen. Dagegen gibt es vier Paare getrennter Ebenen.

Durch Combination des Würfels mit dem ihm umbeschriebenen Oktaëder wird man auf eine $(14^4, 14_4)$ geführt, welche aus den Ecken und Flächen der beiden Polyeder besteht.

Aus ihr ergibt sich noch eine $(14^6, 21_4)$ durch Hinzufügung der Diagonalebenen des Oktaëders und von vier rechteckigen Diagonalebenen des Würfels.

8. Wenn 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 die Gegeneckenpaare eines Oktaëders und 12, 13 u. s. w. dessen Kantenmitten bezeichnen, so stellt nachstehende Tabelle die Cf. $(18^4, 12_6)$ dar, welche die Ecken, Kantenmitten, Flächen und sechspunktigen Symmetrieebenen des Oktaëders enthält.

1	4	1	3	1	2	1	2	15	13	12	12
2	5	2	4	3	4	5	3	16	15	16	13
3	6	6	5	5	6	6	4	24	23	23	26
12	45	12	34	13	24	15	23	34	24	34	35
13	46	16	35	15	26	16	24	26	46	45	45
23	56	26	45	35	46	56	34	35	56	56	46

(8)

Jede Oktaëderecke bildet mit den Mitten zweier Kanten, welche durch die Gegenecke laufen und in einer Diagonalebene liegen, ein „Hauptdreieck", also ein Punktetripel, dessen Punkte zusammen die 12 Ebenen der Cf. tragen.

Die Ausscheidung eines dieser 12 Hauptdreiecke liefert eine $(15^4, 12_5)$.

Sollen zwei Hauptdreiecke entfernt werden, so sind die beiden in ihnen enthaltenen Oktaëderecken entweder auf einer Kante oder auf einer Diagonale belegen. Im ersten Falle liegen die vier ausfallenden Kantenmitten in einer Ebene, welche entweder der Gegenkante oder einer sie treffenden Diagonale parallel ist. Im zweiten Falle sind die vier Mitten mit den beiden Ecken in einer Ebene oder aber als die Ecken eines Tetraëders zu denken.

Diese Betrachtung führt daher auf vier Arten von $(12^4, 12_8)$. Bei Ausscheidung von

a) 1, 34, 46; 2, 15, 45 entsteht eine Cf., wo fünf Punkte je fünf Doppelbindungen, sechs Punkte je vier Doppelbindungen und ein Punkt deren drei aufweist.

b) Die Gruppe 1, 34, 46; 2, 35, 56 liefert eine Cf., wo drei Punkte je fünf, acht Punkte je vier Doppelbindungen besitzen, der zwölfte Punkt deren drei.

c) Die Gruppe 1, 34, 46; 4, 12, 15 führt auf eine Cf., wo acht Punkte je fünf, die übrigen vier je drei zweifache Bindungen besitzen.

d) Die Gruppe 1, 34, 46; 4, 13, 16 gibt schliesslich eine $(12^4, 12_4)$, wo zwei Punkte je sechsmal, vier Punkte je fünfmal und sechs Punkte je viermal doppelt verbunden sind.

9. Die Cf. $(18^4, 12_6)$ liefert ausserdem Gruppen von sechs Punkten, welche nicht in zwei Hauptdreiecke zerlegt werden können, trotzdem aber zur Bildung einer $(12^4, 12_4)$ Anlass bieten. Eine solche Gruppe besteht aus vier in einer Diagonalebene belegenen Kantenmitten und den beiden ausserhalb dieser gelegenen Oktaëderecken.

Werden z. B. die Punkte 3, 6; 12, 15, 24, 45 ausgelassen, so entsteht die durchaus regelmässige $(12^4, 12_4)$:

1	4	16	1	4	13	1	2	16	1	2	13
2	5	26	2	5	23	5	4	23	5	4	26
13	46	34	16	34	46	13	26	34	16	23	35
23	56	35	26	35	56	35	46	56	56	34	46

(9)

Diese Cf. hat mit der Cf. (6) die Eigenschaft gemein, dass sämmtliche Punkte von je drei getrennt, mit je vier doppelt verbunden sind, unterscheidet sich von ihr aber durch das Vorhandensein von vier Hauptdreiflachen und von vier Hauptdreiecken, nämlich (1, 34, 46), (2, 35, 56), (4, 13, 16), (5, 23, 26).

Werden eine Diagonalebene des Oktaëders und zwei ihr parallele Ebenen in die Cf. (9) aufgenommen, so entsteht eine $(12^5, 15_4)$, wo jeder Punkt mit je zwei dreifach, mit je zwei weiteren zweifach verbunden ist. Sie besitzt 11 Hauptdreiflache. Werden nämlich beispielsweise die Ebenen

1	13	16
2	23	26
4	34	46
5	35	56

(10)

hinzugefügt, so lässt sich jede dieser Ebenen mit je zweien der Ebenen aus (9) zu einem neuen Hauptdreiflach zusammenstellen.

Hierin ist die sprachliche $(12^5, 15_4)$ verschieden von der in §. 6 aus Tabelle (6) hergeleiteten Cf., wo nur sieben Hauptdreiflache gebildet werden können.

10. Durch Vertauschung der Gruppe (10) mit einem Hauptdreiflache der (9) entsteht eine $(12^4, 12_4)$, deren sämmtliche

Punkte mit je einem Punkte dreifach, mit je zweien zweifach verbunden sind. Die Ebenen der (10) sind hier mit je sechs Ebenen doppelt verbunden, die übrigen neun Ebenen mit je fünf. Sie besitzt sieben Hauptdreiflache.

Werden schliesslich die Ebenen

1	4	16	1	4	13
2	5	26	2	5	23
34	13	46	46	16	34
35	23	56	56	26	35

(11)

der Figur (9) zugesellt, so ergibt sich eine $(12^6, 18_4)$, wo vier Punkte je eine vierfache und fünf zweifache, die übrigen acht Punkte je eine vierfache, eine dreifache und drei doppelte Verbindungen besitzen.

11. Die Ecken des regelmässigen Dodekaëders bestimmen bekanntlich zehn regelmässige Tetraëder. Werden diese durch 0, 1, 2, . . . 9 angedeutet, so kann jede Dodekaëderecke dargestellt werden durch die Zusammenstellung der Zahlen der beiden Tetraëder, welchen sie angehört. Die Bezeichnung lässt sich so treffen, dass allemal die Gegenecke der Ecke *ik* das Zeichen $(9—i)(9—k)$ erhält. Werden zwei Gegenecken 01 und 89 genannt und die sechs durch Flächendiagonalen mit 89 verbundenen Ecken der Reihe nach mit 02, 15, 04, 16, 03, 17 bezeichnet, so ergibt sich die Darstellung der übrigen Ecken ohne Zweideutigkeit.

Die 20 Ecken liegen sechsmal zu fünf in vier parallelen Ebenen, nämlich zwei Flächen und zwei Diagonalebenen. Sie bilden demnach mit den 12 Seitenflächen und 12 fünfpunktigen Diagonalebenen eine aus sechs Hauptvierflachen zusammengesetzte Cf. $(20^6, 24_5)$ mit der nachstehenden Tabelle.

01	02	03	04	01	02	03	04	01	02	03	04
25	16	17	15	25	17	15	16	26	15	16	17
38	35	26	28	37	38	26	28	35	37	28	25
46	47	48	37	48	46	47	35	48	46	47	38
79	89	59	69	69	59	89	79	79	89	59	69
01	02	03	04	01	02	03	04	01	02	03	04
26	17	15	16	28	16	17	15	28	15	16	17
38	35	28	25	35	37	25	26	37	38	25	26
47	48	46	37	47	48	46	38	46	47	48	35
59	69	79	89	69	59	89	79	59	69	79	89

(12)

Jeder Punkt dieser Cf. ist von sieben anderen getrennt, nämlich von seinem Gegenpunkte und den Ecken der beiden Tetraëder, welchen er angehört; mit den übrigen 12 Punkten ist er zweifach verbunden.

Entfernt man eine Tetraëdergruppe, z. B. (01, 02, 03, 04), so entsteht allemal eine $(16^6, 24_4)$, wo jeder Punkt neun doppelte Bindungen besitzt.

Wird ein Hauptvierflach der $(20^6, 24_5)$ ausgelassen, so ergibt sich eine $(20^5, 20_5)$, deren Punkte mit je acht Punkten zweifach verbunden sind.

Zwei Hauptvierflache der Tabelle (12) enthalten acht doppelt gebundene Punktepaare; durch Ausscheidung dieser beiden Ebenenquadrupel entstehen daher acht neue getrennte Punktepaare. Die dadurch entstandene $(20^4, 16_5)$ enthält demnach 16 Punkte, welche je fünf Doppelbindungen besitzen, indess die übrigen vier Punkte je vier zweifache Bindungen aufweisen. Werden z. B. die fünfte und sechste Gruppe der (12) ausgelassen, so sind 02, 35, 46, 79 die Punkte der zweiten Art; sie begrenzen offenbar zwei Gegenkanten. Den 15 Gegenkantenpaaren entsprechen die 15 Paare von Hauptvierflachen.

Durch gleichzeitige Entfernung eines Hauptvierecks und eines Hauptvierflachs (dies kann auf 10×6 verschiedene Weisen geschehen) erhält man aus (12) eine $(16^5, 20_4)$, deren sämmtliche Punkte je sechs Doppelbindungen besitzen.

12. Die oben erhaltene Cf. $(20^4, 16_5)$ erlaubt die Aufstellung zweier verschiedener $(16^4, 16_4)$, je nachdem nämlich die ausgeschiedene Punktgruppe einen oder keinen Punkt der zweiten Art enthält.

Sind, wie oben, 02, 35, 46, 79 die Punkte zweiter Art, so gibt es nur zwei Hauptvierecke (01,15,16,17) und (28,38,48,89), welche keinen der vier Punkte enthalten; die übrigen acht haben je einen Punkt mit jenem Quadrupel gemein.

Durch Abtrennung eines dieser acht Hauptvierecke entsteht eine $(16^4, 16_4)$, wo sechs Punkte je drei Doppelbindungen, die übrigen zehn deren je vier besitzen.

Dagegen liefert jede der beiden erstgenannten Tetraëdergruppen eine $(16^4, 16_4)$, wo acht Punkte je drei und acht Punkte je vier Doppelbindungen zeigen.

13. Die 20 Dodekaëderecken liegen zu sechs in 20 Ebenen, deren jede zwei Tetraëder begrenzt.

01	01	01	02	01	01	01	02	02	02
02	02	03	03	15	15	16	25	25	26
03	04	04	04	16	17	17	26	28	28
46	35	25	15	37	26	25	38	16	15
47	37	26	16	47	46	35	48	46	35
48	38	28	17	79	69	59	89	69	59
03	03	03	04	04	04	15	16	17	28
35	35	37	46	46	47	25	26	37	38
37	38	38	47	48	48	35	46	47	48
28	17	15	28	17	16	69	59	59	59
48	47	25	38	37	26	79	79	69	69
89	79	59	89	79	69	89	89	89	79

(13)

In dieser $(20^6, 20_6)$ ist jeder Punkt (jede Ebene) nur von einem Punkte (einer Ebene) getrennt, mit je 12 Punkten (Ebenen) zweifach verbunden.

Durch Ausscheidung einer Tetraëdergruppe (01, 02, 03, 04) und der Gruppe (59, 69, 79, 89) der Gegenecken zerfällt die Cf. in zwei einfachere Cf.; die übrigen 12 Punkte liegen nämlich zu dreien in den acht Ebenen der beiden Tetraëder, zu vieren in den übrigen 12 Ebenen; sie bilden demnach eine $(12^2, 8_3)$ und eine $(12^4, 12_4)$. Letztere ist gleichartig mit der Cf. (5); ihre Tabelle übergeht geradezu in diese, wenn man die Zahlen 2 und 3, 5 und 8 vertauscht.

Nachdem die sprachliche Spaltung der $(20^6, 20_6)$ auf fünf Arten geschehen kann, lässt sich diese Cf. betrachten als eine Combination von fünf Cf. $(12^4, 12_4)$, welche paarweise sechs Punkte und sechs Ebenen gemein haben.

Jede dieser fünf Cf. kann, wie die Cf. des §. 5, zu einer $(12^5, 15_4)$ ergänzt werden; die drei neuen Ebenen sind allemal Diagonalebenen durch je zwei Gegenkanten des Dodekaëders. Die 15 Ebenen dieser Art ordnen sich demgemäss in fünf Tripel an.

14. Die Ecken des Dodekaëders bestimmen bekanntlich fünf Würfel, welche paarweise zwei Gegenecken gemein haben;

ihre Seitenflächen sind die 30 quadratischen Diagonalebenen des Dodekaëders.

Sie bilden mit den 20 Ecken eine $(20^6, 30_4)$ und lassen sich in Quintupel anordnen, deren Ebenen zusammen sämmtliche Punkte der Cf. tragen. Man findet diese Ebenengruppen durch folgende Überlegung.

Jeder Würfelfläche ist eine Dodekaëderkante parallel, welche mit ihr durch weitere vier Kanten verbunden erscheint. Für fünf völlig getrennte quadratische Diagonalebenen müssen die fünf ihnen auf diese Weise zugeordneten Kanten ebenfalls getrennt liegen. Wählt man zwei Gegenflächen des Dodekaëders aus, so bilden die 10 nicht in ihnen belegenen Ecken ein windschiefes Zehneck, welches offenbar in zwei Kantenquintupel mit der verlangten Eigenschaft zerlegt werden kann. Die 12 möglichen Quintupel ordnen sich daher in sechs Paare. Sie lassen sich ferner in zwei Gruppen von je sechs Quintupeln anordnen, deren jede sämmtliche 30 Kanten enthält. Die sechs Quintupel der einen Gruppe ergänzen diejenigen der anderen zu den sechs windschiefen Zehnecken.

In der nachstehenden Tabelle sind die Ebenen der sprachlichen $(20^6, 30_4)$ auf eine der beiden Weisen in sechs Hauptfünfflache geordnet.

01	03	04	16	25	01	02	04	15	37
02	26	15	17	28	03	17	25	16	38
59	38	35	48	37	59	26	35	28	46
69	46	47	89	79	79	47	48	89	69
01	02	08	15	25	01	02	03	17	35
04	28	16	17	46	15	04	16	25	47
69	37	26	38	48	28	69	37	26	48
79	47	35	89	59	38	89	46	79	59
01	02	03	15	26	01	02	04	16	26
16	17	04	46	35	17	03	15	35	28
28	25	79	47	38	38	59	25	37	47
48	37	89	59	69	48	89	46	69	79

(14)

Jeder Punkt dieser Cf. ist mit sechs Punkten doppelt verbunden, also nur von einem Punkte getrennt.

In der $(20^5, 25_4)$, welche durch Ausscheidung eines Ebenenquintupels erhalten wird, ist jeder Punkt noch mit vier Punkten zweifach verbunden.

15. Durch Entfernung von zwei Hauptfünfflachen ergeben sich zwei verschiedenartige $(20^4, 20_4)$, je nachdem man zwei Quintupel der Tabelle (14) nimmt oder zwei Quintupel, deren zugeordnete Kanten ein windschiefes Zehneck bilden. Letzteres trifft z. B. zu für die Combination des fünften Quintupels von (14) mit der Gruppe

$$\begin{vmatrix} 01 & 03 & 04 & 15 & 26 \\ 02 & 16 & 25 & 17 & 28 \\ 59 & 37 & 35 & 38 & 47 \\ 69 & 46 & 48 & 69 & 79 \end{vmatrix} \qquad (15)$$

welche aus jedem der übrigen Quintupel eine Ebene enthält.

Im ersten Falle werden im Ganzen vier Doppelbindungen aufgehoben; die $(20^4, 20_4)$ besitzt demnach acht Punkte mit je drei und 12 Punkte mit je zwei doppelten Bindungen.

Im zweiten Falle verschwinden überhaupt keine Doppelbindungen. Sämmtliche Punkte der betreffenden $(20^4, 20_4)$ sind mit je drei Punkten zweifach verbunden.

16. Die Diagonalebenen der fünf in das Dodekaëder gestellten Würfel lassen sich zu einer $(20^6, 30_4)$ zusammenfassen, welche wie die obige Cf. 12 Hauptfünfflache besitzt.

Jede Seitenfläche des Dodekaëders wird in ihren Endpunkten durch 10 Seitendiagonalen geschnitten, welche den Kanten des jener Fläche zugeordneten windschiefen Zehnecks parallel laufen (§. 14). Diese Diagonalen bilden zwei zusammengehörige Quintupel getrennter Geraden, und die fünf durch ein solches Quintupel bestimmten Würfeldiagonalebenen bilden ein Hauptfünfflach der sprachlichen Cf.

Die 12 Ebenenquintupel dieser $(20^6, 30_4)$ lassen sich aber nicht in Sextupel anordnen, deren jedes sämmtliche Ebenen erschöpft; vielmehr gibt es nur Gruppen zu je drei gegenseitig unabhängigen Quintupeln.

Der Punkt 01 trägt die nachstehenden Ebenen.

01	01	01	01	01	01
02	03	04	15	16	17
79	69	59	48	38	28
89	89	89	89	89	89

(16)

Jeder Punkt ist demnach mit seinem Gegenpunkte sechsfach verbunden.

Die durch Auslassung eines Ebenenquintupels erhaltene $(20^5, 25_4)$ ist natürlich von der in §. 14 erwähnten verschieden; jeder Punkt besitzt eine fünffache Bindung.

Werden zwei zusammengehörige Quintupel entfernt, so verliert jeder Punkt eine Doppelbindung und vier einfache, besitzt demnach in der entstandenen $(20^4, 20_4)$ eine vierfache Bindung.

Es möge nun ein Ebenenquintupel der $(20^6, 30_4)$ des §. 14 durch ein Quintupel der Cf. des §. 16 ersetzt werden. Dabei tritt z. B. an die Stelle der Ebene (01, 02, 59, 69) eine der sechs Ebenen der (16).

Man wird hierdurch auf drei verschiedene $(20^6, 30_4)$ geführt, wo der Punkt 01 entweder drei zweifache Bindungen und eine dreifache besitzt — oder vier zweifache und eine dreifache — oder aber wiederum sechs zweifache.

17. Den fünf Würfeln entsprechend gibt es fünf aus den Ecken des Dodekaëders gebildete $(8^6, 12_4)$, welche derart zusammenhängen, dass ihre Elemente zu einer $(20^{12}, 60_4)$ vereinigt sind, wo jeder Punkt sechs dreifache und sechs zweifache Bindungen besitzt.

Diese Cf. kann offenbar in die beiden $(20^6, 30_4)$ der §§. 14 und 16 zerlegt werden.

Durch Hinzufügung der 15 je ein Paar Gegenkanten enthaltenden Ebenen kommt man auf eine $(20^{15}, 75_4)$, wo jeder Punkt eine neunfache, sechs dreifache und sechs zweifache Bindungen aufweist.

Aus der obigen $(20^{12}, 60_4)$ können einfachere Cf. dadurch erhalten werden, dass man jeder der 5 Cf. $(8^6, 12_4)$ ein Hauptzweiflach oder deren mehrere entzieht; es ergeben sich dann Cf. $(20^{10}, 50_4)$, $(20^8, 40_4)$, $(20^6, 30_4)$ und $(20^4, 20_4)$.

18. Ausserhalb zweier Gegenflächen des Dodekaëders liegen 20 Kantenmitten auf drei den Flächen parallelen Ebenen und

bilden die Ecken zweier regelmässiger Fünfecke und eines regelmässigen Zehnecks. Nachdem es daher ausser den 12 in den Flächen des Polyeders belegenen Mittenquintupel deren noch 12 gibt, bilden die 30 Kantenmitten mit besagten 24 Ebenen eine Cf. $(30^4, 24_5)$.

Es möge nun ein Paar Gegenflächen des Dodekaëders durch a und α dargestellt werden, indess die fünf mit a verbundenen Flächen der Reihe nach durch b, c, d, e, f, ihre Gegenebenen durch β, γ, δ, ε, φ angedeutet werden. Bezeichnet man nun die Mitte der Kante, welche den Flächen a und b gemein ist, durch ab, so ergibt sich für die obige $(30^4, 24_5)$ die nachstehende Tabelle:

$$\begin{array}{|cccc||cccc||cccc|}
ab & bc & \beta\gamma & \alpha\beta & ab & ac & \alpha\gamma & \alpha\beta & ac & ab & \alpha\beta & \alpha\gamma \\
ac & cd & \gamma\delta & \alpha\gamma & bc & c\varepsilon & \gamma e & \beta\gamma & bc & b\varepsilon & \beta e & \beta\gamma \\
ad & de & \delta\varepsilon & \alpha\delta & b\delta & \delta\varepsilon & de & \beta d & cd & d\varphi & \delta f & \gamma\delta \\
ae & ef & \varepsilon\varphi & \alpha\varepsilon & b\varepsilon & \delta f & d\varphi & \beta e & c\varepsilon & \varepsilon\varphi & ef & \gamma e \\
af & bf & \beta\varphi & \alpha\varphi & bf & af & \alpha\varphi & \beta\varphi & c\varphi & ad & \alpha\delta & \gamma f \\
\hline
ad & ac & \alpha\gamma & \alpha\delta & ae & ad & \alpha\delta & \alpha\varepsilon & af & ab & \alpha\beta & \alpha\varphi \\
cd & c\varphi & \gamma f & \gamma\delta & de & af & \alpha\varphi & \delta\varepsilon & bf & b\delta & \beta d & \beta\varphi \\
d\varphi & \beta\varphi & bf & \delta f & \beta e & \gamma f & c\varphi & b\varepsilon & \delta f & \gamma\delta & cd & d\varphi \\
\beta d & \beta e & b\varepsilon & b\delta & \gamma e & \beta\gamma & bc & c\varepsilon & \gamma f & \gamma e & c\varepsilon & c\varphi \\
de & ae & \alpha\varepsilon & \delta\varepsilon & ef & \beta d & b\delta & \varepsilon\varphi & ef & ae & \alpha\varepsilon & \varepsilon\varphi \\
\end{array} \qquad (17)$$

Die dreissig Kantenmitten bestimmen bekanntlich fünf regelmässige Oktaëder, deren Ecken sie sind. Sie bilden demnach die nachstehenden Eckensextupel:

$$\left.\begin{array}{lllllll}
\text{I.} & ab, & \alpha\beta, & de, & \delta\varepsilon, & c\varphi, & \gamma f \\
\text{II.} & ac, & \alpha\gamma, & ef, & \varepsilon\varphi, & b\delta, & \beta d \\
\text{III.} & ad, & \alpha\delta, & bf, & \beta\varphi, & c\varepsilon, & \gamma e \\
\text{IV.} & ae, & \alpha\varepsilon, & bc, & \beta\gamma, & d\varphi, & \delta f \\
\text{V.} & af, & \alpha\varphi, & cd, & \gamma\delta, & b\varepsilon, & \beta e
\end{array}\right\} \qquad (18)$$

Werden die Ecken eines dieser Octaëder aus der $(30^4, 24_5)$ entfernt, so verliert, wie aus (17) erhellt, jede Ebene einen Punkt; diese Cf. enthält daher fünf Cf. $(24^4, 24_4)$.

19. Senkrecht zu jeder Hauptdiagonale des Dodekaëders (Diagonale durch zwei Gegenecken) gibt es drei Ebenen, welche

je sechs Kantenmitten tragen. Zwei von diesen bilden ein gemeinschaftliches Gegenflächenpaar für zwei der Oktaëder, die dritte halbirt die betreffende Hauptdiagonale des Dodekaëders.

Werden allemal nur die ersten beiden Ebenen berücksichtigt, so ergibt sich für die 30 Kantenmitten eine $(30^4, 20_6)$, welche durch Hinzunahme der übrigen zehn Ebenen in eine $(30^6, 30_6)$ übergeht.

Die Ebenen des ersten Oktaëders tragen ausser dessen Ecken noch je drei der übrigen 24 Kantenmitten, also zusammengenommen jeden dieser Punkte einmal. Durch Entfernung jener Oktaëderebenen entsteht demnach aus der oben erwähnten $(30^4, 20_6)$ eine $(24^3, 12_6)$. Unter den zehn Halbirungsebenen der Hauptdiagonalen gibt es vier, welche keine Ecke des ersten Oktaëders tragen; werden sie jener $(24^3, 12_6)$ zugesellt, so entsteht eine $(24^4, 16_6)$.

20. Die Diagonalen $(bc, \beta\gamma)$, $(ae, \alpha\varepsilon)$, $(d\varphi, \delta f)$ eines Oktaëders sind senkrecht zu den Seitenflächen von drei rechtwinkeligen Parallelepipeden, deren Ecken die Mitten der übrigen 24 Dodekaëderkanten bilden. Jedes Parallelepipedon besitzt drei Arten von Flächen; diejenigen, welche den grössten Abstand vom Mittelpunkte des Dodekaëders haben, sollen Ebenen erster Art heissen; für die Ebenen der dritten Art habe dieser Abstand den kleinsten Werth. Für das Parallelepipedon mit den Flächen

$$\left|\begin{array}{cccccc} ab & \alpha\beta & ab & \alpha\beta & ac & \alpha\gamma \\ ac & \alpha\gamma & ac & \alpha\gamma & c\varepsilon & \gamma e \\ b\varepsilon & \beta e & \beta e & b\varepsilon & \beta e & b\varepsilon \\ c\varepsilon & \gamma e & \gamma e & c\varepsilon & \alpha\beta & ab \end{array}\right| \qquad (19)$$

sind die erste und zweite Fläche Ebenen erster Art, die dritte und vierte solche zweiter Art, die fünfte und sechste solche dritter Art.

Werden nur Ebenen einer Art berücksichtigt, so wird man auf Cf. $(30^4, 30_4)$ geführt; durch Hinzunahme der Ebenen einer zweiten Art entstehen offenbar Cf. $(30^8, 60_4)$; schliesslich gehören sämmtliche Ebenen der 15 Parallelepipede einer $(30^{12}, 90_4)$ an.

Letztere wird durch die 15 Diagonalebenen der fünf Oktaëder zu einer $(30^{14}, 105_4)$ ergänzt.

Es liegt nahe, auch die Diagonalebenen der Parallelepipede in die Figur aufzunehmen. Allein die Ebene durch die Punkte ab,

ac, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ läuft den Flächen e, ε des Dodekaëders parallel, enthält demnach noch sechs Punkte bf, cd, δf, $d\varphi$, $\gamma\delta$, $\beta\varphi$; sie ist daher auch als Diagonalebene des durch die Zehnecksdiagonalen (bf, cd) und $(\beta\varphi, \gamma\delta)$ bestimmten Parallelepipeds zu betrachten. Offenbar gehört sie zehn Parallelepipeden als Diagonalebene an.

Ebenso erhellt, dass die Diagonalebene $(ac, \beta e, \alpha\gamma, b\varepsilon)$ noch sechs weitere Punkte trägt. Die Ebene $(ac, c\varepsilon, \alpha\gamma, \gamma e)$ dagegen enthält nur noch die beiden Punkte ae und $\alpha\varepsilon$. Jede sechspunktige Ebene ist drei Parallelepipeden gemeinsam.

Es möge jetzt die Anzahl der Ebenen bestimmt werden, welche je zwei Kanten von verschiedenen Parallelepipeden enthalten.

Jeder Oktaëderdiagonale laufen die Kanten von drei Parallelepipeden parallel; man würde demnach schliessen, dass die fragliche Anzahl der Ebenen durch je zwei Kanten von ungleicher Länge $16\times3\times15=720$ wäre. Allein jede Ebene durch 10 Kantenmitten ersetzt 20 jener Ebenen, weil jedes Paar Gegenseiten und ebenso jedes Paar paralleler Diagonalen des bezüglichen Zehnecks als Kantenpaar eines Parallelepipedons aufzufassen ist. Ferner ist z. B. die sechspunktige Ebene $(ab, ac, c\varphi, \varepsilon\varphi, \delta\varepsilon, b\delta)$, wo die Geraden (ab, ac), $(c\varphi, b\delta)$, $(\varepsilon\varphi, \delta\varepsilon)$ parallel sind, als Ersatz zu betrachten für neun Ebenen. Schliesslich vertreten die 24 Ebenen der Tabelle (17) je fünf der fraglichen Ebenen. Es bleiben daher noch $720-(6\times20+20\times9+24\times5)=300$ vierpunktige Ebenen, welche je zwei Kanten von ungleicher Länge enthalten.

Diese Ebenen ergänzen die obige $(30^{14}, 105_4)$ zu einer $(30^{54}, 405_4)$. Es ist einleuchtend, dass diese stark concentrirte Cf. eine Fülle von einfacheren Cf. umfasst.

21. Sechs Ecken eines Ikosaëders sollen derart mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet werden, dass die Ecke 1 mit den übrigen fünf durch Kanten verbunden ist; die sechs Gegenecken sollen durch $1'$ bis $6'$ dargestellt werden.

Die 12 Ecken bilden nun mit den 12 fünfpunktigen Diagonalebenen eine $(12^5, 12_5)$.

$$\left|\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1' & 1' & 1' & 1' & 1' & 2 & 2' \\ 2 & 2 & 2' & 2' & 3 & 2' & 2' & 2 & 2 & 3' & 3 & 3' \\ 3' & 4 & 3 & 3' & 4' & 3 & 4' & 3' & 3 & 4 & 4 & 4' \\ 4' & 5' & 5 & 4 & 5' & 4 & 5 & 5' & 4' & 5 & 5 & 5' \\ 5 & 6' & 6' & 6 & 6 & 5' & 6 & 6 & 6' & 6' & 6 & 6' \end{array}\right| \qquad (20)$$

Jeder Punkt ist nur von einem Punkte getrennt, mit den übrigen zehn je zweimal verbunden. Die zehn durch zwei Gegenecken laufenden Ebenen gehen demnach zu vieren durch die übrigen zehn Punkte, bilden also mit diesen eine $(10^4, 10_4)$. Ihre Tabelle entsteht z. B. aus (20), wenn man die letzten zwei Ebenen und die Zeichen 1 und 1′ unterdrückt.

22. Die Ebenen, welche je zwei Gegenkanten des Ikosaëders tragen, bestimmen mit den Ecken eine $(12^5, 15_4)$ mit der Tabelle (21), wo die Ebenen in fünf Hauptdreiflache geordnet sind; diese Gruppirung ist auf sechs Weisen möglich.

1	3	5	1	2	4	1	2	3	1	2	3	1	2	4
2	4	6	3	5	6	4	6	5	5	4	6	6	3	5
1′	3′	5′	1′	2′	4′	1′	2′	3′	1′	2′	3′	1′	2′	4′
2′	4′	6′	3′	5′	6′	4′	6′	5′	5′	4′	6′	6′	3′	5′

(21)

Durch Entfernung eines Hauptdreiflachs ergibt sich eine $(12^4, 12_4)$, deren Punkte mit je einem Punkte vierfach verbunden sind.

Werden die fünf durch 1 und 1′ gelegten Ebenen ausgeschieden, so erübrigt eine $(10^4, 10_4)$, wo jeder Punkt eine vierfache Bindung besitzt; diese Cf. ist somit verschieden von der oben erwähnten $(10^4, 10_4)$, deren Punkte je vier Doppelbindungen zeigen.

Die beiden Cf. lassen sich zu einer $(10^8, 20_4)$ vereinigen, wo jeder Punkt eine vierfache, vier dreifache und vier zweifache Bindungen besitzt.

Durch Ausscheidung eines vierfach verbundenen Punktepaares 6, 6′ und der 12 mit ihnen incidenten Ebenen entsteht eine $(8^4, 8_4)$ *B*, welche durch die Ebenen 2345 und 2′3′4′5′ zu einer $(8^5, 10_4)$ ergänzt wird.

Die obige $(10^8, 20_4)$ ist gleichartig mit der Cf., welche durch die Ecken, Flächen und Diagonalebenen eines regelmässigen fünfseitigen Prismas bestimmt wird.

Überhaupt bilden die Eckpunkte, Seitenflächen und vierpunktigen Diagonalebenen eines regelmässigen n-seitigen Prismas, wenn $n = 2k+1$, eine

$$((4k+2)^{2k^2}, \quad k^2(2k+1)_4),$$

wenn $n = 2k$, eine

$$(4k^{2k^2-2k+1},\quad k(2k^2-2k+1)_4)\,.$$

Die Betrachtung der Kantenmitten des Ikosaëders führt offenbar auf die Cf. der §§. 18, 19 und 20.

Es möge nebenbei bemerkt werden, dass unter den in dieser Arbeit erwähnten Cf. manche in der Anzahl der Elemente übereinstimmen; beispielsweise wurden nicht weniger als neun verschiedene $(12^4, 12_4)$ hervorgehoben.

Über das Verhalten gesättigter Dämpfe

von

C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Juli 1891.)

1. Enthält die Gewichtseinheit einer Flüssigkeit bei der Temperatur t die Wärme W und muss man ihr, um sie in gesättigten Dampf von gleicher Temperatur zu verwandeln, von aussen die latent werdende Wärmemenge L zuführen, so ist, wenn der erzeugte Dampf in Wirklichkeit die Wärme w enthält, bei der Verdampfung im Ganzen die Wärmemenge

$$L+W-w$$

verschwunden.

Bedeutet p den äusseren Druck und u den Unterschied der specifischen Volume von Dampf und Flüssigkeit, so ist die äussere Arbeit der Wärme bei der Verdampfung $= pu$, welche, wenn A das mechanische Äquivalent der Wärmeeinheit vorstellt, einen Wärmeverbrauch $= \frac{pu}{A}$ erfordert; es ist folglich dabei die Wärmemenge

$$L+W-w-\frac{pu}{A}$$

auf innere Arbeit verbraucht worden.

Lässt man die Flüssigkeit anstatt bei der Temperatur t bei der unendlich wenig höheren Temperatur $t+dt$ in gesättigten Dampf übergehen, so ist die innere Arbeit der Wärme um den Betrag

$$dL+dW-dw-\frac{d(pu)}{A}$$

grösser als bei der Temperatur t.

Hat der bei der Temperatur t gesättigte Dampf das Volumen v und der bei der höheren Temperatur $t+dt$ gesättigte das Volumen $v+dv$, so kann man letzteres bei derselben Temperatur unter entsprechendem Drucke ebenfalls in v übergehen lassen, wobei nebst der bezüglichen äusseren im Allgemeinen auch eine gewisse innere Arbeit $= -idv$ zu leisten sein wird, wobei zu bemerken ist, dass dv für die höhere Temperatur in Wirklichkeit einen negativen Werth hat; es wird somit, um jedesmal ein gleiches schliessliches Volumen herzustellen, im zweiten Falle oder bei der Temperatur $t+dt$ um die Wärmemenge

$$dL+dW-dw-\frac{d(pu)}{A}-\frac{idv}{A}$$

mehr auf innere Arbeit verbraucht sein, als im ersten Falle oder bei der Temperatur t.

Macht man nun, wie es in der Dampftheorie auch sonst zu geschehen pflegt, die Annahme, dass die innere Arbeit der Wärme bei Verdampfung einer Flüssigkeit keine unmittelbare Function der Temperatur sei, sondern nur von der erzeugten Volumveränderung abhänge, so muss dieselbe, die Flüssigkeitsdichte als constant gedacht, für beide betrachtete Fälle gleich gross und folglich der Ausdruck

$$dL+dW-dw-\frac{d(pu)}{A}-\frac{idv}{A}=0$$

sein. Aus dieser Gleichung wird sich mit experimentellen Daten die Grösse i ermitteln lassen.

Da es sich hier in der Hauptsache nur um den von mir eingeschlagenen Weg handelt, so beschränke ich mich, um die Rechnung zu vereinfachen, auf den für niedrige Temperaturen zutreffenden Fall, wenn das Volumen der Flüssigkeit gegen dasjenige ihres Dampfes so klein ist, dass man es ohne merklichen Fehler ganz vernachlässigen kann. Dann ist $dv = du$ und man hat, weil

$$pdv = pdu = d(pu)-udp$$

ist, zur Bestimmung der Grösse i der Gleichung:

$$dL+dW-dw-\frac{d(pu)}{A}=\frac{i}{p}\cdot\frac{d(pu)-udp}{A}.$$

Setzt man $dW = Sdt$ und $dw = sdt$, wobei S die specifische Wärme der Flüssigkeit und s diejenige ihres Dampfes für constantes Volumen ist, so wird:

$$\frac{dL}{dt} + S - s - \frac{d(pu)}{Adt} = \frac{i}{p} \cdot \frac{\frac{d(pu)}{dt} - u\frac{dp}{dt}}{A}.$$

Die auf gesättigte Dämpfe allgemein angewendete Formel

$$AL = uT\frac{dp}{dt},$$

worin T die absolute Temperatur bedeutet, betrachte ich als experimentell erwiesen. Da aus derselben

$$u\frac{dp}{dt} = \frac{AL}{T}$$

folgt, so erhält man mit Einsetzung dieses Werthes

$$\frac{i}{p} = \frac{\frac{dL}{dt} + S - s - \frac{d(pu)}{Adt}}{\frac{d(pu)}{Adt} - \frac{L}{T}};$$

man ersieht, welche Bedingung erfüllt sein müsste, wenn, wie für den hypothetischen Zustand eines idealen Gases, $i = 0$ wäre.

Wenn ein Gas bei constanter Temperatur sein Volumen um dv erweitert, so leistet die Wärme dabei eine Arbeit $= (p+i)dv$ und man hat, wenn dl die verschluckte Wärme ist,

$$\left(\frac{dl}{dv}\right) = \frac{p+i}{A}.$$

Anderseits ist nach einer in der Wärmetheorie allgemein benützten Formel

$$\left(\frac{dl}{dv}\right) = \frac{T}{A}\left(\frac{dp}{dt}\right);$$

es ergibt sich demnach die einfache Beziehung:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \frac{p}{T}\left(1 + \frac{i}{p}\right).$$

Substituirt man hier für i den vorhin gefundenen Werth, so erhält man

$$\frac{T}{p}\left(\frac{dp}{dt}\right) = \frac{\frac{L}{T} - \frac{dL}{dt} - S + s}{\frac{L}{T} - \frac{d(pv)}{Adt}},$$

wogegen für ein ideales Gas der links stehende Ausdruck der Einheit gleich sein müsste.

Wenn man Kürze halber den gewöhnlich als Elasticitäts-coëfficient bezeichneten Ausdruck

$$-v\left(\frac{dp}{dv}\right) = e$$

setzt, so ist für einen bei veränderlicher Temperatur gesättigt bleibenden Dampf

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{dp}{dt}\right) - \frac{e}{v} \cdot \frac{dv}{dt}$$

und hieraus folgt, wenn man wieder v und u als identisch annimmt:

$$\frac{e}{p} = \frac{\frac{L}{T} - \frac{pu}{AT}\left(\frac{dp}{dt}\right)}{\frac{L}{T} - \frac{d(pu)}{Adt}}$$

oder mit Anwendung des oben erhaltenen Werthes von $\left(\frac{dp}{dt}\right)$:

$$\frac{e}{p} = \frac{\frac{L}{T}\left(\frac{L}{T} - \frac{d(pu)}{Adt}\right) - \frac{pu}{AT}\left(\frac{L}{T} - \frac{dL}{dt} - S + s\right)}{\left(\frac{L}{T} - \frac{d(pu)}{Adt}\right)^2},$$

wogegen für ein ideales Gas nach dem Mariotte'schen Gesetze $e = p$ wäre.

Bezieht sich der Quotient $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ auf constanten Druck, so ist allgemein

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \frac{e}{v}\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

und somit ergibt sich nach den vorstehenden Formeln:

$$\frac{T}{v}\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{\left(\frac{L}{T} - \frac{d(pu)}{Adt}\right)\left(\frac{L}{T} - \frac{dL}{dt} - S + s\right)}{\frac{L}{T}\left(\frac{L}{T} - \frac{d(pu)}{Adt}\right) - \frac{pu}{AT}\left(\frac{L}{T} - \frac{dL}{dt} - S + s\right)},$$

während der links stehende Ausdruck für ein ideales Gas nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze der Einheit gleich wäre.

Setzt man für den bei 0° gesättigten Wasserdampf die specifische Wärme (bei constantem Volumen) $s = 0{\cdot}365$ und nimmt man für die übrigen vorkommenden Bestimmungsstücke die auch sonst gewöhnlich gebrauchten Werthe an, so ergibt sich für denselben

$$\frac{i}{p} = 0{\cdot}080$$

und hieraus resultirt zur Vergleichung mit dem gewöhnlichen Verhalten der Gase:

$$\frac{T}{p}\left(\frac{dp}{dt}\right) = 1{\cdot}080$$

$$\frac{e}{p} = 0{\cdot}996$$

$$\frac{T}{v}\left(\frac{dv}{dt}\right) = 1{\cdot}084.$$

Demnach ist für gesättigten Wasserdampf bei 0° das Mariotte'sche Gesetz so gut wie vollkommen erfüllt, was mit einer wirklichen Beobachtung von Dieterici, welcher keine Abweichung findet, bestens übereinstimmt; die Abweichung von der theoretischen Wärmeausdehnung erscheint dagegen beträchtlich, und somit darf man aus einer nahen Erfüllung des Mariotte'schen

Gesetzes keineswegs auf eine ungefähr gleich nahe Erfüllung des Gay-Lussac'schen Gesetzes schliessen.

Bedeutet k das Verhältniss der specifischen Wärme für constanten Druck zu derjenigen für constantes Volumen, so ist

$$k = 1 + \frac{p+i}{A}\left(\frac{dv}{dt}\right),$$

und hieraus berechnet sich für Wasserdampf bei 0° mit den obigen Zahlen

$$k = 1{\cdot}356,$$

wogegen für $i = 0$, also bei hinreichender Entfernung des Dampfes von der Sättigung, $k = 1{\cdot}304$ wäre.

In Anbetracht dieses Resultates kann man es nicht für wahrscheinlich halten, dass der Quecksilberdampf unter jenen Umständen, bei welchen er von Kundt in Bezug auf Schallgeschwindigkeit untersucht wurde, sich mit absoluter Genauigkeit wie ein ideales Gas verhielt; ohne Zweifel wich derselbe hierbei, das Mariotte'sche Gesetz nahe erfüllend, von der theoretischen Wärmeausdehnung sehr merklich ab, und es scheint dann möglich, dass dieser Dampf, der in jenen Versuchen $k = 1{\cdot}67$ gab, ähnlich weit wie die Luft von der Sättigung entfernt, wie diese $k = 1{\cdot}40$ zeigen würde. Man sieht, dass eine Entscheidung dieser Frage durch wirkliche Bestimmung des bezüglichen thermischen Ausdehnungscoëfficienten sowohl für die Theorie der Gase, als auch für die physikalische Chemie von höchster Bedeutung wäre. Schon gegenwärtig ist bekannt, dass der Quecksilberdampf in Bezug auf innere Reibung sehr stark von jenem Verhalten abweicht, welches man nach der kinetischen Gastheorie von demselben vor den entscheidenden Versuchen erwartet hatte.

2. Bei Verdampfung einer Flüssigkeit wird die latente Wärme L theils auf äussere Arbeit $= pu$ und theils auf innere Arbeit, die man durch Iu ausdrücken kann, verbraucht; es ist sonach

$$AL = (p+I)u,$$

folglich mit Benützung der entsprechenden, oben angegebenen Formel:

$$p+I=T\frac{dp}{dt},$$

und hieraus erhält man für einen bei veränderlicher Temperatur gesättigt bleibenden Dampf

$$\frac{dI}{dt}=T\frac{d^2p}{dt^2},$$

wonach mit dem Werthe von $\frac{dp}{dt}$ auch I bei steigender Temperatur zunimmt.

Die Grösse I kann ohne irgendwelche Hypothese als eine Function von t und p und daher auch von t und v betrachtet werden. Nimmt man aber an, dass I keine unmittelbare Function der Temperatur sei, so hat man bei veränderlicher Sättigungstemperatur

$$\frac{dI}{dt}=\left(\frac{dI}{dv}\right)\frac{dv}{dt}.$$

Für den kritischen Zustand als denjenigen, wo Dampf und Flüssigkeit gleich dicht sind, ist bekanntlich

$$\left(\frac{d^2p}{dv^2}\right)=\left(\frac{dp}{dv}\right)=0$$

oder nach der oben eingeführten Bezeichnung

$$\left(\frac{de}{dv}\right)=e=0.$$

Hieraus folgt für den genannten Punkt

$$\frac{dp}{dt}=\left(\frac{dp}{dt}\right),$$

d. h. die Zunahme des Sättigungsdruckes mit der Temperatur bewirkt hier, dass das Volumen constant bleibt. Es wird also im kritischen Punkte

$$\frac{dv}{dt}=0,$$

d. h. die mit der Temperatur wachsende Sättigungsdichte erreicht in demselben als Grenzwerth ein Maximum. Es folgt also für diesen Punkt aus den obigen Formeln:

$$\frac{dI}{dt} = T\frac{d^2p}{dt^2} = 0,$$

d. h. im kritischen Punkte wird die Grösse I und zugleich die Zunahme $\frac{dp}{dt}$ des Sättigungsdruckes ein Maximum.

Im kritischen Punkte eines Dampfes fallen ein Maximum und ein Minimum von p, beide der Bedingung $e = 0$ entsprechend, zusammen. Bei gewöhnlicher Temperatur liegen das Maximum und das Minimum von p weit auseinander; das Maximum ist der Druck, wodurch für den über seine Sättigung verdichteten Dampf $e = 0$ und dann negativ würde, während das Minimum jener (entweder noch positive oder schon negative) Druck ist, wobei die entsprechende, bei constanter Temperatur über ihren Siedepunkt ausgedehnte Flüssigkeit $e = 0$ und dann negativ würde. Bei einem negativen Werthe von e ist keine Bestandfähigkeit möglich; sollen also Dampf und Flüssigkeit unter einem gemeinsamen Drucke bestehen können, so muss dieser Druck, während er kleiner ist als der maximale Druck des Dampfes, zugleich grösser sein als der minimale Druck der Flüssigkeit. Dies ist bei gewöhnlicher Temperatur immer der Fall. Mit steigender Temperatur nehmen aber die in Rede stehenden drei Drucke zu, bis sie im kritischen Punkte zusammenfallen, und es soll nun der Verlauf, welchen in dessen Nähe das Maximum und das Minimum von p nehmen, bestimmt werden.

Wenn eine Flüssigkeit, unter dem kritischen Drucke stehend, von einer gewöhnlichen Temperatur an erwärmt wird, so nimmt e (wenigstens, wie bei Wasser, von einem gewissen Punkte an) ab, bis mit Erreichung der kritischen Temperatur $e = 0$ wird, welcher Werth, weil e bei weiterer Erwärmung wächst, ein Minimum ist; im kritischen Punkte ist also für constanten Druck

$$\frac{de}{dt} = e = 0.$$

Lässt man dagegen vom kritischen Punkte an mit sinkender Temperatur den Druck so wechseln, dass $e = 0$ bleibe, so muss die Bedingung

$$\frac{de}{dt}\,dt + \frac{de}{dp}\,dp = 0$$

erfüllt sein, welcher Gleichung man, weil allgemein

$$\frac{de}{dp} = \left(\frac{de}{dv}\right)\left(\frac{dv}{dp}\right) = -\frac{v}{e}\left(\frac{de}{dv}\right)$$

ist, die Form

$$e\frac{de}{dt}\,dt = v\left(\frac{de}{dv}\right)dp$$

geben kann. Es ist zu bemerken, dass der auf constanten Druck sich beziehende Quotient $\frac{de}{dt}$ nicht mit dem auf constantes Volumen sich beziehenden Quotienten $\left(\frac{de}{dt}\right)$, welcher positiv ist, verwechselt werden darf.

Die Werthe von e, $\frac{de}{dt}$ und $\left(\frac{de}{dv}\right)$ verschwinden im kritischen Punkte; der aus der vorigen Gleichung folgende Werth von $\frac{dp}{dt}$ nimmt dann die Form $\frac{0}{0}$ an und man erhält

$$\frac{dp}{dt} = 0,$$

d. h. der zu $e = 0$ gehörige maximale und minimale Druck nimmt vom kritischen Punkte an, wenn die Temperatur sich ein wenig erniedrigt, zunächst nicht merklich ab. Da nun der Sättigungsdruck, wie wir gesehen haben, vom kritischen Punkte an schnell abnimmt, so ist klar, dass er nicht nur kleiner werden muss als der Maximaldruck des Dampfes, sondern auch kleiner als der von letzterem zunächst nicht merklich verschiedene Minimaldruck der Flüssigkeit; diese kann daher als solche unter dem Drucke des Dampfes nicht bestehen und kann sich von diesem nicht abscheiden. Weil aber der Dampfdruck bei gewöhnlicher Tempe-

ratur grösser ist als der Minimaldruck der Flüssigkeit, so muss es nothwendig eine Temperatur geben, bei welcher diese zwei Drucke gleich gross sind und folglich für die Flüssigkeit unter dem Dampfdruck $e = 0$ ist; bis zu dieser Temperatur von der kritischen angefangen ist die Flüssigkeit, weil e für sie negativ wäre, instabil und bleibt, mit dem Erkalten an Menge zunehmend, im Dampfe gelöst. Erst wenn durch hinreichendes Erkalten e für die Flüssigkeit durch Null gehend positiv wird, scheidet sich diese plötzlich mit ihrer ganzen im Dampfe gelösten Menge, nun selbst stabil, als Niederschlag aus, wogegen umgekehrt, wenn die Flüssigkeit von einer gewöhnlichen Temperatur an unter dem Drucke ihres Dampfes erwärmt wird, dieselbe bei Überschreitung der Temperatur, bei welcher e für sie negativ würde, vollständig, sich mit dem Dampfe mischend, verschwindet. Diese unterhalb der kritischen liegende Temperatur ist also der höchste Siedepunkt der Flüssigkeit, deren Dichte dann beträchtlich grösser ist als diejenige ihres Dampfes.

Merkwürdig ist der Gang, welchen der Elasticitätscoëfficient e in Dampf und Flüssigkeit bei Sättigung befolgt. Im kritischen Punkte, als dem höchsten, wo diese Bedingung erfüllt sein kann, ist $e = 0$. Mit sinkender Temperatur nimmt e einerseits für den Dampf zu, erreicht bei einer noch relativ hohen Temperatur ein Maximum und nimmt weiterhin fortwährend ab. Anderseits nimmt e für die Flüssigkeit vom kritischen Punkte an ab, wird also negativ, erreicht ein Minimum, wächst dann und wird dabei durch Null gehend positiv; es muss eine Temperatur geben, bei welcher e für Dampf und Flüssigkeit gleich gross ist und unterhalb welcher diese Grösse, rasch wachsend und eventuell bei niedriger Temperatur (für Wasser etwa bei 63°) ein Maximum werdend, grösser bleibt als für den Dampf.

Drückt man einen gewöhnlichen Dampf immer stärker zusammen, so wird der Druck von einer gewissen Grenze an unter Bildung sichtbarer Flüssigkeit stationär und wächst erst wieder, wenn aller Dampf verflüssigt ist. Liegt die Temperatur, bei welcher man den Dampf comprimirt, ober der höchsten Siedetemperatur der Flüssigkeit, aber noch unterhalb der kritischen, so bleibt der Druck zwar ebenfalls von einer Grenze an für ein gewisses Volumintervall stationär, aber er fängt jetzt, ohne dass

sich eine sichtbare Flüssigkeit gebildet hat, wieder zu wachsen an; comprimirt man den Dampf bei einer Temperatur ober der kritischen, so nimmt der Druck ununterbrochen mit der Dichte zu, zunächst noch einen für höhere Temperaturen verschwindenden Wendepunkt zeigend, wo diese Zunahme am langsamsten ist.

3. Nach dem Vorstehenden wird im kritischen Punkte $I=i$ und zugleich

$$\frac{dt}{Ip}=\left(\frac{di}{dt}\right)=0,$$

wonach dann i und daher gemäss der Gleichung

$$\left(\frac{di}{dt}\right)=T\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)$$

auch $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ für constantes Volumen ein Maximum ist. Man sieht also, dass, wenn man einen Dampf im kritischen Punkte, das Volumen constant erhaltend, erwärmt, der Quotient $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ sich zunächst nicht merklich ändert, aber bei weit genug fortgesetzter Erwärmung endlich abnimmt. Einen ähnlichen Gang muss gleichzeitig i befolgen, und es leuchtet sofort ein, dass dieses Resultat für die Beurtheilung des Verhaltens stark erhitzter und comprimirter Gase von Wichtigkeit sein wird.

Der Bedeutung von i gemäss ist für constante Temperatur allgemein

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)+\left(\frac{di}{dv}\right)=T\left(\frac{d^2p}{dv\,dt}\right)$$

oder mit Einführung von e:

$$\left(\frac{di}{dv}\right)=\frac{e}{v}-\frac{T}{v}\left(\frac{de}{dt}\right);$$

hieraus folgt für den kritischen Punkt

$$\left(\frac{di}{dv}\right)=-\frac{T}{v}\left(\frac{de}{dt}\right)$$

und es ist also für denselben, weil dann $\left(\frac{de}{dt}\right)$ evident positiv ist, $\left(\frac{di}{dv}\right)$ negativ, d. h. die Grösse i nimmt hier durch Compression zu. Umgekehrt muss dieselbe durch Druckverminderung abnehmen, und man wird dabei ohne Zweifel zu einer Verdünnung kommen, bei welcher $i = 0$ und somit in dieser Hinsicht der ideale Gaszustand erreicht ist, mit dessen Überschreitung, wie bereits der Wasserstoff zu beweisen scheint, i negativ zu werden anfängt.

Aus den erwähnten Eigenschaften des kritischen Punktes lässt sich ohne weitere Voraussetzung eine die inneren Kräfte flüssiger und gasförmiger Körper betreffende, in theoretischer Hinsicht sehr bedeutsame Folgerung ziehen, auf welche ich bei einer späteren Gelegenheit zurückzukommen mir vorbehalte.

Note über das Legendre-Jacobi'sche Symbol

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juli 1891.)

Zur Ermittlung von Ausdrücken für das von Jacobi verallgemeinerte Legendre'sche Symbol führt bekanntlich die folgende, zuerst von den Herren L. Kronecker und E. Schering in gänzlich verschiedener Weise bewiesene Verallgemeinerung des Gauss'schen Lemmas:

Sind m und n zwei theilerfremde ganze Zahlen, so hat das Legendre-Jacobi'sche Symbol $\left(\frac{n}{m}\right)$ den Werth $+1$ oder -1, je nachdem die Anzahl der negativen absolut kleinsten Reste, welche bei der Division der Producte

$$n, 2n, 3n, \ldots, \frac{m-1}{2} n$$

durch m auftreten, gerade oder ungerade ist.

Da selbstverständlich jede dieser Anzahl nach dem Modul 2 congruente Zahl zur Bestimmung des Zeichens in gleicher Weise verwendet werden kann, so soll jede solche eine durch das Kronecker-Schering'sche Lemma definirte charakteristische Zahl von n in Bezug auf m genannt und mit (n, m) bezeichnet werden.

Von den Darstellungen dieser charakteristischen Zahl pflegt man namentlich diejenigen zu benützen, welche so gebaut sind, dass man bei Vertauschung von n und m unmittelbar das Reciprocitätsgesetz erkennen kann. Ich will in dieser Beziehung nur die Gleichung

$$(n, m) = \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m}\right] \qquad 1)$$

erwähnen, aus der man unter Benützung der durch die Relationen

$$\varepsilon(\alpha) = 1 \quad (\alpha \geqq 1); \qquad \varepsilon(\alpha) = 0 \quad (\alpha < 1)$$

definirten zahlentheoretischen Function $\varepsilon(\alpha)$ mit wenigen Worten das Reciprocitätsgesetz ableiten kann, sowie das dieser Darstellung von (n, m) entsprechende hochelegante Kronecker'sche Product für das Legendre-Jacobi'sche Symbol

$$\left(\frac{n}{m}\right) = \text{sign} \cdot \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{y}{n} - \frac{x}{m}\right).$$

Verschiedene Ausdrücke der charakteristischen Zahl, beziehungsweise des Symbols, von derselben Beschaffenheit wurden von den Herren Kronecker, Schering, mir u. A. bei diversen Gelegenheiten angegeben.

Nicht so unmittelbar führen andere Ausdrücke, von denen ich beispielsweise den im dritten Gauss'schen Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes auftretenden

$$(n, m) = \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{2xn}{m}\right] \qquad 2)$$

anführen will, auf das Reciprocitätsgesetz, man formt sie desshalb zumeist in andere um, denen die eben hervorgebobene Eigenschaft zukommt. So ergibt sich sofort aus dieser Darstellung die in 1) angeführte, wenn man nur die geraden Zahlen des Intervalles $\frac{m+1}{2} \ldots m$ durch $m-(2x_1-1)$ $\left(x_1 = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}\right)$ ersetzt und beachtet, dass in keinem der so entstehenden Glieder $\frac{(2x_1-1)n}{m}$ eine ganze Zahl sein kann, sowie dass für jedes nicht ganzzahlige α die Relation

$$[-\alpha] = -1-[\alpha]$$

besteht. Es mag hier nur bemerkt werden, dass man aus 2), wenn man alle geraden Zahlen in der eben angegebenen Weise darstellt, die Formel

$$(n, m) = \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)n}{m}\right] \qquad 3)$$

erhält.

Sieht man nun aber davon ab, dass das quadratische Reciprocitätsgesetz, wie dies in den angezogenen Fällen geschieht, mit Hilfe einer einzigen Darstellung der durch das Kronecker-Schering'sche Lemma definirten charakteristischen Zahl erschlossen werden soll, so lassen sich auch derartige Ausdrücke ohneweiters mit Vortheil zum Beweise desselben verwenden; man gelangt sogar durch Benützung zweier verschiedener Darstellungen der charakteristischen Zahl mitunter rascher und directer zum Ziele, als durch die Verwendung eines einzigen, namentlich dann, wenn die beiden Ausdrücke durch eine einfache Umformung aus einander ableitbar sind.

Es soll nun ein Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes angegeben werden, in welchem zwei verschiedene Darstellungen der charakteristischen Zahl mit einander verbunden werden. Hiebei wird sich auch die Gelegenheit ergeben, auf den innigen Zusammenhang einer Reihe von Darstellungen der ganzen Zahl (n, m) hinzuweisen.

Aus der durch die Gleichung 2) gegebenen Gauss'schen Darstellung von (n, m) kann man leicht die folgende herleiten

$$(n, m) = \sum_{x=1}^{x=n-1} \left[\frac{xm}{2n}\right]. \qquad 4)$$

Es ist nämlich

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{2xn}{m}\right] = \sum_{x,y=1}^{x=\frac{m-1}{2},\, y=n-1} \varepsilon\left(\frac{2xn}{ym}\right)$$

$$\sum_{y=1}^{y=n-1} \left[\frac{ym}{2n}\right] = \sum_{x,y=1}^{x=\frac{m-1}{2},\, y=n-1} \varepsilon\left(\frac{ym}{2xn}\right).$$

Da nun von den zwei Brüchen $\frac{2xn}{ym}, \frac{ym}{2xn}$ für jedes in Betracht kommende Werthepaar x, y der eine grösser, der andere aber kleiner als 1 ist, so hat man

$$\sum_{x,y=1}^{x=\frac{m-1}{2}, y=n-1} \left\{ \varepsilon\left(\frac{2xn}{ym}\right) + \varepsilon\left(\frac{ym}{2xn}\right) \right\} = \frac{(n-1)(m-1)}{2} \equiv 0 \pmod 2,$$

und daher besteht die Congruenz

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{2xn}{ym}\right] \equiv \sum_{y=1}^{y=n-1} \left[\frac{ym}{2n}\right] \pmod 2,$$

durch welche die Gleichung 4) bewiesen wird. Man kann dieselbe übrigens auch, wie Herr E. Lucas[1] gezeigt hat, unmittelbar aus dem Lemma erschliessen, wenn man beachtet, dass $\left[\frac{ym}{2n}\right]$ die Anzahl derjenigen unter den Zahlen

$$n, 2n, 3n, \ldots, \frac{m-1}{2} n$$

ist, welche nicht grösser als $\frac{yn}{2}$ sind, sowie dass man bei der Division von $y_1 n$ durch m stets einen positiven oder negativen absolut kleinsten Rest erhält, je nachdem $y_1 n$ dem Intervalle $2x \cdot \frac{m}{2} \ldots (2x+1)\frac{m}{2}$ oder $(2x-1)\frac{m}{2} \ldots 2x\frac{m}{2}$ angehört.

Es mag hier nur gelegentlich darauf hingewiesen werden, dass diese Darstellung von (n, m), in der als Nenner der zu benützenden Brüche das Doppelte des Zählers des zugehörigen

[1] „Sur la loi de réciprocité des residus quadratiques." Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersburg. Nouvelle série, t. I (XXXIII), p. 495—496, 1890. Herr E. Lucas liefert a. a. O. unter alleiniger Benützung der Darstellung 4) von (n, m) einen höchst einfachen Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes für zwei Primzahlen und fügt bei, dass man auf demselben Wege bei einer Abänderung des Ausspruches des verallgemeinerten Fermat'schen Satzes dasselbe auch für zwei beliebige ungerade theilerfremde Zahlen beweisen kann.

Legendre-Jacobi'schen Zeichens auftritt, an die durch die Theorie der Gauss'schen Summen gelieferte Gleichung

$$W\left(\frac{-mi}{2n}\right) = (1+i^m)(\sqrt{n})\left(\frac{n}{m}\right)$$

erinnert, die Herrn L. Kronecker zu einem ungemein eleganten Algorithmus zur Bestimmung des verallgemeinerten Legendre'schen Symbols mit Hilfe der Kettenbruchentwicklung von $\frac{m}{2n}$ geführt hat.

Zu einer zweiten, für den beabsichtigten Zweck geeigneten Darstellung der charakteristischen Zahl (n, m) gelangt man durch die Überlegung, dass

$$\left[\frac{xn}{m} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{xn}{m}\right] + \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

ist, je nachdem der Rest der Division von xn durch m kleiner als $\frac{m}{2}$ ist oder nicht, d. i. je nachdem der absolut kleinste Rest derselben positiv oder negativ ist; dieselbe ist also

$$(n, m) = \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m} + \frac{1}{2}\right] - \sum_{x-1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m}\right]. \qquad 5)$$

Durch blosse Umformung der zweiten Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung gelangt man nun unter Benützung der Gleichung 4) zu einem sehr einfachen Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes.

Man hat nämlich

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m}\right] = \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{2xn}{2m}\right]$$

$$= \sum_{x=1}^{x=m-1} \left[\frac{xn}{2m}\right] - \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)\,n}{2m}\right].$$

Setzt man nun in der zweiten Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung

$$x = \frac{m+1}{2} - x_1 \qquad \left(x_1 = 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}\right),$$

so erhält man die Relation

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)n}{2m}\right] = \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{n}{2} - \frac{xn}{m}\right]$$

$$= \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{xn}{m}\right]$$

$$\equiv \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m} + \frac{1}{2}\right] \pmod 2$$

und demnach ist

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m} + \frac{1}{2}\right] - \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m}\right] \equiv \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} - \sum_{x=1}^{x=m-1} \left[\frac{xn}{2m}\right] \pmod 2$$

Verbindet man diese Congruenz mit der Gleichung 5), so erhält man unter Berücksichtigung von 4) die Congruenz

$$(n, m) + (m, n) \equiv \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \pmod 2,$$

durch welche das quadratische Reciprocitätsgesetz ausgesprochen wird.

Aus der Formel 4) lässt sich ein neuer Ausdruck für die charakteristische Zahl (n, m) ableiten, der in analoger Weise wie 4) zum Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes verwendet werden kann. Schreibt man diese Gleichung nämlich in der Form

$$(n, m) = \sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{xm}{2n}\right] + \sum_{x=\frac{n+1}{2}}^{x=n-1} \left[\frac{xm}{2n}\right]$$

und setzt sodann in der zweiten Summe auf der rechten Seite

$$x = n - x_1,$$

wo x_1 die ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots \frac{n-1}{2}$ durchläuft, so verwandelt sich dieselbe in

$$(n, m) = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} + \sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{xm}{2n}\right] - \sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{xm}{2n} + \frac{1}{2}\right]. \quad 6)$$

Wird nun in der ersten Summe auf der rechten Seite für $x : n - x_1$ gesetzt $\left(x_1 = \frac{n+1}{2}, \ldots, n-1\right)$, so ergibt sich sofort die bemerkenswerthe Gleichung

$$(n, m) = \sum_{x=1}^{x=n-1} \left[\frac{xm}{2n} + \frac{1}{2}\right], \quad 7)$$

welche übrigens aus 3) in derselben Weise hätte abgeleitet werden können, wie 4) aus 2). Man sieht daher, dass die durch das Kronecker-Schering'sche Lemma definirte charakteristische Zahl von n in Bezug auf m sich durch die Summe, oder was dasselbe besagt, die Anzahl der ungeraden, in den Brüchen

$$\frac{m}{2n}, \; 2\frac{m}{2n}, \; 3\frac{m}{2n}, \; \ldots, \; (n-1)\frac{m}{2n}$$

enthaltenen grössten und auch der ihnen zunächst liegenden ganzen Zahlen darstellen lässt.

Da bekanntlich $[2\alpha]$ gerade oder ungerade ist, je nachdem der in α enthaltene Bruchrest kleiner als $\frac{1}{2}$ ist oder nicht, so folgen aus 4) und 7) die neuen Gleichungen

$$(n, m) = \sum_{x=1}^{x=n-1} \left\{\left[\frac{xm}{4n} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{xm}{4n}\right]\right\} \quad 8)$$

$$(n, m) = \sum_{x=1}^{x=n-1} \left\{\left[\frac{xm}{4n} + \frac{3}{4}\right] - \left[\frac{xm}{4n} + \frac{1}{4}\right]\right\}, \quad 9)$$

aus denen folgt:

$$\sum_{x=1}^{x=n-1}\left\{\left[\frac{xm}{4n}\right]+\left[\frac{xm}{4n}+\frac{1}{2}\right]\right\}\equiv\sum_{x=1}^{x=n-1}\left[\frac{xm}{4n}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{xm}{4n}+\frac{3}{4}\right]\Big\} \quad 10)$$

$$(\text{mod. } 2)$$

Durch das quadratische Reciprocitätsgesetz ist bekanntlich das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol für zwei ungerade theilerfremde Zahlen m und n vollkommen bestimmt, wesshalb es mit Recht als das Fundamentaltheorem dieser Theorie bezeichnet wird. Ja es kann durch dasselbe auch der quadratische Charakter $\left(\frac{2}{n}\right)$ von 2 in Bezug auf eine ungerade Zahl n ermittelt werden, wenn man nur die Gleichung

$$\left(\frac{-1}{n}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

als bekannt voraussetzt, so dass also im Grunde genommen nur ein Ergänzungssatz zum Reciprocitätsgesetze nothwendig ist. Es ist nämlich nach dem Multiplicationssatze für die Symbole

$$\left(\frac{2}{n}\right)=\left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{-2}{n}\right)$$

oder nach dem Additionstheoreme

$$\left(\frac{2}{n}\right)=\left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right).$$

Da von den zwei ungeraden Zahlen $n-2$, n stets eine die Form $4s+1$ besitzt, so ist demnach nach dem quadratischen Reciprocitätsgesetze

$$\left(\frac{2}{n}\right)=\left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-2}\right)$$

$$=\left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n-2}\right)$$

und daher schliesslich

$$\left(\frac{2}{n}\right) = \prod_{0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(\frac{-1}{n-2\lambda}\right)$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n-1}{2}\right]}(n-2\lambda-1)}$$

$$= (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$$

Besitzt man nun für zwei ungerade theilerfremde Zahlen m und n irgend einen Ausdruck für die durch das Kronecker-Schering'sche Lemma definirte charakteristische Zahl (n, m), so wird jede andere Function der beiden ganzen Zahlen m und n, welche, zu derselben hinzugefügt, eine Summe gibt, die nach dem Modul 2 congruent $\frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$ ist, zu einer neuen Darstellung dieser charakteristischen Zahl führen. So folgt beispielsweise aus 6) unter Voraussetzung des Reciprocitätsgesetzes die Relation

$$(m, n) = \sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left\{\left[\frac{xm}{2n} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{xm}{2n}\right]\right\},$$

aus welcher nach der oben gemachten Bemerkung sofort wieder die durch die Gleichung 1) angegebene Darstellung der charakteristischen Zahl fliesst, durch deren Vergleich mit 5) man die zuerst von Herrn Kronecker bewiesene Congruenz

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{xm}{n} + \frac{1}{2}\right] \equiv 0 \pmod 2 \qquad 11)$$

erhält. Vereinigt man dieselbe mit 7), so entsteht die neue Relation

$$(n, m) = \sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)m}{2n} + \frac{1}{2}\right],$$

während die Verbindung der aus ihr folgenden Congruenz

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left\{\left[\frac{xm}{2n}+\frac{3}{4}\right]+\left[\frac{xm}{2n}+\frac{1}{4}\right]\right\} \equiv 0 \pmod 2$$

mit 10) nach einigen einfachen Umformungen zu der Beziehung

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{n-1}{2}} \left[\frac{1}{2}+\left[\frac{n+1}{4}\right]-\frac{xn}{2m}\right] \equiv \frac{m-1}{2}\left[\frac{n-1}{4}\right] \pmod 2$$

führt.

Zur Theorie der associirten Formen

von

Dr. Gustav Kohn,

Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 2. Juli 1891.)

Während für die Darstellung aller Co- und Invarianten einer binären Form f (oder eines Systems solcher Formen) in ganzer und rationaler Weise durch eine endliche Anzahl unter ihnen einfache allgemeine Gesetze nicht zu bestehen scheinen, kann man, wie Hermite gezeigt hat,[1] nach einer überaus einfachen Regel und noch auf unendlich viele Arten alle Co- und Invarianten einer Form f durch eine geschlossene Anzahl unter ihnen in rationaler Weise so ausdrücken, dass nur eine Potenz von f im Nenner erscheint. Unter all diesen Arten ist aber eine bestimmte dadurch ausgezeichnet, dass diejenigen Covarianten, durch welche alle anderen ausgedrückt werden, völlig von einander unabhängig sind. Es ist dies die Darstellung durch die zu f associirten Formen.

Diese Formen ergeben sich als Coëfficienten einer gewissen typischen Darstellung von f, und es ist desshalb ein sehr naheliegender Gedanke, statt der Coëfficienten dieser typischen Darstellung, der zu f associirten Formen, die Lösungen dieser typischen Darstellung — ich nenne sie die associirten Wurzeln — einzuführen. Dies ist der Grundgedanke der vorliegenden Arbeit.

Die associirten Wurzeln lassen sich in einfacher Weise als ganze Functionen der Veränderlichen und der Lösungen der Form f (beziehungsweise der Formen des zugrunde liegenden Systems) ausdrücken, und die Eigenschaften dieser Ausdrücke

[1] Cambridge and Dublin Math. Journal, IX; Crelle's Journal, LII.

führen direct zu einigen allgemeinen Sätzen über Covarianten. Es ergibt sich, dass eine vielfache Lösung einer Form einer grossen Classe ihrer Covarianten als Lösung in gewisser Vielfachheit zugehört, man gelangt zu allgemeinen Sätzen über Resultanten von Covarianten, aus denen einige diesbezügliche Resultate von Gordan[1] durch Specialisirung hervorgehen, und findet einen Zusammenhang zwischen den Realitätsverhältnissen der Lösungen einer Form und gewisser Covarianten derselben.

Deutet man die associirten Wurzeln als homogene Punktcoordinaten, so kommt man zu einer ungemein sachgemässen geometrischen Repräsentation für die Co- und Invarianten des binären Gebiets, in der auch die Relationen zwischen diesen algebraischen Gebilden einen naturgemässen geometrischen Ausdruck finden.

§. 1. Associirte Formen und associirte Wurzeln.

1. Wir bringen zunächst jenen Theil der Theorie der associirten Formen in Erinnerung, welcher für das Folgende in Betracht kommt.

Es sei

$$f(y) = a_0 y_1^n + \binom{n}{1} a_1 y_1^{n-1} y_2 + \binom{n}{2} a_2 y_1^{n-2} y_2^2 \dots + a_n y_2^n$$

die Form n^{ter} Ordnung, welche wir zugrunde legen. An Stelle der Variabeln y_1, y_2 führen wir in diese Form neue Veränderliche ξ, η ein durch die lineare Substitution

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{n}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} y_2\right) \\ \eta &= -x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

welche ausgerechnet lautet:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{f(x)}\left(x_1 \xi - \frac{1}{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_2}\eta\right) \\ y_2 &= \frac{1}{f(x)}\left(x_2 \xi + \frac{1}{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\eta\right) \end{aligned}\right\}. \tag{1a}$$

[1] Vergl. Resultanten von Covarianten, Math. Ann., Bd. IV, S. 169.

Setzt man die Werthe (1 *a*) von y_1 und y_2 in $f(y)$ein, so kommt

$$f(y)=\frac{1}{[f(x)]^n}\left[u_0\xi^n+\binom{n}{1}u_1\xi^{n-1}\eta+\binom{n}{2}u_2\xi^{n-2}\eta^2\ldots+u_n\eta^n\right].$$

Dies ist eine „typische Darstellung" der Form f, d. h. eine Darstellung, in der sowohl die Coëfficienten als auch die Veränderlichen Covarianten sind. Die Coëfficienten $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ bezeichnet Hermite als System der zu f associirten Formen. Indessen hat dieser selbst schon erkannt, dass die sämmtlichen Formen $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ durch $f(x)$ theilbar sind, und dass insbesondere

$$u_0 = f(x) \text{ und } u_1 = 0.$$

Desshalb wollen wir die Gordan'sche Terminologie[1] acceptiren und erst die Quotienten $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$, welche man erhält, wenn man die Formen $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ durch $f(x)$ dividirt, als das System der associirten Formen (Schwesterformen) von f bezeichnen.

Die obige typische Darstellung von $f(y)$ durch associirte Formen schreibt sich jetzt

$$f(y)=\frac{1}{[f(x)]^{n-1}}\left[v_0\xi^n+\binom{n}{1}v_1\xi^{n-1}\eta+\binom{n}{2}v_2\xi^{n-2}\eta^2\ldots+v_n\eta^n\right], \quad (2)$$

wobei $v_0 = 1$ und $v_1 = 0$ ist.

Um eine beliebig vorgelegte Covariante (oder Invariante) durch die Formen $f, u_2, u_3, \ldots, u_n$ auszudrücken, hat man nach Hermite bloss im leitenden Coëfficienten der Covariante die Coëefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ von f beziehungsweise durch die Formen $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ zu ersetzen und das Resultat durch $[f(x)]^i$ zu dividiren, wo i den Index[2] der betreffenden Covariante bedeutet. Daraus entspringt die Regel: Soll eine beliebige Covariante (oder Invariante) durch die associirten Formen von f in

---

[1] Vergl. Vorlesungen über Invariantentheorie, Bd. II, S. 357.

[2] Unter dem Index einer Covariante versteht man nach Hermite den Exponenten der Potenz der Substitutionsdeterminante, mit welcher sich die Covariante multiplicirt, wenn man in ihr die Coëfficienten und Variabeln der ursprünglichen Form durch die Coëfficienten und Variabeln der linear transformirten Form ersetzt.

Verbindung mit dieser Form selbst ausgedrückt werden, so hat man im leitenden Coëfficienten der Covariante die Coëfficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ von f beziehungsweise zu ersetzen durch die Formen $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ und das erhaltene Resultat durch eine Potenz von f zu dividiren, deren Exponent gleich ist der Differenz zwischen Index und Grad der Covariante.

Hervorzuheben ist noch, dass zwischen den associirten Formen $v_2, v_3, \ldots, v_n$ keinerlei Relation bestehen kann. Denn die Covarianten einer Form n^{ter} Ordnung f hängen von $(n-1)$ wesentlichen Parametern ab und sind durch die $(n-1)$ Formen $f, v_2, v_3, \ldots, v_n$ ausdrückbar.

2. Der einfache Grundgedanke, auf dem unsere Untersuchungen ruhen, besteht darin, die associirten Formen, welche als Coëfficienten der verschiedenen Potenzen von ξ und η in der typischen Darstellung

$$[f(x)]^{n-1} f(y) = v_0 \xi^n + \binom{n}{1} v_1 \xi^{n-1}\eta + \binom{n}{2} v_2 \xi^{n-2}\eta^2 \ldots + v_n \eta^n \quad (2)$$

definirt waren, in unseren Betrachtungen zu ersetzen durch die Werthe $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ von $\frac{\xi}{\eta}$, für welche der Ausdruck (2) gleich Null wird und deren elementarsymmetrische Functionen (von numerischen Factoren abgesehen) die associirten Formen $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ sind.

Das System der Grössen $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ soll in der Folge als System der (zu den Lösungen f) associirten Wurzeln bezeichnet werden.

Die associirten Wurzeln sind die Lösungen der Gleichung n^{ten} Grades

$$z^n + \binom{n}{2} v_2 z^{n-2} + \binom{n}{3} v_3 z^{n-3} \ldots + v_n = 0,$$

und da in dieser Gleichung der Coëfficient von z^{n-1} gleich Null, die übrigen Coëfficienten $\binom{n}{2} v_2, \binom{n}{3} v_3, \ldots, v_n$ völlig von ein-

ander unabhängig sind, so folgt, dass zwischen den associirten Wurzeln die Relation besteht

$$z_1 + z_2 + z_3 \ldots + z_n = 0$$

und dies die einzige Relation zwischen den associirten Wurzeln ist.

Wenn Π irgend eine Covariante (oder Invariante) der Form f ist und i ihren Index, g ihren Grad bedeutet, dann ist nach Art. 1 das Product $f^{i-g}\Pi$ eine ganze Function der associirten Formen, die erhalten wird, indem man in dem leitenden Coëfficienten von Π die Coëfficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ von f der Reihe nach durch die associirten Formen $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ ersetzt. Da alle Glieder des leitenden Coëfficienten dasselbe Gewicht haben, welches gleich ist dem Index der Covariante, und da jede der associirten Formen eine homogene symmetrische Function der Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ist von dem Grade, welchen ihr Index angibt, so erhält man

$$f^{i-g}\Pi = S_i(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n), \tag{3}$$

wo S_i eine homogene symmetrische Function i^{ten} Grades ihrer Argumente bedeutet. Umgekehrt ist jede ganze homogene symmetrische Function i^{ten} Grades der associirten Wurzeln $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ als isobare Function der associirten Formen $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ vom Gewichte i eine Covariante vom Index i.

3. Um die associirten Wurzeln explicite darzustellen, denken wir uns $f(y)$ in seine Wurzelfactoren aufgelöst. Es sei

$$f(y) = (y\alpha^{(1)})(y\alpha^{(2)})(y\alpha^{(3)})\ldots(y\alpha^{(n)}),$$

dann wird

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{1}{n(xy)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}y_2\right) = \frac{1}{n(xy)}[(y\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n)}) +$$
$$+(y\alpha^{(2)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n)}) + \ldots + (y\alpha^{(n)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})].$$

Da die associirten Wurzeln als die Werthe von $\frac{\xi}{\eta}$ definirt waren, welche die rechte Seite von (2) zu Null machen, so werden wir mit Rücksicht auf die linke Seite der Gleichung (2)

die Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ erhalten, wenn wir in dem (eben entwickelten) Ausdruck von $\frac{\xi}{\eta}$ für y der Reihe nach die Lösungen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ von f einsetzen.

Es kommt:

$$\left.\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{n}[(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n)})+(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})(x\alpha^{(2)})(x\alpha^{(4)})\ldots(x\alpha^{(n)})+ \\
&\qquad \ldots+(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)})(x\alpha^{(2)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})] \\
z_2 &= \frac{1}{n}[(\alpha^{(2)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n)})+(\alpha^{(2)}\alpha^{(3)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(4)})\ldots(x\alpha^{(n)})+ \\
&\qquad \ldots+(\alpha^{(2)}\alpha^{(n)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_n &= \frac{1}{n}[(\alpha^{(n)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})+(\alpha^{(n)}\alpha^{(2)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})+ \\
&\qquad \ldots+(\alpha^{(n)}\alpha^{(n-1)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(n-2)})].
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Dieses Gleichungssystem bildet das Fundament unserer weiteren Überlegungen. Wir hätten direct von diesem Gleichungssystem ausgehen können, und wir haben die Theorie der associirten Formen nur desshalb zum Ausgangspunkte gewählt, um an Bekanntes anzuknüpfen. Denn alles, was wir brauchen, lässt sich leicht direct aus den Gleichungen (4) folgern.

Dass $z_1+z_2+\ldots+z_n=0$ entnimmt man aus diesen Gleichungen sofort. Ebenso ist ersichtlich, dass jede ganze homogene symmetrische Function i^{ten} Grades S_i der Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eine Covariante vom Index i ist. Denn S_i ist ein Aggregat von Gliedern, deren jedes ein Product von i Factoren vom Typus $(\alpha^{(r)}\alpha^{(s)})$ und $(n-2)i$ vom Typus $(x\alpha^{(r)})$ ist und bleibt bei einer Vertauschung der α unter einander ungeändert. Um zu zeigen, dass umgekehrt jede Covariante vom Index i mit einer Potenz von f multiplicirt eine ganze homogene symmetrische Function i^{ten} Grades der Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ist, braucht man die Covariante bloss in den Lösungen von f ausgedrückt zu denken als Aggregat von Producten von Factoren von den Typen $(\alpha^{(r)}\alpha^{(s)})$ und $(x\alpha^{(r)})$ und zu benützen, dass die Gleichungen (4) geben

$$z_r - z_s = (\alpha^{(r)}\alpha^{(s)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(r-1)})(x\alpha^{(r+1)})\ldots \\ \ldots(x\alpha^{(s-1)})(x\alpha^{(s+1)})\ldots(x\alpha^{(n)}).$$

Denn mit Rücksicht auf diese Gleichung folgt, dass man im leitenden Coëfficienten der Covariante für jeden Factor vom Typus $(\alpha^{(r)}\alpha^{(s)})$ bloss $z_r - z_s$ einzusetzen hat, um das Product der Covariante in einer Potenz der Form f zu erhalten.

§. 2. Anwendungen der Darstellung durch associirte Wurzeln.

4. Nicht nur all das, was die Theorie der associirten Formen liefert, lässt sich bei Zugrundelegung der Darstellung (4) für die associirten Wurzeln leicht ableiten, sondern man gelangt von hier aus mit Leichtigkeit auch zu neuen allgemeinen Resultaten.

Wir machen die Annahme, dass k von den Verschwindungselementen von f zusammenfallen. Man habe $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \ldots = \alpha^{(k)}$. Dann gehen die Gleichungen (4) über in

$$
\left.\begin{aligned}
z_1 = z_2 \ldots = z_k &= \frac{1}{n}(x\alpha^{(1)})^{k-1}\{(\alpha^{(1)}\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(k+3)})\ldots(x\alpha^{(n)}) + \\
&\quad + (\alpha^{(1)}\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(k+3)})\ldots(x\alpha^{(n)}) + \ldots\} \\
z_{k+1} &= \frac{1}{n}(x\alpha^{(1)})^{k-1}\{k(\alpha^{(k+1)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+2)})\ldots(x\alpha^{(n)}) + \\
&\quad + (\alpha^{(k+1)}\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+3)})(x\alpha^{(k+4)})\ldots(x\alpha^{(n)}) + \ldots\} \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
z_n &= \frac{1}{n}(x\alpha^{(1)})^{k-1}\{k(\alpha^{(n)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(k+2)})\ldots(x\alpha^{(n-1)}) + \\
&\quad + (\alpha^{(n)}\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(k+3)})\ldots(x\alpha^{(n-1)}) + \ldots\}
\end{aligned}\right\} \quad (5)
$$

Ist Π eine beliebige Covariante vom Index i und dem Grad g, so ist

$$f^{i-g}\Pi = S_i(z_1, z_2, \ldots, z_n), \qquad (3)$$

wo S_i eine ganze homogene symmetrische Function ihrer Argumente bedeutet. In dem uns vorliegenden Falle, wo jede der Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ den Factor $(x\alpha^{(1)})^{k-1}$ besitzt, wird auf der rechten Seite der eben hingeschriebenen Gleichung (3) der Factor $(x\alpha^{(1)})^{i(k-1)}$ heraustreten, und da f^{i-g} nur durch $(x\alpha^{(1)})^{k(i-g)}$ theilbar ist, so muss Π durch $(x\alpha^{(1)})$ zur Potenz $i(k-1)-(i-g)k = gk-i$ theilbar sein, vorausgesetzt dass $gk-i > 0$ ist.

Wir haben den Satz:

Jede k-fache Lösung der Grundform ist für eine Covariante vom Grade g und Index i, $gk > i$ vorausgesetzt, eine mindestens $(gk-i)$-fache Lösung.

Von diesem sehr allgemeinen Satze sind bisher, wie ich glaube, nur vereinzelte Specialfälle bekannt geworden; so ist z. B. bekannt, dass ein Doppelfactor der Grundform auch ein Doppelfactor für ihre Hesse'sche Form (bei der Grad und Index $= 2$ sind) ist.

5. Um die Tragweite des gefundenen Theorems zu zeigen, wollen wir jetzt einige Folgerungen aus demselben ziehen.

Ist ν die Ordnung der Covariante Π, so kann diese durch keine höhere Potenz eines Linearfactors als die ν^{te} theilbar sein, ohne identisch zu verschwinden. Hat also f eine k-fache Wurzel und ist

$$\nu < gk - i$$

oder, was mit Rücksicht auf

$$i = \frac{1}{2}(gn - \nu)$$

dasselbe ist,

$$k > \frac{1}{2}\left(n + \frac{\nu}{g}\right),$$

so verschwindet die Covariante Π identisch.

Wir haben den Satz:

Ist die Vielfachheit einer Lösung einer Form n^{ter} Ordnung grösser als $\frac{1}{2}\left(n + \frac{\nu}{g}\right)$, so verschwindet jede Covariante dieser Form identisch, deren Ordnung ν und deren Grad g ist.

Als Specialfall dieses Satzes für $\nu = 0$ folgt:

Liegt mehr als die Hälfte der Verschwindungselemente einer Form vereinigt, so verschwinden alle ihre Invarianten identisch.

Aus dem allgemeinen Theorem des Art. 4 lassen sich noch die beiden folgenden Sätze schliessen:

Die Resultante einer Form und jeder ihrer Covarianten, bei welcher der doppelte Grad den Index

übertrifft, hat die Discriminante der Grundform zum Factor.

Die Discriminante jeder Covariante, bei welcher der doppelte Grad den Index um mindestens zwei Einheiten übersteigt, hat die Discriminante der Grundform zum Factor.

Denn jenes Theorem besagt, dass, wenn die Discriminante von f verschwindet, d. h. f eine Doppelwurzel hat, diese eine $(2g-i)$-fache Lösung der Covariante ist.

6. Genauen Aufschluss gibt die folgende Betrachtung über die Resultante einer Form und einer ihrer Covarianten für den Fall, dass Index und Grad der Covariante übereinstimmen.

Setzt man in dem Gleichungssystem (4) $x = \alpha^{(1)}$, so wird

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{n-1}{n}(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})\dots(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)}) \\ z_2 = z_3 \dots = z_n &= -\frac{1}{n}(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})\dots(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)}) = -\frac{1}{n-1}z_1. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Für eine Covariante $\Pi(x)$, deren Index und Grad einander gleich sind, lautet die Gleichung (3):

$$\Pi(x) = S_i(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n),$$

wo S_i eine ganze homogene symmetrische Function ihrer Argumente bedeutet, deren Grad i dem Index der Covariante gleich ist. Setzt man in dieser Gleichung $x = \alpha^{(1)}$, so kommt mit Rücksicht auf die Gleichungen (6)

$$\Pi(\alpha^{(1)}) = c[(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})\dots(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)})]^i,$$

wo c eine numerische Constante bedeutet. Ähnliche Gleichungen erhält man, wenn man für x die übrigen Lösungen von f einsetzt. Multiplicirt man alle diese Gleichungen mit einander, so kommt:

$$\begin{aligned}\Pi(\alpha^{(1)})\,.\,\Pi(\alpha^{(2)})\,.\,\Pi(\alpha^{(3)})\dots\Pi(\alpha^{(n)}) = c^n[&(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})\dots(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)})\times \\ &\times(\alpha^{(2)}\alpha^{(1)})(\alpha^{(2)}\alpha^{(3)})\dots(\alpha^{(2)}\alpha^{(n)})\times\dots\times(\alpha^{(n)}\alpha^{(1)})(\alpha^{(n)}\alpha^{(2)})\dots(\alpha^{(n)}\alpha^{(n-1)})]^i.\end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ist die Resultante von f und Π, während auf der rechten Seite, von dem

numerischen Factor c^n abgesehen, die i^{te} Potenz der Discriminante von f steht.

Wir haben den Satz:

Die Resultante einer Form und jeder ihrer Covarianten, deren Index und Grad denselben Wert i haben, ist bis auf einen Zahlenfactor die i^{te} Potenz der Discriminante der Grundform.

7. Von der Darstellung durch associirte Wurzeln wollen wir noch eine Anwendung anderer Natur machen.

Es sei $S(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n)$ eine ganze homogene symmetrische Function ihrer Argumente so beschaffen, dass sie für jedes reelle Werthsystem derselben einen von Null verschiedenen Wert hat. Dann wird durch S eine Covariante dargestellt, deren Lösungen sämmtlich imaginär sind, im Falle die Grundform f lauter reelle Lösungen hat. Denn nach den Gleichungen (4) haben $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ sämmtlich reelle Werthe, wenn $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, $\ldots$, $\alpha^{(n)}$ und x reell sind.

Functionen S von der angegebenen Beschaffenheit kann man leicht herstellen. Jeder in den Quadraten der associirten Wurzeln symmetrische Ausdruck, der aus lauter positiven Gliedern besteht, ist eine solche Function. Als einfachstes Beispiel haben wir:

$$S = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots z_n^2.$$

Da dieser Ausdruck vom zweiten Grade in den associirten Wurzeln ist, so stellt er eine Covariante vom Index 2 dar. Es gibt aber nur diese eine Covariante von diesem Index, weil die andere symmetrische Function zweiten Grades $\Sigma z_r z_s$ (von einem Zahlenfactor abgesehen) dieselbe Covariante darstellt, wie aus der Identität $(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots z_n)^2 = 0$ hervorgeht.

Nun besitzt aber die Hesse'sche Covariante den Index 2, folglich ist sie bis auf einen Zahlenfactor gleich der Summe der Quadrate der associirten Wurzeln und wir haben den Satz:

Sind die Lösungen einer Form sämmtlich reell, dann sind die Lösungen ihrer Hesse'schen Covariante sämmtlich imaginär.[1]

---

[1] Vergl. Schramm, Annali di Mat., Ser. II, p. 1, t. 262/3.

§. 3. Ausdehnung der Betrachtungen auf simultane Systeme binärer Formen.

8. Es macht keine Schwierigkeit, an unseren Betrachtungen die Modificationen anzubringen, welche sie erfahren müssen, wenn statt einer einzelnen Form f ein simultanes System von Formen $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_\varkappa$ zugrunde gelegt wird.

Die Stelle von f in den Transformationsformeln

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}y_2\right) \\ \eta &= -x_2 y_1 + x_1 y_2, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

vermöge welcher die einzuführenden typischen Veränderlichen ξ, η durch die ursprünglichen Variabeln y_1, y_2 ausgedrückt sind, vertritt das Product der Formen unseres simultanen Systems

$$f = f_1 f_2 f_3 \cdots f_\varkappa.$$

Durch Einführung dieser neuen Veränderlichen ξ, η erhält man die typischen Darstellungen für die Formen unseres Systems

$$f_r(y) = \frac{1}{[f(x)]^{n_r}}\left(u_0^{(r)}\xi^{n_r} + \binom{n_r}{1}u_1^{(r)}\xi^{n_r-1}\eta + \binom{n}{2}u_2^{(r)}\xi^{n_r-2}\eta^2 + \ldots u_{n_r}^{(r)}\eta^{n_r}\right)$$
$$(i = 1,2,3\ldots k), \qquad (7)$$

wobei n_r die Ordnung der Form f_r bedeutet. Indem man beiderseits $x = y$ setzt, wodurch $\xi = f(x)$, $\eta = 0$ wird, erkennt man, dass $u_0^{(r)} = f_r(x)$.

Zu jeder Lösung von f_r gehört eine „der Lösung associirte Wurzel". Als solche bezeichnen wir den Werth, den der Quotient $\frac{\xi}{\eta}$ annimmt, wenn in demselben y der betreffenden Lösung von f_r gleichgesetzt wird. Die den Lösungen von f_r associirten Wurzeln sind also, wie aus der obigen typischen Darstellung von $f_r(y)$ ersichtlich ist, die Lösungen der Gleichung

$$f_r(x)z^{n_r} + \binom{n}{1}u_1^{(r)}z^{n_r-1} + \binom{n}{2}u_2^{(r)}z^{n_r-2} + \ldots + u_n^{(r)} = 0. \qquad (8)$$

Es sei wieder

$$f(x) = (x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n)})$$

und das Product der n_1 ersten unter den Linearfactoren von $f(x)$ sei gleich $f_1(x)$, das Product der n_2 folgenden gleich $f_2(x)$ u. s. f. Dann sind die den Lösungen der Formen $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_\varkappa$ associirten Wurzeln $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ wieder gegeben durch die Gleichungen (4) des §. 1, und zwar sind die n_1 ersten unter ihnen den Lösungen von f_1, die n_2 folgenden den Lösungen von f_2 u. s. f. associirt.

Die Gestalt der Gleichungen (4) lässt erkennen, dass das System der zu den Lösungen von f_r associirten Wurzeln das Lösungssystem einer Gleichung $n_r$ten Grades darstellt, in welcher der Coëfficient der höchsten Potenz der Unbekannten die Einheit und die übrigen Coëfficienten Covarianten des Formensystems $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ sind. Denn die elementar-symmetrischen Functionen der zu den Lösungen von f_r associirten Wurzeln ergeben sich als Aggregate von Producten von Factoren der Typen $(\alpha^{(s)}\alpha^{(t)})$ und $(x\alpha^{(s)})$, enthalten jede Lösung einer der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ in demselben Grade wie jede andere Lösung der betreffenden Form und bleiben unverändert, wenn man die Lösungen irgend einer der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ unter einander vertauscht.

Wir schliessen, dass in der Gleichung (8), deren Lösungen die zu f_r associirten Wurzeln sind, alle Coëfficienten durch den Coëfficienten f_r von z^{n_r} theilbar sind, so dass, wenn $\frac{u_s^{(r)}}{f_r}$ mit $v_s^{(r)}$ bezeichnet wird, die obige typische Darstellung der Formen unseres simultanen Systems übergeht in:

$$\frac{[f(x)]^{n_r}}{f_r(x)} f_r(y) = v_0^{(r)}\xi^n + \binom{n_r}{1} v_1^{(r)}\xi^{n-1}\eta + \binom{n_r}{2} v_2^{(r)}\xi^{n-2}\eta^2 + \ldots v_n\eta^n,$$

$$(r = 1, 2, \ldots, \varkappa) \qquad (9)$$

wo $v_0^{(r)} = 1$ ist.

Zufolge der Theorie der associirten Formen hat man, um eine beliebige Covariante (oder Invariante) des Formensystems $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ auszudrücken, in dem leitenden Coëfficienten der Covariante an Stelle eines jeden Coëfficienten von

f_r $(r = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ den entsprechenden Coëfficienten u der typischen Darstellung (7) zu substituiren und das Resultat durch eine Potenz von f zu dividiren, deren Exponent gleich ist dem Index der Covariante. Ersetzt man also in dem leitenden Coëfficienten einer Covariante Π vom Index i, welche die Coëfficienten der Form $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$, beziehungsweise zum Grade $g_1, g_2, \ldots, g_\varkappa$ enthält, jeden Coëfficienten einer dieser Formen durch den entsprechenden Coëfficienten v der typischen Darstellung (9), so hat man noch durch $f_1^{i-g_1}.f_2^{i-g_2}.f_3^{i-g_3}\ldots f_\varkappa^{i-g_\varkappa}$ zu dividiren, um den Ausdruck für die Covariante zu erhalten. Mit Rücksicht darauf, dass die associirten Formen $v_1^{(r)}, v_2^{(r)}, \ldots, v_{n_r}^{(n)}$ sich von den elementarsymmetrischen Functionen der zu f_r associirten Wurzeln nur durch Zahlenfactoren unterscheiden, schliessen wir, dass

$$f_1^{i-g_1}.f_2^{i-g_2}.f_3^{i-g_3}\ldots f_\varkappa^{i-g_\varkappa}\Pi = \\ = S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \ldots z_{n_1+n_2}; \ldots), \quad (10)$$

wo S_i eine ganze homogene Function i^{ten} Grades ihrer Argumente bedeutet, welche ungeändert bleibt, wenn man die n_1 ersten ihrer Argumente unter einander, oder die n_2 folgenden unter einander u. s. f. vertauscht und erkennen auch, dass jede derartige Function S_i eine Covariante unseres Formensystems vom Index i darstellt.

9. In Art. 4 haben wir gesehen, dass wenn $f(x) = (x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(n)})$ einen k-fachen Linearfactor besitzt, jede der associirten Wurzeln $z_1, z_2, \ldots, z_n$ durch die $(k-1)^{\text{te}}$ Potenz dieses Factors theilbar ist. Wenn wir annehmen, dass k_1 Lösungen von f_1, k_2 Lösungen von $f_2, \ldots, k_\varkappa$ Lösungen von $f_\varkappa$ sämmtlich unter einander zusammenfallen, so werden die associirten Wurzeln sämmtlich durch die $(k_1+k_2+\ldots k_\varkappa-1)^{\text{te}}$ Potenz des zu dieser Lösung gehörigen Linearfactors theilbar sein. Aus der Gleichung

$$f_1^{i-g_1}.f_2^{i-g_2}\ldots f_\varkappa^{i-g_\varkappa}\Pi = \\ = S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \ldots z_{n_1+n_2}; \ldots), \quad (10)$$

welche für jede Covariante Π vom Index i und den Gradzahlen $g_1, g_2, \ldots, g_\varkappa$ in den Coëfficienten der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ besteht, und in der S_i eine homogene Function i^{ten} Grades ihrer Argu-

mente bedeutet, folgt jetzt, da die rechte Seite derselben durch die $i(k_1+k_2+\ldots+k_x-1)^{\text{te}}$ Potenz des zur betrachteten Lösung gehörigen Linearfactors theilbar ist, das Product $f_1^{i-g_1}.f_2^{i-g_2}\ldots f_x^{i-g_x}$ aber nur die $[(i-g_1)k_1+(i-g_2)k_2+\ldots+(i-g_x)k_x]^{\text{te}}$ Potenz dieses Factors enthält, dass dieser Factor der Covariante II angehören muss in der Vielfachheit

$$i(k_1+k_2+\ldots+k_x-1)-[(i-g_1)k_1+(i-g_2)k_2+\ldots(i-g_x)k_x]=$$
$$=g_1k_1+g_2k_2+\ldots+g_xk_x-i.$$

Wir haben den Satz:

Ist eine und dieselbe Lösung für die Grundformen $f_1, f_2, \ldots, f_x$, beziehungsweise von der Vielfachheit $k_1, k_2, \ldots, k_x$, so enthält jede simultane Covariante dieser Grundformen vom Index i und den Gradzahlen $g_1, g_2, \ldots, g_x$ in den Coëfficienten dieser Formen jene Lösung mindestens in der Vielfachheit

$$g_1k_1+g_2k_2+\ldots+g_xk_x-i.$$

Aus diesem allgemeinen Theorem fliessen direct die folgenden Sätze:

Die Resultante der Covariante II und der Grundform f_r ist theilbar durch die Discriminante von f_r, sobald $2g_r>i$, und theilbar durch die Resultante der Grundformen f_r und f_s, sobald $g_r+g_s>i$.

Die Discriminante der Covariante II enthält die Resultante der Grundformen f_r und f_s als Factor, sobald $g_r+g_s>i+1$, und die Discriminante von f_r, sobald $2g_r>i+1$.

Denn nach unserem Theorem ist im ersten Falle jede Doppellösung von f_r und jede gemeinsame Lösung von f_r und f_s für II eine mindestens einfache, im zweiten Falle eine mindestens doppelte Lösung.

Unser Theorem wird uns erlauben, für gewisse Covarianten zu schliessen, dass sie verschwinden, wenn von den Lösungen der Grundformen an einer oder mehreren Stellen eine gewisse Anzahl vereinigt liegt. Denn nach unserem Satze werden wir unter Umständen schliessen können, dass diese Stellen Lösungen der Covariante von angebbarer Vielfachheit sind, und wenn die

Summe der Zahlen, welche die Vielfachheit dieser Stellen angeben, grösser ist als die Ordnung der Covariante, so muss diese identisch verschwinden.

10. Wenn wir voraussetzen, dass der Index der Covariante $\Pi(x)$ gleich ist ihrem Grad g_1 in den Coëfficienten von f_1, so können wir den vollständigen Ausdruck der Resultante von $f_1(x)$ und $\Pi(x)$ angeben.

In diesem Falle lautet die Gleichung (10):

$$f_2^{i-g_2}(x).f_3^{i-g_3}(x)\dots f_\varkappa^{i-g_\varkappa}(x)\,\Pi(x) = \\ = S_i(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \dots, z_{n_1+n_2}; \dots).$$

Setzt man x gleich der Lösung $\alpha^{(1)}$ von f_1, so wird nach Art. 6

$$z_1 = -(n-1)z_2 = -(n-1)z_3 = \dots = -(n-1)z_n = \\ = \frac{n-1}{n}(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(4)})\dots(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)}). \quad (6)$$

Durch Substitution von $\alpha^{(1)}$ für x in die obere Gleichung kommt also mit Rücksicht darauf, dass S_i eine homogene Function i^{ten} Grades ihrer Argumente ist,

$$f_2^{i-g_2}(\alpha^{(1)}).f_3^{i-g_3}(\alpha^{(1)})\dots f_\varkappa^{i-g_\varkappa}(\alpha^{(1)})\Pi(\alpha^{(1)}) = \\ = c[(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(4)})\dots(\alpha^{(1)}\alpha^{n})]^i,$$

wo c einen Zahlenfactor bedeutet. Ähnliche Gleichungen erhält man, wenn man für x statt $\alpha^{(1)}$ eine der übrigen Lösungen $\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \dots, \alpha^{(n_1)}$ von f_1 substituirt. Multiplicirt man alle so erhaltenen Gleichungen mit einander, so kommt:

$$R_{f_1,f_2}^{i-g_2}.R_{f_1,f_3}^{i-g_3}\dots R_{f_1,f_\varkappa}^{i-g_\varkappa}.R_{f_1,\Pi} = c^{n_1}[\Delta_{f_1}.R_{f_1,f_2}.R_{f_1,f_3}\dots R_{f_1,f_\varkappa}]^i,$$

wo allgemein $R_{\varphi,\psi}$ die Resultante der Formen φ und ψ und Δ_{f_1} die Discriminante von f_1 bedeutet.

Wir haben den Satz:

Ist Π eine Covariante des Formensystems $f_1, f_2, f_3, \dots, f_\varkappa$, welche die Coëfficienten dieser Formen beziehungsweise zum Grade $g_1, g_2, g_3, \dots, g_\varkappa$ enthält, und ist der Index dieser Covariante gleich g_1, so haben wir für

die Resultante der Covariante und der Form f_1, von einem numerischen Factor abgesehen, den Ausdruck

$$\Delta_{f_1}^{g_1} \cdot R_{f_1,f_2}^{g_2} \cdot R_{f_1,f_3}^{g_3} \cdot R_{f_1,f_4}^{g_4} \ldots R_{f_1,f_\varkappa}^{g_\varkappa}.$$

Die Sätze, welche Gordan in seiner Abhandlung „Resultanten von Covarianten" (Math. Ann., Bd. IV, S. 169) für Formen beliebiger Ordnung gegeben hat, sind vereinzelte Specialfälle des eben aufgestellten Theorems.

§. 4. Die associirten Wurzeln als homogene Coordinaten in einem Raume von $n-2$ Dimensionen.

11. Die wichtigste Anwendung welche wir von den associirten Wurzeln machen, besteht in ihrer Verwerthung für eine geometrische Repräsentation der Covarianten und Invarianten des binären Gebiets, welche wohl als äusserst sachgemäss bezeichnet zu werden verdient.

Die durch die Gleichungen (4) definirten associirten Wurzeln $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ stellen sich als Functionen der Reihe der binären Werthe $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ und x dar, welche sich, von der als Factor hinzutretenden Transformationsdeterminante abgesehen, reproduciren, wenn für die Reihe dieser Werthe die Reihe der aus ihnen durch eine lineare Transformation entstehenden Werthe substituirt wird. Es bleiben also bei einer solchen Substitution die Quotienten der Grössen $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ vollständig ungeändert.

Unter diesen Verhältnissen liegt es nahe, die associirten Wurzeln, zwischen denen die Relation besteht

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n = 0, \tag{11}$$

die aber sonst völlig von einander unabhängig sind, als homogene Coordinaten der Punkte eines (linearen) Raumes von $n-2$ Dimensionen zu interpretiren. Man gelangt dadurch zu einer geometrischen Deutung für die Invarianten und Covarianten des zugrunde liegenden Formensystems $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_\varkappa$.

Wir hatten nämlich, wenn Π irgend eine Covariante dieses Formensystems bedeutet, die identische Gleichung:

$$f_1^{i-g_1} \cdot f_2^{i-g_2} \ldots f_\varkappa^{i-g_\varkappa} \Pi =$$
$$= S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \ldots, z_{n_1+n_2}; z_{n-n_\varkappa+1}, \ldots, z_n),$$

in der S_i eine ganze homogene Function i^{ten} Grades ihrer Argumente bedeutet, welche bei Vertauschung von Argumenten derselben Gruppe ungeändert bleibt. Als „Bild" der Covariante (Invariante) Π soll nun die Fläche i^{ter} Ordnung (von $n-3$ Dimensionen) angesehen werden, welche durch die Gleichung

$$S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \ldots, z_{n_1+n_2}; \ldots; z_{n-n_\varkappa+1}, \ldots, z_n) = 0$$

gegeben ist.

Die Untersuchung des Zusammenhanges, der zwischen einer Covariante (Invariante) und ihrem Bilde besteht und sich als ein äusserst inniger herausstellen wird, soll dem folgenden Paragraphen vorbehalten bleiben; hier soll nur die Natur des verwendeten Coordinatensystems und der Flächen, welche Bilder von Covarianten oder Invarianten unseres Formensystems sind, eine Untersuchung erfahren.

12. Die verwendete Coordinatenbestimmung ist von den gewöhnlichen homogenen Coordinaten nicht wesentlich verschieden. Wir haben eben nur für den $(n-2)$-dimensionalen Raum statt $(n-1)$ unabhängiger homogener Coordinaten, deren n eingeführt, welche durch die lineare homogene Relation (11) mit einander zusammenhängen, vermöge welcher irgend eine der Coordinaten jederzeit durch die anderen ausgedrückt und damit weggeschafft werden könnte.

Die n durch unser Coordinatensystem ausgezeichneten Ebenen (von $(n-3)$ Dimensionen), welche durch die Gleichungen gegeben sind

$$z_1 = 0, \; z_2 = 0, \; z_3 = 0, \; \ldots, \; z_n = 0,$$

bezeichnen wir der Reihe nach als erste, zweite, dritte, ..., n^{te} Fundamentalebene und sagen, die Ebene $z_r = 0$ sei „zugehörig" sowohl zur Coordinate z_r, als zur Lösung $\alpha^{(r)}$ der z associirt ist.

In äusserst einfacher Weise stellen sich in den Coordinaten $z_1, z_2, \ldots, z_n$, wie zuerst Herr F. Klein[1] bemerkt hat, die Collineationen dar, welche das n-Flach der Fundamentalebenen in sich transformiren. Die Collineation unseres $(n-2)$-dimensionalen Raumes, welche dadurch bestimmt ist, dass man allgemein der Ebene $z_r = 0$ die Ebene $z_s = 0$ als entsprechend zuweist, erscheint offenbar gegeben durch das System der Gleichungen $z_s' = z_r$. Wir finden also die Coordinaten des dem Punkte mit den Coordinaten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ entsprechenden Punktes, wenn wir auf diese Coordinaten dieselbe Permutation ausüben, welche die zugehörigen Fundamentalebenen erleiden. Es wird infolge dessen nur einen Punkt geben — wir nennen ihn den r^{ten} Fundamentalpunkt — welcher bei allen Collineationen des n-Flachs in sich, welche die r^{te} Fundamentalebene sich selbst zuweisen, sich selbst entspricht. Alle Coordinaten dieses Punktes ausser der z_r-Coordinate, müssen nämlich unter einander gleich sein, da deren Vertauschung keine Veränderung hervorbringen soll. Setzen wir alle diese Coordinaten $= 1$, so haben wir in Rücksicht auf die Relation (11) für die Coordinaten des r^{ten} Fundamentalpunktes die Werthe:

$$z_1 = z_2 = \ldots z_{r-1} = z_{r+1} = \ldots = z_n = 1, \; z_r = -(n-1).$$

Es ist jetzt ersichtlich, dass bei allen Collineationen des n-Flachs der Fundamentalebenen in sich auch das n-Eck der Fundamentalpunkte in sich übergeht, und dass die Fundamentalpunkte genau dieselbe Permutation erfahren wie die zugehörigen Fundamentalebenen. Die Collineationen des n-Ecks in sich sind also identisch mit den Collineationen des n-Flachs in sich, die Ebene $z_r = 0$ ist die einzige, welche bei allen denjenigen unter diesen Collineationen sich selbst entspricht, bei denen der r^{te} Fundamentalpunkt sich selbst zugeordnet ist. Die Beziehung zwischen dem n-Eck und n-Flach erweist sich damit als eine reciprok vertauschungsfähige, und ich habe desshalb schon bei einer früheren Gelegenheit[2] diese beiden Figuren einander associirt genannt.

[1] Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen (Math. Ann., Bd. IV, S. 346).

[2] Über das Vierseit und sein associirtes Viereck, das Fünfflach und sein associirtes Fünfeck. Diese Berichte, Bd. 93.

Jetzt können wir den geometrischen Charakter der Flächen, welche Bilder von Covarianten unseres Formensystems $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_\varkappa$ sind, in dem folgenden Satze festlegen:

Das Bild einer Covariante, beziehungsweise Invariante des Formensystems $f_1, f_2, \ldots f_\varkappa$ vom Index i ist eine Fläche i^{ter} Ordnung, welche bei allen jenen Collineationen unseres $(n-2)$-dimensionalen Raumes, bei welchen die einzelnen Gruppen von Fundamentalpunkten (und -Ebenen), welche den Lösungen der einzelnen Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ zugehörig sind, in sich transformirt werden, ebenfalls in sich übergeht, und jede derartige Fläche i^{ter} Ordnung ist das Bild einer Covariante oder Invariante vom Index i des Formensystems.

Wir haben damit nur die Eigenschaft der Function $S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \ldots, z_{n_1+n_2}; \ldots)$, welche, gleich Null gesetzt, die Gleichung des Bildes liefert, ausgedrückt, ungeändert zu bleiben bei Vertauschungen von Argumenten derselben Gruppe.

13. Es mögen hier noch die Definitionen der Seiten- oder Kantenräume und der Diagonalräume des n-Ecks der Fundamentalpunkte ihre Stelle finden und die Gleichungen dieser Räume aufgestellt werden.

Unter einem Seiten- oder Kantenraume des n-Ecks der Fundamentalpunkte verstehen wir den linearen Raum von r Dimensionen, welcher durch $r+1$ von den Fundamentalpunkten bestimmt ist, wo $r = 1, 2, \ldots, n-3$. Der Kantenraum von $n-r-2$ Dimensionen, der durch die übrigen $n-r-1$ Fundamentalpunkte bestimmt ist, soll sein Gegenraum heissen. Ein Kantenraum und sein Gegenraum haben einen Punkt mit einander gemein, der als Diagonalpunkt dieser beiden Räume bezeichnet werden soll.

Der Kantenraum, welcher durch die $r+1$ ersten Fundamentalpunkte hindurchgeht, ist gegeben durch die Gleichungen

$$z_{r+2} = z_{r+3} = \ldots = z_n,$$

sein Gegenraum durch die Gleichungen

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_{r+1}.$$

Dies ergibt sich sofort mit Rücksicht darauf, dass für den sten Fundamentalpunkt alle Coordinaten mit Ausnahme der sten einander gleich sind.

Den Raum, welcher als Schnitt von zwei oder mehreren Kantenräumen entsteht, nennen wir einen Diagonalraum. Ein solcher Raum umfasst also die Punkte, welche mindestens zwei Gruppen von unter einander gleichen Coordinaten besitzen. Er enthält die Fundamentalpunkte, welche den unter einander verschiedenen Coordinaten seiner Punkte zugehörig sind und die Diagonalpunkte der Kantenräume, welche durch je eine unter den Gruppen gleicher Coordinaten geliefert werden. Eine Abzählung ergibt sofort, dass für einen t-dimensionalen Diagonalraum die Zahl der erwähnten in ihm enthaltenen Ecken und Diagonalpunkte zusammen gleich $t+2$ ist.

§. 5. Die Beziehungen zwischen einer Covariante, beziehungsweise Invariante und ihrem Bilde.[1]

14. Für die Entwicklung der Beziehungen zwischen einer Covariante oder Invariante und ihrem Bilde wird wieder das Gleichungssystem die Grundlage bilden:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{n}\left[(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(3)})+(\alpha^{(1)}\alpha^{(3)})(x\alpha^{(2)})(x\alpha^{(4)})\ldots(x\alpha^{(n)})\right.\\
&\qquad\left.+\ldots+(\alpha^{(1)}\alpha^{(n)})(x\alpha^{(2)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})\right]\\
z_2 &= \frac{1}{n}\left[(\alpha^{(2)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n)})+(\alpha^{(2)}\alpha^{(3)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(4)})\ldots(x\alpha^{(n)})\right.\\
&\qquad\left.+\ldots+(\alpha^{(2)}\alpha^{(n)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(4)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})\right] \qquad (4)\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_n &= \frac{1}{n}\left[(\alpha^{(n)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(2)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})+(\alpha^{(n)}\alpha^{(2)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n-1)})\right.\\
&\qquad\left.+\ldots+(\alpha^{(n)}\alpha^{(n-1)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(3)})\ldots(x\alpha^{(n-2)})\right].
\end{aligned}
$$

[1] Es ist ein merkwürdiges Zusammentreffen, dass die hier behandelte geom. Repräsentation für die Co- und Invarianten (für den Fall einer Grund form) den Gegenstand einer Arbeit des Herrn Waelsch bildet (Über ein geom. Darstellung in der Theorie der binären Formen, in diesem Bande S. 574—585), bei deren Druck die vorliegende Abhandlung bereits der kais. Akademie überreicht war. Herr Waelsch hat insbesondere die Resultate der Art. 14 und 15 dieser Abhandlung entwickelt und den Zusammenhang der geom. Repräsentation mit den Hermite'schen associirten Formen erkannt. October 1891.

Denkt man sich in diesem Gleichungssystem die Lösungen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ fest gewählt, x aber als variabeln Parameter, so haben wir die Parameterdarstellung für eine rationale Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung in dem Raume von $n-2$ Dimensionen vor uns, in dem wir $z_1, z_2, \ldots, z_n$ als homogene Punktecoordinaten interpretiren. Durch einen jeden beliebig gewählten Werth des Parameters x ist ein bestimmter Punkt der Curve C_{n-2} gegeben.

Setzen wir in die Gleichungen (4) speciell $x = \alpha^{(r)}$, so erhalten wir die Coordinaten desjenigen Punktes von C_{n-2}, welcher dem Parameterwerthe $\alpha^{(r)}$ entspricht; es kommt:

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_{r-1} = z_{r+1} = \ldots z_n =$$
$$= \frac{1}{n}(\alpha^{(r)}\alpha^{(1)})(\alpha^{(r)}\alpha^{(2)})\ldots(\alpha^{(r)}\alpha^{(r-1)})(\alpha^{(r)}\alpha^{(r+1)})\ldots(\alpha^{(r}\ \alpha^{(n)})$$

$$z_r = -\frac{n-1}{n}(\alpha^{(r)}\alpha^{(1)})(\alpha^{(r)}\alpha^{(2)})\ldots(\alpha^{(r)}\alpha^{(r-1)})(\alpha^{(r)}\alpha^{(r+1)})\ldots(\alpha^{(r)}\alpha^{(n)}).$$

Dies sind aber (vorausgesetzt, dass $\alpha^{(r)}$ mit keiner der übrigen Lösungen identisch ist) die Coordinaten des r^{ten} Fundamentalpunktes. Die Curve C_{n-2} geht also durch die n Fundamentalpunkte unseres Coordinatensystems und der Parameter x besitzt beziehungsweise in diesen Punkten die Werthe $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$.

Eine durch die Gleichungen (4) gegebene Curve C_{n-2} ist eindeutig bestimmt, wenn n Elemente eines rationalen Trägers gegeben werden, denen die n Fundamentalpunkte, als Punkte der rationalen Curve C_{n-2} angesehen, in bestimmter Reihenfolge projectiv sein sollen.

Wie schon erwähnt, ändern sich nämlich die linken Seiten der Gleichungen (4) nur um denselben Factor, wenn das System der binären Werthe $\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}; \alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}; \ldots; \alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}$ durch ein beliebiges ihm projectives Werthsystem ersetzt wird, d. h. durch ein binäres Werthsystem, welches aus dem genannten durch eine lineare Transformation hervorgeht.

Wir erkennen jetzt, dass durch einen beliebigen Punkt unseres $(n-2)$-dimensionalen Raumes nicht mehr als eine unter den Curven C_{n-2} hindurchgehen kann. In den Coordinaten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ irgend eines Punktes einer solchen Curve haben wir nämlich n Werthe, welche, als Parameter von n Elementen eines rationalen Trägers aufgefasst, n Elemente definiren, die der

Reihe nach projectiv sind den n Fundamentalpunkten auf der Curve. Denn diese Punkte entsprechen auf der Curve den Parameterwerthen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$, welche mit den associirten Wurzeln (nach Art. 3) durch die Gleichungen

$$z_r = \frac{\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \alpha_1^{(r)} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \alpha_2^{(r)} \right)}{-x_2 \alpha_1^{(r)} + x_1 \alpha_2^{(r)}} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

zusammenhängen.

Wir haben den folgenden Satz:

Durch das System der Gleichungen (4) ist diejenige Rationalcurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung dargestellt, welche durch die n Fundamentalpunkte des Coordinatensystems hindurchgeht und in diesen Punkten beziehungsweise die Parameterwerthe $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ besitzt.

Wir sind berechtigt, unser Resultat in dieser Form auszusprechen, weil die Zählung der Constanten einer rationalen Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung in einem Raume von $n-2$ Dimensionen ergibt, dass für eine solche Curve nicht mehr als $n+1$ Punkte beliebig angenommen werden können. Die Eindeutigkeit der Bestimmung durch $n+1$ unabhängige Punkte ist aber oben implicite bewiesen.

15. Jetzt fällt volles Licht auf die Beziehung zwischen einer Covariante oder Invariante Π und ihrem Bilde.

Dieses Bild war gegeben durch die Gleichung

$$S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_2+1}, \ldots, z_{n_1+n_2}; \ldots) = 0, \qquad (12)$$

wenn die Gleichung

$$f_1^{i-g_1} f_2^{i-g_2} \ldots f_x^{i-g_x} \Pi =$$
$$= S_i(z_1, z_2, \ldots, z_{n_1}; z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \ldots, z_{n_1+n_2}; \ldots) \qquad (10)$$

eine Identität wird, sobald in derselben für $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ihre Werthe aus den Gleichungen (4) eingesetzt werden.

---

[1] Eine Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung im $(n-2)$-dimensionalen Raume kann erzeugt werden durch zwei collineare Strahlenbündel (Systeme aller Strahlen, welche im $(n-2)$-dimensionalen Raume durch einen Punkt gehen). Von dieser Erzeugung ausgehend beweist man dann sofort die eindeutige Bestimmung der Curve durch $n+1$ unabhängige Punkte.

Dem letzten Artikel zufolge heisst, für $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Werthe aus (4) in die Gleichung (12) des Bildes S_i substituiren, nichts anderes als die Coordinaten eines beliebigen Punktes der rationalen Raumcurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung C_{n-2} einsetzen, welche durch die n Fundamentalpunkte hindurchgeht und auf welcher dieselben der Reihe nach den Parameterwerthen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ entsprechen. Diejenigen Werthe des Parameters x, welche jetzt der Gleichung (12) genügen, sind also die Parameterwerthe jener Punkte der Curve C_{n-2}, welche auf der Bildfläche S_i liegen. Allein die linke Seite der Identität (10) lässt erkennen, dass die $(n-2)i$ Werthe des Parameters x, welche man so erhält, bestehen: aus den je $(i-g_1)$-fach zählenden Lösungen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n_1)}$ von f_1, den je $(i-g_2)$-fach zählenden Lösungen $\alpha^{(n_1+1)}, \alpha^{(n_1+2)}, \ldots, \alpha^{(n_1+n_2)}$ von $f_2, \ldots$, den je $(i-g_\varkappa)$-fach zählenden Lösungen von $f_\varkappa$ und aus den Lösungen der Covariante Π. Mit Rücksicht darauf, dass für jede Curve C_{n-2} die Parameterwerthe $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ die Fundamentalpunkte liefern, schliessen wir:

Wählt man n beliebige Punkte eines $(n-2)$-dimensionalen Raumes als Fundamentalpunkte und weist sie einzeln den Lösungen der Formen des Formensystems $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ zu, dann erhält man das Bild S_i einer beliebigen Covariante Π vom Index i und den Gradzahlen $g_1, g_2, \ldots, g_\varkappa$ in den Coëfficienten der Formen, wenn man auf jeder durch die Fundamentalpunkte hindurchgehenden Unicursalcurve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung für diese Punkte, welche gruppenweise den Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ entsprechen, die covariante Punktgruppe Π verzeichnet. Die sich ergebende Fläche S_i ist von der $i$ten Ordnung und besitzt in jedem einer Lösung der Form f_r zugehörigen Fundamentalpunkte einen $(i-g_r)$-fachen Punkt.

Ist jedoch Π eine Invariante, so schliessen wir vermöge der obigen, auf die Identität (10) gegründeten Überlegung, dass ihre Bildfläche S_i von einer beliebig durch die Fundamentalpunkte gelegten Unicursalcurve C_{n-2} nur in den Fundamentalpunkten getroffen wird, und zwar fallen in jeden, einer Lösung der Form f_r zugeordneten Fundamentalpunkt $i-g_r$ von den $(n-2)i$ Schnittpunkten hinein. Eine Ausnahme bilden nur jene Curven C_{n-2}, auf

welchen das System der Parameter $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ der Fundamentalpunkte so beschaffen ist, dass $\Pi = 0$ wird; dann ist aus (10) zu ersehen, dass die Gleichung (12) für jeden Werth von x erfüllt ist. Unser Resultat lautet daher:

Legt man durch n beliebige Punkte eines $(n-2)$-dimensionalen ebenen Raumes, welche einzeln den Lösungen der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_s$ zugehörig sind, diejenigen Unicursalcurven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, auf welchen diese Punkte ein System bilden, für welches die Invariante Π des Formensystems verschwindet, so erfüllen dieselben das Bild S_i der Invariante Π. Ist diese vom Index i und dem Grade g_r in den Coëfficienten von f_r, so ist die Bildfläche S_i von der i^{ten} Ordnung und hat in jedem einer Lösung von f_r zugehörigen Fundamentalpunkte einen $(i-g_r)$-fachen Punkt.

Die Vielfachheit der Fundamentalpunkte für das Bild S_i der Covariante (Invariante) Π war aus der Anzahl der Schnittpunkte von S_i mit einer beliebigen, die Fundamentalpunkte enthaltenden Unicursalcurve C_{n-2} geschlossen worden, die in die einzelnen Fundamentalpunkte hineinfallen. Man kann dieselbe Erkenntniss auch auf directerem Wege erlangen.

Hält man in den Gleichungen (4) die binären Werthe $\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ und x fest und sieht $\alpha^{(1)}$ als Parameter an, so wird durch diese Gleichungen der Ort des Punktes mit dem Parameterwerthe x auf allen jenen Curven C_{n-2} gegeben sein, auf welchen der 2te, 3te, ..., n^{te} Fundamentalpunkt beziehungsweise die Parameterwerthe $\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ besitzt. Da der binäre Parameter $\alpha^{(1)}$ in den Gleichungen (4) linear vorkommt, so erweist sich der genannte Ort als Gerade, und zwar als Gerade durch den ersten Fundamentalpunkt, der dem Parameterwerthe $\alpha^{(1)} = x$ correspondirt.

Man wird desshalb die Schnittpunkte von S_i mit einer beliebigen Geraden durch den ersten Fundamentalpunkt bestimmen, wenn man in den Gleichungen (4) $\alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ und x beliebig wählt, die Werthe von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in die Flächengleichung (12) einsetzt und diese nach $\alpha^{(1)}$ löst. Allein die Identität (10) sagt, dass von diesen Lösungen $i-g_1$ lauten $\alpha^{(1)} = x$; die übrigen sind dann Lösungen der Gleichung $\Pi = 0$, welche, da sie die Coëffi-

cienten von f_1 im g_1^{ten} Grade enthält, jede der Lösungen von f_1 im g_1^{ten} Grade enthalten wird, wenn man diese an Stelle der Coëfficienten einführt.

16. Unsere geometrische Repräsentation für die Co- und Invarianten des Formensystems $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ ist so geartet, dass innerhalb derselben geometrische Bilder für alle Specialfälle vorhanden sind, welche entstehen, wenn man dem Systeme der Verschwindungselemente der Formen irgend einen speciellen projectiven Charakter zuschreibt. Ein besonderes Interesse dürfen die Specialfälle beanspruchen, welche dadurch entstehen, dass man Verschwindungselemente der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ gruppenweise zusammenfallen lässt.

Wir machen zunächst die Voraussetzung, dass von den n Werthen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ irgend welche k untereinander zusammenfallen, und es sei die Bezeichnung so gewählt, dass die zusammenfallenden Lösungen sind $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \ldots \alpha^{(k)}$. Wir haben damit unsere frühere Bezeichnungsweise verlassen, nach welcher die n_1 ersten unter den Werthen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ die Lösungen von f_1, die n_2 folgenden die von f_2 u. s. f. bedeuteten Jetzt soll ganz unbestimmt bleiben, in welcher Reihenfolge diese Werthe den Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ zugehören.

Die Gleichungen (4), welche die associirten Wurzeln liefern, gehen, wenn $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \ldots \alpha^{(k)}$, über in:

$$\left.\begin{aligned}
z_1 = z_2 = \ldots = z_k &= \frac{1}{n}(x\alpha^{(1)})^{k-1}\{(\alpha^{(1)}\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(k+3)})\ldots \\
&\ldots(x\alpha^{(n)}) + (\alpha^{(1)}\alpha^{k+2})(x\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(k+3)})\ldots(x\alpha^{(n)}) + \ldots\} \\
z_{k+1} &= \frac{1}{n}(x\alpha^{(1)})^{k-1}\{k(\alpha^{(k+1)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(k+3)})\ldots \\
&\ldots(x\alpha^{(n)}) + (\alpha^{(k+1)}\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+3)})(x\alpha^{(k+4)})\ldots(x\alpha^{(n)}) + \ldots\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z_n &= \frac{1}{n}(x\alpha^{(1)})^{k-1}\{k(\alpha^{(n)}\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(k+2)})\ldots \\
&\ldots(x\alpha^{(n-1)}) + (\alpha^{(n)}\alpha^{(k+1)})(x\alpha^{(1)})(x\alpha^{(k+2)})(x\alpha^{(k+3)})\ldots(x\alpha^{(n-1)}) + \ldots\}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Hält man in diesem Gleichungssystem die Werthe der Lösungen α fest und lässt den Parameter x variiren, so beschreibt

der Punkt mit den Coordinaten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ eine Unicursalcurve C_{n-k-1} von der Ordnung $n-k-1$, deren Parameterdarstellung wir in den Gleichungen (5) vor uns haben, da der gemeinsame Factor bei den homogenen Coordinaten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ weggelassen werden darf. Nur für den Werth des Parameters $x = \alpha^{(1)}$, für den dieser Factor verschwindet und der durch die Gleichungen (5) gegebene Punkt unbestimmt wird, ist diese Weglassung nicht zulässig.

Wir schliessen, dass, wenn man durch eine bestimmte Variation der Lösungen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ zu unserem Specialfalle übergeht, die durch die Gleichungen (4) gegebene Curve C_{n-2} zerfällt in die Curve C_{n-k-1}, welche die gesammte Parametervertheilung trägt, und eine Curve $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung (welche von der Art des Grenzüberganges abhängen kann), deren Punkte sämmtlich dem singulären Werthe $\alpha^{(1)}$ des Parameters entsprechen.

Die Curve C_{n-k-1} liegt, wie aus (5) ersichtlich ist, ganz in dem $(n-k-1)$-dimensionalen Kantenraume K des n-Ecks der Fundamentalpunkte, der durch die Gleichungen $z_1 = z_2 = \ldots = z_k$ gegeben ist, d. h. in dem Kantenraume, welcher durch jene Fundamentalpunkte bestimmt ist, welche den isolirt liegenden Lösungen α zugehörig sind. Diese $n-k-1$ Fundamentalpunkte entsprechen, wie aus den Betrachtungen über die Curve C_{n-2} des allgemeinen Falles folgt, auf der Curve C_{n-k-1} der Reihe nach den Parameterwerthen $\alpha^{(k+1)}, \alpha^{(k+2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$.

Dem singulären Parameterwerthe $x = \alpha^{(1)}$ entspricht auf der Curve C_{n-k-1} der Diagonalpunkt des Kantenraumes K, in dem die Curve liegt. Denn durch Einsetzung von $x = \alpha^{(1)}$ in die vom Factor $(x\alpha^{(1)})^{k-1}$ befreiten linken Seiten der Gleichungen (5) ergeben sich die Coordinatenwerthe:

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_k = \frac{n-k}{n}(\alpha^{(1)}\alpha^{(k+1)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(k+2)}) \ldots (\alpha^{(1)}\alpha^{(n)})$$

$$z_{k+1} = z_{k+2} = \ldots = z_n = -\frac{k}{n}(\alpha^{(1)}\alpha^{(k+1)})(\alpha^{(1)}\alpha^{(k+2)}) \ldots (\alpha^{(1)}\alpha^{(n)}).$$

Wir haben also in dem Kantenraume K für die Curve C_{n-k-1} $n-k+1$ feste Punkte, welche beziehungsweise den Parameterwerthen $\alpha^{(k+1)}, \alpha^{(k+2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ und $\alpha^{(1)}$ entsprechen, und durch jeden

weiteren Punkt dieses Raumes geht eine solche Curve hindurch (vergl. Art. 14).

Die im letzten Artikel erkannte Bedeutung der Schnittpunkte einer Curve C_{n-2} mit dem Bilde S_i einer Covariante Π liefert im vorliegenden Specialfalle den Satz:

In dem Schnitte $S_i(K)$ des Bildes S_i einer Covariante oder Invariante Π mit dem durch $n-k$ unter den Fundamentalpunkten bestimmten Kantenraume K haben wir das Bild der Covariante, beziehungsweise Invariante Π unter der speciellen Voraussetzung, dass die Lösungen der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_x$, welche den k nicht im Kantenraume K gelegenen Fundamentalpunkten zugehörig sind, untereinander zusammenfallen. Man erhält dieses Bild $S_i(K)$, wenn man auf jeder Unicursalcurve $(n-k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung im $(n-k-1)$-dimensionalen Kantenraume K, welche durch die in diesem Raume gelegenen Fundamentalpunkte und durch seinen Diagonalpunkt hindurchgeht, von denen der letzte den zusammenfallenden Lösungen des Formensystems, die ersten den getrennt liegenden zugehörig sind, die Covariante Π dieser Punkte construirt, beziehungsweise jene unter den Curven verzeichnet, auf welchen die Invariante Π für diese Punkte verschwindet.

Wir wollen jetzt annehmen, dass es unter den Lösungen $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ der Form $f_1, f_2, \ldots, f_x$ mehrere Gruppen von einander gleichen Werthen gibt. Es sei:

$$\alpha^{(11)} = \alpha^{(12)} = \ldots = \alpha^{(1a)} = \alpha; \quad \alpha^{(21)} = \alpha^{(22)} = \ldots = \alpha^{(2b)} = \beta;$$

$$\ldots; \quad \alpha^{(t1)} = \alpha^{(t2)} = \ldots = \alpha^{(ts)} = \sigma,$$

wo die doppelten Indices der α mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ in gewisser Reihenfolge übereinstimmen, so dass $a + b + \ldots + s = n$.

Von den Zahlen $a, b, \ldots, s$ sind mindestens 2 von der Einheit verschieden angenommen, denn sonst würden wir auf den schon behandelten Fall zurückfallen.

Die Gleichungen (4) lauten unter den gemachten Voraussetzungen:

$$z_{11} = z_{12} = \ldots = z_{1a} = \frac{1}{n}(x\alpha)^{a-1}(x\beta)^{b-1}\ldots(x\sigma)^{s-1}\,.$$
$$.[b(\alpha\beta)(x\gamma)(x\delta)\ldots(x\sigma) + c(\alpha\gamma)(x\beta)(x\delta)\ldots(x\sigma) + \ldots]$$
$$z_{21} = z_{22} = \ldots = z_{2b} = \frac{1}{n}(x\alpha)^{a-1}(x\beta)^{b-1}\ldots(x\sigma)^{s-1}\,.$$
$$.[a(\beta\alpha)(x\gamma)(x\delta)\ldots(x\sigma) + c(\beta\gamma)(x\alpha)(x\delta)\ldots(x\sigma) + \ldots]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z_{t1} = z_{t2} = \ldots = z_{ts} = \frac{1}{n}(x\alpha)^{a-1}(x\beta)^{b-1}\ldots(x\sigma)^{s-1}\,.$$
$$.[a(\sigma\alpha)(x\beta)(x\gamma)\ldots + b(\sigma\beta)(x\alpha)(x\gamma)\ldots + \ldots]\,.$$

In diesen Gleichungen haben wir die Parameterdarstellung für eine Unicursalcurve C_{t-2} von der Ordnung $n-2-(a-1)-(b-1)\ldots-(s-1) = t-2$, welche in dem Diagonalraume D liegt, der durch die Gleichungen $z_{11} = z_{12} = \ldots = z_{1a}$; $z_{21} = z_{22} = \ldots = z_{2b}$; $\ldots$; $z_{t1} = z_{t2} = \ldots = z_{ts}$ gegeben ist. Setzt man in die Gleichungen der Curve C_{t-2} $x = \alpha$, so kommt

$$z_{11} = z_{12} = \ldots = z_{1a}$$
$$z_{21} = z_{22} = \ldots z_{2b} = z_{31} = z_{32} = \ldots z_{3c} = \ldots = z_{t1} = \ldots = z_{ts},$$

d. h. der Diagonalpunkt des Kantenraumes $z_{11} = z_{12} = \ldots = z_{1a}$ beziehungsweise, wenn $a = 1$, der z_{11} zugehörige Fundamentalpunkt liegt auf der Curve C_{t-2} und entspricht dem Parameterwerthe $x = \alpha$. Hieraus ziehen wir jetzt ganz ähnlich wie oben das Resultat:

In dem Schnitte $S_i(D)$ des Bildes S_i der Covariante (Invariante) Π mit dem Diagonalraume D haben wir das nach denselben Principien wie S_i construirte Bild für die Covariante (Invariante) Π unter der speciellen Voraussetzung, dass von den Lösungen der Formen $f_1, f_2, \ldots, f_k$ immer jene unter einander zusammenfallen, welche einer Gruppe von ausserhalb des Diagonalraumes D gelegenen Fundamentalpunkten zugehörig sind, die so beschaffen ist, dass der Diagonalpunkt des durch sie bestimmten Kantenraumes im Diagonalraume D liegt. Diesem Diagonalpunkte ist dann die den Fundamentalpunkten der Gruppe zugehörige Lösung zugehörig.

Die Bedeutung der Betrachtungen dieses Artikels besteht darin, dass sich zeigt, dass die Schnitte der Fläche S_i mit den

Kanten- und Diagonalräumen des n-Ecks der Fundamentalpunkte, durch niedrigere Theorien geliefert werden. Denn man wird unter Umständen aus den Eigenschaften dieser Schnitte Aufschlüsse über die Fläche S_i erlangen und also vermöge von Sätzen der niedrigeren Theorie Sätze der höheren allgemeinen Theorie aufstellen können.

17. Wir wollen zum Schlusse noch ein Wort über die Anwendungen sagen, welche die Einführung der associirten Wurzeln und deren geometrische Interpretation gestattet.

Dass die bekannten Sätze der Formentheorie jetzt in geometrische Sätze umgesetzt werden können, braucht kaum hervorgehoben zu werden, nur dass sich dabei auch Theoreme ergeben, welche von geometrischem Interesse sind, wäre zu erwähnen.

Die algebraische Bedeutung der in Rede stehenden geometrischen Interpretation liegt in ihrem Zusammenhange mit gewissen Betrachtungen von Clebsch und F. Klein (Math. Ann., Bd. IV, S. 284 f. und S. 346 f.), welcher zu erörtern sein wird. Ausserdem haben wir in den associirten Wurzeln ein geeignetes Hilfsmittel für das Studium der invariantiven Bildungen von n Linearformen, welche bei einer beliebig fixirten Gruppe von Vertauschungen dieser Linearformen unter einander ungeändert bleiben. Es sind dies Bildungen, auf welche man von geometrischer Seite her vielfach geführt wird.

Von Interesse sind die sich ergebenden invarianten-theoretischen Sätze über Resultanten und Discriminanten von Covarianten und über Syzygien, welche die geometrische Interpretation nahe legt.

Alle diese Betrachtungen sollen einer umfassenderen Darstellung des Gegenstandes vorbehalten bleiben. Hier handelte es sich vor Allem darum, an einer Reihe von Beispielen die Erspriesslichkeit der Einführung der associirten Wurzeln in die Invariantentheorie darzuthun.

XVIII. SITZUNG VOM 16. JULI 1891.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Adolf Weiss in Prag übersendet eine Arbeit unter dem Titel: „Über fettspaltende Fermente im Pflanzenreiche“ (II. Mittheilung), von Dr. Wilhelm Sigmund, Assistenten an der deutschen technischen Hochschule in Prag.

Das c. M. Herr Prof. H. Weidel in Wien übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag: „Über eine neue aus dem Pyridin erhaltene Base“, von Franz v. Hemmelmayr.

Herr Prof. Dr. Guido Goldschmiedt übersendet vier Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Hochschule für Bodencultur.

1. „Über Derivate der Metahemipinsäure“, von Otto Rossin.
2. „Über einige Derivate des Paraphenylbenzophenons“, von Gustav Koller.
3. „Über die in den Blumenblättern von *Gentiana verna* enthaltenen Substanzen“, von Guido Goldschmiedt und R. Jahoda.
4. „Zur Kenntniss der Opiansäure“, von Guido Goldschmiedt.

Herr Johann Unterweger in Judenburg übersendet eine Abhandlung: „Über Beziehungen der Kometen und Meteorströme zu den Erscheinungen der Sonne“.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus berichtet über den feineren Bau der Pontellidenaugen.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht sieben in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

1. „Über die Emissionsspectra des Neodym- und Praseodymoxydes und über Neodym haltende Leuchtsteine". Vorläufige Mittheilung, von Ludwig Haitinger.
2. „Über die Einwirkung von salpetriger Säure auf Resorcindiäthyläther und Triäthylresorcin", von Alfred Kraus.
3. „Über das Bergapten", von Cäsar Pomeranz.
4. „Über äthylirtes Salicylaldehyd", von Moriz Löw.
5. „Über die Constitution des sogenannten Allylcyanides", von Friedrich Lippmann.
6. „Über das Crotonaldoxim", von Titus Schindler.
7. „Über Einwirkung von Jodwasserstoff auf einige Amidosäuren", von Adolph Kwisda.

Ferner überreicht Herr Prof. Ad. Lieben drei Abhandlungen aus dem Grazer Universitätslaboratorium:

1. „Über die Einwirkung von Jodwasserstoffsäure auf Chinaalkaloide", von Zd. H. Skraup.
2. „Über die α-Orthozinnsäure", von G. Neumann.
3. „Uber den Benzoësäureester des Glycosamins", von G. Pum.

Der Secretär überreicht einen von den Professoren J. Luksch und J. Wolf an der k. und k. Marineakademie in Fiume verfassten vorläufigen Bericht: „Über die an Bord S. M. Schiff ‚Pola' 1890 durchgeführten physikalischen Untersuchungen".

Ferner überreicht der Secretär eine von dem seither in Wien verstorbenen c. M. Prof. M. Neumayr in Gemeinschaft mit Prof. Dr. V. Uhlig in Prag ausgeführte Arbeit: „Über die von H. Abich im Kaukasus gesammelten Jurafossilien".

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer überreicht folgende Arbeiten aus dem Laboratorium für allgemeine und analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien:

1. „Quantitative Bestimmung des Carbonyl-Sauerstoffes der Aldehyde und Ketone", von Dr. H. Strache.

2. „Zur Kenntniss der Überwallungsharze“, von Max Bamberger.
3. „Über die Löslichkeit von Natriumcarbonat und Natriumbicarbonat in Kochsalzlösungen“, von Carl Reich.

Herr Prof. Dr. E. Zuckerkandl in Wien überreicht eine Abhandlung: „Über das epitheliale Rudiment eines vierten Mahlzahnes beim Menschen“.

Prof. Dr. Ed. Lippmann überreicht eine vorläufige Mittheilung: „Uber Darstellung der Homologen des Chinins“.

Über eine Bestimmungsmethode der Magnetisirungszahl fester Körper mittelst der Waage

von

Dr. Gottlieb Adler,

Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. Juli 1891.)

Die Abhandlung untersucht zunächst, in welcher Anordnung man aus der mechanischen Anziehung einer Substanz im Magnetfelde am einfachsten die Magnetisirungszahl derselben ableiten kann. Die geführte Rechnung lehrt, dass dies dann der Fall ist, wenn man der Substanz die Gestalt eines sehr langen und sehr dünnen Drahtes gibt, von welchem ein im Verhältnisse zu seiner Dicke sehr langes Stück in ein homogenes Magnetfeld derart ragt, dass die Kraftlinien desselben parallel der Längsaxe des Stabes verlaufen, während der andere Endquerschnitt desselben sich an Orten befindet, wo die Magnetkraft bereits verschwindend kleine Werthe hat.

Der Betrag der in dieser Anordnung den vorderen Endquerschnitt pro Flächeneinheit angreifenden Zugkraft ergibt sich unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Magnetisirungszahl der Substanz

$$p_* = J_1 H_1 - \int_0^{J_1} \frac{J\,dJ}{k}. \qquad \text{I)}$$

Hierin bezeichnet H_1 die Intensität des homogenen Magnetfeldes, J_1 das in der Substanz daselbst erzielte magnetische Moment, $k = \frac{J}{H}$ ihre Magnetisirungszahl.

Die Auswerthung des Integrales in Formel I) geschieht unter Zugrundelegung jener empirischen Formel, durch welche Stefan

(diese Berichte, Bd. 69_2, S. 202) die Magnetisirungszahl als Function des magnetischen Moments dargestellt hat.

Messungen der magnetischen Zugkraft sind für starke Felder durch Quincke gemacht worden und liegen für die Feldintensitäten von 400, 1600 und 3730 Einheiten C. G. S. vor. Die in der angegebenen Weise aus Formel I) berechneten Werthe befinden sich in ziemlicher Übereinstimmung mit den experimentell gefundenen und die bestehenden Abweichungen deuten darauf hin, dass innerhalb des untersuchten Intervalles der Magnetkraft eine Steigerung derselben immer noch eine weitere Steigerung des erreichten magnetischen Momentes bewirke.

Quincke hat noch eine zweite Versuchsanordnung messend verfolgt, in welcher die Längsaxe des Stabes die Kraftlinien des homogenen Magnetfeldes senkrecht durchsetzt.

Bezeichnet man die magnetische Zugkraft in dieser Anordnung mit $p_\perp$, so ergibt die Rechnung, dass bei derselben Feldintensität das Verhältniss der Zugkräfte für beide Anordnungen

$$\frac{p_\#}{p_\perp} = 1 + 2\pi k$$

ist für Substanzen constanter Magnetisirungszahl. Es ist also dies Verhältniss kleiner als Eins für diamagnetische, grösser als Eins für paramagnetische Substanzen und umso grösser, je magnetischer die bezügliche Substanz ist, beides übereinstimmend mit Quincke's Beobachtungsresultaten. Gleichfalls im Einklange mit letzteren ergibt die Rechnung obiges Verhältniss für Substanzen variabler Magnetisirungszahl von der Feldstärke abhängig, und zwar grösser für schwächere als für stärkere Felder.

Die von Kirchhoff ohne Berücksichtigung der Veränderlichkeit der Magnetisirungszahl abgeleiteten Ausdrücke für die magnetische Zugkraft unterscheiden sich wesentlich von Formel I), und ihre Beträge sind speciell in starken Feldern nur halb so gross als die aus I) sich ergebenden Werthe.

§. 1.

Magnetische Zugkraft an Drähten.

Die Berechnung der mechanischen Anziehung, die ein magnetischer fester Körper in einem Magnetfelde erfährt, gründet

sich auf den Ausdruck für den Arbeitswerth seiner magnetischen Polarisation. Bekanntlich ist dieser, berechnet als Gesammtbetrag jener mechanischen Arbeit, die von aussen her gegen die wirksamen Kräfte des Magnetfeldes geleistet werden muss, um den Körper, dessen Configuration als starr betrachtet, aus unendlicher Entfernung an die bezügliche Feldstelle zu bringen, gegeben durch

$$W = -\int\int_0^{H_1} J \cos(J,H)\, dH\, dv, \qquad \text{I}a)$$

wo die äussere Integration über alle Volumelemente dv des magnetischen Körpers sich erstreckt, H_1 die ursprüngliche Feldstärke an der von dv schliesslich eingenommenen Raumstelle bezeichnet, während J jenen Werth des magnetischen Moments bedeutet, welches dem Werthe H der Magnetkraft in irgend einem Augenblicke des Annäherungsvorganges zugeordnet war.

Die Ausführung einer einfachen partiellen Integration führt diesen Energieausdruck in einen zweiten über, in welchem das in der Volumseinheit geweckte magnetische Moment J als die unabhängige Variable auftritt [1]

$$W = -\int \left[J_1 H_1 \cos(J_1, H_1) - \int_0^{J_1} H \cos(H,J)\, dJ \right] dv. \qquad \text{I})$$

Diese zweite Form des Energieausdruckes hat vor der ersten den Vorzug, dass in ihr, wie unmittelbar ersichtlich, die Variation von W nach J_1 verschwindet, also bei Vornahme einer Verschiebung jene Änderungen, die sich hiebei für den Arbeitswerth aus der geänderten Werthevertheilung des magnetischen Moments J_1 ergeben, nicht in Anschlag zu bringen sind.

Die mechanische Anziehung, die der Körper im Magnetfelde erfährt, lässt sich mit Leichtigkeit nach dem Principe der virtuellen Verschiebungen ableiten.

Es mag so ein einfacher Fall, wie er in experimentellen Anordnungen verwendet worden, rechnend verfolgt werden: Ein Stab magnetischer Substanz rage mit der einen Endfläche in ein sehr starkes homogenes Magnetfeld, wie es zwischen den

[1] S. diese Berichte, dieser Band (S. 477).

Polen eines kräftigen Elektromagneten hergestellt wurde, während die andere Endfläche sich ausserhalb des Magnetfeldes bereits an einer Stelle befindet, wo die Magnetkraft verschwindend kleine Werthe besitzt.

In zweifacher Weise kann dann das, was bei einer Verschiebung des Stabes nach Richtung seiner Längsaxe vorgeht — und nur eine solche soll dem Stabe gestattet sein — aufgefasst werden.

Man kann darin erstens einen Vorgang erblicken, in welchem die einzelnen Stabelemente von Orten niedriger zu solchen höherer Magnetkraft gelangt sind, und in dieser Weise verfahrend, ist die den Stab als Ganzes angreifende mechanische Kraft anzusehen als die Resultirende von Kräften, die jedes einzelne Volumelement der magnetischen Substanz angreifen.

Es ist aber auch eine zweite Auffassungsweise des Verschiebungsvorganges möglich, welche an das anknüpft, was in den einzelnen Raumpunkten des Magnetfeldes sich abspielt. Von diesem Gesichtspunkte aus besteht die ganze bei der Verschiebung eintretende Änderung darin, dass aus den an die Vorderfläche des Stabes angrenzenden Raumtheilen des Magnetfeldes Luft, die nichts zur magnetischen Energie beigetragen, durch magnetisch polarisirbare Substanz verdrängt worden und hiedurch der Energiebetrag sich ändert, während durch den entgegengesetzten Vorgang an der Rückfläche, da dort die Magnetkraft bereits Null ist, keine weitere Änderung resultirt.

Einer solchen Anschauungsweise wird die am Stabe wirksame mechanische Kraft als eine lediglich seine vordere Endfläche angreifende Zugkraft entgegentreten, und in diesem Sinne wollen wir uns die Aufgabe stellen, den Betrag p derselben bezogen auf die Flächeneinheit zu berechnen.

Wir bezeichnen mit q den Querschnitt des Stabes, mit c die Länge des in das homogene Feld tauchenden Endstückes desselben; wir nehmen dann eine virtuelle Verschiebung vor, durch welche diese Länge um δc zunimmt. Dann besteht die hiedurch verursachte Änderung des Arbeitswerthes W aus zwei Theilen: Erstens wird hiedurch das Volumelement $q\delta c$ des Magnetfeldes, das früher von Luft erfüllt war, die vermöge ihrer Magnetisirungszahl Null nichts zum Energiewerthe beigetragen, durch magnetisch

polarisirte Substanz eingenommen, und da an der rückwärtigen Endfläche als an einer Stelle, wo die Magnetkraft gleich Null ist, durch das correspondirende Abrücken der Substanz W nichts sich ändert, so ist der hiedurch verursachte Theilbetrag der Anderung des Arbeitswerthes

$$\delta_1 W = -\left[J_1 H_1 \cos(J_1 H_1) - \int_0^{J_1} H \cos(H,J)\, dJ\right] q\delta c.$$

Jene Anderung, welche aus der geänderten Anordnung der Werthe von J_1 durch die ganze Ausdehnung des Stabes resultirt, ist, da, wie unmittelbar ersichtlich, $\delta_{J_1} W$ verschwindet, nicht in Rechnung zu ziehen.

Wohl aber ist noch ein zweiter Posten von δW zu berücksichtigen

$$\int_0^{J_1} \delta H \cos(J,H)\, dJ,$$

welcher daher kommt, dass in Folge der geänderten Configuration gleichzeitig auch die Zuordnung der Werthe von H zu den entsprechenden des J sich ändert.

Beachtet man nun, dass die Componenten A, B, C des magnetischen Moments J mit jener der Magnetkraft H, E, F, G durch die Gleichungen verknüpft sind

$$\frac{A}{k} = E+\mathfrak{X},\quad \frac{B}{k} = F+\mathfrak{Y},\quad \frac{C}{k} = G+\mathfrak{Z}, \qquad 1)$$

wo $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Componenten jener Magnetkraft R sind, die von den in der polarisirten Substanz auftretenden freien Magnetismen herrührt, k die Magnetisirungszahl bezeichnet, nach dem Vorgange Stefan's als Function des magnetischen Moments aufgefasst; dann ist unmittelbar ersichtlich, dass in der geänderten Configuration

$$\frac{A}{k} = E+\delta E+\mathfrak{X}+\delta\mathfrak{X}$$

oder

$$\delta E = -\delta\mathfrak{X}$$

ist, wobei unter $\delta\mathfrak{X}$ jene Anderung zu verstehen ist, welche die Magnetkraft $\mathfrak{X}$ lediglich durch die geänderte Configuration, aber

bei beibehaltenen Werthen des magnetischen Moments J erfährt.

Auf solche Weise ergibt sich der zweite Theil der Änderung des Arbeitswerthes

$$\delta_2 W = \iint (\delta\mathfrak{X}\, dA + \delta\mathfrak{Y}\, dB + \delta\mathfrak{Z}\, dC)\, dv = \\ = \iint_0^{J_1} \{\delta R \cos(R, J)\, dJ\}\, dv) \qquad \text{Ic)}$$

Da aber R eben von den in Folge der magnetischen Polarisation auftretenden freien Magnetismen herrührt, also jeweilig J proportional ist, so ist nach bekannten Sätzen

$$\delta_2 W = \frac{1}{2} \int J_1\, \delta R_1 \cos(J_1 R_1)\, dv,$$

wobei bei Auswerthung von δR_1 wesentlich zu beachten ist, dass es die bei festgehaltenen Werthen von J_1 in Folge der Configurationsänderung eintretende Variation von R_1 ist, also

$$\delta R_1 = \frac{\partial R_1}{\partial c}\, \delta c.$$

Es ergibt sich sonach im Ganzen

$$\delta W = -\Big[J_1 H_1 \cos(J_1 H_1) - \int_0^{J_1} H \cos(H, J)\, dJ\Big] q\, \delta c + \\ + \frac{1}{2}\, \delta c \int J_1 \frac{\partial R_1}{\partial c} \cos(J_1, R_1)\, dv.$$

Nach dem Principe der virtuellen Verschiebungen muss δW als die bei der gedachten Verschiebung gegen die magnetischen Kräfte geleistete Arbeit und die hiebei durch die supponirte Zugkraft p geleistete $pq\delta c$ die Summe Null ergeben, woraus sich

$$p = J_1 H_1 \cos(J_1 H_1) - \int_0^{J_1} H \cos(H, J)\, dJ - \\ - \frac{1}{2q} \int J_1 \frac{\partial R_1}{\partial c} \cos(J_1, R_1)\, dv \qquad \text{2a)}$$

ergibt.

Aus dieser Formel ist unmittelbar ersichtlich, welches die dem Stabe am vortheilhaftesten zu gebende Form ist; es wird jene sein, bei welcher $\frac{\partial R}{\partial c}$ und damit der letzte Posten, p_2, in $2a$) zu einer vernachlässigbaren Grösse wird. Die nachstehend geführte Rechnung zeigt, dass dies dann der Fall ist, wenn man der Substanz die Gestalt eines sehr dünnen Drahtes von kreisförmigem Querschnitte gibt, von welchem ein im Verhältnisse zum Querschnittsradius a sehr grosses Stück c in das homogene Magnetfeld, dessen Kraftlinien der Längsaxe des Drahtes parallel verlaufen, hineinragt. Wir wollen annehmen, dass die dann in dem Endstücke c des Drahtes vorhandene magnetische Vertheilung dieselbe ist, wie in einem sehr verlängerten Rotationsellipsoïde von den Halbaxen $\frac{c}{2}$ und a.

Es sind dann die Grössen H_1, J_1 und R_1 mit einander verknüpft durch die Gleichungen:[1]

$$J_1 = \frac{kH_1}{1+4\pi k\left(\frac{2a}{c}\right)^2 \log\frac{c}{a}}; \quad R_1 = -4\pi J_1 \left(\frac{2a}{c}\right)^2 \log\frac{c}{a} \cdot \quad 1a)$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\partial R_1}{\partial c} = 4\pi J_1 \cdot \frac{a^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^3}\left(\log\frac{c}{a} - 1\right) \cdot$$

Beachtet man nun, dass für das ausserhalb des homogenen Magnetfeldes liegende Drahtstück bei der gedachten Verschiebung nichts sich ändert, vorausgesetzt, dass der Draht genügend lang gewählt ist, so ist der aus dem letzten Posten von Formel $2a$) für die am Endquerschnitte pro Flächeneinheit angreifende Zugkraft resultirende Theilbetrag

$$p_2 = -J_1^2 4\pi \cdot \left(\frac{2a}{c}\right)^2 \left(\log\frac{c}{a} - 1\right),$$

[1] S. Maxwell, Lehrbuch der Elektricität, 438c.

kann also durch eine Anordnung, in der $\frac{a}{c}$ sehr klein gemacht ist, zu verschwindender[1] Kleinheit gebracht werden.

Ersetzt man im ersten Posten der Formel 2*a*) für die magnetische Zugkraft *p*, *H*, respective seine Componenten *E*, *F*, *G*, wie für die Ausführung der bezüglichen Integration geboten, durch ihre aus den Gleichungen 1) folgenden Werthe, so ergibt sich

$$p = \left\{ J_1 H_1 \cos(J_1 H_1) + \frac{1}{2} J_1 R_1 \cos(J_1, R_1) - \int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k} \right\} \qquad 3)$$

oder unter Berücksichtigung von Formel 1*a*) für R_1 für einen sehr dünnen, kreisrunden, parallel seiner Längsaxe magnetisirten Draht die seine Endfläche pro Flächeneinheit angreifende Zugkraft

$$p = J_1 H_1 - \int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k}, \qquad 3a)$$

wobei der Posten

$$-6\pi \left(\frac{2a}{c}\right)^2 J_1^2 \log \frac{c}{a}$$

als sehr klein vernachlässigt worden ist.

Schreibt man Formel 3) unter Berücksichtigung der Gleichungen 1) in der Form

$$p = \frac{J_1 H_1 \cos(J_1, H_1)}{2} + \left(\frac{J_1^2}{2k_1} - \int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k} \right)$$

$$= \frac{k_1}{2} H^2 + \left(\frac{J_1^2}{2k_1} - \int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k} \right) \qquad 3b)$$

so ist, da bei Substanzen unveränderlicher Magnetisirungszahl $k = k_1$ ist und mithin die Klammer verschwindet, aus ihr mit grösster Leichtigkeit der Einfluss der Veränderlichkeit der Magnetisirungszahl auf den Betrag der magnetischen Zugkraft erkennbar.

---

[1] Ist hingegen die Dicke des verwendeten Stabes ziemlich gross im Vergleiche zur Länge des ins Feld ragenden Endstückes *c*, dann ergibt sich, wie unmittelbar ersichtlich, der Betrag der Zugkraft wesentlich abhängig von der Länge des in Feld tauchenden Stückes, wie auch, gemäss privater Mittheilung Quincke's, experimentell von ihm constatirt wurde.

Quincke hat die Ergebnisse seiner Untersuchungen über magnetische Zugkräfte in der Weise zusammengestellt, dass er das Verhältniss derselben zum Quadrate der zugehörigen Feldintensität

$$\frac{p}{H_1^2} = \mathfrak{k}$$

als die Dimagnetisirungsconstante $\mathfrak{k}$ bezeichnete und den Wertheverlauf letzterer bestimmte. Für die gewählte Versuchsanordnung ist also nach 3*b*) bei Substanzen constanter Magnetisirungszahl

$$\mathfrak{k} = \frac{k}{2}.$$

Eine solche ist unter den festen Körpern Manganstahl, und es ist hieraus ersichtlich, dass man aus der Grösse der Anziehung, die ein Manganstahldraht in ein homogenes Magnetfeld erfährt, in einfachster Weise die Intensität des Feldes bestimmen kann.

Für Substanzen veränderlicher Magnetisirungszahl ist hingegen der Wertheverlauf der Dimagnetisirungsconstante $\mathfrak{k}$, wie aus Formel 3*b*) ersichtlich, ein ganz anderer. In jenem Intervall der Feldintensität, in welchem k aufsteigenden Wertheverlauf besitzt, ist der Klammerausdruck in 3*b*) wesentlich negativ, in jenem Werthebereiche hingegen, wo k nach Erlangung eines Maximalwerthes absteigenden Wertheverlauf hat, gelangt die Klammer zu positiven Werthen. Es ist unmittelbar klar, dass in Folge hievon die Zunahme der Dimagnetisirungsconstante $\mathfrak{k}$ und ebenso dessen Abnahme nach Erreichung eines Maximalwerthes langsamer erfolgen wird, als dies rücksichtlich der Magnetisirungzahl k selbst der Fall ist.

Schliesst man also aus der mechanischen Kraft, mit der eine Substanz in ein Magnetfeld gezogen wird, unvermittelt auf die Magnetisirbarkeit derselben, so ergibt sich diese als minder veränderlich, als thatsächlich der Fall ist.

§. 2.

Magnetische Zugkräfte in starken Feldern.

Von besonderem Interesse ist es, die Formel für die an einem parallel seiner Längsaxe magnetisirten Draht auftretende Zugkraft

$$p = J_1 H_1 - \int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k} \qquad 3a)$$

für sehr starke Felder anzuwenden, um zu sehen, inwiefern aus den Beträgen derselben auf das Verhalten einer Substanz in der Nähe ihres magnetischen Sättigungspunktes geschlossen werden kann.

Formel $3a$) erfordert aber wesentlich die Kenntniss des Integrales $\int_0^{J_1} \frac{JdJ}{k}$, dessen Auswerthung auf mechanischem Wege übergrosse Schwierigkeiten verursachen würde.

Es gelingt diese hingegen ungemein leicht unter Zugrundelegung der empirischen, von Stefan[1] aufgestellten Formel, welche die Magnetisirungszahl k als Function des magnetischen Moments darstellt durch

$$\frac{1}{k} = \frac{a J_m}{J^{1-n}(J_m - J)^n} - a. \qquad 4)$$

Hierin bezeichnet J_m das für die bezügliche Substanz erreichbare Maximalmoment — für Eisen nimmt Stefan[2] dieses als 1400 Einheiten C. G. S. an — n ist ein echter Bruch

$$n = \frac{J_k}{J_m},$$

wo J_k jenen Werth des magnetischen Momentes bezeichnet, für den k ein Maximum ist, a endlich ist ein Zahlenwerth, der aus einem der experimentell festgestellten, J und k einander zuord-

---

[1] S. Stefan, diese Ber., 69_2, 1874, S. 202.

[2] Neuere Untersuchungen von Ewing (Phil. transact. 180, 1889, S. 232) haben für Eisen als in sehr starken Feldern erreichbares Maximalmoment 1700 Einheiten C. G. S. ergeben. Aus der graphischen Darstellung von $\frac{J}{k}$ (diese Ber., dieser Bd., S. 481) ist aber ersichtlich, dass die Hauptschwierigkeit in den Auswerthungen $\int_0^{J_1} \frac{J}{k} dJ$ im ersten, sanft ansteigenden Theile der Curve gelegen ist, der durch Stefan's empirischer Formel 4) genau dargestellt ist. Die Auswerthung im sehr steil verlaufenden Endtheile hingegen ist, wie aus Figur 1) (S. 481) ersichtlich, eine viel leichtere, nämlich gegeben als der Inhalt des sehr steil abgeschrägten trapezförmigen Flächenstreifens.

nenden Tabelle entnommenen Werthepaare unter Zugrundelegung von Formel 4) abgeleitet ist.

Die magnetische Molecularkraft ist somit

$$\frac{J}{k} = a J_m \left(\frac{J}{J_m - J}\right)^n - a J \qquad 5)$$

und daher

$$\int_0^{J_1} \frac{J}{k} dJ = a J_m \int_0^{J_1} \left(\frac{J}{J_m - J}\right)^n dJ - a \frac{J_1^2}{2} \qquad 6)$$

oder wenn mit Hilfe der Substitution

$$J = \theta J_m$$

eine neue Variable θ eingeführt wird,

$$\int_0^{J_1} \frac{J}{k} dJ = a J_m^2 \left[\int_0^{\theta_1} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^n d\theta - \frac{a \theta_1^2}{2}\right]^1. \qquad 6a)$$

Für Felder so grosser Intensität, dass in ihnen das Maximalmoment J_m merklich erreicht angenommen werden kann, ist

$$\int_0^{J_m} \frac{J dJ}{k} = a J_m^2 \left[\int_0^1 \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^n d\theta - \frac{1}{2}\right]$$

$$= a J_m^2 \left[B(n+1, 1-n) - \frac{1}{2}\right],$$

wo B das erste Euler'sche Integral ist. Nun ist bekanntlich

---

[1] Die in Figur 1), S. 481, dargestellte Curve für J/k ist Ewing's Untersuchungen an einem Eisendrahte entnommen, und sie fügt sich bis $J = 1000$ Stefan's empirischer Formel in befriedigendster Weise ein, wenn man in dieser $J_m = 1400$, $n = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{250}$ annimmt. Unter dieser Annahme ist aber das Integral 6a) für beliebige Grenzen ausführbar, nämlich

$$\int_0^{J_1} \frac{J dJ}{k} = a J_m^2 \cdot \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\theta}{1-\theta}} - \theta \sqrt{\frac{1-\theta}{\theta}}\right]_{\theta = \theta_1} \qquad 6b)$$

wo $\theta_1 = \frac{J_1}{J_m}$ ist. Es ist also hiemit die Möglichkeit gegeben, sich im Intervalle der kleineren Momentwerthe eine Vorstellung von der Grössenordnung des Subtrahenden in Formel 3a) für p zu verschaffen.

$$B(n+1, 1-n) = \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(1-n)}{\Gamma(2)} = \frac{n\pi}{\sin n\pi},$$

wonach sich also die Zugkraft in sehr starken Feldern

$$p = J_m H_1 - a J_m^2 \left(\frac{n\pi}{\sin n\pi} - \frac{1}{2}\right) \qquad 3c)$$

ergibt.

Der von Rowland für die Magnetisirungszahl des Eisens gefundene Wertheverlauf fügt sich in Stefan's Formel vollständig ein, wenn in dieser

$$J_m = 1400, \qquad n = \frac{2}{3}, \qquad a = \frac{1}{175}$$

angenommen wird, die von Stoletow gefundenen hingegen, wenn man

$$J_m = 1400, \qquad n = \frac{3}{5}, \qquad a = \frac{1}{167}$$

annimmt.

Die erstere Annahme ergibt den Subtrahenden in Formel 3*c*) für p gleich 22.560 Einheiten des C. G. S., die zweite hingegen gleich 17.248 Einheiten C. G. S.

Der Betrag der Anziehung eines parallel den Kraftlinien in ein Magnetfeld ragenden Eisendrahtes ist von Quincke für drei Feldintensitäten gemessen worden, für $H_1 = 400$, $H_1 = 1597$ und $H_1 = 3731$.

Berechnet man die auf 1 cm^2 entfallende Zugkraft mit Zugrundelegung von Formel 3*c*) unter der Annahme, dass für alle diese drei Feldstärken das magnetische Moment ein und dasselbe sei, nämlich gleich dem erreichten Sättigungsmomente von 1400 Einheiten C. G. S., so ergibt die Rechnung das Verhältniss $\frac{p}{H_1^2} = \mathfrak{k}$ für diese drei Feldstärken

	$H_1 = 400,$	$H_1 = 1597,$	$H_1 = 3731$
$\mathfrak{k} = \frac{p}{H_1^2}$	$= 3{\cdot}36,$	$0{\cdot}86,$	$0{\cdot}37,$

während die von Quincke[1] durch Beobachtung festgestellten Werthe für $\mathfrak{k}$ beziehungsweise sind

$$\mathfrak{k} = 3{\cdot}02, \qquad 1{\cdot}15, \qquad 0{\cdot}61.$$

Die Zahl der vorliegenden Beobachtungsergebnisse ist eine zu geringe, und die Werthe der Feldintensität, denen sie zugeordnet sind, liegen zu weit auseinander, als dass der Grund für den Mangel an Übereinstimmung mit voller Sicherheit angebbar wäre. Gleichwohl ist eine zweifache Ursache hiefür erkennbar, erstens eine in den Beobachtungsfehlern liegende, dann eine zweite, essentielle, die in der Art und Weise liegt, wie die Magnetisirung des Eisens der Sättigungsgrenze sich nähert. Die Fehlerquelle ist jene, deren Quincke[2] mit den Worten erwähnt:

„Die erwähnten Methoden haben den Übelstand, dass bei stark magnetischen Substanzen, wie Eisen und Nickel, die Stabenden gegen die Polflächen des Elektromagnets gezogen werden und die Reibung dann die freie Beweglichkeit des Stabes hindert." Es ist unmittelbar ersichtlich, dass die hier erwähnte Reibung der verwendeten Drähte in jener Führung, welche ihnen freie Beweglichkeit lediglich in Richtung ihrer Längsaxe gestattet, mit wachsender Feldstärke zunehmen muss, und dass somit die mittelst der Waage bestimmte Zugkraft p durch die Mitwirkung dieses Umstandes als eine viel grössere sich ergeben muss, als der Wirksamkeit der magnetischen Kraft allein entspricht.

Der essentielle Grund aber könnte darin liegen, dass das Eisen bei einer Feldstärke von 400 Einheiten C. G. S. — der niedrigsten bei diesen Experimenten in Anwendung gebrachten — noch nicht den Maximalbetrag des erreichbaren magnetischen Moments besitzt, sondern dass die Steigerung der Feldintensität auf 1600 und weiterhin auf 3731 Einheiten eine weitere Steigerung des magnetischen Moments bewirke. Ein Blick auf Formel 3a) für die Zugkraft p zeigt, dass ein, wenn auch nur geringes

---

[1] Die von Quincke (Tagbl. der 62. Versamml. deutscher Naturf. und Ärzte, 1889, Heidelberg, S. 210) angegebenen Zahlen sind, wie ich privater Mittheilung entnehme, nicht mit 10^{-5}, sondern mit 10^{-3} zu multipliciren.

[2] l. c.

weiteres Wachsen des magnetischen Moments den ersten Posten um einen grösseren Betrag vermehrt als den zweiten.[1]

In der That hat Ewing,[2] indem er in seiner auf Stefan's[3] Verfahren zur Herstellung intensiver Magnetfelder gegründeten Isthmus-Methode bis zu Feldstärken von $H = 20.000$ Einheiten C. G. S. ging, eine Steigerung des Maximalmoments bis auf 1700 Einheiten C. G. S. erreichen können.

Immerhin ist aus der geführten Rechnung ersichtlich, dass aus der an Eisendraht in sehr starken Feldern angreifenden Zugkraft Aufschluss über die Art und Weise erwartet werden darf, wie die Magnetisirung des Eisens der Sättigungsgrenze sich nähert.

Endlich möchte ich noch hervorheben, dass die ohne Berücksichtigung der Veränderlichkeit von k abgeleiteten Zugkraftsformeln Kirchhoff's[4] in den betrachteten Feldern die Zugkraft fast nur als halb so gross ergeben würden, als die oben nach Formel $3a$) berechneten Werthe.

§. 3.

Verhältniss der Zugkräfte bei Längs- und Transversalmagnetisirung eines Drahtes.

Eine zweite Versuchsanordnung, die gleichfalls die Bedingung erfüllt, dass in ihr für eine Verschiebung der Längsaxe des Drahtes δR und damit p_t in Formel Ic), beziehungsweise $2a$), beliebig klein gemacht werden kann, ist jene, in welcher die Kraftlinien des homogenen Magnetfeldes senkrecht zur Längsaxe des Drahtes verlaufen.

Für diese Anordnung sind die Grössen H, J' und R' miteinander verknüpft durch die Gleichungen:

---

[1] Der Zuwachs, den hiebei der Subtrahend $\int_0^{J_1} \frac{J\,dJ}{k}$ erfährt, ist nämlich, wie aus der graphischen Darstellung (S. 481) für J/k ersichtlich ist, der sehr steil abgeschrägte trapezförmige Flächenstreifen, dessen Höhe der weitere Zuwachs des Moments J und dessen Parallelseiten die zugehörigen, sehr weit von einander differirenden $\frac{J}{k}$ Werthe sind.

[2] S. Ewing, Phil. transact., 1889, t. 180, p. 232.

[3] S. Stefan, diese Ber.

[4] S. Kirchhoff, Wiedemann's Annalen, Bd. 24.

$$J' = \frac{kH}{1-kM}; \qquad R' = J'M', \tag{1b}$$

wo[1]

$$M' = -2\pi\left(1-\left(\frac{2a}{c}\right)^2 \log\frac{c}{a}\right)$$

ist, c und a die oben angegebene Bedeutung haben.

Für eine Verschiebung des Drahtes nach der Längsaxe ist also

$$\delta R = \frac{\partial R}{\partial c}\delta c = -2\pi J \frac{a^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^3} \log c/a \,.\, \delta c$$

und die daraus nach Formel $2a$) sich ergebende Zusatzzugkraft

$$p_2 = 2\pi J^2 \left(\frac{2a}{c}\right)^2 \log\frac{c}{a},$$

kann somit durch entsprechende Verkleinerung des Verhältnisses $\frac{a}{c}$ beliebig klein gemacht werden.

Die den Endquerschnitt des Drahtes nach Richtung seiner Längsaxe angreifende Zugkraft ergibt sich somit für eine Substanz constanter Magnetisirungszahl gemäss Formel $2a$)

$$p_\perp = \frac{J_1' H_1}{2} = \frac{k}{2} \cdot \frac{H_1^2}{1+2\pi k}$$

bis auf vernachlässigbare Posten.

Und somit ergibt sich das Verhältniss der Zugkräfte p_* und $p_\perp$, mit denen ein Draht von sehr kleinem kreisförmigen Querschnitte in ein homogenes Magnetfeld gezogen wird, im Falle, dass die Kraftlinien desselben parallel und im Falle sie senkrecht zur Richtung seiner Längsaxe verlaufen

$$\frac{p_*}{p_\perp} = 1+2\pi k. \tag{7a}$$

Es ist somit dies Verhältniss für paramagnetische Substanzen grösser als Eins, für die diamagnetischen kleiner

[1] S. Maxwell, l. c, §. 43, 8c.

als Eins, wie dies von Quincke (l. c.) an Wismuthstäben festgestellt worden. Dessgleichen ergab sich übereinstimmend mit Formel 7*a*) das Verhältniss beider Anziehungen „umso grösser, je magnetischer die bezügliche Substanz ist".

Nicht unwesentlich erscheint mir, darauf hinzuweisen, dass aus der Verschiedenheit der Anziehung parallel und senkrecht den Kraftlinien nicht ohneweiters auf eine Abhängigkeit der Magnetisirungszahl einer Substanz von der Lage ihrer Hauptdimensionen gegen die Kraftlinien des Feldes geschlossen werden darf, da im Vorstehenden die Ungleichheit beider Anziehungen unter wesentlicher Annahme der Gleichheit des k nach allen Richtungen abgeleitet werden konnte.

Für Substanzen veränderlicher Magnetisirungszahl ist das Verhältniss beider Anziehungen ein viel complicirteres, nämlich nach Formel 3*a*), beziehungsweise 3*b*) und 2*a*)

$$\frac{p_{\#}}{p_{\perp}} = \frac{\frac{k}{2} H_1^2 + \left[\frac{J_1^2}{2k_1} - \int_0^{J_1} \frac{JdJ}{k}\right]}{\frac{k'}{2} \frac{H_1^2}{1+2\pi k_1'} + \left[\frac{J_1'^2}{2k_1'} - \int_0^{J_1'} \frac{JdJ}{k}\right]} \qquad 7b)$$

$$= \frac{J_1 H_1 - \int_0^{J_1} \frac{JdJ}{k}}{\frac{J_1' H_1}{2} + \left[\frac{J_1'^2}{2k_1'} - \int_0^{J_1'} \frac{JdJ}{k}\right]}. \qquad 7c)$$

Aus den Formeln für das magnetische Moment in der Längsanordnung

$$J_1 = k H_1$$

und in der Queranordnung

$$J_1' = \frac{k_1' H_1}{1+2\pi k_1'} = \frac{H_1}{2\pi + \frac{1}{k_1'}}$$

ist ersichtlich, dass von allem Anfang an J_1 den Werthen J_1' weit vorauseilen wird. In mittelstarken Feldern (Feldern von der Intensität etwa dreier Einheiten C. G. S. und darüber) wird der Klammerausdruck im Zähler von 7*b*) bereits positiv sein, während jener des Nenners noch in negativen Werthen verharrt; es ist ersichtlich,

dass daher in Feldern mittlerer Intensität das Verhältniss beider Anziehungen $1+2\pi k$ weit übersteigen kann.

Für grosse Feldintensitäten H_1, für welche das zugehörige J_1 bereits das Maximalmoment J_m erreicht hat, eignet sich zur Discussion besser Formel 7 *c*).

Denkt man sich in ihr, wie ja sehr näherungsweise gestattet, $J_1' = \frac{H_1}{2\pi}$ gesetzt und berücksichtigt weiterhin, dass in allen von Quincke angewendeten Feldstärken, die 3730 Einheiten C. G. S. als obere Grenze hatten, der Klammerausdruck im Nenner immer noch negative Werthe hat — allerdings verhältnissmässig sehr kleine[1] — so ist das Verhältniss

$$\frac{p_\parallel}{p_\perp} > \frac{4\pi J_m}{H},$$

aber nicht viel diesen Betrag selbst übersteigend. Es ist also das Verhältniss beider Anziehungen für Substanzen variabler Magnetisirungszahl conform den Resultaten Quincke's von der Feldintensität abhängig und „im Allgemeinen umso grösser, je schwächer das Magnetfeld ist".

---

[1] Der grösste negative Werth, den diese Klammer annehmen kann, beträgt gemäss Formel 6*b*) der Anm. 3) —274·4 Einheiten C. G. S., und dieser würde erst bei einer Feldstärke von 8800 Einheiten C. G. S. erreicht.

Über die Emissionsspectra des Neodym- und Praseodymoxydes und über neodymhaltende Leuchtsteine

(Vorläufige Mittheilung)

von

Ludwig Haitinger.

Aus dem chemischen Laboratorium des Prof. Ad. Lieben an der k. k. Universität in Wien.

(Mit 1 Textfigur.)

Fast alle festen Körper emittiren bei Glühhitze Licht, dessen Spectrum keine Discontinuität aufweist. Ausnahmen von dieser Regel wurden von Bahr und von Bunsen bei der Erbin- und Didymerde gefunden. Diese Körper geben beim Glühen vorzugsweise Licht jener Wellenlängen, welches beim Durchgang durch Lösungen derselben Erden auch vorzugsweise absorbirt wird.

Das Emissionsspectrum des Didymoxyds enthält nach Bunsen's Zeichnung[1] zwei helle Streifen in der Nähe der Sonnenlinien *D* und *E*. Auer v. Welsbach zerlegte später[2] das alte Didym in Praseodym und Neodym; er fand, dass nur dem letzteren ein discontinuirliches Emissionsspectrum entspreche. Die Zeichnung desselben stimmt im Wesentlichen mit derjenigen Bunsen's überein, zeigt aber noch eine schwächere Bande im Roth.

In Verfolgung anderer Untersuchungen schien es mir interessant, das Verhalten neodymhaltiger Thonerde beim Glühen zu studiren. Der besonderen Freundlichkeit des Herrn Dr. Auer

---

[1] Annalen, 137, 16.

[2] Monatshefte für Chemie, 1885, 477.

v. Welsbach verdanke ich das zu den Versuchen dienende Neodymammonnitrat, sowie auch etwas Praseodymammonnitrat.

Ich bemerke, dass das verwendete Neodymsalz noch merklich Praseodym, auch noch Spuren anderer Erden enthielt und muss daher ausdrücklich hervorheben, dass die beigefügten Zeichnungen nur als vorläufige gelten können.[1]

Zur Untersuchung der Emissionserscheinungen wurden die Oxyde in feinster Vertheilung verwendet, wie man sie analog den zur Incandescenzgasbeleuchtung nach Auer v. Welsbach benützten „Mänteln" durch Imprägniren von Baumwollgeweben mit den entsprechenden Nitratlösungen und Veraschen erhält.

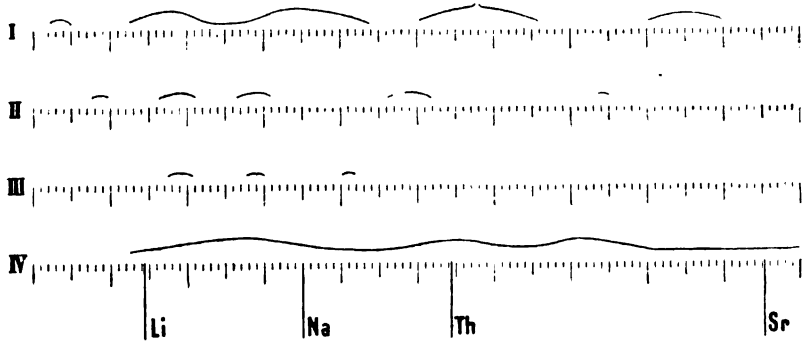


Fig. 1.

Das Spectrum eines derartigen, in einer Bunsenflamme zum Glühen gebrachten neodymhaltigen Aluminiumoxydes zeichnet sich durch besondere Deutlichkeit aus. Fig. I ist nach Beobachtung mittelst eines Spectroskops von Krüss mit einem Prisma entworfen. Lage und Intensität der hellen Linien sind durch die Curven angedeutet. Die beiden Hauptbanden im Gelb und Grün stimmen genau mit Bunsen's Zeichnung; es treten noch zwei schwächere im Roth und Blau und eine ganz schmale im äussersten Roth hinzu.

Es ist bemerkenswerth, dass Thonerde, die nur 1% oder weniger an Neodymoxyd enthält, schon deutlich die hellen Streifen erkennen lässt. Neodymoxyd für sich gibt dieselben nur

[1] Eine sehr entgegenkommende Zusage des genannten Forschers wird mir in Kürze ermöglichen, an ganz reinen Materialien die genauen Werthe ermitteln zu können.

sehr undeutlich, und noch undeutlicher, wenn es vorher lange in der Flamme erhitzt wurde, wodurch es als einer der feuerbeständigsten Körper etwa noch gegenwärtige Verunreinigungen gewiss nur verlieren konnte. Anderseits treten wieder deutlich discontinuirliche Spectra ganz ähnlichen Charakters auf beim Glühen inniger Mischungen von Neodymoxyd mit anderen Oxyden, z. B. Magnesiumoxyd.

In diesem Falle erscheinen die hellen Banden etwas gegen Roth hin verschoben. Ich will nicht unerwähnt lassen, dass auch Auer v. Welsbach die Möglickeit andeutet, das Emissionsspectrum des Neodymoxyds zu „variiren". So gibt das Oxyd auf Zusatz von Erbinerde ein gänzlich verschiedenes Spectrum. Da aber Erbinerde selbst ein Emissionsspectrum, wenn auch ein vom „Verbindungsspectrum" verschiedenes, gibt, so muss hiedurch die Erscheinung ungleich complicirter werden.

Auch Praseodymoxyd, das für sich kein Emissionsspectrum gibt, zeigt ein solches, wenn es in inniger Mischung mit Aluminiumoxyd geglüht wird (Fig. IV). Hier könnte man zur Erklärung des differenten Verhaltens noch eine besondere Ursache heranziehen. Praseodym bildet nämlich zwei Oxyde, von denen das eine Pr_2O_3 grünlich gefärbt den beständigen Salzen entspricht, das andere, höhere Oxyd aber bei höherer Temperatur und Gegenwart von Sauerstoff immer und sofort entsteht.[1] Dieses höhere Oxyd ist fast schwarz, das geglühte Praseodymaluminiumoxyd aber weiss oder grünlich gefärbt und enthält Pr, wahrscheinlich als Pr_2O_3. Man könnte also das Fehlen eines Emissionsspectrums durch die höhere Oxydationsform des Praseodyms erklären, in welche es sofort eingeht, wenn es für sich geglüht wird.

Ohne diese Frage für entschieden zu halten, will ich anführen, dass ich an in reducirender Atmosphäre (Luft in Leuchtgas brennend, nach Art des bekannten Vorlesungsexperimentes) glühenden Praseodymoxyd kein discontinuirliches Spectrum wahrnehmen konnte.

Zur Wahrnehmbarkeit discontinuirlicher Spectra ist also sowohl beim Praseodym-, als beim Neodymoxyd die Gegenwart

[1] Vergl. Auer v. Welsbach, l. c.

fremder Oxyde günstig, vielleicht nothwendig. Nach Bunsen's Ansicht und dem Kirchhoff'schen Theorem sind die Emissionsspectra die Umkehrung der Absorptionsspectra, und es ist interessant, zu sehen, dass die stark geglühten Oxydgemische Absorptionsspectra zeigen, die, wie ihre Emissionsspectra, ähnlich aber nicht völlig gleich sind. Neodymaluminiumoxyd zeigt im reflectirten Tageslicht ein aus mehreren feinen Linien bestehendes dunkles Band, dessen Begrenzung gegen Roth hin mit der *D*-Linie zusammenfällt. Neodymmagnesiumoxyd zeigt ein ganz ähnliches Band auf der entgegengesetzten Seite der *D*-Linie, also gegen Roth hin verschoben.

Leider sind die Absorptionsspectra dieser Körper nur schwer zu beobachten. Vergleicht man das Emissionsspectrum des glühenden Neodymaluminiumoxydes mit dem Absorptionsspectrum einer sehr langen Schichte concentrirter Lösung von Neodymammonnitrat (Fig. II, es sind abweichend von der gewöhnlichen Darstellung die hellen Partien des Spectrums durch die Curven angedeutet), so sieht man leicht, dass es nicht die Umkehrung jenes darstellt.

Beobachtet man beide Spectra zu gleicher Zeit mittelst eines Spectroskops von geringer Dispersion, so drängt sich vielmehr leicht der Gedanke auf, dass dieselben der Art nach gleich und die hellen Streifen beider nur gewissermassen in einem anderen Maassstabe projicirt seien. Dies stünde im directen Widerspruch zu der geltenden Ansicht, und ich bin auch weit entfernt, auf Grund obiger vereinzelter, vielleicht zufälliger Analogie die geäusserte Möglichkeit für irgend begründet hinstellen zu wollen.

Immerhin scheint es mir interessant, bei Untersuchung von Absorptionsspectren nicht nur Werth auf die Maxima der Absorptionen, sondern auch auf die Lage der hellsten Streifen bei Anwendung sehr langer absorbirender Schichten zu legen. Dass denselben vielleicht eine gewisse Bedeutung innewohnt, erhellt aus folgenden Beobachtungen, die ich an neodymhaltenden Leuchtsteinen machen konnte.

Zum Versuche der Gewinnung solcher wurde ich angeregt durch die schönen Untersuchungen von Klatt und Lenard,[1]

[1] Wiedemann's Annalen der Physik, 38, 90.

welche nachwiesen, dass das von Leuchtsteinen emittirte Licht nur abhängig ist von der Natur einer ganz geringen Menge gewisser in ihnen enthaltener Metalle. So haben sie in den Spectren von Cu, Mn, Bi haltenden Leuchtsteinen genau bestimmbare Lichtmaxima gefunden. Es schien mir interessant, diese wichtigen Beobachtungen auf den Einfluss von Neodym auszudehnen und eventuelle Lichtmaxima mit jenen des Emissions- oder Absorptionsspectrums zu vergleichen.

Zur Darstellung des Leuchtsteines bin ich genau dem von Klatt und Lenard vorgezeigten Wege gefolgt, unter Anwendung von $\frac{3}{10.000} - \frac{7}{10.000}$ Neodymoxyd vom Gewichte des angewandten Kalkes. Der erhaltene Leuchtstein zeigt nach Bestrahlung im Sonnenlichte eine mässig intensive, rosa bis gelbe Phosphorescenz, die durch gelindes Erwärmen — wie bei allen Leuchtsteinen — sehr lebhaft wird. Die Nüance des Phosphorescenzlichtes wird dabei fast rein gelb. Im Spectrum desselben kann man unter Benützung eines lichtstarken Spectroskops ausser einer Aufhellung im brechbaren Theile drei gut begrenzte Banden (Fig. III) unterscheiden, von denen die rothe und gelbe in ihrer Lage genau übereinstimmen mit den hellen Banden eines Absorptionsspectrums ganz concentrirter Lösung von Neodymsalz in langer Schichte. Ich will noch hervorheben, dass ich mich durch Controlversuche überzeugte, dass die angewandten Materialien ohne Neodymzusatz keine phosphorescirenden Producte gaben.

Zum Schlusse möchte ich noch einiges über die Intensität des von glühenden Oxyden emittirten Lichtes bemerken. Thonerde z. B. gibt, wenn sie einige Zeit in der Flamme geglüht hat, nur wenig Licht, durch photographische Aufnahme des Spectrums (unter Anwendung des Quarzspectrographen von Prof. Eder[1]) konnte ich jedoch constatiren, dass dasselbe reich an violetten und ultravioletten (bis $\lambda = 3100$) Strahlen ist. Zusatz von Neodymoxyd, welches für sich geglüht auch nur mässig leuchtet, erhöht die Totalintensität des sichtbaren Lichtes ganz merklich.[2]

[1] Vergl. Denkschriften der kais. Akad. der Wissensch., Bd. 57.

[2] Durch photographische Aufnahme konnten auch Lichtmaxima im ultravioletten Theile constatirt werden. Da aber zum Erhitzen eine Leuchtgasflamme verwendet wurde, deren Lichtmaxima (vergl. Eder l. c.) theil-

So wie Neodymoxyd wirken noch viele andere Substanzen, zum Theile in einem geradezu erstaunlichen Maasse. Es sind diese Beobachtungen in eine Reihe zu stellen mit jenen, welche Auer v. Welsbach an anderen Oxydcombinationen schon vor längerer Zeit gemacht hat,[1] und habe ich die Hoffnung, diese Reihe von Erscheinungen in Beziehung zu einer anderen, ziemlich gut studirten, bringen zu können.

Ich erlaube mir, an dieser Stelle Herrn Prof. A. Lieben und Herrn Director J. M. Eder für die ausserordentliche Zuvorkommenheit, mit der sie mir die Benützung der Mittel der von ihnen geleiteten Institute gestatteten, meinen ganz besonderen Dank auszudrücken.

---

weise mit denen des Oxyds zusammenfallen, unterlasse ich die graphische Reproduction. Der Versuch muss mit einer Wasserstoffflamme wiederholt werden.

[1] Deutsches Reichs-Patent Nr. 39162.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. Band. VIII. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

APR 10 1893

XIX. SITZUNG VOM 8. OCTOBER 1891.

Der Vicepräsident der Akademie, Herr Hofrath Dr. J. Stefan, führt den Vorsitz und begrüsst die Mitglieder der Classe bei Wiederaufnahme der akademischen Sitzungen und insbesondere das neu eingetretene Mitglied Herrn Prof. Dr. Sigmund Exner.

Hierauf gedenkt der Vorsitzende der Verluste, welche diese Classe im Laufe der akademischen Ferien, und zwar durch das Ableben des wirklichen Mitgliedes Hofrath und emerit. Prof. Dr. Josef Petzval am 17. September und des correspondirenden Mitgliedes Hofrath Prof. Dr. Karl Wedl in Wien am 21. September d. J. erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide über diese Verluste durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Zugleich macht der Vorsitzende die Mittheilung, dass der verewigte Herr Hofrath Wedl in Würdigung der Bestrebungen dieser Classe, welcher er seit 1849 als ein correspondirendes Mitglied angehörte, derselben sein gesammtes Vermögen im Betrage von beiläufig Einhunderttausend Gulden testamentarisch legirt hat; von dem Erträgnisse desselben werden zunächst drei Leibrenten an Verwandte zu bezahlen sein, welche etwas mehr als die Hälfte des Erträgnisses in Anspruch nehmen, während der Rest der Classe für Unterstützung wissenschaftlicher Arbeiten verfügbar bleibt. Nach Erlöschen der Leibrenten bleibt das gesammte Erträgniss zu gleichem Zwecke zur Verfügung der Classe.

Der Secretär legt die im Laufe der Ferien erschienenen akademischen Publicationen vor, und zwar:

Den 41. Jahrgang des Almanachs der kaiserlichen Akademie für das Jahr 1891; ferner von den

Sitzungsberichten der Classe, Jahrgang 1891, Bd. 100: Abtheilung I, Heft V—VII (Mai—Juli); Abtheilung II. a, Heft III (März), IV (April) und V (Mai); Abtheilung II. b, Heft V—VI (Mai—Juni); Abtheilung III (Heft I—IV) und die

Monatshefte für Chemie, Jahrgang 1891, Bd. 12: Heft VI (Juni), VII (Juli) und VIII (August).

Für die Wahl zu Mitgliedern sprechen ihren Dank aus, und zwar:

Herr Oberbergrath und Chefgeologe an der k. k. geologischen Reichsanstalt in Wien Dr. E. Mojsisovics v. Mojsvár und Prof. Dr. Sigmund Exner in Wien für ihre Wahl zu wirklichen Mitgliedern der kaiserlichen Akademie, ferner Hofrath Prof. Dr. Th. Meynert und Prof. Dr. C. Grobben in Wien für ihre Wahl zu inländischen correspondirenden Mitgliedern dieser Classe.

Herr Prof. Dr. G. Haberlandt in Graz dankt für die ihm zum Zwecke eines mehrmonatlichen Aufenthaltes am botanischen Garten und Institute zu Buitenzorg auf Java von der Akademie bewilligte Subvention.

Das k. k. Ministerium des Innern übermittelt die von der niederösterreichischen Statthalterei vorgelegten Tabellen über die in der Winterperiode 1890/91 am Donaustrome im Gebiete des Kronlandes Niederösterreich und am Wiener Donaucanale stattgehabten Eisverhältnisse.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus übermittelt die Pflichtexemplare seines mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie herausgegebenen Werkes: „Die Halocypriden des atlantischen Oceans und Mittelmeeres“. (Mit 26 Tafeln.)

Herr P. C. Puschl, Stiftscapitular in Seitenstetten, übersendet eine Abhandlung: „Über die inneren Kräfte von Flüssigkeiten und Gasen“.

Herr Dr. H. Pitsch, k. k. Gymnasiallehrer in Böhm.-Leipa, übersendet eine Abhandlung: „Über Achromasie".

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor an der k. k. Lehrerbildungsanstalt in Linz, übersendet folgende vorläufige Mittheilung über „Neue Gallmilben" (Fortsetzung).

Der Secretär legt eine eingesendete Abhandlung von Prof. K. Schober an der k. k. Staats-Oberrealschule in Innsbruck vor, betitelt: „Zur Polarentheorie der Kegelschnitte".

Der Secretär theilt mit, dass das Manuscript des von ihm bearbeiteten IV. Theiles der in der Sitzung vom 8. Jänner für die Denkschriften bestimmten „Beiträge zur geologischen Kenntniss des östlichen Afrika" nun unter dem Titel: „Die Brüche des östlichen Afrika" druckfertig vorliegt.

Ferner macht der Secretär folgende Mittheilung:

Die wissenschaftlichen Untersuchungen im östlichen Mittelmeere, welche in diesem Sommer wie im Vorjahre von S. M. Schiff Pola (Commandant Linienschiffscapitän Mörth) ausgeführt worden sind, haben zur Auffindung einer Strecke geführt, welche tiefer ist als alle bisher gelotheten Theile des Mittelmeeres. Nach einem Berichte, welchen Prof. Luksch an den Leiter der wissenschaftlichen Arbeiten Hofrath Steindachner gerichtet hat, beträgt diese grösste Tiefe 4400 *m* und liegt in 35° 44′ 20″ n. Br. und 21° 44′ 50″ ö. L., südwestlich von der Insel Cerigo. Die grösste früher bekannte Tiefe war von dem italienischen Schiffe Washington (Capitän Magnaghi) beiläufig in derselben Breite, doch viel weiter im Westen mit 4000 *m* gelothet worden.

Herr Prof. Dr. Adamkiewicz hält einen Vortrag über die Resultate seiner Untersuchungen über den Hirndruck und demonstrirt im Anschlusse daran seine Tafeln zur Orientirung an der Gehirnoberfläche des lebenden Menschen.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Carey Lea M., Papers on Allotropic Forms of Silver. (With 7 Plates.) (From the American Journal of Sciences, Vol. XXXVII—XLI.) Philadelphia 1889—1891; 8°.

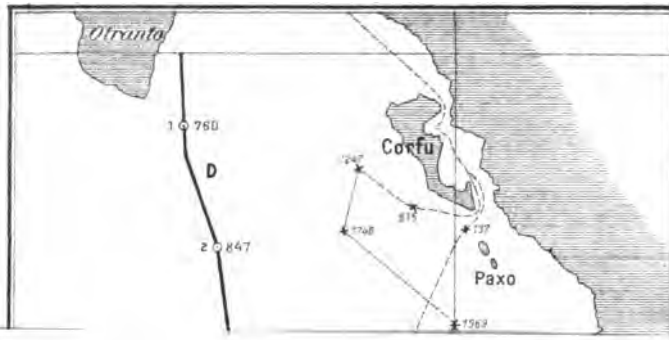
Fresenius, C. R., Chemische Untersuchung der Trink- oder Bergquelle des königl. Bades Bertrich. Im Auftrage der königl. Regierung zu Coblenz ausgeführt unter Mitwirkung von E. Hintz. Wiesbaden 1891; 8°. — Analyse des Julianenbrunnens und des Georgenbrunnens im fürstlichen Bade Eilsen. Nebst einem Anhang: Analyse des Eilser Badeschlammes, von R. Fittig. Wiesbaden, 1891; 8°.

Godwin-Austen, H. K., Land and Freshwater Mollusca of India, including South Arabia, Baluchistan, Afghanistan, Kashmir, Nepal, Burmah, Pegu, Tenasserim, Malay Peninsula, Ceylon and other Islands of the Indian Ocean. Supplementary to Messrs. Theobald and Hanley's: Conchologia Indica. Part I (February 1881) till Part VI (April 1888). London, 1882—1888; 8°. — (With 62 Plates.) London, 1882 — 1888; 4°.

Lieben, Ad., Rede zum Gedächtniss an Ludwig Barth v. Barthenau, k. k. Hofrath und Universitäts-Professor in Wien. Gehalten im Namen der philosophischen Facultät am 25. April 1891 in der k. k. Universität Wien. Wien, 1891, 8°.

Plechawski, E., Die mitteleuropäische Zeit nebst den angrenzenden Stundenzonen. Eine Kartenskizze. Wien, 1891; gr. Folio.

Scherzer, C. v., Der wirthschaftliche Verkehr der Gegenwart. Nach den neuesten und zuverlässigsten Quellen dargestellt, unter Mitwirkung von E. Bratassevic. Zugleich als Ergänzungsheft zu C. v. Scherzer's: Das wirthschaftliche Leben der Völker. Wien, 1891; 8°.


Otranto
1 760
D
2 847
Corfu
Paxo

Veröffentlichungen der Commission für Erforschung des östlichen Mittelmeeres.

Vorläufiger Bericht über Lothungen und physikalische Beobachtungen im Sommer 1891[1]

von

J. Luksch,

Professor an der k. u. k. Marine-Akademie in Fiume.

(Mit einer graphischen Skizze.)

Ich beehre mich, in der Anlage eine graphische Skizze (Beilage I) der während der diesjährigen Untersuchungsfahrt genommenen Reiseroute, ferner das Verzeichniss der geographischen Positionen nach Länge und Breite, in welchen physikalische Untersuchungen gepflogen wurden (Beilage II), endlich ein Verzeichniss der Lothdaten (Beilage III) zu unterbreiten.

Über die von mir vorgenommenen Arbeiten auf dem Gebiete der physikalischen Meereskunde und über die gewonnenen Ergebnisse, soweit solche vor gründlicher Sichtung und Bearbeitung des gewonnenen Materiales einen Ausspruch gestatten, sei es mir erlaubt, im Nachfolgenden zu berichten.

Die aus den Beilagen I und II ersichtliche Reiseroute ermöglichte es mir, die geplanten Arbeiten zum grössten Theile durchzuführen. Von Cap Leuca bis etwa in die geographische Breite von Navarin wurden drei Ergänzungsstationen[2] gewonnen, welche zur Klärung des Seebodenreliefs südlich der Adria nicht unwesentlich beitragen, dagegen mussten auf der Weiterfahrt in Folge starken Seeganges und heftigen Nordwindes zwei in Aussicht

[1] Siehe Anzeiger der mathem.-naturw. Classe, Nr. XIX, 1891.

[2] Im Vorjahre wegen schlechten Wetters entfallen.

genommene Stationen aufgegeben, und konnte sowohl am 26. August Nachmittags, wie den ganzen darauffolgenden Tag nicht gearbeitet werden. Als vollwichtigen Ersatz für das während dieser Zeit Versäumte können die Ergebnisse der Fahrt bis Kutri (Westküste Kretas) hingestellt werden, indem zwei Lothungen, etwa 50 Meilen Südwest und Süd von Cap Matapan Tiefen ergaben (4400 und 4080 *m*), welche sich als die grössten, bis nun im Mittelmeer gefundenen herausstellen und auf Grund welcher man nunmehr in der Lage ist, die grösste Depression nicht mehr in dem centralen Becken, sondern ostwärts hievon anzunehmen.

Durch die Route „Sudabay—Santorin—Grandesbay", dann weiter längs der Südküste Kretas, bis Cap Martello, endlich durch die Strecke „Insel Gavdo—Hafen von Kalo Limniones—Cap Grabusa" wurde die physikalische Erforschung der Gewässer um Kreta ermöglicht, während die beiden Traversaden „Cap Martello—Alexandrien" und „Golf von Solum—Gavdo" (SW. von Kreta) Aufklärung über die Verhältnisse in hoher See gaben. Die auf diesen Strecken vorgenommenen Lothungen — speciell jene südlich von Kreta — können als wesentliche Ergänzungen unserer Kenntnisse betrachtet werden. Die Küstengewässer Nordafrikas wurden in einer Strecke von circa 300 Seemeilen — von Alexandrien bis in den Golf von Solum — befahren. Die auf dieser Strecke gewonnenen Ergebnisse werden im Anschlusse an die vorjährige Fahrt — Benghâzi = Ras Hilil — für die Klarlegung der Erscheinungen an dem gedachten Küstengebiet von einiger Entscheidung sein. Noch sei der Routen Grabusa—Cerigo und Cerigo, durch den Canal von Cervi über Milo nach Piräus gedacht. Hier wurden die Beobachtungsstationen vervielfältigt, um der Frage über den Austausch der Gewässer zwischen dem ägäischen Meere und dem centralen Theile des Mittelmeerbeckens näher zu treten.

Die Betrachtung der auf den gedachten Routen gesammelten Daten über die Seetemperatur und das specifische Gewicht des Meerwassers gestatten schon dermalen einige, durch seinerzeitig anzubringende Instrumentcorrecturen kaum zu tangirende Schlüsse. Zu diesen gehören:

1. Das Vorschreiten der Seetemperatur sowohl an der Meeresoberfläche, wie auch in den Zwischenschichten von Westen nach

Osten, wobei allerdings die der Oberfläche nahe gelegenen Schichten — beeinflusst von den jeweilig herrschenden meteorologischen Verhältnissen — diesem Gesetze scheinbar nicht immer folgen. Gleich an der Oberfläche und in den Mittelschichten ist die gedachte Erscheinung auch am Grunde — wenn auch sehr abgeschwächt — bemerkbar.

Die überhaupt gefundenen höchsten Temperaturen waren im ersten[1] Theile der Reise:

In	1 *m*	Tiefe ...	27·1	in	200 *m*	Tiefe ...	14·9
„	2	„ ...	27·0	„	300	„ ...	14·5
„	10	„ ...	26·3	„	400	„ ...	14·5
„	20	„ ...	26·3	„	600	„ ...	14·3
„	30	„ ...	24·9	„	800	„ ...	14·0
„	50	„ ...	20·6	„	1000	„ ...	14·0
„	70	„ ...	17·4	„	2000	„ ...	13·9
„	100	„ ...	17·0	„	3000	„ ...	13·9

Als überhaupt niederste Temperatur wurde 13·0° C., nahe am Ausgange der Adria, und zwar auf Station 1, Tiefe 760 *m*, gefunden.

Für die tiefste gelothete Stelle ergab das Thermometer auf Station 4 in 4400 *m* 13·5° C.

2. Wirkungen des täglichen Ganges der Temperatur — von der Oberfläche dem Grunde zu — konnten mehrmals bei einander nahegelegenen Beobachtungsstationen, für welche zwei oder mehrere Beobachtungsreihen an ein und demselben Tage vorlagen, studirt werden.

So zeigte sich z. B. auf den Stationen 9 und 10 nahe Cerigos, wo um $7^h\,15^m$ und $10^h\,55^m$ *a. m.* beobachtet wurde, eine Temperaturzunahme von:

1·2° C.	an der	Oberfläche
1·1	in	1 *m*
1·0	„	½
0·9	„	10
0·5	„	20
0·4	„	50 bis 100 *m*

[1] Für die Gesammtreise wird erst nach der Anbringung der Thermometercorrecturen die Anlage einer ähnlichen Übersicht ermöglicht werden.

Zu ähnlichen Vergleichen eignen sich auch die Stationen 4 und 5, 7 und 8, 19 und 20, 24 und 25, 27 und 28, 29 und 30, 33 und 34, 35 und 36, 48 und 49, 54 und 55, 57 und 58 endlich 63 und 64.

3. In Bezug auf die Vertheilung des specifischen Gewichtes, respective des aus dem reducirten specifischen Gewichte abgeleiteten Salzgehaltes kann schon dermalen gesagt werden, dass auch heuer in dem Gebiete des centralen Mittelmeeres (Untersuchungsgebiet für Sommer 1890) eine allmähliche Zunahme des Salzgehaltes von der Oberfläche dem Grunde zu constatirt wurde und sohin die Ergebnisse des Vorjahres ihre Bestätigung fanden. Das im centralen Becken des Mittelmeeres gefundene niederste reducirte specifische Gewicht bezifferte sich auf 1·0290, das höchste auf 1·0300 — den Salzgehalten von 3·79 und 3·90% entsprechend.

Eine wesentlich andere Vertheilung zeigte der östliche Theil des Mittelmeeres. Die Untersuchungen ergaben hier gegen Osten hin keine absolute Zunahme im Salzgehalte am Grunde, dagegen eine solche in allen anderen Schichten bis zur Meeresoberfläche, derart, dass die Gesammtmasse fast gleichmässig durchsalzen scheint. Vergleichsweise seien hier zwei Reihen der Stationen 1 (centrales Mittelmeer) und Station 20 (östliches Mittelmeer) gegeben.

	Station 1	Station 20
Auf 17·5° C. red. sp. Gewicht in 0 *m*	1·0290	1·0297
5	1·0290	1·0297
10	1·0291	1·0297
100	1·0296	1·0297
Grund 874	1·0300	
1000	—	1·0298
1356	—	1·0298

Als höchste Salzgehalte wurden gefunden (im östlichen Mittelmeere):

In 0 *m* Tiefe 3·89% (reducirtes specifisches Gewicht 1·0297)
„ 5 „ 3·90 („ „ „ 1·0298)
„ 10 „ 3·92 („ „ „ 1·0299)
„ 50 „ 3·90 („ „ „ 1·0298)
„ 70 „ 3·90 („ „ „ 1·0298)

in	100 *m* Tiefe	3·90 %	(reducirtes	specifisches	Gewicht	1·0298)
„	200 „	3·90	(„	„	„	1·0298)
„	300 „	3·93	(„	„	„	1·0300)
über	300 „	3·92	(„	„	„	1·0299)

Für die Untersuchung der Durchsichtigkeit des Seewassers wurden wie im Vorjahre weisse blanke Metallscheiben verwendet, welche bis zum Momente des Verschwindens versenkt wurden. Derlei Versuche geschahen auf fast allen grösseren Stationen, und wurde hiebei der Stand der Sonne, Bewölkung, Seegang etc. notirt. Als Ergebniss lässt sich aussprechen, dass die Durchsichtigkeit des Meerwassers im östlichen Mittelmeere eine sehr grosse ist, indem in drei Fällen die Scheibe erst in 54 *m* dem Auge entschwand. Die geringste Sichtlichkeit war 32 *m* im Centralbecken des Mittelmeeres, etwa 50 Seemeilen SW. von Cap Matapan. Die Beziehungen der Sichtlichkeit zum Stande der Sonne, Seegang etc. werden seinerzeit gemeldet werden.

Zum Studium des Vordringens der Lichtstrahlen in grosse Meerestiefen und deren Einwirkung auf photographische Platten wurden die im Vorjahre verwendeten Apparate benützt. Leider ging jener, welcher in Fiume hergestellt worden war, verloren, so dass nur mit den Vorrichtungen nach Chun-Petersen experimentirt werden konnte. Die Maximaltiefe, in welcher diese Apparate versenkt wurden, war 600 *m*. Die Platte scheint nicht mehr reagirt zu haben. Diese Experimente bedürfen jedoch noch eingehenderer Studien, welchen auf Fahrten, wie solche das Expeditionsschiff Pola zu unternehmen hatte, mancherlei Schwierigkeiten entgegenstehen. Diesmal hatte man nur beabsichtigt, die Grenze zu finden, in welcher die Platten noch Lichteindrücke zeigen und die Instrumente demgemäss von 100 zu 100 *m* bis auf die früher angeführte Maximaltiefe von 600 *m* versenkt.

Die Farbe des Meeres wurde nach der im Vorjahre gebrauchten Skala bei allen Hauptstationen bestimmt, dessgleichen an allen Stationen meteorologische Aufzeichnungen gemacht (Lufttemperatur mit Schleuderthermometer, Barometerstand, Windrichtung und Stärke, Zustand der See).

Dank der Unterstützung von Seite des Commandos S. M. Schiff „Pola“, des Schiffsstabes etc. kann das gewonnene Materiale als gleich reichhältig wie im Vorjahre bezeichnet werden.

An Lothungen wurden erzielt 50 im tiefen Wasser, und zwar:

über	4000 *m*	2
„	3000	3
„	2000	10
„	1000	13
„	500	16
unter	500	6
an Hafenlothungen		15

im Ganzen 65.

Beobachtet wurde auf 84 Stationen, worunter 65 Hauptstationen, an welchen Temperatur-Reihen und Angaben über das specifische Gewicht in verschiedenen Meerestiefen gewonnen wurden, während an den 19 Secundärstationen nur Untersuchungen in den der Meeresoberfläche nächstgelegenen Schichten stattfanden.

Die sämmtlichen Daten zusammengefasst ergeben:

492 Beobachtungen über Seetemperatur,
372 Untersuchungen auf specifisches Gewicht,
65 Feststellungen der Farbe des Meerwassers,
40 Durchsichtigkeitsproben mit der Scheibe,
9 Proben mit photographischen Apparaten,
endlich eine entsprechende Zahl von meteorologischen Aufzeichnungen.

Die Instrumente und Vorrichtungen haben sich im Allgemeinen sehr gut bewährt. Die Lothmaschine functionirte mit grosser Präcision, und ergab sich auch nicht ein einzigesmal irgend welch nennenswerther Anstand. Die Aufzeichnungen über Ablauf- und Aufholzeit werden seinerzeit zur Vorlage gelangen. Die in Graz mit Bewilligung der hohen Akademie der Wissenschaften hergestellte kleine Lothmaschine[1] liess in der Functionirung nichts zu wünschen übrig und ermöglichte die Vervielfältigung der Beobachtung unter Verwendung von Lothdraht statt der Leine, bei leichterer Belastung durch Instrumente, wie Tiefenthermometer etc.

[1] Nach Angabe des Professors Dr. Richter (Graz), hergestellt.

Die Maximum- und Minimum-Tiefseethermometer älterer Provenienz (Miller-Casella), mitunter schon 14 Jahre im Gebrauch, erheischen einen Ersatz durch neuere Apparate, die neu angeschafften functionirten tadellos, dessgleichen die Schöpfapparate nach A. B. Meyer's Construction.

Verluste sind anbetrachts des heurigen ausnahmsweise schlechten Wetters — schwerer Seegang, starker Wind etc. — nur wenige zu beklagen. Ausser dem bereits gemeldeten Verluste eines photographischen Apparates, dessen Leine sich mit der Stahltrosse der grossen Bügelcurre verwickelte und abriss, und einem Tiefseethermometer, welcher an derselben Leine befestig war und mit versank, ist nur des Abganges eines einfachen Thermometers (für Messungen der Temperatur des Oberflächenwassers), welches bei Seegang zerschlagen wurde, Erwähnung zu thun. Noch sei hervorgehoben, dass der Lothdraht, gleichwie im Vorjahre, sich ausgezeichnet bewährte und heuer ein Reissen desselben gar nicht vorkam.

Piräus, am 12. September 1891.

Expedition S. M. Schiff „Pola", Sommer 1891. Beilage II.

Geographische Positionen jener Örtlichkeiten, an welchen physikalische Beobachtungen vorgenommen wurden.

Nummer oder Buchstabe der Station	Geographische Position		Nummer oder Buchstabe der Station	Geographische Position	
	Länge nach Gr. (Ost)	Breite (Nord)		Länge nach Gr. (Ost)	Breite (Nord)
1	18°36'18"	39°41'30"	12	23°28'20"	35°59' 0"
2	18 46 0	39 13 0	13	23 46 0	35 54 30
3	18 58 42	38 9 12	14	24 22 10	35 39 30
4	21 45 48	35 44 48	*b*	24 0 5	36 44 30
5	22 17 18	35 38 42	15	Bai von Suda	
6	23 12 42	35 26 6	16	24 32 10	35 36 30
7	23 33 30	35 47 40	*c*	24 45 30	35 50 12
8	23 8 20	36 3 50	17	25 8 20	35 59 30
9	22 55 40	35 56 0	*d*	Südeinfahrt von Santorin	
10	22 58 40	36 0 30	18	Santorin, vor Anker	
11	23 9 30	36 5 30	19	25 24 10	36 25 30
a	23 20 0	36 6 0			

Nummer oder Buchstabe der Station	Geographische Position		Nummer oder Buchstabe der Station	Geographische Position	
	Länge nach Gr. (Ost)	Breite (Nord)		Länge nach Gr. (Ost)	Breite (Nord)
20	25°42'40"	36° 0'40"	*s*	24°34' 0"	33°11' 0"
c	26 6 0	35 44 0	*t*	24 24 0	33 38 0
21	26 15 40	35 36 30	39	24 17 30	33 57 20
22	Grandes-Bai, (Kuremeno)		40	Rhede auf der Insel Gavdo	
f	26 22 0	35 4 0	41	24 22 50	34 46 20
23	26 33 30	34 37 20	42	24 35 20	34 47 20
g	26 11 0	34 34 0	43	Hafen von Kalo Limniones	
24	25 13 20	34 41 10	44	24 23 30	34 59 50
25	25 33 40	34 19 30	45	24 16 30	35 3 40
h	26 30 0	34 2 0	46	Hafen von Lutro	
26	27 12 20	35 50 30	47	24 3 40	35 8 10
i	28 1 0	33 30 0	48	23 58 30	35 5 0
27	28 39 30	33 19 54	49	23 41 30	35 11 30
28	28 52 48	32 55 0	50	Hafen von Selino Kastelli	
k	29 0 0	32 36 0	51	23 40 50	35 11 30
29	29 7 15	32 29 25	52	Hafen von Selino Kastelli	
30	29 19 0	32 11 0	53	Hafen von Kapsala (auf Cerigo)	
l	29 24 0	31 58 0			
31	29 47 30	31 21 0	54	22 56 10	35 57 0
32	Hafen von Alexandrien		55	22 51 40	36 23 50
m	29 20 0	31 26 0	56	Hafen von Vatika	
33	28 51 19	31 38 37	57	23 0 20	36 25 20
34	28 40 0	31 30 0	58	23 7 30	36 20 40
n	28 14 0	31 36 0	59	23 16 20	36 19 40
35	27 35 0	31 42 30	60	23 32 40	36 26 30
36	27 23 30	31 32 20	61	23 51 0	36 40 30
o	27 4 0	31 52 0	62	Hafen von Milo	
p	26 12 0	31 55 0	63	24 18 0	36 59 0
37	25 45 17	31 56 25	64	24 13 20	37 8 20
q	25 22 0	32 15 0	65	24 12 20	37 25 20
r	24 56 0	32 36 0	Summe: 84 Stationen, hievon 65 Hauptstationen (1—65) und 19 Nebenstationen (*a*—*t*).		
38	24 47 50	32 49 40			

S. M. Schiff „Pola“, Beilage III.
Sommerexpedition 1891.

Lothungen im tiefen Wasser.

Laufende Zahl	Nummer der Station[1]	Tiefe in Metern	Laufende Zahl	Nummer der Station	Tiefe in Metern
1	1	760	28	33	2055
2	2	847	29	35	2392
3	3	3163	30	36	1974
4	4	4400	31	37	1243
5	5	4080	32	38	2361
6	6	2525	33	39	1978
7	7	755	34	41	1274
8	8	260	35	42	2720
9	9	660	36	44	1594
10	10	938	37	45	1445
11	11	415	38	47	1165
12	12	1298	39	48	1368
13	13	972	40	49	1290
14	14	805	41	51	946
15	16	943	42	54	620
16	17	1838	43	55	833
17	19	381	44	57	280
18	20	1356	45	58	314
19	21	2250	46	59	1292
20	23	3310	47	60	581
21	24	1503	48	61	834
22	25	2963	49	62	512
23	26	2524	50	63	477
24	27	3068	51	64	540
25	28	2840			
26	29	2420		Summe: 50 im tiefen, 1 im seichten Wasser	
27	31	76[2]			

[1] Die geographischen Positionen der „Stationen“ sind in Beilage II verzeichnet.

[2] Die Lothung vor Alexandrien mit 76 *m* Tiefe erscheint einbezogen.

XX. SITZUNG VOM 15. OCTOBER 1891.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Das Anziehungsgesetz centrobarischer Gebilde“, von Prof. Dr. Alex. Wernicke an der herzogl. technischen Hochschule in Braunschweig.
2. „Über die γ-Trichlor-β-oxybuttersäure und eine neue Synthese der Äpfelsäure“, von Dr. K. Garzarolli Edlen von Thurnlackh, Privatdocent an der k. k. deutschen Universität in Prag.

Das w. M. Herr Prof. Sigmund Exner überreicht eine Abhandlung von Dr. Leopold Réthi: „Der Schlingact und seine Beziehungen zum Kehlkopfe“.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit, betitelt: „Einwirkung der schwefeligen Säure auf Crotonaldehyd“, von Gustav Haubner.

Herr Dr. Gustav Kohn, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: „Über die Resultante einer Covariante und einer Grundform“.

Herr Dr. Friedrich Bidschof, Assistent an der k. k. Universitätssternwarte zu Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Bestimmung der Bahn des Planeten (279) Thule“.

Herr Dr. Wilhelm Trabert in Wien überreicht eine Abhandlung mit dem Titel: „Der tägliche Gang der Temperatur und des Sonnenscheines auf dem Sonnblickgipfel“.

Bestimmung der Bahn des Planeten (279) Thule

von

Friedrich Bidschof.

Unter den zahlreichen Planetenentdeckungen, welche dem Adjuncten der k. k. Sternwarte zu Wien, Herrn Dr. J. Palisa, im Laufe der letzten Jahre gelungen sind, hat keine das Interesse der Astronomen so sehr erregt, als die am 25. October 1888 erfolgte Auffindung eines Asteroiden, dessen mittlere Entfernung von der Sonne mehr als viermal so gross ist als der Erdbahnhalbmesser und der somit als der sonnenfernste unter den bisher bekannten, zwischen Mars und Jupiter kreisenden Planeten betrachtet werden muss. Schon der erste vom Entdecker unternommene Versuch, die Bahn des lichtschwachen Gestirnes unter Annahme einer kreisförmigen Bewegung desselben zu bestimmen, ergab den ungewöhnlich grossen Abstand des Planeten von der Sonne; ein Resultat, welches durch die späteren Rechnungen der Herren Lange in Berlin und Halm in Kiel bestätigt wurde. In Anbetracht der hiedurch von mehreren Seiten festgestellten Thatsache, dass der Planet sich fast an der äussersten möglichen Grenze des Asteroidengürtels befindet, benannte der Entdecker denselben „Thule"; nach dem Lande, welches im Alterthum als das im fernsten Norden liegende Eiland galt.

Die aus der Entdeckungsopposition stammenden Beobachtungen des Planeten (279) Thule erstrecken sich über die Zeit vom 25. October 1888 bis zum 5. Januar 1889. Mit Hilfe derselben wurde vom Verfasser der vorliegenden Abhandlung unter Berücksichtigung der obwaltenden besonderen Verhältnisse, welche später erörtert werden sollen, zum Behufe der Wiederauffindung des Planeten in der folgenden Opposition das nachstehende

ekliptikale Elementensystem abgeleitet, welches hier nur zur Vergleichung mit den später ermittelten und daher genaueren dienen möge.

Epoche: 1889 Januar 0·0 mittl. Zeit Berlin.

$$
\begin{aligned}
L &= 19^\circ\ 8'\ 32''2 \\
M &= 60\ 32\ 23\cdot6 \\
\Omega &= 75\ 56\ 34\cdot7 \\
\omega &= 242\ 39\ 33\cdot9 \\
i &= 2\ 21\ 46\cdot4 \\
\varphi &= 3\ 47\ 24\cdot3 \\
\log a &= 0\cdot630396 \\
\mu &= 402''173.
\end{aligned}
$$

mittl. Äqu. 1890·0

Die auf Grund dieser Elemente berechneten Aufsuchungsephemeriden ermöglichten die Wiederauffindung des Planeten, welche Herrn Dr. Palisa nach mehrwöchentlichem Suchen am 17. November 1889, wenige Tage vor Eintritt der Opposition des Asteroiden, gelang. Obige Elemente gaben den Ort desselben um etwa einen Grad falsch. Eine verbesserte Ephemeride lieferte für die weitere Verfolgung des Planeten in dieser Opposition genügend genaue Örter, er wurde von den Herren Charlois in Nizza und Rambaud in Algier trotz seiner Lichtschwäche bis Ende Januar 1890 beobachtet. Die Combination der Beobachtungen der beiden Erscheinungen liess nun das folgende, bereits bedeutend genauere Elementensystem finden:

Epoche: 1890 Januar 24·5 mittl. Zeit Berlin.

$$
\begin{aligned}
L &= 60^\circ\ 43'\ 40''9 \\
M &= 111\ 54\ 9\cdot9 \\
\Omega &= 75\ 25\ 48\cdot0 \\
\omega &= 233\ 23\ 43\cdot0 \\
i &= 2\ 22\ 37\cdot1 \\
\varphi &= 4\ 36\ 37\cdot1 \\
\log a &= 0\cdot629620 \\
\mu &= 403''2527.
\end{aligned}
$$

mittl. Äqu. 1890·0

Die Ephemeriden, welche mit Hilfe dieser Elemente berechnet wurden, wichen in der dritten Opposition nur wenige Bogenminuten von den wahren Orten des Planeten ab. Der Planet

wurde am 12. December 1890, mehrere Wochen vor seiner Opposition, von Herrn Dr. J. Palisa aufgefunden und trotz des Umstandes, dass er sich nicht weit von seinem Aphel befand, mithin sehr lichtschwach war, von den Herren A. Charlois in Nizza und Dr. H. Kobold in Strassburg bis zum 10. Februar 1891 verfolgt.

Die Gesammtheit der während dieser drei Erscheinungen erhaltenen Beobachtungen zu verwerthen, ist die Aufgabe der in der vorliegenden Abhandlung darzulegenden Rechnungen gewesen. Bevor aber in die Auseinandersetzung derselben eingetreten wird, mögen einige Bemerkungen Platz finden. In Folge des ungewöhnlich grossen Abstandes des Planeten Thule von der Sonne kann dieser dem grössten Planeten des Sonnensystems, dem Jupiter, ziemlich nahe kommen. Es kann somit die Bewegung des Planeten Thule einen vielleicht nicht unwesentlichen Beitrag zur Bestimmung der Masse des Jupiters liefern, indem aus dem Betrage der Störungen, welche der Asteroid erleidet, ein Rückschluss auf die Grösse der störenden Masse möglich ist. Für die Epoche des letzten Elementensystems beträgt jedoch der Unterschied der heliocentrischen Längen der Thule und des Jupiter etwa 230°; ferner ist die relative Bewegung der beiden Planeten gegen einander eine sehr geringe. Wenn nun auch in Anbetracht dieser Sachlage gegenwärtig jede Erörterung über die Jupitermasse ausgeschlossen erscheint, so ist es doch geboten, bei der Bahnbestimmung auf diesen allerdings noch in weiter Ferne liegenden Zweck Rücksicht zu nehmen. In der vorliegenden Abhandlung konnte aber diesen Verhältnissen nur in sehr geringem Maasse Rechnung getragen werden und musste als eigentliches Ziel der Untersuchung eine thunlichst genaue Bestimmung des Laufes des Asteroiden während seiner nächsten Erscheinungen betrachtet werden. Ganz abgesehen von dem Umstande, dass der Planet bisher nur während des vierten Theiles eines Umlaufes beobachtet worden ist, hindert die geringe Zahl und die oft ungleichmässige Vertheilung der Beobachtungen eine abschliessende Bildung von Normalorten. Hiezu tritt noch der Umstand, dass für einzelne Vergleichsterne trotz vielfacher Bemühungen nur wenig vertrauenswürdige Positionen erhalten werden konnten und die Thatsache von cardinaler Bedeutung, dass die Beobach-

tungen dieses Planeten sehr ungleich an Werth sind. Diese Verhältnisse gestatten keine definitive Bearbeitung des vorhandenen Beobachtungsmateriales. Es sind daher die im Folgenden benützten Rechnungsgrundlagen nur als provisorische zu betrachten, die ausschliesslich zum Zwecke der Ermittlung eines für die weitere Verfolgung genügenden Elementensystems aufgestellt wurden. Hoffentlich wird der Planet in seinen späteren Erscheinungen mit besonderer Sorgfalt beobachtet werden, so dass dann, nachdem inzwischen die in den vorstehenden Zeilen erwähnten Mängel der bisher beobachteten Oppositionen nach Thunlichkeit beseitigt sein dürften, eine definitive Bildung der Normalorte möglich sein wird. Hiedurch wäre eine wesentliche Vorbedingung für die weitere wissenschaftliche Verwerthung der Bewegung des Planeten (279) Thule, insbesondere für die Bestimmung der Jupitermasse aus derselben erfüllt.

Ausser der Discussion der Beobachtungen und der Bildung provisorischer Normalorte enthält die vorliegende Abhandlung die Ableitung eines die drei letzten Oppositionen befriedigend darstellenden Elementensystemes, ferner die Berechnung der Störungen und die Aufstellung von Ephemeriden für die drei nächsten Erscheinungen des Planeten, sowie einige sich hieran knüpfende, den Planeten betreffende Bemerkungen.

I. Opposition.

Zur Berechnung der Ephemeriden, welche zur Vergleichung der Beobachtungen dienen sollten, wurden die zuletzt angeführten Elemente benützt. Aus denselben ergaben sich für die heliocentrischen Coordinaten die folgenden Ausdrücke:

$$x = [9{\cdot}999650]r.\sin(\ 38^\circ\ 48'\ 47''8+v);$$
$$y = [9{\cdot}960624]r.\sin(309\ \ 50\ \ 22{\cdot}6+v);$$
$$z = [9{\cdot}611944]r.\sin(303\ \ 40\ \ 26{\cdot}6+v).$$

Hiebei sind die in den eckigen Klammern stehenden Coëfficienten bereits logarithmisch angesetzt.

Da das für die Herstellung der Ephemeriden benützte Elementensystem nur auf die Beobachtungen der zwei ersten Oppositionen gegründet ist, so stellte es die dritte — wie schon früher erwähnt — nicht völlig dar. Um nun eine zur Bildung der Normal-

orte genügende Darstellung aller drei Oppositionen zu erhalten, sind die Ephemeriden mit etwas geänderten Constanten der elliptischen Bewegung gerechnet worden; hiedurch sind Ungleichförmigkeiten und Gänge in den Ephemeridenfehlern entstanden, auf welche dann bei der Ermittlung der Correctionen der Ephemeriden für die Epochen der einzelnen Normalorte entsprechende Rücksicht genommen werden musste.

Ephemeride für die erste Opposition.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung (279) von ♁	Log. der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1888 Oct. 24·5	0ʰ54ᵐ 0ˢ17	+2°57′12″4	0·50003	0·61454	26ᵐ17ˢ
25·5	0 53 28·70	+2 54 24·5	0·50084	0·61461	26 20
26·5	0 52 57·75	+2 51 40·7	0·50168	0·61467	26 23
27·5	0 52 27·33	+2 49 1·1	0·50255	0·61474	26 26
1888 Oct. 28·5	0 51 57·44	+2 46 25·7	0·50346	0·61480	26 30
29·5	0 51 28·10	+2 43 54·7	0·50440	0·61487	26 33
30·5	0 50 59·33	+2 41 28·0	0·50538	0·61494	26 37
31·5	0 50 31·18	+2 39 5·7	0·50639	0·61500	26 40
1888 Nov. 1·5	0 50 3·66	+2 36 47·9	0·50743	0·61507	26 44
2·5	0 49 36·80	+2 34 34·8	0·50851	0·61513	26 48
3·5	0 49 10·61	+2 32 26·5	0·50963	0·61520	26 52
4·5	0 48 45·12	+2 30 23·2	0·51078	0·61527	26 57
1888 Nov. 5·5	0 48 20·35	+2 23 24·9	0·51196	0·61533	27 1
6·5	0 47 56·32	+2 26 31·6	0·51316	0·61540	27 5
7·5	0 47 33·04	+2 24 43·4	0·51439	0·61546	27 10
8·5	0 47 10·53	+2 23 0·5	0·51566	0·61553	27 15
1888 Nov. 9·5	0 46 48·80	+2 21 23·0	0·51696	0·61560	27 20
10·5	0 46 27·87	+2 19 51·0	0·51828	0·61566	27 25
11·5	0 45 7·76	+2 18 24·6	0·51962	0·61573	27 30
12·5	0 45 48·48	+2 17 3·9	0·52099	0·61579	27 35
1888 Nov. 13·5	0 45 30·04	+2 15 49·0	0·52239	0·61586	27 40
14·5	0 45 12·44	+2 14 39·9	0·52381	0·61593	27 46
15·5	0 44 55·69	+2 13 36·7	0·52525	0·61599	27 51
16·5	0 44 39·80	+2 12 39·4	0·52672	0·61606	27 57
1888 Nov. 17·5	0 44 24·77	+2 11 48·0	0·52821	0·61613	28 3
18·5	0 44 10·62	+2 11 2·5	0·52971	0·61619	28 9
19·5	0 43 57·36	+2 10 22·9	0·53123	0·61626	28 15
20·5	0 43 44·98	+2 9 49·1	0·53278	0·61633	28 21
1888 Nov. 21·5	0 43 33·50	+2 9 21·2	0·53434	0·61639	28 27

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung (279) von ♂	Log. der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1888 Nov. 21·5	0h 43m 33s·50	+2° 9' 21"·2	0·53434	0·61639	28m 27s
22·5	0 43 22·93	+2 8 59·2	0·53592	0·61646	28 33
23·5	0 43 13·26	+2 8 43·1	0·53752	0·61653	28 39
24·5	0 43 4·50	+2 8 32·9	0·53913	0·61660	28 46
1888 Nov. 25·5	0 42 56·66	+2 8 28·6	0·54076	0·61666	28 52
26·5	0 42 49·73	+2 8 30·3	0·54240	0·61673	28 59
27·5	0 42 43·73	+2 8 38·0	0·54406	0·61680	29 5
28·5	0 42 38·65	+2 8 51·6	0·54573	0·61687	29 12
1888 Nov. 29·5	0 42 34·50	+2 9 11·2	0·54741	0·61693	29 19
30·5	0 42 31·27	+2 9 36·7	0·54911	0·61700	29 26
Dec. 1·5	0 42 28·97	+2 10 8·1	0·55082	0·61706	29 33
2·5	0 42 27·60	+2 10 45·4	0·55253	0·61713	29 40
1888 Dec. 3·5	0 42 27·16	+2 11 28·7	0·55425	0·61720	29 47
4·5	0 42 27·65	+2 12 17·9	0·55599	0·61727	29 54
5·5	0 42 29·07	+2 13 13·0	0·55773	0·61733	30 1
6·5	0 42 31·42	+2 14 14·0	0·55948	0·61740	30 8
1888 Dec. 7·5	0 42 34·70	+2 15 20·8	0·56124	0·61747	30 16
8·5	0 42 38·91	+2 16 33·3	0·56300	0·61754	30 23
9·5	0 42 44·04	+2 17 51·6	0·56477	0·61760	30 30
10·5	0 42 50·09	+2 19 15·7	0·56654	0·61767	30 38
1888 Dec. 11·5	0 42 57·04	+2 20 45·6	0·56831	0·61774	30 45
12·5	0 43 4·89	+2 22 21·2	0·57008	0·61781	30 53
13·5	0 43 13·64	+2 24 2·4	0·57186	0·61787	31 1
14·5	0 43 23·29	+2 25 49·0	0·57364	0·61794	31 8
1888 Dec. 15·5	0 43 33·82	+2 27 41·1	0·57542	0·61801	31 16
16·5	0 43 45·23	+2 29 38·6	0·57721	0·61808	31 24
17·5	0 43 57·51	+2 31 41·3	0·57900	0·61814	31 31
18·5	0 44 10·64	+2 33 49·3	0·58078	0·61821	31 39
1888 Dec. 19·5	0 44 24·63	+2 36 2·4	0·58257	0·61828	31 47
20·5	0 44 39·47	+2 38 20·7	0·58435	0·61835	31 55
21·5	0 44 55·16	+2 44 44·2	0·58613	0·61841	32 3
22·5	0 45 11·68	+2 43 12·8	0·58791	0·61848	32 11
1888 Dec. 23·5	0 45 29·03	+2 45 46·4	0·58969	0·61855	32 19
24·5	0 45 47·21	+2 48 25·0	0·59146	0·61862	32 27
25·5	0 46 6·20	+2 51 8·5	0·59323	0·61868	32 34
26·5	0 46 26·00	+2 53 46·7	0·59500	0·61875	32 42
1888 Dec. 27·5	0 46 46·60	+2 56 49·7	0·59676	0·61882	32 50

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare		Log. der Entfernung		Licht-zeit
	Rectascension	Declination	(279) von ♁	(279) von ☉	
1888 Dec. 27·5	0h 46m 46s·60	+2° 56′ 49″·7	0·59676	0·61882	32m 50s
28·5	0 47 8·01	+2 59 47·6	0·59852	0·61889	32 58
29·5	0 47 30·22	+3 1 50·2	0·60027	0·61895	33 6
30·5	0 47 53·20	+3 5 57·5	0·60202	0·61902	33 14
1889 Jan. 0·5	0 48 16·96	+3 9 9·3	0·60377	0·61909	33 22
1·5	0 48 41·50	+3 12 25·6	0·60551	0·61916	33 30
2·5	0 49 6·81	+3 15 46·4	0·60724	0·61922	33 39
3·5	0 49 32·87	+3 19 11·5	0·60897	0·61929	33 47
1889 Jan. 4·5	0 49 59·68	+3 22 40·8	0·61069	0·61936	33 55
5·5	0 50 27·25	+3 26 14·1	0·61240	0·61943	34 3
6·5	0 50 55·57	+3 29 51·3	0·61410	0·61949	34 11
7·5	0 51 24·63	+3 33 32·3	0·61579	0·61956	34 19

Die aus der ersten beobachteten Erscheinung des Planeten stammenden Beobachtungen sind, soweit sie bis jetzt bekannt gemacht worden sind, ausschliesslich von Herrn Dr. J. Palisa an dem grossen Refractor der k. k. Universitätssternwarte zu Wien mit Hilfe eines Fadenmikrometers erhalten worden. Sie beruhen alle — wie gleich hier bemerkt werden mag — auf mehreren Vergleichen, deren jeder in einer Einstellung in Declination und vier Rectascensionsantritten besteht.

Ehe nun an eine Vergleichung der Beobachtungsresultate mit den gleichzeitigen Angaben der vorstehenden Ephemeride geschritten wurde, habe ich die Orte der benützten Vergleichsterne so genau als möglich zu bestimmen gesucht. Ausser den Sternkatalogen wurden hiezu noch nicht veröffentlichte Beobachtungen dieser Sterne benützt, welche ich der Güte des Herrn Director A. Valentiner in Karlsruhe und A. Marth in Markree Castle verdanke. Letzterer übersandte mir die genauen Daten der Markree-Zonenkataloge, welche (besonders bei der Bearbeitung der späteren Oppositionen) treffliche Dienste leisteten. Sehr gefördert wurde die Kenntniss der genauen Positionen durch die Bemühungen der Herren Dr. N. Herz und Linienschiffscapitän F. Laschober, welche auf meine Bitte eine Reihe von Vergleichsternen an den Meridiankreisen der Sternwarten von Ottakring

und Pola neu bestimmten. Da ausserdem die in der folgenden Tabelle unter dem Titel „Wien, Anschluss“ eingesetzten Daten, ebenso wie alle später so citirten, auf mehrfachen mikrometrischen Vergleichen der betreffenden Sterne mit sehr genau bestimmten Sternen, die meist dem neuen Pariser Katalog entnommen wurden, beruhen, so dürften diese bei den Beobachtungen der ersten Opposition verwendeten Sterne ziemlich gut bestimmt sein.

In der nun folgenden Tabelle sind alle einzelnen Angaben zusammengestellt und nebst der schliesslich angenommenen Position auch die Reduction auf den scheinbaren Ort des betreffenden Datums angeführt. Bei der Ableitung der Schlussposition wurde den einzelnen Coordinaten ein nach Maassgabe der in ihnen vereinigten Beobachtungen bestimmtes Gewicht gegeben. Zonenbeobachtungen erhielten halbes Gewicht und die in der Tabelle mit einem Stern versehenen Coordinaten wurden nicht benützt. Dasselbe Verfahren wurde auch bei der Ermittlung der Positionen der Vergleichsterne der beiden folgenden Oppositionen angewendet.

Nummer		Zahl der Beobachtungen in		1888·0	
		ΔR	δ	Rectascension	Declination
1	Weisse 0h, 694.....1825	1	1	0h 41m 53s·48	+2° 21′ 56″·1
	Lamont.....1850	1	1	0 41 53·42	+2 22 59·6
	Bonn. Beob. VI. 2° 104 .1855	2	2	0 41 53·57	+2 22 55·3
	Berlin, Mer. B.....1860	2	2	0 41 53·44	+2 22 57·8
	Yarnall 388.....1860	6	2	0 41 53·41	+2 22 57·4
	Albany, Mer. B.....1875	2	2	0 41 53·42	+2 22 54·4
	Angenommen.....			0 41 53·44	+2 22 56·5
	Reduction auf 1888 Nov. 9 ..			+ 2·61	+ 15·5
2	Weisse 0h, 698 1825	1	1	0 42 0·82	*+2 17 27·0
	Rümker n. F. 310.. 1850	1	1	0 42 1·07	*+2 17 25·8
	Berlin, Mer. B... 1855	2	2	0 42 0·68	+2 17 31·1
	Yarnall 391.....1860	4	2	0 42 0·80	+2 17 32·1
	Albany, Mer. B.....1875	2	2	0 42 0·95	+2 17 29·9
	Angenommen.....			0 42 0·81	+2 17 31·0
	Reduction auf 1888 Dec. 5 ..			+ 2·43	+ 14·0

Nummer		Zahl der Beobachtungen in		1888·0—1889·0	
		ΔR	δ	Rectascension	Declination
3	Weisse 0^h, 709.....1825	1	1	$0^h 42^m 28^s 19$	+2° 7' 5"2
	Berlin, Mer. B.....1855	2	2	0 42 27·88	+2 7 5·0
	Albany, Mer. B.....1875	2	2	0 42 27·98	+2 7 4·7
	Angenommen.....			0 42 27·98	+2 7 4·9
	Reduction auf 1888 Nov. 27 .			+ 2·50	+ 14·4
	„ „ „ „ 30 .			+ 2·47	+ 14·3
	„ „ „ Dec. 3 ..			+ 2·45	+ 14·1
4	Markree Zones.....1850	1	1	0 45 50·28	*+2 36 45·0
	Bonn. B. VI 2° 120.....1855	1	1	0 45 50·12	+2 36 36·4
	Königsberg, Mer. B.....1857	1	1	0 45 50·45	+2 36 31·5
	Ottakring, Mer. B.....1889	2	2	0 45 50·06	+2 36 34·2
	Pola, Mer. B.....1889	1	1	0 45 50·20	+2 36 29·7
	Angenommen.....			0 45 50·19	+2 36 33·2
	Reduction auf 1888 Nov. 1 ..			+ 2·66	+ 15·7
5	Markree Zones.....1850	1	1	0 47 13·66	+2 29 15·3
	Wien, Anschluss.....1888	1	1	0 47 13·65	+2 29 19·8
	Ottakring, Mer. B.....1889	1	1	0 47 13·34	+2 29 19·3
	Pola, Mer. B.....1889	1	1	0 47 13·50	+2 29 23·3
	Angenommen.....			0 47 13·52	+2 29 19·4
	Reduction auf 1888 Nov. 5 ..			+ 2·65	+ 15·5
6	Markree Zones.....1850	1	1	0 49 45·54	+3 14 52·1
	Wien, Anschluss.....1889	1	1	0 49 45·91	+3 14 50·1
	Pola, Mer. B.....1889	1	1	0 49 45·68	+3 14 55·1
	Angenommen.....			0 49 45·70	+3 14 51·9
	Reduction auf 1889 Januar 2			— 0·92	— 7·4
7	Wien, Anschluss.....1888	1	1	0 51 34·53	+2 42 30·1
	Ottakring, Mer. B.....1889	2	2	0 51 34·52	+2 42 29·5
	Pola, Mer. B.....1889	1	1	0 51 34·97	+2 42 30·5
	Angenommen.....			0 51 34·63	+2 42 29·9
	Reduction auf 1888 Oct. 29, 30			+ 2·68	+ 15·6

Nummer		Zahl der Beobachtungen in		1888·0—1889·0	
		α	δ	Rectascension	Declination
8	Markree Zones.....1850	1	1	*0h52m25s·60	+2°48'57"0
	Bonn. B. VI. 2° 137.....1855	1	1	*0 52 24·86	+2 48 57·8
	Wien, Anschluss.....1888	1	1	0 52 25·46	+2 48 55·5
	Ottakring, Mer. B.....1889	2	2	0 52 25·34	+2 48 53·2
	Pola, Mer. B. 1889	1	1	0 52 25·24	+2 48 57·2
	Angenommen.....			0 52 25·35	+2 48 56·6
	Reduction auf 1888 Oct. 27 ..			+ 2·69	+ 15·7
9	Markree Zones.....1850	1	1	*0 52 37·60	*+2 54 42·4
	Wien, Anschluss.....1889	1	1	0 52 37·39	+2 54 32·0
	Ottakring, Mer. B.....1889	1	1	0 52 37·26	+2 54 35·5
	Angenommen.....			0 52 37·32	+2 44 33·8
	Reduction auf: 1888 October 25, 26, 27 ...			+ 2·69	+ 15·7
10	Markree Zones.....1850	1	1	0 53 55·17	*+3 22 39·8
	Rümker, n. F. 451.....1850	1	1	0 53 54·97	+3 22 44·5
	Yarnall 507..... .1860	3	2	0 53 55·14	+3 22 43·6
	Albany, Mer. B.....1875	2	2	0 53 55·17	+3 22 42·8
	Angenommen.....			0 53 55·16	+3 22 43·5
	Reduction auf 1889 Januar 5			— 0·92	— 7·6

Die nun folgende Tabelle enthält die beobachteten Differenzen zwischen dem Planeten und dem jeweiligen Vergleichstern, sowie die zur Reduction nothwendigen Angaben. Es ist zu derselben noch zu bemerken, dass die angeführten Differenzen bereits vom Einflusse der Refraction und der Fadenneigung befreit sind.

Nummer der Beobachtung	Datum der Beobachtung	Ortszeit	Beobachtungsort	Nummer des Vergleichsternes	Zahl der Vergleiche in AR	Zahl der Vergleiche in δ	Planet—✱ in Rectascension	Planet—✱ in Declination	Correction für Parallaxe in AR	Correction für Parallaxe in δ
1	1888 October 25	7h 3m13s	Wien-Währing	9	3	3	+0m56s17	+0'10"7	—0"10	+2"0
2	„ 25	8 14 6	„	9	4	4	+0 54·43	+0 3·8	—0·08	+2·0
3	„ 26	8 5 1	„	9	2	2	+0 23·38	—2 41·7	—0·07	+2·0
4	„ 27	7 18 36	„	9	4	4	—0 6·56	—5 16·5	—0·09	+2·0
5	„ 27	8 4 21	„	8	4	4	+0 4·93	+0 19·5	—0·07	+2·0
6	„ 29	6 59 51	„	7	4	4	—0 2·46	+1 43·3	—0·09	+2·0
7	„ 30	7 58 55	„	7	4	4	—0 32·42	—0 52·0	—0·07	+2·0
8	1888 November 1	8 44 25	„	4	4	4	+4 14·54	+0 12·8	—0·04	+2·0
9	„ 5	8 58 8	„	5	4	4	+1 7·06	—0 56·9	—0·02	+1·9
10	„ 9	9 56 21	„	1	4	4	+4 54·87	—1 39·0	+0·01	+1·9
11	„ 27	5 54 48	„	3	4	4	+0 14·81	+1 18·4	—0·06	+1·8
12	„ 30	8 22 55	„	3	5	5	+0 1·20	+2 16·1	+0·01	+1·8
13	1888 December 3	8 33 46	„	3	4	4	—0 3·28	+4 8·4	+0·02	+1·8
14	„ 5	5 59 27	„	2	4	4	+0 25·56	—4 44·9	+0·05	+1·8
15	1889 Januar 2	7 47 7	„	6	4	4	—0 40·89	+0 29·5	+0·04	+1·5
16	„ 5	8 48 39	„	10	2	2	—3 26·60	+3 13·5	+0·07	+1·5

Durch Verbindung dieser Angaben mit den Positionen der Vergleichsterne erhält man die in der folgenden Tabelle angeführten geocentrischen Orte und damit die beigesetzten Ephemeridenfehler. Dieselbe Tabelle macht auch die Gruppirung der Beobachtungen zu Normalorten ersichtlich.

Nummer der Beobachtung	Zeit der Beobachtung in mittlerer Berliner Zeit	Geocentrische Rectascension	Geocentrische Declination	Beobachtung–Rechnung in ΔR	Beobachtung–Rechnung in δ
		I. Normalort.			
1	1888 October 25·267431	0h 53m 36·08	+2° 55′ 2·2	+0·11	−1·0
2	„ 25·316655	0 53 34·36	+2 54 55·3	−0·07	+0·3
3	„ 26·310312	0 53 3·32	+2 52 9·8	−0·26	−1·7
4	„ 27·278044	0 52 33·36	+2 49 35·0	−0·68	−1·2
5	„ 27·309815	0 52 32·90	+2 49 33·8	−0·18	+2·7
6	„ 29·264942	0 51 34·76	+2 44 30·8	−0·20	+1·0
7	„ 30·305914	0 51 4·82	+2 41 55·5	−0·05	−0·7
8	1888 November 1·337431	0 50 7·35	+2 37 3·7	−0·74	−6·3
9	„ 5·346759	0 48 23·21	+2 28 39·9	−0·89	−2·8
10	„ 9·386968	0 46 50·93	+2 21 34·9	−0·29	+1·2
		II. Normalort.			
11	1888 Novemb. 27·217998	0h 42m 45·23	+2° 8′ 39·5	−0·10	+4·3
12	„ 30·320637	0 42 31·66	+2 9 37·1	−0·13	+4·6
13	1888 December 3·327928	0 42 27·17	+2 11 29·2	0·00	+7·5
14	„ 5·220602	0 42 28·85	+2 13 1·9	+0·26	+4·9
		III. Normalort.			
15	1889 Januar 2·292859	0h 49m 3·93	+3° 15′ 15·5	+2·42	+11·1
16	„ 5·335301	0 50 27·71	+3 25 50·9	+5·05	+12·3

Die vorstehende Übersicht zeigt die Unsicherheit, die hinsichtlich einzelner Beobachtungen besteht. Besonders die Januar-

beobachtungen sind unter einander, was die Rectascensionen betrifft, nicht vereinbar. Nach der Ansicht des Beobachters ist jene vom 5. Januar nicht befriedigend ausgefallen, weil ungünstiges Wetter, sowie die ausserordentliche Lichtschwäche des Planeten sehr hinderlich waren. Es wurde dessbalb diese Rectascension nicht benützt. Bei einer späteren Neubildung der Normalorte wird man wohl gut thun, die Januarbeobachtungen überhaupt wegzulassen und ebenso einzelne Beobachtungen des ersten Normalortes, die hier noch mitbenützt werden mussten, unberücksichtigt zu lassen.

Bildung der Normalorte der ersten Opposition.

Datum		Rectascension	Declination
1888 October 30·5	Ephemeridenort	$0^h\,50^m\,59^s\cdot33$	$+2°\,41'\,28''\cdot0$
	Correction der Ephemeride	$-\quad\quad0^s\cdot33$	$-\quad\quad0''\cdot9$
	Reduction auf 1890·0	$+\quad\quad4^s\cdot64$	$+\quad\quad30''\cdot3$
	I. Normalort	$0\;51\;\;3^s\cdot64$	$+2\;41\;57''\cdot4$
1888 December 1·5	Ephemeridenort	$0\;42\;28^s\cdot97$	$+2\;10\;\;8''\cdot1$
	Correction der Ephemeride	$+\quad\quad0^s\cdot01$	$+\quad\quad5''\cdot3$
	Reduction auf 1890·0	$+\quad\quad4^s\cdot35$	$+\quad\quad28''\cdot6$
	II. Normalort	$0\;42\;33^s\cdot33$	$+2\;10\;42''\cdot0$
1889 Januar 2·5	Ephemeridenort	$0\;49\;\;6^s\cdot81$	$+3\;15\;46''\cdot4$
	Correction der Ephemeride	$+\quad\quad2^s\cdot42$	$+\quad\quad11''\cdot7$
	Reduction auf 1890·0	$+\quad\quad4^s\cdot00$	$+\quad\quad26''\cdot3$
	III. Normalort	$0\;49\;13^s\cdot23$	$+3\;16\;24''\cdot4$

Hiemit ist die Bearbeitung der Beobachtungen der ersten Opposition vorläufig abgeschlossen.

II. Opposition.

In seiner zweiten Erscheinung wurde der Planet (279) Thule vom 17. November 1889 bis zum 25. Januar 1890 an den Sternwarten zu Wien, Nizza und Algier beobachtet. Die Elemente lieferten für diesen Zeitraum die nachstehende

Ephemeride für die zweite Opposition.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung (279) von ♂	Log. der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1889 Nov. 14·5	4h 8m 31s·32	+20° 13′ 52″·2	0·53093	0·64046	28m 13s
15·5	4 7 52·70	+20 12 27·4	0·53067	0·64053	28 12
16·5	4 7 13·79	+20 11 1·6	0·53045	0·64059	28 11
17·5	4 6 34·64	+20 9 34·7	0·53027	0·64065	28 11
1889 Nov. 18·5	4 5 55·28	+20 8 6·9	0·53012	0·64071	28 10
19·5	4 5 15·75	+20 6 38·3	0·53001	0·64078	28 10
20·5	4 4 36·10	+20 5 8·9	0·52995	0·64084	28 9
21·5	4 3 56·35	+20 3 38·9	0·52993	0·64090	28 9
1889 Nov. 22·5	4 3 16·54	+20 2 8·4	0·52995	0·64096	28 9
23·5	4 2 36·71	+20 0 37·4	0·53001	0·64102	28 10
24·5	4 1 56·87	+19 59 6·1	0·53011	0·64108	28 10
25·5	4 1 17·07	+19 57 34·5	0·53025	0·64114	28 11
1889 Nov. 26·5	4 0 37·37	+19 56 2·7	0·53043	0·64120	28 11
27·5	3 59 57·77	+19 54 30·8	0·53065	0·64126	28 12
28·5	3 59 18·30	+19 52 59·0	0·53091	0·64132	28 13
29·5	3 58 39·01	+19 51 27·4	0·53121	0·64138	28 14
1889 Nov. 30·5	3 57 59·95	+19 49 55·9	0·53155	0·64144	28 16
Dec. 1·5	3 57 21·14	+19 48 24·8	0·53193	0·64150	28 17
2·5	3 56 42·60	+19 46 54·1	0·53235	0·64156	28 19
3·5	3 56 4·36	+19 45 23·9	0·53291	0·64162	28 21
1889 Dec. 4·5	3 55 26·47	+19 43 54·2	0·53331	0·64168	28 23
5·5	3 54 48·94	+19 42 25·2	0·53385	0·64174	28 25
6·5	3 54 11·79	+19 40 57·1	0·53442	0·64180	28 27
7·5	3 53 35·07	+19 39 29·9	0·53503	0·64186	28 29
1889 Dec. 8·5	3 52 58·80	+19 38 3·7	0·53568	0·64192	28 32
9·5	3 52 23·01	+19 36 38·6	0·53636	0·64198	28 35
10·5	3 51 47·72	+19 35 14·6	0·53707	0·64204	28 37
11·5	3 51 12·98	+19 33 51·8	0·53782	0·64210	28 40
1889 Dec. 12·5	3 50 38·76	+19 32 30·3	0·53860	0·64216	28 43
13·5	3 50 5·14	+19 31 10·3	0·53942	0·64222	28 47
14·5	3 49 32·12	+19 29 51·8	0·54028	0·64228	28 50
15·5	3 48 59·73	+19 28 35·0	0·54117	0·64234	28 54
1889 Dec. 16·5	3 48 28·00	+19 27 20·0	0·54210	0·64240	28 57
17·5	3 47 56·94	+19 26 6·8	0·54306	0·64246	29 1
18·5	3 47 26·59	+19 24 55·4	0·54405	0·64252	29 5
19·5	3 46 56·96	+19 23 46·1	0·54507	0·64258	29 9
1889 Dec. 20·5	3 46 28·07	+19 22 38·9	0·54612	0·64264	29 14

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung (279) von ☿	Log. der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1889 Dec. 20·5	3h 46m 28·07	+19° 22′ 38·9	0·54612	0·64264	29m 14s
21·5	3 45 59·95	+19 21 33·8	0·54720	0·64270	29 18
22·5	3 45 32·62	+19 20 31·1	0·54831	0·64276	29 22
23·5	3 45 6·10	+19 19 30·6	0·54945	0·64282	29 27
1889 Dec. 24·5	3 44 40·40	+19 18 32·5	0·55062	0·64288	29 32
25·5	3 44 15·54	+19 17 36·8	0·55182	0·64294	29 37
26·5	3 43 51·55	+19 16 43·7	0·55304	0·64300	29 42
27·5	3 43 28·44	+19 15 53·2	0·55428	0·64306	29 47
1889 Dec. 28·5	3 43 6·21	+19 15 5·3	0·55555	0·64312	29 52
29·5	3 42 44·88	+19 14 20·1	0·55684	0·64318	29 57
30·5	3 42 24·47	+19 13 37·7	0·55816	0·64324	30 3
31·5	3 42 4·98	+19 12 58·1	0·55950	0·64330	30 8
1890 Jan. 1·5	3 41 46·40	+19 12 21·4	0·56086	0·64336	30 14
2·5	3 41 28·75	+19 11 47·6	0·56224	0·64342	30 10
3·5	3 41 12·05	+19 11 16·7	0·56364	0·64348	30 26
4·5	3 40 56·34	+19 10 48·8	0·56506	0·64354	30 32
1890 Jan. 5·5	3 40 41·50	+19 10 24·0	0·56650	0·64359	30 38
6·5	3 40 27·65	+19 10 2·2	0·56796	0·64365	30 44
7·5	3 40 14·79	+19 9 43·4	0·56943	0·64371	30 50
8·5	3 40 2·90	+19 9 27·7	0·57092	0·64377	30 57
1890 Jan. 9·5	3 39 51·98	+19 9 15·0	0·57242	0·64383	31 3
10 5	3 39 42·04	+19 9 5·4	0·57394	0·64389	31 10
11·5	3 39 33·09	+19 8 59·0	0·57547	0·64395	31 16
12·5	3 39 25·12	+19 8 55·8	0·57702	0·64401	31 23
1890 Jan. 13·5	3 39 18·14	+19 8 55·7	0·57858	0·64406	31 30
14·5	3 39 12·15	+19 8 58·8	0·58015	0·64412	31 36
15·5	3 39 7·16	+19 9 5·1	0·58174	0·64418	31 43
16·5	3 39 3·16	+19 9 14·5	0·58334	0·64424	31 50
1890 Jan. 17·5	3 39 0·15	+19 9 27·1	0·58494	0·64430	31 57
18 5	3 38 58·13	+19 9 42·9	0·58656	0·64436	32 5
19·5	3 38 57·11	+19 10 1·8	0·58818	0·64442	32 12
20·5	3 38 57·08	+19 10 23·9	0·58981	0·64447	32 19
1890 Jan. 21·5	3 38 58·03	+19 10 49·3	0·59145	0·64452	32 26
22·5	3 38 59·98	+19 11 17·8	0·59309	0·64458	32 34
23·5	3 39 2·92	+19 11 49·4	0·59474	0·64463	32 41
24·5	3 39 6·86	+19 12 24·2	0·59639	0·64468	32 49
1890 Jan. 25·5	3 39 11·80	+19 13 2·2	0·59805	0·64474	32 56

Die Vergleichsterne, welche bei den Beobachtungen der zweiten Opposition benützt wurden, habe ich ebenfalls thunlichst

genau zu bestimmen gesucht; in Folge des Umstandes, dass fast alle diese Sterne an dem Meridiankreise der Ottakringer Sternwarte neu beobachtet wurden, werden diese Positionen sehr genau sein. Die Bekanntgabe der Berliner Meridianbeobachtungen verdanke ich der besonderen Güte des Herrn Geheimrathes A. Auwers.

Nummer		Zahl der Beobachtungen in		1889·0—1890·0	
		α	δ	Rectascension	Declination
1	Weisse, III^{h}, 812 1825	1	1	*3^{h} 41^{m} 7^{s}·32	*+19° 7′ 50″·4
	Berlin, Mer. B. 1875	3	3	3 41 6·87	+19 7 45·3
	Reduction auf 1890 Januar 14			— 0·21	— 1·3
	„ 16			— 0·23	— 1·4
	„ 17			— 0·24	— 1·4
	„ 24			— 0·32	— 1·5
	„ 25			— 0·35	— 1·5
2	Weisse, III^{h}, 921, 922..1825	2	2	3 43 30·46	+19 13 39·6
	Berlin, Mer. B. 1875	2	2	3 43 30·19	+19 13 38·5
	Ottakring, Mer. B. 1890	1	1	3 43 30·24	+19 13 38·6
	Angenommen			3 43 30·21	+19 13 38·7
	Reduction auf 1889 Dec. 24			+ 3·38	+ 10·1
	„ 27			+ 3·37	+ 10·1
3	Weisse, III^{h}, 971 1825	1	1	3 46 11·61	+19 16 32·4
	Berlin, Mer. B. 1875	2	2	3 46 11·39	+19 16 32·0
	Ottakring, Mer. B. 1890	1	1	3 46 11·38	+19 16 34·4
	Angenommen			3 46 11·39	+19 16 32·7
	Reduction auf 1889 Dec. 23			+ 3·40	+ 9·9
4	Weisse, III^{h}, 1217, 1218.1825	2	2	3 58 46·32	+19 50 7·7
	Berlin, Mer. B. 1875	2	2	3 58 46·27	+19 50 8·4
	Ottakring, Mer. B. 1890	2	2	3 58 46·23	+19 50 8·8
	Angenommen			3 58 46·25	+19 50 8·5
	Reduction auf 1889 Nov. 27			+ 3·33	+ 8·7
	„ 28			+ 3·34	+ 8·8
5	Bonn, B. VI; +19° 664.1855	2	2	4 0 10·16	+20 0 8·8
	Ottakring, Mer. B. 1890	1	1	4 0 9·97	+20 0 10·2
	Angenommen			4 0 10·06	+20 0 9·5
	Reduction auf 1889 Nov. 26			+ 3·33	+ 8·6
6	Ottakring, Mer. B. 1890	1	1	4 2 25·96	+20 5 32·0
	Reduction auf 1889 Nov. 21			+ 3·27	+ 8·4
7	Wien, Anschluss 1889	1	1	4 6 53·26	+20 6 53·2
	Ottakring, Mer. B. 1890	1	1	4 6 53·15	+20 6 55·3
	Angenommen			4 6 53·20	+20 6 54·3
	Reduction auf 1889 Nov. 17			+ 3·22	+ 7·9

Die von den Beobachtern erhaltenen Resultate sind in der nun folgenden Tabelle so angeführt, wie dieselben veröffentlicht wurden, mit Ausnahme der Declinationsdifferenz der Beobachtung vom 14. Januar 1890, welche allem Anschein nach vom Beobachter um 10″ zu klein angesetzt wurde.

Nummer der Beobachtung	Datum der Beobachtung	Ortszeit	Beobachtungsort	Nummer des Vergleichsternes	Zahl der Vergleiche in AR	Zahl der Vergleiche in δ	Planet—✳ in Rectascension	Planet—✳ in Declination	Correction für Parallaxe in AR	Correction für Parallaxe in δ
1	1889 November 17	12h 58m 8s	Wien-Währing	7	6	6	−0m23s86	+2′27″4	+0s02	+1″2
2	„ 21	12 19 42	„	6	4	4	+1 25·69	−2 6·8	+0·01	+1·2
3	„ 26	10 49 15	Nizza	5	7	7	+0 23·98	−2 20·2	+0·03	+1·1
4	„ 27	10 31 41	„	4	6	6	+1 8·61	+4 10·9	+0·04	+1·1
5	„ 28	9 39 38	„	4	6	6	+0 30·42	+2 41·4	+0·06	+1·1
6	1889 December 23	9 52 21	Algier	3	28	14	−1 8·78	+2 39·6	+0·01	+0·7
7	„ 24	10 0 29	„	2	16	8	+1 6·35	+4 33·6	+0·02	+0·7
8	„ 27	10 34 33	„	2	20	10	−0 6·89	+1 50·9	+0·05	+0·8
9	1890 Januar 14	9 4 38	„	1	11	11	−1 56·35	+1 0·8	+0·04	+0·7
10	„ 16	8 53 7	„	1	18	18	−2 5·38	+1 17·1	+0·03	+0·7
11	„ 17	10 4 58	„	1	10	10	−2 8·93	+1 28·3	+0·03	+0·7
12	„ 24	10 18 6	„	1	8	12	−2 2·38	+4 26·9	+0·09	+0·8
13	„ 25	9 3 47	„	1	14	6	−1 57·40	+5 3·3	+0·06	+0·9

Der Vergleich der resultirenden Beobachtungsdaten mit den Angaben der Ephemeride ist in der nachstehenden Tafel enthalten, in der die Beobachtungen bereits in Gruppen, deren jede das Material für einen Normalort lieferte, abgetheilt erscheinen.

Nummer der Beobachtung	Zeit der Beobachtung in mittlerer Berliner Zeit	Geocentrische		Beobachtung – Rechnung in	
		Rectascension	Declination	Æ	δ
	I. Normalort.				
1	1889 Nov. 17ᵈ512616	4ʰ 6ᵐ32ˢ58	+20° 9′30″8	—1ˢ57	— 5″0
2	„ 21·485949	4 3 54·93	+20 3 34·8	—1·98	— 5·4
3	„ 26·448229	4 0 37·40	+19 55 59·0	—2·02	— 8·4
4	„ 27·436019	3 59 58·23	+19 54 29·2	—2·07	— 7·5
5	„ 28·399861	3 59 20·07	+19 52 59·8	—2·18	— 8·4
	II. Normalort.				
6	1889 Dec. 23ᵈ419595	3ʰ45ᵐ 6ˢ02	+19°19′22″9	—2ˢ18	—12″7
7	„ 24·425174	3 44 39·96	+19 18 23·1	—2·33	—13·7
8	„ 27·448657	3 43 27·24	+19 15 40·5	—2·37	—15·3
	III. Normalort.				
9	1890 Januar 14ᵈ384965	3ʰ39ᵐ10ˢ35	+19° 8′45″5	—2ˢ49	—12″7
10	„ 16·376806	3 39 1·29	+19 9 1·7	—2·21	—11·5
11	„ 17·426620	3 38 57·73	+19 9 12·9	—2·61	—13·1
12	„ 24·435139	3 39 4·26	+19 12 11·5	—2·31	—10·3
13	„ 25·383449	3 39 9·18	+19 12 48·0	—2·00	— 9·7

Zur Ermittlung der jeweiligen Ephemeridenfehler wurden die Rectascensionen der Beobachtungen vom 17. November 1889 und 25. Januar 1890, die etwas von den übrigen Daten abwichen, nicht benützt. Bei der Ableitung der Coordinaten des ersten

Normalortes wurde der kleine Gang der Ephemeride ermittelt und für den schliesslichen Ort, für den die Mitternacht des 24. November 1889 gewählt wurde, entsprechend in Rechnung gebracht. Hiemit ergibt sich, wie folgt, die

Bildung der Normalorte der zweiten Opposition.

Datum		Rectascension	Declination
1889 November 24·5	Ephemeridenort.....	4h 1m56'87	+19°59' 6'1
	Correction der Ephemeride	— 2·03	— 7·1
	Reduction auf 1890·0.....	+ 1·61	+ 5·4
	I. Normalort.....	4 1 56·45	+19 59 4·4
1889 December 25·5	Ephemeridenort.....	3 44 15·54	+19 17 36·8
	Correction der Ephemeride	— 2·29	— 13·9
	Reduction auf 1890·0.....	+ 1·21	+ 4·7
	II. Normalort.....	3 44 14·46	+19 17 27·6
1890 Januar 19·5	Ephemeridenort.....	3 38 57·11	+19 10 1·8
	Correction der Ephemeride	— 2·41	— 11·5
	Reduction auf 1890·0	+ 0·92	+ 3·4
	III. Normalort.....	3 38 55·62	+19 9 53·7

Die im Vorstehenden nach ihrer Reihenfolge innerhalb der zweiten Erscheinung numerirten Normalorte sind später als der IV., V. und VI. Normalort bezeichnet.

Die eben abgeschlossene Betrachtung der zweiten Opposition zeigt, dass der Planet während derselben durch längere Zeit genau verfolgt wurde, trotzdem seine scheinbare Grösse und seine Lichtstärke ungemein gering waren.

III. Opposition.

Die spärlichen Beobachtungen aus der dritten Erscheinung erstrecken sich über die Zeit vom 12. December 1890 bis zum 10. Februar 1891; zu ihrer Vergleichung liefern die früher angeführten Elemente nachstehende

Ephemeride für die dritte Opposition.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log der Entfernung (279) von ♁	Log der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1890 Dec. 10·5	7h 13m 28·96	+23° 39′ 53·7	0·56517	0·65969	30m 32s
11·5	7 12 57·09	+23 41 14·4	0·56436	0·65972	30 29
12·5	7 12 24·53	+23 42 35·6	0·56358	0·65975	30 25
13·5	7 11 51·28	+23 43 57·2	0·56283	0·65978	30 22
1890 Dec. 14·5	7 11 17·38	+23 45 19·1	0·56212	0·65981	30 19
15·5	7 10 42·88	+23 46 41·3	0·56144	0·65984	30 17
16·5	7 10 7·81	+23 48 3·6	0·56079	0·65987	30 14
17·5	7 9 32·19	+23 49 26·0	0·56018	0·65990	30 11
1890 Dec. 18·5	7 8 56·04	+23 50 48·5	0·55960	0·65993	30 9
19·5	7 8 19·39	+23 52 10·9	0·55906	0·65996	30 7
20·5	7 7 42·27	+23 53 33·2	0·55855	0·65998	30 4
21·5	7 7 4·70	+23 54 55·3	0·55808	0·66001	30 2
1890 Dec. 22·5	7 6 26·73	+23 56 17·1	0·55764	0·66004	30 1
23·5	7 5 48·36	+23 57 38·6	0·55724	0·66007	29 59
24·5	7 5 9·63	+23 58 59·6	0·55688	0·66010	29 58
25·5	7 4 30·57	+24 0 20·1	0·55656	0·66013	29 56
1890 Dec. 26·5	7 3 51·20	+24 1 40·1	0·55627	0·66016	29 55
27·5	7 3 11·56	+24 2 59·4	0·55602	0·66019	29 54
28·5	7 2 31·69	+24 4 18·0	0·55580	0·66021	29 53
29·5	7 1 51·61	+24 5 35·9	0·55562	0·66024	29 52
1890 Dec. 30·5	7 1 11·35	+24 6 52·9	0·55548	0·66027	29 52
31·5	7 0 30·95	+24 8 9·0	0·55538	0·66030	29 51
1891 Jan. 1·5	6 59 50·44	+24 9 24·3	0·55532	0·66032	29 51
2·5	6 59 9·86	+24 10 38·6	0·55530	0·66035	29 51
1891 Jan. 3·5	6 58 29·23	+24 11 51·7	0·55531	0·66038	29 51
4·5	6 57 48·59	+24 13 3·7	0·55536	0·66041	29 51
5·5	6 57 7·97	+24 14 14·5	0·55546	0·66043	29 52
6·5	6 56 27·41	+24 15 24·1	0·55559	0·66046	29 52
1891 Jan. 7·5	6 55 46·94	+24 16 32·4	0·55576	0·66049	29 53
8·5	6 55 6·59	+24 17 39·3	0·55597	0·66052	29 54
9·5	6 54 26·40	+24 18 44·8	0·55621	0·66054	29 55
10·5	6 53 46·40	+24 19 49·0	0·55649	0·66057	29 56
1891 Jan. 11·5	6 53 6·62	+24 20 51·8	0·55681	0·66060	29 57
12·5	6 52 27·10	+24 21 53·2	0·55717	0·66063	29 59
13·5	6 51 47·88	+24 22 53·1	0·55757	0·66065	30 0
14·5	6 51 8·98	+24 23 51·5	0·55800	0·66068	30 2
1891 Jan. 15·5	6 50 30·44	+24 24 48·5	0·55847	0·66071	30 4

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung (279) von ♁	Log. der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1891 Jan. 15·5	6h 50m 30s·44	+24° 24′ 48″·5	0·55847	0·66071	30m 4s
16·5	6 49 52·28	+24 25 44·0	0·55898	0·66074	30 6
17·5	6 49 14·56	+24 26 37·9	0·55952	0·66076	30 8
18·5	6 48 37·30	+24 27 30·3	0·56010	0·66079	30 11
1891 Jan. 19·5	6 48 0·51	+24 28 21·2	0·56071	0·66081	30 13
20·5	6 47 24·23	+24 29 10·5	0·56136	0·66084	30 16
21·5	6 46 48·47	+24 29 58·2	0·56204	0·66086	30 19
22·5	6 46 13·27	+24 30 44·4	0·56275	0·66089	30 22
1891 Jan. 23·5	6 45 38·65	+24 31 29·0	0·56350	0·66092	30 25
24·5	6 45 4·63	+24 32 11·9	0·56428	0·66095	30 28
25·5	6 44 31·24	+24 32 53·2	0·56510	0·66097	30 32
26·5	6 43 58·50	+24 33 32·9	0·56595	0·66100	30 35
1891 Jan. 27·5	6 43 26·45	+24 34 11·1	0·56682	0·66102	30 39
28·5	6 42 55·10	+24 34 47·7	0·56772	0·66105	30 43
29·5	6 42 24·47	+24 35 22·7	0·56865	0·66107	30 47
30·5	6 41 54·58	+24 35 56·2	0·56961	0·66110	30 51
1891 Jan. 31·5	6 41 25·44	+24 36 28·1	0·57060	0·66113	30 55
Feb. 1·5	6 40 57·08	+24 36 58·5	0·57162	0·66116	31 0
2·5	6 40 29·54	+24 37 27·5	0·57267	0·66118	31 4
3·5	6 40 2·82	+24 37 55·0	0·57374	0·66121	31 9
1891 Feb. 4·5	6 39 36·92	+24 38 21·1	0·57484	0·66123	31 13
5·5	6 39 11·87	+24 38 45·8	0·57597	0·66126	31 18
6·5	6 38 47·69	+24 39 9·1	0·57712	0·66128	31 23
7·5	6 38 24·40	+24 39 31·0	0·57829	0·66131	31 28
1891 Feb. 8·5	6 38 2·01	+24 39 51·5	0·57948	0·66133	31 34
9·5	6 37 40·53	+24 40 10·7	0·58069	0·66136	31 39
10·5	6 37 19·98	+24 40 28·5	0·58193	0·66138	31 44
11·5	6 37 0·37	+24 40 45·0	0·58319	0·66141	31 50
1891 Feb. 12·5	6 36 41·71	+24 41 0·3	0·58447	0·66143	31 55

In der folgenden Tabelle sind die einzelnen Positionen der von den Beobachtern benützten Vergleichsterne zusammengestellt. Die Angabe der Berliner Meridianbeobachtungen verdanke ich der Güte des Herrn Director Prof. Dr. E. Becker.

Nummer		Zahl der Beobachtungen in		1890·0—1891·0	
		α	δ	Rectascension	Declination
1	Berlin, Mer. B. 1875	2	2	6h 37m 27s·56	+24° 39′ 24″·3
	Reduction auf 1891 Februar 9			+ 0·44	+ 3·1
	„ „ „ „ 10			+ 0·43	+ 3·1
2	42 ω Geminorum:				
	Newcomb 1850	—	—	6 55 44·36	+24 22 12·9
	Glasgow Cat. 1870	2	4	6 55 44·44	+24 22 13 8
	Berlin, Mer. B. 1875	2	2	6 55 44·33	+24 22 13·0
	Greenwich Cat. 1880	5	12	6 55 44·31	+24 22 12·7
	Angenommen			6 55 46·36	+24 22 13·0
	Reduction auf 1891 Januar 10			+ 0·47	+ 1·8
3	Strassburg, Anschluss. .1890	1	1	6 58 1·06	+23 15 15·4
	Reduction auf 1891 Januar 4			+ 0·39	+ 1·6
4	Bonn. B. VI. +23° 1657 .1855	1	1	7 10 34·50	+23 52 11·5
	Wien, Anschluss 1891	2	2	7 10 34·53	+23 52 12·0
	Angenommen.....			7 10 34·51	+23 52 11·7
	Reduction auf 1890 Dec. 18			+ 3·73	— 4·4
5	Markree Zones.....1850	1	1	7 11 46·63	+23 39 59·4
	Reduction auf 1890 Dec. 12			+ 3·57	— 4·3
	„ „ „ „ 13			+ 3·60	— 4·3

Die beiden im vorstehenden Verzeichniss angeführten Anschlussbeobachtungen basiren auf sehr gut bestimmten Sternen der Berliner Zonen der Astronomischen Gesellschaft. Der fünfte Vergleichstern, dessen genauen Ort aus den Markree Zones mir mitzutheilen Herr A. Marth die Freundlichkeit hatte, ist leider unzureichend bestimmt geblieben, da er in keinem anderen Sternkatalog angeführt ist. Eine Neubeobachtung war nach Wahrnehmung dieses Sachverhältnisses nicht mehr möglich. Wie bei den zwei ersten Oppositionen stelle ich auch hier in der folgenden Tabelle die Angaben der Beobachter zusammen.

Nummer der Beobachtung	Datum der Beobachtung	Ortszeit	Beobachtungsort	Nummer des Vergleichsternes	Zahl der Vergleiche in AR	Zahl der Vergleiche in δ	Planet—* in Rectascension	Planet—* in Declination	Correction für Parallaxe in AR	Correction für Parallaxe in δ
1	1890 December 12	12h 38m 40s	Wien-Währing	5	5	5	+0m 29s·96	+2′ 46″·3	−0s·03	+1″·0
2	„ 13	10 24 48	„	5	4	5	−0 0·69	+4 3·6	−0·09	+1·1
3	„ 18	16 35 53	Nizza	4	6	6	−1 53·16	−1 7·0	+0·10	+1·1
4	1891 Januar 3	10 32 16	Strassburg	3	18	6	+0 26·60	−3 33·4	−0·05	+1·1
5	„ 10	10 30 37	Nizza	2	8	2	−2 1·41	−2 36·9	−0·04	+0·8
6	Februar 9	9 13 54	Strassburg	1	12	12	+0 9·94	+0 39·6	0·00	+0·9
7	„ 10	8 19 17	„	1	20	20	−0 9·93	+1 2·9	−0·03	+0·9

Bei der Beobachtung vom 13. December 1890 wurden die beiden Coordinaten des Planeten nicht gleichzeitig bestimmt, jedoch hat der Beobachter dieselben mit Hilfe der bekannten Bewegung auf den gleichen Moment reducirt. Die Beobachtung vom 10. Januar 1891 ist durch Bewölkung gestört worden.

Die Beobachtungsresultate sowie die Vergleichung derselben mit den gleichzeitigen Angaben der Ephemeride finden sich in dem folgenden Verzeichniss, in dem die Beobachtungen in zwei Partien, deren jede das Materiale für einen Normalort abgab, getrennt angeführt sind.

Nummer der Beobachtung	Zeit der Beobachtung in mittlerer Berliner Zeit	Geocentrische		Beobachtung—Rechnung in	
		Rectascension	Declination	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	I. Normalort.				
1	1890 Dec. 12d497546	7h 12m 20s·13	+23° 42′ 42″·4	−4s·48	+7″·0
2	„ 13·433889	7 11 49·45	+23 43 59·8	−4·55	+8·0
3	„ 18·687581	7 8 45·18	+23 51 1·4	−4·02	−2·5
4	1891 Januar 3·433970	6 58 28·00	+24 11 44·7	−3·91	−2·2
5	„ 10·434074	6 55 45·38	+24 19 38·7	−3·65	−6·2
	II. Normalort.				
6	1891 Februar 9d378310	6h 37m 37s·94	+24° 40′ 7″·9	−5s·16	−0″·5
7	„ 10·340324	6 37 18·03	+24 40 31·2	−5·17	+5·6

Bei der Bildung der Normalorte ist hier für die erste Periode unstreitig auf den Gang der Ephemeride Rücksicht zu nehmen. Obwohl der Vergleichstern, der bei den zwei Wiener Beobachtungen benützt wurde, sehr wenig genau bestimmt zu sein scheint und die letzte Beobachtung zu Nizza durch die Ungunst des Wetters beeinträchtigt wurde, lassen sich doch die Rectascensionsfehler der Ephemeride sehr gut durch die einfache Formel $d\alpha = -4^s{\cdot}17 + 0^s{\cdot}0288[t - t_0]$, worin t_0 das Datum des 24. Decembers bedeutet und $t - t_0$ in Tagen auszudrücken ist, darstellen. Für die Declinationen ist eine solche Formel nicht zutreffend; ich habe daher aus den zwei am besten verbürgten Angaben vom 18. December 1890 und vom 3. Januar 1891 das Mittel genommen. Im Ganzen muss jedoch der so gebildete Normalort als sehr unsicher bezeichnet werden. Der zweite, vermuthlich genauere Normalort ist durch eine der Anzahl der gemachten Vergleiche gemäss erfolgte Gewichtsertheilung zwischen den zwei Februarbeobachtungen erhalten worden.

Bildung der Normalorte der dritten Opposition.

Datum		Rectascension	Declination
1890 December 24·5	Ephemeridenort.....	$7^h\ 5^m\ 9^s{\cdot}63$	$+23°58'59''{\cdot}6$
	Correction der Ephemeride	— 4·17	— 2·3
	Reduction auf 1890·0.....	— 2·39	+ 1·7
	I. Normalort.....	7 5 3·07	+23 58 59·0
1891 Februar 9·5	Ephemeridenort.....	6 37 40·53	+24 40 10·7
	Correction der Ephemeride	— 5·17	+ 3·1
	Reduction auf 1890·0.....	— 3·01	— 0·5
	II. Normalort.....	6 37 32·35	+24 40 13·3

Mit der Bildung dieser Normalorte, welche in der Reihe aller Normalorte der siebente und achte sind, ist das gegenwärtig zur Verfügung stehende Beobachtungsmateriale erschöpft.

Ableitung der Bahnelemente.

Die Verwerthung der auf den vorhergehenden Seiten zusammengestellten Beobachtungsresultate unterliegt keiner Schwierigkeit. Der Übersichtlichkeit wegen sollen die Normalorte in ihrer Gesammtheit hier noch einmal angeführt werden.

Normalorte des Planeten (279) Thule.

I. 1888 October	30·5:	$\alpha = 0^h51^m\ 3^s{\cdot}64$;	$\delta = +\ 2°41'57''{\cdot}4$
II. 1888 December	1·5	0 42 33·33	+ 2 10 42·0
III. 1889 Januar	2·5	0 49 13·23	+ 3 16 24·4
IV. 1889 November	24·5	4 1 56·45	+19 59 4·4
V. 1889 December	25·5	3 44 14·46	+19 17 27·6
VI. 1890 Januar	19·5	3 38 55·62	+19 9 53·7
VII. 1890 December	24·5	7 5 3·07	+23 58 59·0
VIII. 1891 Februar	9·5	6 37 32·35	+24 40 13·3

Zu dieser Aufstellung ist zu bemerken, dass trotz der bedeutenden zeitlichen Ausdehnung der von dem Planeten in seiner Bahn zurückgelegte Weg nicht gross ist. Während die

meisten Asteroiden im Verlauf des Zeitraumes, über den die vorstehenden Normalorte vertheilt sind, etwa die Hälfte eines Umlaufes um die Sonne zurücklegen, hat der Planet (279) Thule nicht einmal den vierten Theil desselben durchlaufen, so dass man sagen kann, dass man hier bei der Bestimmung der Bahnelemente Verhältnisse vorfindet, wie sie in der Regel nach der ersten Wiederauffindung eines kleinen Planeten vorliegen. Zur Illustration dieser Sachlage möge folgende Tabelle dienen, welche — unter Benützung von später sich ergebenden Daten — für die einzelnen Normalorte die heliocentrischen Coordinaten und den geocentrischen Abstand liefert, so wie diese Grössen aus den schliesslichen Elementen erhalten wurden.

Nummer des Normal-ortes	Datum	Δt	v	log r	log Δ
I.	1888 October 30·5.....	0d0	69°55'3	0·61462	0·50496
II.	1888 December 1·5.....	32·0	73 43·6	0·61682	0·55050
III.	1889 Januar 2·5.....	64·0	77 30·0	0·61905	0·60705
IV.	1889 November 24·5....	390·0	113 46·6	0·64137	0·53050
V.	1889 December 25·5....	421·0	117 2·4	0·64328	0·55225
VI.	1890 Januar 19·5.....	446·0	119 39·2	0·64477	0·58862
VII.	1890 December 24·5....	785·0	153 36·5	0·65997	0·55672
VIII.	1891 Februar 9·5.....	832·0	158 9·5	0·66123	0·58057

Man sieht hieraus, dass der zur Verfügung stehende heliocentrische Bogen ein verhältnissmässig kleiner ist. Dieser Umstand, sowie die Unsicherheit der bei Beginn der Rechnung vorliegenden Elemente und die Ungenauigkeit, mit der einzelne Coordinaten verschiedener Normalorte sich bestimmen liessen, waren die Ursachen, wesshalb von einer strengen Ausgleichung vorläufig Abstand genommen wurde.

Auch war der allerdings nicht beträchtliche störende Einfluss der grossen Planeten noch nicht ermittelt worden. Um nun Elemente zu erhalten, welche den bisherigen Lauf des Asteroiden genügend darstellen und für die Störungsrechnung, sowie für die Vorausberechnung der Orte des Planeten für die nächsten Jahre hinreichend genau sind, wurde die Methode der Variation der

geocentrischen Distanzen verwendet. Als Fundamentalorte, welche von den Elementen genau wiedergegeben werden sollen, wurden der erste und der achte Normalort gewählt, weil dieselben den ganzen beobachteten Lauf des Planeten umfassen und ausreichend sicher zu sein schienen.

Als willkürliche Variation der zu den geocentrischen Coordinaten dieser Normalorte gehörigen Abstände des Planeten von der Erde wurden fünf Einheiten der dritten Stelle des Logarithmus der betreffenden Distanz angenommen. Der Ausgangswerth der zum ersten Normalort gehörigen Distanz wurde der Ephemeride für die erste Opposition entlehnt, während für den Ausgangswerth der geocentrischen Entfernung des Planeten zur Zeit des zweiten Fundamentalortes durch ein einfaches Interpolationsverfahren ein etwas genauerer Werth als jener, der in der Ephemeride für die dritte Opposition für diesen Zeitpunkt angeführt ist, erhalten wurde. Die gesammten Rechnungen sind auf den Äquator als Fundamentalebene bezogen worden. In der nachstehenden Tafel finden sich die drei Elementensysteme, sowie die zugehörigen geocentrischen Distanzen, welche den zwei Fundamentalorten entsprechen und die Äquatorconstanten der drei Systeme.

System	I.	II.	III.
$\log \rho_{\mathrm{I}}$	0·505380	0·510380	0·505380
$\log \rho_{\mathrm{VIII}}$	0·580620	0·580620	0·585620
Mittlerer Äquator 1890·0; Epoche 1891 Februar 9·5 mittlere Berliner Zeit			
L	103°37'36"4	103°22'29"0	102°13'34"2
M	153 58 39·9	148 47 4·0	145 28 59·6
Ω	5 37 44·6	5 38 19·0	5 37 55·6
ω	304 1 11·9	308 57 6·0	311 6 39·0
i	24 9 19·5	24 9 16·7	24 9 38·0
φ	4 40 44·8	4 10 24·6	4 54 6·3
$\log a$	0·630075	0·634511	0·634973
μ	402"619	396"497	395"864
A	39° 9'32"0	44° 5'57"7	46°14' 8"5
B	310 11 6·9	315 7 38·5	317 15 46·9
C	304 11 6·9	308 57 6·0	311 5 39·0
$\sin a$	9·999650	9·999648	9·999649
$\sin b$	9·960623	9·960626	9·960606
$\sin c$	9·611950	9·611936	9·612036

Berechnet man nach diesen Daten die heliocentrischen Coordinaten des Planeten für die Zeiten der Normalorte und verbindet sie mit den in dem folgenden Täfelchen enthaltenen gleichzeitigen Sonnencoordinaten, die ebenfalls auf das mittlere Äquinoctium 1890·0 bezogen sind,

Nummer des Normal-ortes	Datum	X	Y	Z
I.	1888 October 30·5 ..	—0·7817711	—0·5604544	—0·2431519
II.	1888 December 1·5..	—0·3325491	—0·8510683	—0·3692342
III.	1889 Januar 2·5	+0·2187398	—0·8794076	—0·3815321
IV.	1889 November 24·5	—0·4490687	—0·8060207	—0·3496913
V.	1889 December 25·5	+0·0761037	—0·8994067	—0·3902084
VI.	1890 Januar 19·5....	+0·4907218	—0·7825829	—0·3395224
VII.	1890 December 24·5	+0·0540840	—0·9007526	—0·3907885
VIII.	1891 Februar 9·5 ...	+0·7666216	—0·5703320	—0·2474396

so erhält man die im nachstehenden Tableau angeführten Daten, die zur Aufstellung der empirischen Differentialquotienten dienen.

Datum des Normalortes und Zahl der Beobachtungen		Rectascension	Declination
1888 October 30·5	I. Normalort.....	12°45'54'6	+2°41'57'4
10 Beob. in α.	System I.....	12 45 54·6	+2 41 57·4
10 Beob. in δ.	System II.....	12 45 54·4	+2 41 57·3
	System III	12 45 54·7	+2 41 57·3
1888 December 1·5	II. Normalort	10 38 20·0	+2 10 42·0
4 Beob. in α.	System I.....	10 38 24·6	+2 10 43·6
4 Beob. in δ.	System II.....	10 38 40·0	+2 10 34·5
	System III	10 39 39·0	+2 11 18·2
1889 Januar 2·5	III. Normalort	12 18 18·5	+3 16 24·4
1 Beob. in α.	System I.....	12 17 57·3	+3 16 22·6
2 Beob. in δ.	System II.....	12 16 31·4	+3 15 20·4
	System III	12 20 8·8	+3 17 24·1

Datum des Normalortes und Zahl der Beobachtungen		Rectascension	Declination
1889 November 24·5	IV. Normalort	60°29' 6"7	+19°59' 4"4
4 Beob. in α.	System I.....	60 27 37·1	+19 58 47·9
5 Beob. in δ.	System II	60 8 56·7	+19 54 19·2
———	System III	60 41 48·6	+20 2 20·3
1889 December 25·5	V. Normalort . ..	56 3 36·9	+19 17 27·6
3 Beob. in α.	System I.....	56 2 26·4	+19 17 14·1
3 Beob. in δ.	System II	55 46 28·6	+19 12 54·0
———	System III	56 17 20·2	+19 21 16·8
1890 Januar 19·5	VI. Normalort	54 43 54·3	+19 9 53·7
4 Beob. in α.	System I.....	54 42 52·8	+19 9 39·1
4 Beob. in δ.	System II	54 29 2·5	+19 5 46·5
———	System III	54 57 21·7	+19 13 39·5
1890 December 24·5	VII. Normalort ...	106 15 46·1	+23 58 59·0
5 Beob. in α.	System I	106 15 36·3	+23 59 6·6
2 Beob. in δ.	System II	106 13 22·7	+23 59 15·2
———	System III	106 12 4·8	+23 59 37·8
1891 Februar 9·5	VIII. Normalort ...	99 23 5·3	+24 40 13·3
2 Beob. in α.	System I	99 23 5·3	+24 40 13·5
2 Beob. in δ.	System II	99 23 5·2	+24 40 13·3
———	System III	99 23 5·3	+24 40 13·1

Diese Übersicht zeigt, dass alle drei Systeme die beiden Fundamentalorte innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung, welche unter Benützung sechsstelliger Tafeln durchgeführt wurde, dargestellt werden. Bildet man nun, dem Princip der Methode der Variation der Distanzen gemäss, die Differenzen zwischen den Coordinaten der übrigen Normalorte und den Werthen, welche das System I für deren Zeiten gibt und setzt diese Unterschiede zu ermittelnden Änderungen der geocentrischen Distanzen der beiden Fundamentalorte proportional, wobei die Differenzen zwischen den Angaben, welche die Systeme I und II, respective I und III für die Normalorte liefern, den Einfluss

der empirischen Variation der Distanzen ergeben, so erhält man nachstehende Gleichungen:

1. Aus den Rectascensionen:

Normalort	II	$-4'6 = +15'4$	$d \log \rho_{I}$	$+74'4$ $d \log \rho_{VIII}$
„	III	$+21 \cdot 2 = -85 \cdot 9$		$+131 \cdot 5$
„	IV	$+89 \cdot 6 = -1120 \cdot 4$		$+851 \cdot 5$
„	V	$+70 \cdot 5 = -962 \cdot 8$		$+893 \cdot 8$
„	VI	$+61 \cdot 5 = -830 \cdot 3$		$+868 \cdot 9$
„	VII	$+9 \cdot 8 = -133 \cdot 6$		$-211 \cdot 5$

2. Aus den Declinationen:

Normalort	II	$-1'6 = -9'1$	$d \log \rho_{I}$	$+34'6$ $d \log \rho_{VIII}$
„	III	$+1 \cdot 8 = -62 \cdot 2$		$+61 \cdot 5$
„	IV	$+16 \cdot 5 = -268 \cdot 7$		$+212 \cdot 4$
„	V	$+13 \cdot 5 = -260 \cdot 1$		$+242 \cdot 7$
„	VI	$+14 \cdot 6 = -232 \cdot 6$		$+240 \cdot 4$
„	VII	$-7 \cdot 6 = +8 \cdot 6$		$+31 \cdot 2$

Die Betrachtung dieser Tabelle lässt erkennen, dass die bereits erwähnten Mängel der Rectascension des III. und der Declination des VII. Normalortes sich auch hier geltend machen. Aus dieser Ursache habe ich die aus diesen Coordinaten resultirenden Bedingungsgleichungen, welche überdies keinen wesentlichen Beitrag zur Bestimmung der Unbekannten aus obigen Gleichungen liefern können, bei der Ausgleichung nicht weiter in Rechnung gezogen. Multiplicirt man die übrigen aus den Rectascensionsdifferenzen gebildeten Gleichungen mit dem Cosinus der betreffenden Declination und ermittelt dann die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten, so bleiben nach dieser Ausgleichung, deren Ergebnisse nicht weiter benützt wurden und daher nicht angeführt zu werden brauchen, in den Coordinaten der Normalorte folgende Fehler übrig:

Normalort	II.....	$\cos \delta d\alpha = -2'2$;	$d\delta = -1'9$;
„	III.....	—;	$-2 \cdot 8$;
„	IV.....	$+2 \cdot 4$;	$-4 \cdot 2$;
„	V.....	$-1 \cdot 9$;	$-6 \cdot 0$;
„	VI.....	$+0 \cdot 2$;	$-2 \cdot 6$;
„	VII.....	$-4 \cdot 0$;	— .

Dieses Resultat erschien nicht befriedigend. Wenn nun auch die meisten der Normalorte auf eine grosse Genauigkeit keinen Anspruch machen können, da sie nur auf wenigen Beobachtungen eines sehr lichtschwachen Gestirnes beruhen und manche nur von dem Orte eines einzigen, vielleicht eine eigene Bewegung besitzenden Sternes abhängen und überdies die Störungen, die der Planet während der zwei Jahre, welche die Normalorte umfassen, erlitten hat, nicht berücksichtigt wurden, so war es doch angemessen, nach einer in den Grundlagen der vorstehenden Rechnungen befindlichen Ursache der obigen, etwas zu grossen, übrigbleibenden Fehler zu suchen. Von den vier Coordinaten des Planeten, welche die Fundamente für die vorliegende Bahnbestimmung bilden, sind die dem ersten Normalorte angehörigen gewiss nicht wesentlich fehlerhaft, ebenso ist die Rectascension des zweiten Fundamentalortes hinreichend genau. Anders steht es jedoch mit der Declination des letzteren Ortes, welche auf zwei nicht völlig übereinstimmende Beobachtungen gegründet ist, was zur Folge hat, dass diese Declination möglicher Weise um einige Bogensecunden von der richtigen abweicht. Es empfiehlt sich nun, die Variation dieser Coordinate als eine dritte Unbekannte in die Bedingungsgleichungen einzuführen, um eine bessere Darstellung der Normalorte und damit ein aller Wahrscheinlichkeit nach der wirklichen Bahn des Planeten näher kommendes Elementensystem zu erhalten. Die zur Bestimmung der Coëfficienten, mit welchen die neue Unbekannte in den einzelnen Bedingungsgleichungen multiplicirt erscheint, nothwendigen Formeln ergeben sich aus der folgenden einfachen Betrachtung.[1] Bezeichnen x, y, z rechtwinklige heliocentrische, auf den Äquator bezogene Coordinaten, wobei ein angefügter Index die Nummer eines geocentrischen Ortes bedeutet, so bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_2 &= n_1 x_1 + n_3 x_3; \\ y_2 &= n_1 y_1 + n_3 y_3; \\ z_2 &= n_1 z_1 + n_3 z_3; \end{aligned} \qquad (1)$$

worin die n die Verhältnisse der bezüglichen Dreiecke bedeuten. Ferner ergeben sich leicht die folgenden Gleichungen, worin X, Y, Z die rechtwinkligen Sonnencoordinaten bezeichnen:

[1] Cfr. Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1878, Anhang.

$$\begin{aligned} \rho \cos \alpha \cos \delta &= x + X; \\ \rho \sin \alpha \cos \delta &= y + Y; \\ \rho \sin \delta &= z + Z; \end{aligned} \tag{2}$$

durch deren Differentiation man sofort erhält:

$$\begin{aligned} \rho \cos \delta d\alpha &= -\sin \alpha dx + \cos \alpha dy; \\ \rho d\delta &= -(\cos \alpha dx + \sin \alpha dy) \sin \delta + \cos \delta dz. \end{aligned} \tag{3}$$

Sei nun die Declination des mit dem Index 3 versehenen Ortes jene, nach welcher differenzirt werden soll, so findet man, wenn man diese Declination als einzige Variable betrachtet, aus dem Gleichungssysteme (2):

$$\begin{aligned} dx_3 &= -\rho_3 \sin \delta_3 \cos \alpha_3 d\delta_3; \\ dy_3 &= -\rho_3 \sin \delta_3 \sin \alpha_3 d\delta_3; \\ dz_3 &= +\rho_3 \cos \delta_3 d\delta_3. \end{aligned} \tag{4}$$

Differenzirt man nun das System (1) unter der allerdings nicht strenge erfüllten Voraussetzung, dass man n_3 als eine constante Grösse betrachten darf, und setzt die für dx_3, dy_3 und dz_3 hiedurch gewonnenen einfachen Ausdrücke in das System (4) ein und substituirt das Resultat in die mit (3) bezeichneten Gleichungen, so erhält man nach einer leichten Reduction zwei Formeln, welche die Abhängigkeit der polaren geocentrischen Coordinaten eines beliebigen Normalortes von einer Variation der Declination eines Fundamentalortes erkennen lassen. Man findet nämlich:

$$\begin{aligned} \rho_2 \cos \delta_2 d\alpha_2 &= n_3 \rho_3 \sin \delta_3 \sin (\alpha_2 - \alpha_3) d\delta_3; \\ \rho_2 d\delta_2 &= n_3 \rho_3 (\cos \delta_2 \cos \delta_3 + \sin \delta_2 \sin \delta_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3)) d\delta_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Die oben erwähnte Voraussetzung, von welcher bei der Herleitung dieser zwei Formeln Gebrauch gemacht wurde, wird in Anbetracht des Umstandes, dass der vermuthliche Werth der Variation der Declination wenige Bogensecunden nicht übersteigen kann, zulässig erscheinen, da die Änderungen der n im Vergleich zu jenen der Coordinaten gering sind.

Führt man nun in die auf der vorigen Seite aufgestellten Bedingungsgleichungen die Declination des zweiten Fundamental-

ortes, welche, da sie dem achten Normalort entstammt, mit δ_{VIII} bezeichnet werden möge, als eine Grösse ein, deren wahrscheinliche Variation ebenfalls ermittelt werden soll, so ist hiedurch auch eine Möglichkeit gegeben, dem Umstande, dass das Elementensystem I diese Coordinate nicht völlig darstellt, sondern einen Fehler von $-0''2$ übrig lässt, Rechnung zu tragen, indem eben die Declination des zweiten Fundamentalortes zur Aufstellung einer weiteren Bedingungsgleichung Anlass bietet.

Berechnet man nach den obigen Formeln (5) die Differentialcoëfficienten der Variation des zweiten Fundamentalortes für die Zeiten der Normalorte und führt sie in die Bedingungsgleichungen ein, so erhält man, wenn alles logarithmisch angesetzt wird (nach Multiplication der von den Rectascensionen herrührenden Gleichungen mit dem Cosinus der betreffenden Declination) unter den Annahmen:

$$u = 3\cdot02214\ d\log\rho_I;$$
$$v = 2\cdot92614\ d\log\rho_{VIII};$$
$$w = d\delta_{VIII};$$
$$\log \text{Fehlereinheit} = 1\cdot92534;$$

wodurch die Homogenität der Bedingungsgleichungen hergestellt wird, die folgenden Bedingungsgleichungen:

1. Aus den Rectascensionen:

Normalort:				
II	$8\cdot73711_n$	$= 8\cdot16477\ u$	$+8\cdot94512\ v$	$+8\cdot42818_n\ w$
IV	$0\cdot00000$	$= 0\cdot00000_n$	$9\cdot97702$	$9\cdot38246_n$
V	$9\cdot89775$	$= 9\cdot93600_n$	$0\cdot00000$	$9\cdot33256_n$
VI	$9\cdot83878$	$= 9\cdot87204_n$	$9\cdot98807$	$9\cdot33069_n$
VII	$9\cdot02668$	$= 9\cdot06416_n$	$9\cdot35996_n$	$8\cdot71884$

2. Aus den Declinationen:

Normalort:				
II	$8\cdot27878_n$	$= 7\cdot93660_n\ u$	$+8\cdot61294\ v$	$+8\cdot76600\ w$
III	$8\cdot32993$	$= 8\cdot77135_n$	$8\cdot86274$	$9\cdot00965$
IV	$9\cdot29214$	$= 9\cdot40667_n$	$9\cdot40101$	$9\cdot84574$
V.	$9\cdot20499$	$= 9\cdot39270_n$	$9\cdot45893$	$9\cdot85678$
VI	$9\cdot23901$	$= 9\cdot34417_n$	$9\cdot45479$	$9\cdot83801$
VIII	$7\cdot37569_n$	$= -\infty$	$-\infty$	$0\cdot00000$

Die Behandlung dieser Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate führt auf die folgenden Normalgleichungen, in welchen jedoch die Coëfficienten nicht logarithmisch angesetzt worden sind:

$$+2\cdot49153\,u-2\cdot71111\,v+0\cdot06476\,w=-2\cdot33789,$$
$$-2\cdot71111\,u+3\cdot14071\,v-0\cdot07708\,w=+2\cdot52633,$$
$$+0\cdot06476\,u-0\cdot07708\,v+2\cdot65042\,w=-0\cdot18117;$$

aus welchen sich die Eliminationsgleichungen, wie folgt, ergeben:

$$+2\cdot491530\,u-2\cdot711110\,v+0\cdot064760\,w=-2\cdot337890;$$
$$+0\cdot190657\,v-0\cdot0066125\,w=-0\cdot017605;$$
$$+2\cdot648511\,w=-0\cdot1210135.$$

Unter Rücksichtnahme auf die Homogenitätsfactoren und den Werth der Fehlereinheit erhält man hieraus für die Unbekannten folgende Werthe:

$$d\log\rho_{\mathrm{I}}=-415\cdot570;\quad d\log\rho_{\mathrm{VIII}}=-46\cdot875;\quad d\delta_{\mathrm{VIII}}=-3''85$$

(in Einheiten der sechsten Stelle des Logarithmus).

Die Ausgleichung ergibt somit, dass die Declination der Beobachtung vom 9. Februar 1891 den Vorzug vor jener vom 10. Februar 1891 verdient. In den Bedingungsgleichungen bleiben folgende Fehler übrig:

Normalort	II	$\cos\delta\,d\alpha=-2''7$;	$d\delta=-1''8$
„	III	—	$-2\cdot4$
„	IV	$+3\cdot2$	$-1\cdot1$
„	V	$-1\cdot9$	$-3\cdot0$
„	VI	$-0\cdot2$	$+0\cdot2$
„	VII	$-2\cdot8$	—

Berechnet man nun mit den resultirenden Werthen:

$$\log\rho_{\mathrm{I}}=0\cdot5049644;\quad \log\rho_{\mathrm{VIII}}=0\cdot5805731;$$
$$\delta_{\mathrm{VIII}}=+24^\circ40'9''45$$

die Elemente, so erhält man als schliessliches Elementensystem das nachstehende:

(279) Thule.

Epoche: 1891 Februar 9·5 mittlere Berliner Zeit.

$L = 103°39'38'0$
$M = 154\ 26\ 15·3$
$\pi = 309\ 13\ 22·7$
$\Omega = 5\ 37\ 39·7$
$\omega = 303\ 35\ 43·0$
$i = 24\ 9\ 16·4$
$\varphi = 4\ 43\ 14·2$
$\log a = 0·6296674$
$\mu = 403''1860.$

mittlerer Äquator und Äquinoctium 1890·0

Die zugehörigen Gauss'schen Äquatorconstanten sind die folgenden, wobei die in eckigen Klammern befindlichen Zahlen die Logarithmen der eigentlichen Coëfficienten sind:

$x = [9·999650].r.\sin(38°43'58'8+v);$
$y = [9·960626].r.\sin(309\ 45\ 32·5+v);$
$z = [9·611935].r.\sin(303\ 35\ 43·0+v).$

Berechnet man nun mit diesen Grössen die Coordinaten des Planeten für die Zeiten der Normalorte, so findet man schliesslich folgende Darstellung:

Normalort I.....	$\cos\delta d\alpha =$ 0''0;	$d\delta =$ 0''0
„ II.....	−2·7	−1·7
„ III	—	−2·5
„ IV	+3·1	−0·9
„ V	−2·4	−3·0
„ VI	−0·6	+0·5
„ VII....	−2·6	−2·7
„ VIII...	0·0	0·0.

Man bemerkt, dass die beiden völlig darzustellenden Orte dieser Forderung entsprechend durch die neuen Elemente wiedergegeben werden; auch die bei der Ausgleichung nicht benützte Declination des VII. Ortes wird zureichend dargestellt. Die Abweichungen von dem aus den Bedingungsgleichungen resultirenden Tableau halten sich innerhalb der durch die Unsicherheit der logarithmischen Rechnung bedingten Fehler der Darstellung,

so dass die gesammten Rechnungen hinreichend geprüft erscheinen.

Die Ausgleichung selbst kann als genügend angesehen werden, wenn auch in einzelnen Coordinaten Fehler zurückbleiben, welche etwas grösser sind als man sie erwarten konnte, z. B. in der Rectascension des IV. Normalortes. Die Ursache dieser letzteren Erscheinung liegt wohl hauptsächlich in der Vernachlässigung des Einflusses der Störungen. Das vorstehende Elementensystem wird genügend sicher sein, um die Berechnung der Störungen, welche der Asteroid durch die grossen Planeten erleidet, in zuverlässiger Weise durchzuführen und die Aufstellung von nahe richtigen Ephemeriden für die nächsten Oppositionen ermöglichen.

Auf die Ebene der Ekliptik und auf eine andere Epoche bezogen lauten die neu ermittelten Elemente wie folgt:

(279) Thule.

Epoche: 1891 Februar 20·0 mittlere Berliner Zeit.

L	$= 104°21'30''8$	
M	$= 155\ 36\ 48\cdot8$	
π	$= 308\ 44\ 42\cdot0$	mittlere Ekliptik und Äquinoctium 1890·0
Ω	$= 75\ 26\ 12\cdot1$	
ω	$= 233\ 18\ 29\cdot9$	
i	$= 2\ 22\ 34\cdot2$	
φ	$= 4\ 43\ 14\cdot2$	
$\log a$	$= 0\cdot6296674$	
μ	$= 403''1860.$	

Diese der Wahrheit wohl schon ziemlich nahe kommende Bahn bestätigt neuerdings die Thatsache, dass der Planet (279) Thule der sonnenfernste unter den bis jetzt bekannten Asteroiden ist und daher in Folge der bedeutenden Störungen, die er bei einer Annäherung an Jupiter erleidet, ein Mittel zur Bestimmung der Masse dieses grossen Planeten liefert. Eine solche Annäherung der zwei Himmelskörper findet aber in Folge der gegenseitigen Bewegungsverhältnisse nur dreimal im Laufe eines Jahrhunderts statt. Die vorstehenden Elemente lassen in Verbindung mit dem gleichzeitigen heliocentrischen Orte des Jupiter erkennen, dass

noch etwa ein Vierteljahrhundert wird verfliessen müssen, ehe mit Aussicht auf Erfolg an eine Bestimmung der Jupitermasse aus der Bewegung des Planeten Thule geschritten werden kann. Es wäre sehr zu wünschen, dass während dieser Zeit durch eine genaue Verfolgung des Asteroiden eine sorgfältige Bestimmung seiner Bahn ermöglicht würde und dadurch auch der astronomisch wichtigste Zweck, der durch die Bearbeitung dieses Planeten erreicht werden kann, gefördert würde.

Da für die Beobachter die äussere Erscheinung des Planeten von grosser Wichtigkeit ist, so habe ich zur Bestimmung der mittleren Oppositionsgrösse alle diesbezüglich gemachten Angaben gesammelt und in folgender Tabelle zusammengestellt.

Nummer	Ort	Datum	Geschätzte Grösse	g	m_0	Anmerkung
1	Wien	1888 October 25	13^m5	7·92	13·63	—
2	Wien	1889 November 17	14·0	8·13	13·84	—
3	Nizza	1889 November 27	14·0	8·14	13·85	—
4	Algier	1889 December 24	14·2	8·23	13·94	—
5	Algier	1890 Januar 14	14·0	7·88	13·59	—
6	Strassburg	1891 Januar 3	14·0	7·92	13·63	—
7	Nizza	1891 Januar 10	14·2	8·11	13·82	Wolken
8	Strassburg	1891 Februar 9	15·0	8·79	14·50	Dunst

Bei diesen Berechnungen ist auf die Exstinction keine Rücksicht genommen worden; der Maximaleinfluss derselben beträgt nämlich 0^m2, und zwar wird dieser Betrag nur bei der ersten Schätzung erreicht. In Folge des hohen Standes des Planeten während der zwei letzten Oppositionen erreicht der Einfluss der Exstinction für alle übrigen Grössenangaben nicht 0^m1, so dass eine Rücksichtnahme auf dieselbe unnöthig erscheint.

Schliesst man nun die letzte Schätzung, die offenbar in Folge ungünstiger Witterungsverhältnisse einen zu geringen Werth lieferte, aus, so folgen $g = 8·05$ und die mittlere Oppositionsgrösse des Planeten (279) Thule $= 13^m76$.

Diese Angaben sind natürlich noch recht ungenau, lassen aber erkennen, dass der Planet durchaus kein sehr kleiner Himmelskörper ist, aber in Folge seiner weiten Entfernung von Sonne und Erde sehr lichtschwach erscheint. Das kleinste Fernrohr, in welchem er bisher beobachtet wurde, ist der zwölfzollige Refractor der Wiener Universitätssternwarte gewesen.

Um die Himmelsgegenden, welche der Planet während eines Umlaufes durchzieht, und die Sichtbarkeitsverhältnisse, die bei den einzelnen Oppositionen obwalten, kennen zu lernen, habe ich in zehntägigen Intervallen ein Oppositionsschema berechnet, welches mit dem Argument der Sonnenlänge den geocentrischen Ort des Planeten, seine Distanzen von Sonne und Erde, sowie seine scheinbare Grösse und Lichtstärke gibt. Diese im Nachstehenden mitgetheilte Tafel ist mit den für 1890·0 giltigen Sonnencoordinaten berechnet worden, auf welches Äquinoctium auch die heliocentrischen Coordinaten des Asteroiden bezogen wurden.

Oppositionstafel für den Planeten (279) Thule.

Berliner Mittag	Länge der Sonne	α (279)	δ (279)	Log. der Entfernung (279)—⊙	Log. der Entfernung (279)—♁	Grösse	Lichtstärke
Jan. 0	280° 2·7	6ʰ 44ᵐ·1	+24° 20′	0·6599	0·5547	14ᵐ·1	0·72
10	290 14·1	7 28·7	+23 38	0·6623	0·5578	14·2	0·70
20	300 25·1	8 12·4	+22 10	0·6637	0·5595	14·2	0·69
Jan. 30	310 35·0	8 55·0	+19 59	0·6640	0·5598	14·2	0·69
Febr. 9	320 42·9	9 36·1	+17 12	0·6633	0·5587	14·2	0·70
19	330 48·7	10 15·7	+13 56	0·6616	0·5563	14·1	0·71
März 1	340 51·9	10 54·0	+10 18	0·6589	0·5526	14·1	0·73
11	350 51·7	11 31·2	+ 6 25	0·6554	0·5477	14·0	0·76
21	0 48·6	12 7·6	+ 2 23	0·6511	0·5417	14·0	0·80
März 31	10 42·1	12 43·7	− 1 41	0·6462	0·5350	13·9	0·84
April 10	20 32·0	13 19·7	− 5 40	0·6407	0·5277	13·9	0·89
20	30 18·7	13 56·0	− 9 32	0·6349	0·5198	13·8	0·95
April 30	40 2·3	14 32·9	−13 7	0·6289	0·5116	13·7	1·01
Mai 10	49 42·7	15 10·6	−16 22	0·6228	0·5033	13·7	1·08
20	59 20·9	15 49·4	−19 10	0·6169	0·4952	13·6	1·16

Berliner Mittag	Länge der Sonne	α (279)	δ (279)	Log. der Entfernung (279)—⊙	Log. der Entfernung (279)—♁	Grösse	Lichtstärke
Mai 30	68°56'8	16h 29m3	—21°27'	0·6113	0·4875	13m5	1·23
Juni 9	78 30·8	17 10·0	—23 8	0·6062	0·4804	13·5	1·30
19	88 3·8	17 51·5	—24 8	0·6017	0·4742	13·4	1·36
Juni 29	97 36·0	18 33·4	—24 26	0·5979	0·4692	13·4	1·42
Juli 9	107 7·8	19 15·2	—24 1	0·5950	0·4654	13·3	1·46
19	116 40·3	19 56·5	—22 55	0·5932	0·4630	13·3	1·49
Juli 29	126 13·6	20 37·1	—21 8	0·5924	0·4621	13·3	1·50
Aug. 8	135 48·0	21 16·6	—18 46	0·5927	0·4627	13·3	1·50
18	145 24·6	21 55·0	—15 53	0·5940	0·4648	13·3	1·48
Aug. 28	155 3·4	22 32·3	—12 35	0·5964	0·4683	13·4	1·44
Sept. 7	164 44·6	23 8·8	— 8 57	0·5998	0·4732	13·4	1·38
17	174 29·2	23 44·7	— 5 4	0·6040	0·4792	13·5	1·32
Sept. 27	184 16·8	0 20·4	— 1 2	0·6089	0·4862	13·5	1·25
Oct. 7	194 7·6	0 56·3	+ 3 2	0·6145	0·4939	13·6	1·17
17	204 2·2	1 32·6	+ 7 3	0·6205	0·5021	13·6	1·10
Oct. 27	213 59·8	2 9·8	+10 55	0·6267	0·5106	13·7	1·03
Nov. 6	224 0·6	2 48·2	+14 31	0·6329	0·5191	13·8	0·96
16	234 4·6	3 28·0	+17 43	0·6390	0·5273	13·9	0·90
Nov. 26	244 11·0	4 9·3	+20 24	0·6448	0·5349	13·9	0·85
Dec. 6	254 19·4	4 52·0	+22 28	0·6500	0·5418	14·0	0·80
16	264 29·8	5 35·9	+23 49	0·6545	0·5478	14·1	0·76
Dec. 26	274 40·9	6 20·5	+24 22	0·6583	0·5527	14·1	0·73
36	284 53·2	7 5·4	+24 6	0·6612	0·5564	14·1	0·71

Diese Tafel zeigt, dass der Planet mit wenigen Ausnahmen nur solche Gegenden des Himmels durchwandern kann, für welche den Beobachtern bereits Sternkarten zur Verfügung stehen. Die nördlichste Declination, die der Planet erreichen kann, beträgt etwa +24°5, die südlichste —24°5, so dass derselbe während seiner Oppositionen stets auf der nördlichen Erdhalbkugel, auf der sich zu seiner Beobachtung geeignete Instrumente befinden, verfolgt werden kann. Die Tabelle lässt ferner

entnehmen, dass die Oppositionsgrösse des Asteroiden nur geringen Änderungen unterliegt, dass aber der Planet in einer Gegend seiner Bahn aufgefunden wurde, in der seine Erscheinung nicht die günstigste war. Die bisher beobachteten Oppositionen sind sämmtlich ebenfalls unter stets schlechteren Helligkeitsverhältnissen verlaufen, so dass der Rückschluss gerechtfertigt erscheint, dass der Planet (279) Thule in keiner Erscheinung wegen seiner zu geringen scheinbaren Grösse unbeobachtet bleiben kann. Da die nächsten Oppositionen unter immer besseren Verhältnissen erfolgen werden und der vorausberechnete Lauf des Planeten von dem wahren wohl nicht stark abweichen dürfte, so steht zu hoffen, dass nach Vollendung eines Umlaufes seit der Entdeckung ein Material an Beobachtungen vorliegen wird, welches eine genaue Bestimmung der Bahn dieses merkwürdigen Asteroiden ermöglichen wird.

Störungsrechnung.

Die zuletzt erhaltenen Elemente des Planeten sollen nun dazu dienen, um seinen künftigen Lauf festzustellen. Dabei ist es nothwendig, auf den störenden Einfluss, welchen die grossen Planeten auf die Bewegung des Asteroiden ausüben, Rücksicht zu nehmen. Da bei der Ableitung der Elemente selbst die Störungen während der $2^1/_3$ Jahre, die der Planet beobachtet wurde, nicht in Rechnung gezogen wurden, und die Elemente überhaupt auf einem für eine definitive Bearbeitung unzureichenden Materiale beruhen, so wurde die Störungsrechnung, die demgemäss ebenfalls nur einen provisorischen Charakter haben kann, nur für die Planeten Jupiter und Saturn durchgeführt und dieselbe auf die ersten Potenzen der störenden Kräfte beschränkt. Die zur Berechnung benützte Methode ist jene, die Theodor v. Oppolzer in seinem „Entwurf einer Mondtheorie“ (Denkschriften der kais. Akad. der Wissensch., Bd. LI) entwickelt hat; die Formeln, deren man sich bei Beschränkung auf die ersten Potenzen der störenden Kräfte zu bedienen hat, sind von Oppolzer in seiner zweiten Abhandlung über die Bahn des Planeten (237) Cölestina (Sitzb. der kais. Akad. der Wissensch., II. Abth., Bd. 93) zusammengestellt worden. Dieselben sind bei der vorliegenden Rechnung nach Verbesserung einiger leicht erkennbarer Druck-

fehler benützt worden und lieferten die im Folgenden nur in dem zur Berechnung der nächsten drei Erscheinungen nöthigen Umfange publicirten Tabellen.

I. Differentialquotienten der Störungen durch Jupiter und Saturn.

Mittlerer Berliner Mittag	$10^7 \frac{dI}{dt}$	$10^7 \frac{dII}{dt}$	$10^7 \frac{dIII}{dt}$	$10^7 \frac{dIV}{dt}$	$10^7 \frac{dV}{dt}$
1891 April 1	+658·6	−1012·5	−899·0	− 6·6	+21·4
Juni 20	+678·8	−1150·1	−764·8	− 3·6	+22·0
September 8	+697·6	−1271·9	−609·2	− 0·6	+21·6
November 27	+713·3	−1372·7	−437·4	+ 2·1	+20·2
1892 Februar 15	+723·7	−1447·6	−254·7	+ 4·4	+18·3
Mai 5	+725·3	−1490·6	− 70·4	+ 6·4	+16·3
Juli 24	+714·4	−1497·2	+104·1	+ 6·8	+12·3
October 12	+687·9	−1464·1	+258·4	+ 6·6	+ 8·8
1893 Januar 0	+643·9	−1394·6	+380·3	+ 5·4	+ 5·4
März 21	+584·0	−1292·8	+467·2	+ 3·3	+ 2·5
Juni 9	+513·3	−1169·4	+521·1	+ 0·7	+ 0·4
August 28	+439·6	−1035·6	+551·5	− 2·1	− 0·8
1893 November 16	+371·4	− 900·8	+571·4	− 4·7	− 1·0
1894 Februar 4	+313·2	− 770·3	+589·1	− 7·2	− 0·4
April 25	+266·3	− 646·7	+606·6	− 9·3	+ 1·0
Juli 14	+228·3	− 530·9	+623·3	−10·2	+ 2·8

Für das Intervall der Störungsrechnung ist der Zeitraum von 80 Tagen gewählt worden, weil dies bei der langsamen Bewegung und der Grösse der gegenseitigen Abstände für die provisorische Störungsrechnung ausreichend erschien. Die Coordinaten der störenden Planeten wurden dem Berliner astronomischen Jahrbuch und für das Jahr 1894 dem Nautical Almanac entnommen; für die störenden Massen wurde in Einheiten der Sonnenmasse angenommen:

$$\text{Masse des Jupiter} = \frac{1}{1047 \cdot 879}; \quad \text{Masse des Saturn} = \frac{1}{3501 \cdot 6}.$$

Die Ausführung der ersten Integration, wobei als Osculationsepoche der mittlere Berliner Mittag des 20. Februar 1891 gewählt wurde, ergab die nachstehenden Functionswerthe.

II. Functionswerthe.

Mittlerer Berliner Mittag			10^7 I	10^7 II	10^7 III	10^7 IV	10^7 V
1891	April	1	+ 326·8	— 488·0	— 463·7	— 3·6	+ 10·1
	Juni	20	+ 995·6	— 1570·5	—1297·7	— 8·7	+ 31·9
	September	8	+1683·9	— 2783·1	—1986·2	—10·8	+ 53·8
	November	27	+2389·7	— 4107·3	—2510·7	—10·1	+ 74·7
1891	Februar	15	+3108·6	— 5519·8	—2857·2	— 6·8	+ 94·0
	Mai	5	+3834·2	— 6991·8	—3019·4	— 1·3	+111·4
	Juli	24	+4555·3	— 8488·9	—3001·3	+ 5·4	+125·8
	October	12	+5257·8	— 9972·7	—2817·9	+12·2	+136·3
1893	Januar	0	+5925·2	—11405·0	—2495·8	+18 3	+143·4
	März	21	+6540·2	—12751·1	—2069·2	+22·7	+147·3
	Juni	9	+7089·4	—13983·4	—1572·7	+24·7	+148·6
	August	28	+7565·7	—15086·4	—1035·0	+24·0	+148·9
1893	November	16	+7970·6	—16054·4	— 472·9	+20·6	+147·4
1894	Februar	4	+8312·0	—16889·4	+ 107·4	+14·6	+146·6
	April	25	+8600·9	—17597·2	+ 705·3	+ 6·3	+146·9
	Juli	14	+8847·8	—18185·1	+1320·3	— 3·7	+148·7

Mit Hilfe dieser Integrale findet man vermittelst der Formeln:

$$\gamma = -2\,\mathrm{I} + \frac{x}{a}\,\mathrm{II} - \frac{y}{a}\,\mathrm{III};$$

$$\frac{z}{a} = -\frac{x}{a}\,\mathrm{IV} + \frac{y}{a}\,\mathrm{V};$$

$$\frac{\partial \Delta M}{\partial t} = \left(\frac{80\mu}{17^7}\right)\mathrm{I} + \left(\frac{160\,\mu}{10^7}\right)\gamma$$

nach Ausführung einer weiteren Integration für den letzten differentiellen Ausdruck die jeweiligen Werthe von γ, $\frac{z}{a}$ und ΔM. Dabei ist μ die tägliche siderische Bewegung; x und y sind die rechtwinkligen Coordinaten des Planeten in der ungestörten Ellipse, deren halbe grosse Axe a ist. Zur Berechnung der Ephemeriden hat man nun die jeweilige ungestörte mittlere Anomalie um ΔM zu vermehren und den ungestörten Radius

vector durch $(1+\gamma)$ zu dividiren. Die durch den Betrag von $\frac{z}{a}$ gegebene Störung senkrecht zur Ebene der Bahn muss nach den äquatorealen Coordinatenaxen zerlegt werden; die so erhaltenen Componenten können dann unmittelbar mit den ungestörten, rechtwinkeligen äquatorealen Coordinaten des Planeten für den betreffenden Zeitpunkt verbunden werden. In dieser Form finden sich die Störungswerthe in der folgenden Tabelle vor, deren Angaben sofort zur Berechnung der Ephemeriden benützt werden können.

III. Störungswerthe.

Mittlerer Berliner Mittag	ΔM	$\log(1+\gamma)$	Δx_δ	Δy_δ	Δz_δ
1891 April 1	+0' 0'27	9·9999998	—0·00000001	+0·00000009	—0·00000019
Juni 20	+0 2·15	9·9999962	—0·00000006	+0·00000064	—0·00000144
September 8	+0 5·30	9·9999873	—0·00000017	+0·00000174	—0·00000390
November 27	+0 8·92	9·9999722	—0·00000033	+0·00000334	—0·00000748
1892 Februar 15	+0 12·11	9·9999501	—0·00000053	+0·00000537	—0·00001204
Mai 5	+0 13·78	9·9999202	—0·00000077	+0·00000777	—0·00001742
Juli 24	+0 12·72	9·9998817	—0·00000103	+0·00001045	—0·00002341
October 12	+0 7·53	9·9998336	—0·00000131	+0·00001328	—0·00002975
1893 Januar 0	—0 3·34	9·9997752	—0·00000159	+0·00001613	—0·00003613
März 21	—0 21·61	9·9997058	—0·00000186	+0·00001884	—0·00004220
Juni 9	—0 49·15	9·9996250	—0·00000210	+0·00002125	—0·00004761
August 28	—1 27·90	9·9995328	—0·00000229	+0·00002321	—0·00005201
1893 November 16	—2 19·72	9·9994301	—0·00000242	+0·00002458	—0·00005507
1894 Februar 4	—3 26·21	9·9993185	—0·00000248	+0·00002523	—0·00005654
April 25	—4 48·73	9·9992004	—0·00000247	+0·00002507	—0·00005618
Juli 14	—6 28·26	9·9990783	—0·00000237	+0·00002400	—0·00005376

Hiemit ist vorläufig die Störungsrechnung abgeschlossen worden. Die ebenfalls berechneten Störungen für die bereits beobachteten Erscheinungen werden seinerzeit in Verbindung mit den vorstehenden Werthen die Ableitung genauerer Elemente ermöglichen, worauf dann definitive Störungswerthe ermittelt werden sollen.

Oppositionsephemeriden.

Da die schliesslich erhaltenen Elemente den Lauf des Planeten für längere Zeit hinreichend genau wiedergeben dürften, so folgen hier Ephemeriden für die drei nächsten Oppositionen. Dieselben erstrecken sich, um grössere Beobachtungsreihen zu erhalten, über mehrere Monate und sind den Bedürfnissen der Beobachter entsprechend mit einer Reihe von Anmerkungen versehen worden.

Es finden sich nämlich ausser den Angaben über die Helligkeit des Planeten solche über die eventuelle Verschiebung der scheinbaren Bahn, sowie einige Reductionsdaten, welche die Grösse der durch die Präcession bewirkten Coordinatenänderungen angeben. Diese Daten sind sowohl für das Äquinoctium der Bonner Durchmusterung, als auch für mehrere Sternkartenepochen angeführt. Der Planet bewegt sich während der Opposition des Jahres 1892 durch Gegenden des Himmels, die zum Theil in der Wiener Sternkarte Nr. 4 und in der Pariser Karte Nr. 30 aufgezeichnet sind. Die Gegenden, welche der Planet in seiner nächsten Erscheinung im Jahre 1893 durchwandert, sind in der Wiener Sternkarte Nr. 3 und der Pariser Karte Nr. 36 festgelegt, während die von dem Asteroiden zur Zeit seiner im Jahre 1894 stattfindenden Erdnähe durchzogenen Regionen nur zum kleineren Theil in der Chacornac'schen Karte Nr. 46 wiedergegeben sind.

Hinsichtlich dieser letzten Opposition, für welche hier eine Vorausberechnung geliefert wird, ist zu bemerken, dass für dieselbe die Ephemeride ursprünglich für den Meridian von Greenwich berechnet worden ist und dann erst, um die Gleichförmigkeit mit den übrigen herzustellen, auf die Berliner Mitternacht des betreffenden Tages reducirt wurde. Da nämlich das Berliner „Astronomische Jahrbuch" für das Jahr 1894 noch nicht erschienen ist, wurden die Sonnencoordinaten dem „Nautical Almanac" entnommen. Weil dieses Jahrbuch die Sonnenorte für das mittlere Äquinoctium 1894·0 liefert, mussten die heliocentrischen Orte des Planeten und somit auch die Elemente und Äquatorconstanten desselben auf diese Epoche bezogen werden. Es ergaben sich nun für die durch die Präcession bewirkten jährlichen Änderungen der Elemente die folgenden Werthe:

1. Äquatorelemente.

$$d\pi' = +50'34;$$
$$d\Omega' = +\ 1{\cdot}58;$$
$$d\omega' = +48{\cdot}76;$$
$$di' = -\ 1{\cdot}97.$$

2. Ekliptikalelemente.

$$d\pi = +50'25;$$
$$d\Omega = +38{\cdot}80;$$
$$d\omega = +11'45;$$
$$di = +\ 0{\cdot}07.$$

Durch entsprechende Verbindung dieser Werthe mit den für das Äquinoctium 1890·0 giltigen erhält man für die auf das Äquinoctium 1894·0 bezogenen Elemente folgende Daten:

1. Äquatorelemente.

$$\pi' = 309°16'44'0;$$
$$\Omega' = 5\ 37\ 46{\cdot}0;$$
$$\omega' = 303\ 38\ 58{\cdot}0;$$
$$i' = 24\ 9\ 8{\cdot}5.$$

2. Ekliptikalelemente.

$$\pi = 308°48'\ 3'0;$$
$$\Omega = 75\ 28\ 47{\cdot}3;$$
$$\omega = 233\ 19\ 15{\cdot}7;$$
$$i = 2\ 22\ 34{\cdot}5.$$

Beide Systeme liefern für die heliocentrischen Coordinaten des Planeten nachstehende Formeln:

$$x = [9{\cdot}999650].r.\sin(\ 38°47'20'1+v);$$
$$y = [9{\cdot}960634].r.\sin(309\ 48\ 53{\cdot}9+v);$$
$$z = [9{\cdot}611898].r.\sin(303\ 38\ 58{\cdot}0+v).$$

In diesen auf das Äquinoctium 1894·0 bezogenen Ausdrücken sind die in eckige Klammern gesetzten Zahlen die Logarithmen der eigentlichen Coëfficienten.

Opposition 1892.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung (279) von ♂	Log. der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1892					
Januar 0·5 ..	10ʰ 0ᵐ12ˢ36	+14°53'21"5	0·58883	0·66352	32ᵐ14ˢ
1·5 ..	9 59 57·77	+14 55 15·8	0·58753	0·66351	32 9
2·5 ..	9 59 42·32	+14 57 14·3	0·58625	0·66350	32 3
3·5 ..	9 59 26·02	+14 59 17·0	0·58499	0·66349	31 58
Januar 4·5..	9 59 8·89	+15 1 23·8	0·58375	0·66348	31 52
5·5..	9 58 50·93	+15 3 34·5	0·58254	0·66346	31 47
6·5..	9 58 32·15	+15 5 49·1	0·58135	0·66345	31 42
7·5..	9 58 12·56	+15 8 7·5	0·58018	0·66344	31 37
Januar 8·5..	9 57 52·17	+15 10 29·5	0·57903	0·66343	31 32
9·5..	9 57 31·00	+15 12 58·2	0·57791	0·66342	31 27
10·5..	9 57 9·05	+15 15 24·3	0·57681	0·66340	31 22
11·5..	9 56 46·35	+15 17 56·7	0·57574	0·66339	31 17
Januar 12·5..	9 56 22·90	+15 20 32·4	0·57470	0·66338	31 13
13·5..	9 55 58·71	+15 23 11·3	0·57368	0·66337	31 8
14·5..	9 55 33·78	+15 25 53·2	0·57269	0·66336	31 4
15·5..	9 55 8·15	+15 28 38·0	0.57172	0·66335	31 0
Januar 16·5..	9 54 41·83	+15 31 25·5	0·57078	0·66333	30 56
17·5..	9 54 14·85	+15 34 15·7	0·56987	0·66332	30 52
18·5..	9 53 47·22	+15 37 8·4	0·56899	0·66331	30 48
19·5..	9 53 18·95	+15 40 3·6	0·56815	0·66330	30 45
Januar 20·5..	9 52 50·07	+15 43 1·0	0·56734	0·66328	30 41
21·5..	9 52 20·59	+15 46 0·6	0·56656	0·66327	30 38
22·5..	9 51 50·53	+15 49 2·1	0·56581	0·66326	30 35
23·5..	9 51 19·91	+15 52 5·4	0·56508	0·66325	30 32
Januar 24·5..	9 50 48·75	+15 55 10·3	0·56439	0·66324	30 29
25·5..	9 50 17·06	+15 58 16·8	0·56374	0·66322	30 26
26·5..	9 49 44·88	+16 1 24·7	0·56312	0·66321	30 24
27·5..	9 49 12·24	+16 4 33·9	0·56254	0·66320	30 21
Januar 28·5..	9 48 39·17	+16 7 44·2	0·56199	0·66318	30 19
29·5 .	9 48 5·69	+16 10 55·4	0·56148	0·66317	30 17
30·5..	9 47 31·80	+16 14 7·4	0·56100	0·66316	30 15
31·5..	9 46 57·53	+16 17 20·0	0·56056	0·66314	30 13

Am 15. Januar 1891 beträgt:
Die Grösse des Planeten: 14"2; die Lichtstärke 0·66;
die Reduction auf das Äquinoctium 1855·0 in $\mathcal{R}$: $-2^m\ 0^s$; in δ: $+10'5$;
" " " " " 1875·0 in $\mathcal{R}$: -0^m55^s; in δ: $+\ 4'8$;
die einer Variation der $\mathcal{R}$ von $\pm 1^m$ entsprechende Änderung der Declination $\mp 5'6$.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung (279) von ♄	Log. der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1892					
Februar 0·5	9ʰ 46ᵐ 57ˢ·53	+16° 17′ 20″·0	0·56056	0·66314	30ᵐ 13ˢ
1·5	9 46 22·94	+16 20 33·1	0·56016	0·66313	30 11
2·5	9 45 48·05	+16 23 46·5	0·55979	0·66311	30 10
3·5	9 45 12·89	+16 27 0·0	0·55946	0·66310	30 8
Februar 4·5	9 44 37·49	+16 30 13·4	0·55917	0·66308	30 7
5·5	9 44 1·88	+16 33 26·6	0·55892	0·66307	30 6
6·5	9 43 26·10	+16 36 39·5	0·55871	0·66305	30 5
7·5	9 42 50·15	+16 39 51·9	0·55853	0·66304	30 4
Februar 8·5	9 42 14·03	+16 43 3·6	0·55839	0·66302	30 4
9·5	9 41 37·77	+16 46 14·5	0·55828	0·66301	30 3
10·5	9 41 1·42	+16 49 24·4	0·55821	0·66299	30 3
11·5	9 40 25·06	+16 52 33·1	0·55818	0·66298	30 3
Februar 12·5	9 39 48·70	+16 55 40·4	0·55819	0·66296	30 3
13·5	9 39 12·35	+16 58 46·3	0·55824	0·66295	30 3
14·5	9 38 36·04	+17 1 50·6	0·55832	0·66293	30 4
15·5	9 37 59·78	+17 4 53·2	0·55844	0·66292	30 4
Februar 16·5	9 37 23·61	+17 7 54·0	0·55860	0·66290	30 5
17·5	9 36 47·56	+17 10 52·9	0·55880	0·66288	30 5
18·5	9 36 11·65	+17 13 49·6	0·55903	0·66287	30 6
19·5	9 35 35·93	+17 16 43·9	0·55929	0·66285	30 7
Februar 20·5	9 35 0·41	+17 19 35·9	0·55959	0·66283	30 9
21·5	9 34 25·12	+17 22 25·5	0·55993	0·66282	30 10
22·5	9 33 50·10	+17 25 12·7	0·56031	0·66280	30 12
23·5	9 33 15·36	+17 27 57·5	0·56073	0·66279	30 14
Februar 24·5	9 32 40·95	+17 30 39·6	0·56118	0·66277	30 15
25·5	9 32 6·89	+17 33 18·7	0·56166	0·66276	30 17
26·5	9 31 33·19	+17 35 54·6	0·56218	0·66275	30 19
27·5	9 30 59·90	+17 38 27·3	0·56274	0·66273	30 22
Februar 28·5	9 30 27·04	+17 40 56·8	0·56333	0·66271	30 24
29·5	9 29 54·61	+17 43 22·9	0·56396	0·66270	30 27
30·5	9 29 22·65	+17 45 45·6	0·56462	0·66268	30 30

Opposition in Rectascension: 1892 Februar 11.

Am 15. Februar 1892 beträgt:
Die Grösse des Planeten: 14ᵐ·1; die Lichtstärke 0·70;
die Reduction auf das Äquinoctium 1855·0 in $\mathcal{R}$: $-2^m\ 2^s$; in δ: $+10'1$;
„ „ „ „ „ 1875·0 in $\mathcal{R}$: $-0^m 56^s$; in δ: $+\ 4'5$;
die einer Variation der $\mathcal{R}$ von $\pm 1^m$ entsprechende Änderung der Declination $\mp 4'8$.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung (279) von ♂	Log. der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1892					
März 0·5....	9ʰ 29ᵐ 54ˢ·61	+17° 43′ 22″·9	0·56396	0·66267	30ᵐ 27ˢ
1·5....	9 29 22·65	+17 45 45·6	0·56462	0·66266	30 30
2·5....	9 28 51·20	+17 48 4·8	0·56531	0·66264	30 33
3·5....	9 28 20·39	+17 50 20·4	0·56603	0·66263	30 36
März 4·5....	9 27 49·88	+17 52 32·2	0·56678	0·66261	30 39
5·5....	9 27 20·23	+17 54 40·2	0·56756	0·66260	30 42
6·5....	9 26 51·06	+17 56 44·4	0·56837	0·66258	30 46
7·5....	9 26 22·49	+17 58 44·7	0·56911	0·66257	30 49
März 8·5....	9 25 54·56	+18 0 41·1	0·56998	0·66255	30 53
9·5....	9 25 27·28	+18 2 33·4	0·57088	0·66254	30 56
10·5....	9 25 0·67	+18 4 21·6	0·57191	0·66253	31 1
11·5....	9 24 34·73	+18 6 5·7	0·57287	0·66251	31 5
März 12·5....	9 24 9·50	+18 7 45·6	0·57385	0·66250	31 9
13·5....	9 23 44·99	+18 9 21·5	0·57486	0·66248	31 14
14·5....	9 23 21·22	+18 10 53·4	0·57589	0·66246	31 18
15·5....	9 22 58·19	+18 12 21·2	0·57694	0·66244	31 23
März 16·5....	9 22 35·91	+18 13 44·7	0·57802	0·66242	31 27
17·5....	9 22 14·40	+18 15 3·8	0·57912	0·66240	31 32
18·5....	9 21 53·68	+18 16 18·4	0·58024	0·66238	31 37
19·5....	9 21 33·75	+18 17 28·6	0·58139	0·66236	31 42
März 20·5....	9 21 14·63	+18 18 34·4	0·58256	0·66234	31 47
21·5....	9 20 56·32	+18 19 35·8	0·58375	0·66232	31 52
22·5....	9 20 38·84	+18 20 32·8	0·58496	0·66230	31 59
23·5....	9 20 22·19	+18 21 25·5	0·58619	0·66228	32 3
März 24·5....	9 20 6·38	+18 22 14·0	0·58743	0·66226	32 9
25·5....	9 19 51·43	+18 22 58·1	0·58868	0·66224	32 14
26·5....	9 19 37·35	+18 23 37·9	0·58995	0·66222	32 20
27·5....	9 19 24·14	+18 24 13·2	0·59124	0·66220	32 26
März 28·5....	9 19 11·81	+18 24 44·1	0·59255	0·66218	32 31
29·5....	9 19 0·37	+18 25 10·7	0·59388	0·66215	32 37
30·5....	9 18 49·83	+18 25 33·0	0·59523	0·66213	32 43
31·5....	9 18 40·20	+18 25 51·2	0·59659	0·66211	32 50

Am 15. März 1892 beträgt:

Die Grösse des Planeten: 14″·2; die Lichtstärke: 0·64;

die Reduction auf das Äquinoctium 1855·0 in $\mathcal{R}$: $-2^{m}4^{s}$; in δ: $+9'5$;

die einer Variation der $\mathcal{R}$ von $\pm 1^{m}$ entsprechende Änderung der Declination $\mp 4'0$.

Opposition 1893.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung (279) von ♃	Log. der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1893					
Februar 0·5	12ʰ 30ᵐ 34ˢ·64	−0° 20′ 41″·9	0·58100	0·65107	31ᵐ 53ˢ
1·5	12 30 28·20	−0 19 27·5	0·58248	0·65103	31 47
2·5	12 30 20·88	−0 18 7·8	0·58098	0·65098	31 40
3·5	12 30 12·69	−0 16 42·8	0·57949	0·65093	31 34
Februar 4·5	12 30 3·63	−0 15 12·7	0·57802	0·65087	31 27
5·5	12 29 53·71	−0 13 37·6	0·57657	0·65081	31 21
6·5	12 29 42·93	−0 11 57·4	0·57514	0·65076	31 15
7·5	12 29 31·31	−0 10 12·2	0·57372	0·65071	31 9
Februar 8·5	12 29 18·84	−0 8 22·0	0·57232	0·65066	31 3
9·5	12 29 5·54	−0 6 26·9	0 57094	0·65061	30 57
10·5	12 28 51·41	−0 4 26·9	0·56958	0·65055	30 51
11·5	12 28 36·46	−0 2 22·0	0·56824	0·65050	30 45
Februar 12·5	12 28 20·69	−0 0 12·3	0·56692	0·65045	30 40
13·5	12 28 4·12	+0 2 2·1	0·56562	0·65040	30 34
14·5	12 27 46·75	+0 4 21·1	0·56434	0·65035	30 29
15·5	12 27 28 60	+0 6 44·7	0·56308	0 65029	30 23
Februar 16·5	12 27 9·68	+0 9 12·7	0·56184	0·65024	30 18
17·5	12 26 49·99	+0 11 45·0	0·56063	0·65019	30 13
18·5	12 26 29·55	+0 14 21·6	0·55944	0·65014	30 8
19·5	12 26 8·37	+0 17 2·4	0·55828	0·65009	30 3
Februar 20·5	12 25 46·46	+0 19 47·2	0·55715	0·65004	29 59
21·5	12 25 23·84	+0 22 35·9	0·55606	0·64999	29 54
22·5	12 25 0·54	+0 25 28·4	0·55499	0·64993	29 50
23·5	12 24 36·57	+0 28 24·5	0·55395	0·64988	29 45
Februar 24·5	12 24 11·95	+0 31 24·1	0·55293	0·64983	29 41
25·5	12 23 46·69	+0 34 27·1	0·55194	0·64978	29 37
26·5	12 23 20·82	+0 37 33·3	0·55098	0·64972	29 33
27·5	12 22 54·34	+0 40 42·6	0·55006	0·64967	29 29
Februar 28·5	12 22 27·28	+0 43 54·8	0·54917	0·64962	29 26
29·5	12 21 59·67	+0 47 9·9	0·54831	0·64957	29 22

Am 15. Februar 1893 beträgt:

Die Grösse des Planeten: 14ᵐ·1; die Lichtstärke: 0·73;

die Reduction auf das Äquinoctium 1855·0 in A: −1ᵐ 57ˢ; in δ: +12′·7;

die einer Variation der A von $\pm 1^m$ entsprechende Änderung der Declination $\mp 7''.2$.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung (279) von ♂	Log. der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1893					
März 0·5....	12ʰ 22ᵐ 27ˢ·28	+0° 43′ 54″·8	0·54917	0·64962	29ᵐ 26ˢ
1·5...	12 21 59·67	+0 47 9·9	0·54831	0·64957	29 22
2·5....	12 21 31·51	+0 50 27·7	0·54748	0·64951	29 19
3·5....	12 21 2·82	+0 53 48·0	0·54669	0·64946	29 16
März 4·5....	12 20 33·63	+0 57 10·7	0·54593	0·64941	29 13
5·5....	12 20 3·96	+1 0 35·7	0·54520	0·64936	29 10
6·5....	12 19 33·83	+1 4 2·8	0·54451	0·64931	29 7
7·5....	12 19 3·25	+1 7 31·9	0·54385	0·64926	29 4
März 8·5....	12 18 31·25	+1 11 2·8	0·54323	0·64920	29 2
9·5....	12 18 0·86	+1 14 35·4	0·54264	0·64915	29 0
10·5....	12 17 29·99	+1 18 9·4	0·54209	0·64910	28 57
11·5....	12 16 56·97	+1 21 44·7	0·54157	0·64904	28 55
März 12·5....	12 16 24·52	+1 25 21·1	0·54109	0·64899	28 53
13·5....	12 15 51·78	+1 28 58·5	0·54065	0·64894	28 52
14·5....	12 15 18·77	+1 32 36·6	0·54025	0·64888	28 50
15·5....	12 14 45·52	+1 36 15·2	0·53989	0·64883	28 49
März 16·5....	12 14 12·06	+1 39 54·2	0·53956	0·64877	28 47
17·5....	12 13 38·41	+1 43 33·4	0·53927	0·64872	28 46
18·5....	12 13 4·60	+1 47 12·7	0·53902	0·64866	28 45
19·5....	12 12 30·66	+1 50 51·8	0·53881	0·64861	28 44
März 20·5....	12 11 56·61	+1 54 30·5	0·53864	0·64856	28 44
21·5....	12 11 22·48	+1 58 8·6	0·53851	0·64850	28 43
22·5....	12 10 48·31	+2 1 45·9	0·53842	0·64844	28 43
23·5....	12 10 14·12	+2 5 22·3	0·53837	0·64839	28 43
März 24·5....	12 9 39·95	+2 8 57·6	0·53835	0·64833	28 42
25·5....	12 9 5·82	+2 12 31·5	0·53837	0·64828	28 43
26·5....	12 8 31·76	+2 16 3·9	0·53843	0·64822	28 43
27·5....	12 7 57·80	+2 19 34·7	0·53853	0·64817	28 43
März 28·5....	12 7 23·95	+2 23 3·7	0·53866	0·64811	28 44
29·5....	12 6 50·25	+2 26 30·7	0·53883	0·64806	28 44
30·5....	12 6 16·72	+2 29 55·6	0·53904	0·64800	28 45
31·5....	12 5 43·38	+2 33 18·2	0·53929	0·64795	28 46

Opposition in $\mathcal{R}$: 1893 März 23.

Am 15. März 1893 beträgt:

Die Grösse des Planeten: 14ᵐ·0; die Lichtstärke: 0·81;

die Reduction auf das Äquinoctium 1855·0 in $\mathcal{R}$: $-1^m 57^s$; in δ: $+12''7$;

die einer Variation der $\mathcal{R}$ von $\pm 1^m$ entsprechende Änderung der Declination $\mp 6''6$.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung (279) von ♂	Log. der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1893					
April 0·5...	12ʰ 5ᵐ43ˢ38	+2°33'18"2	0·53929	0·64795	28ᵐ46ˢ
1·5...	12 5 10·26	+2 36 38·4	0·53958	0·64790	28 47
2·5...	12 4 37·39	+2 39 56·0	0·53990	0·64784	28 49
3·5...	12 4 4·78	+2 43 10·8	0·54026	0·64779	28 50
April 4·5...	12 3 32·47	+2 46 22·7	0·54066	0·64773	28 52
5·5...	12 3 0·48	+2 49 31·5	0·54109	0·64768	28 53
6·5...	12 2 28·83	+2 52 37·2	0·54156	0·64762	28 55
7·5...	12 1 57·54	+2 55 39·5	0·54206	0·64757	28 57
April 8·5...	12 1 26·65	+2 58 38·4	0·54260	0·64751	28 59
9·5...	12 0 56·17	+3 1 33·7	0·54317	0·64745	29 2
10·5...	12 0 26·12	+3 4 25·4	0·54377	0·64739	29 4
11·5...	11 59 56·53	+3 7 13·2	0·54441	0·64734	29 7
April 12·5...	11 59 27·42	+3 9 57·1	0·54508	0·64728	29 9
13·5...	11 58 58·82	+3 12 36·9	0·54578	0·64722	29 12
14·5...	11 58 30·74	+3 15 12·5	0·54652	0·64717	29 15
15·5...	11 58 3·21	+3 17 43·8	0·54729	0·64712	29 18
April 16·5...	11 57 36·25	+3 20 10·7	0·54809	0·64706	29 22
17·5...	11 57 9·87	+3 22 33·0	0·54892	0·64701	29 25
18·5...	11 56 44·10	+3 24 50·7	0·54978	0·64695	29 28
19·5...	11 56 18·95	+3 27 3·7	0·55067	0·64690	29 32
April 20·5...	11 55 54·43	+3 29 11·8	0·55158	0·64684	29 36
21·5...	11 55 30·56	+3 31 15·0	0·55252	0·64679	29 40
22·5...	11 55 7·37	+3 33 13·2	0·55349	0·64674	29 44
23·5...	11 54 44·86	+3 35 6·3	0·55449	0·64668	29 48
April 24·5...	11 54 23·04	+3 36 54·3	0·55551	0·64662	29 52
25·5...	11 54 1·93	+3 38 37·1	0·55655	0·64656	29 56
26·5...	11 53 41·54	+3 40 14·7	0·55762	0·64650	30 1
27·5...	11 53 20·87	+3 41 47·0	0·55871	0·64644	30 5
April 28·5...	11 53 2·94	+3 43 13·9	0·55983	0·64637	30 10
29·5...	11 52 44·74	+3 44 35·4	0·56097	0·64631	30 15
30·5...	11 52 27·38	+3 45 51·6	0·56213	0·64625	30 19
31·5...	11 52 11·57	+3 47 2·4	0·56330	0·64619	30 24

Am 15. April 1893 beträgt.

Die Grösse des Planeten: 14ᵐ0; die Lichtstärke: 0·79;

Die Reduction auf das Äquinoctium 1855·0 in $\mathcal{R}$: -1^m57^s; in δ: $+12'7$;

die einer Variation der $\mathcal{R}$ von $\pm 1^m$ entsprechende Änderung der Declination $\mp 6'0$.

Opposition 1894.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung (279) von ♂	Log. der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1894					
April 0·5...	15ʰ 15ᵐ 37ˢ·97	−16° 25′ 47″·0	0·52997	0·62388	28ᵐ 10ˢ
1·5...	15 15 18·39	−16 24 31·5	0·52862	0·62380	28 4
2·5...	15 14 57·94	−16 23 12·6	0·52729	0·62373	27 59
3·5...	15 14 36·62	−16 21 50·5	0·52598	0·62366	27 54
April 4·5...	15 14 14·44	−16 20 25·2	0·52470	0·62358	27 49
5·5...	15 13 51·41	−16 18 56·9	0·52345	0·62351	27 44
6·5...	15 13 27·56	−16 17 25·6	0·52223	0·62344	27 40
7·5...	15 13 2·91	−16 15 51·4	0·52104	0·62337	27 35
April 8·5...	15 12 37·48	−16 14 14·4	0·51988	0·62320	27 31
9·5...	15 12 11·29	−16 12 34·6	0·51874	0·62322	27 26
10·5...	15 11 44·36	−16 10 52·1	0·51764	0·62315	27 22
11·5...	15 11 16·71	−16 9 7·0	0·51657	0·62308	27 18
April 12·5...	15 10 48·37	−16 7 19·3	0·51553	0·62301	27 14
13·5...	15 10 19·34	−16 5 29·2	0·51452	0·62294	27 10
14·5...	15 9 49·65	−16 3 36·7	0·51354	0·62287	27 7
15·5...	15 9 19·23	−16 1 41·8	0·51260	0·62279	27 3
April 16·5...	15 8 48·40	−15 59 44·6	0·51169	0·62272	27 0
17·5...	15 8 16·88	−15 57 45·2	0·51081	0·62264	26 57
18·5...	15 7 44·80	−15 55 43·7	0·50997	0·62257	26 54
19·5...	15 7 12·18	−15 53 40·2	0·50917	0·62250	26 51
April 20·5...	15 6 39·05	−15 51 34·7	0·50840	0·62243	26 48
21·5...	15 6 5·43	−15 49 27·3	0·50767	0·62236	26 45
22·5...	15 5 31·34	−15 47 18·2	0·50698	0·62229	26 42
23·5...	15 4 56·82	−15 45 7·4	0·50632	0·62221	26 40
April 24·5...	15 4 21·88	−15 42 55·1	0·50570	0·62214	26 38
25·5...	15 3 46·55	−15 40 41·4	0·50512	0·62207	26 36
26·5...	15 3 10·86	−15 38 26·3	0·50458	0·62200	26 34
27·5...	15 2 34·85	−15 36 10·0	0·50407	0·62193	26 32
April 28·5...	15 1 58·54	−15 33 52·6	0·50360	0·62185	26 30
29·5...	15 1 21·96	−15 31 34·2	0·50317	0·62178	26 28
30·5...	15 0 45·14	−15 29 14·9	0·50278	0·62171	26 27
31·5...	15 0 8·12	−15 26 54·9	0·50243	0·62164	26 26

Am 15. April 1894 beträgt:
Die Grösse des Planeten: 13ᵐ7; die Lichtstärke: 1·00;
die Reduction auf das Äquinoctium 1855·0 in $\mathcal{R}$: −2ᵐ11ˢ; in δ: +9″0;
die einer Variation der $\mathcal{R}$ von $\pm 1^m$ entsprechende Änderung der Declination $\mp 4''2$.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung (279) von ☿	Log. der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1894					
Mai 0·5	15h 0m45s·14	−15°29′14″·9	0·50278	0·62171	26m27s
1·5	15 0 8·11	−15 26 54·9	0·50243	0·62164	26 26
2·5	14 59 30·91	−15 24 34·3	0·50212	0·62157	26 25
3·5	14 58 53·56	−15 22 13·2	0·50186	0·62150	26 24
Mai 4·5	14 58 16·11	−15 20 51·6	0·50164	0·62142	26 23
5·5	14 57 38·59	−15 17 29·8	0·50146	0·62135	26 22
6·5	14 57 1·02	−15 15 8·0	0·50131	0·62127	26 22
7·5	14 56 23·44	−15 12 46·2	0·50120	0·62120	26 21
Mai 8·5	14 55 45·87	−15 10 24·5	0·50114	0·62113	26 21
9·5	14 55 8·35	−15 8 3·1	0·50112	0·62106	26 21
10·5	14 54 30·92	−15 5 42·1	0·50114	0·62098	26 21
11·5	14 53 53·62	−15 3 21·7	0·50120	0·62091	26 21
Mai 12·5	14 53 16·47	−15 1 2·0	0·50130	0·62084	26 22
13·5	14 52 39·49	−14 58 43·2	0·50145	0·62077	26 22
14·5	14 52 2·70	−14 56 25·3	0·50164	0·62069	26 23
15·5	14 51 26·15	−14 54 8·5	0·50186	0·62062	26 24
Mai 16·5	14 50 49·86	−14 51 52·9	0·50211	0·62055	26 25
17·5	14 50 13·85	−14 49 38·6	0·50240	0·62048	26 26
18·5	14 49 38·16	−14 47 25·7	0·50273	0·62241	26 27
19·5	14 49 2·81	−14 45 14·4	0·50310	0·62033	26 28
Mai 20·5	14 48 27·83	−14 43 4·8	0·50351	0·62026	26 30
21·5	14 47 53·25	−14 41 7·0	0·50397	0·62019	26 31
22·5	14 47 19·10	−14 38 51·1	0·50445	0·62011	26 33
23·5	14 46 45·40	−14 36 47·3	0·50498	0·62004	26 35
Mai 24·5	14 46 12·18	−14 34 45·6	0·50555	0·61997	26 37
25·5	14 46 39·46	−14 32 46·2	0·50615	0·61991	26 39
26·5	14 45 9·27	−14 30 49·3	0·50679	0·61984	26 42
27·5	14 44 35·62	−14 28 54·9	0·50746	0·61957	26 44
Mai 28·5	14 44 4·54	−14 27 3·1	0·50816	0·61969	26 47
29·5	14 43 34·05	−14 25 14·1	0·50889	0·61962	26 49
30·5	14 43 4·17	−14 23 28·0	0·50966	0·61955	26 52
31·5	14 42 34·92	−14 21 44·9	0·51046	0·61947	26 55

Opposition in $\mathcal{R}$: 1894 Mai 7.

Am 15. Mai 1894 beträgt:

Die Grösse des Planeten: 13m7, die Lichtstärke: 1·10;

die Reduction auf das Äquinoctium 1855·0 in $\mathcal{R}$. −2m10s; in δ: +9′8;

die einer Variation der $\mathcal{R}$ um $\pm 1^m$ entsprechende Änderung der Declination $\mp 4'4$.

Mittlere Berliner Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. der Entfernung (279) von ♂	Log. der Entfernung (279) von ☉	Lichtzeit
1894					
Juni 0·5	14ʰ 42ᵐ 34ˢ·92	−14° 21′ 44″·9	0·51046	0·61947	26ᵐ 55ˢ
1·5	14 42 6·33	−14 20 4·8	0·51130	0·61940	26 58
2·5	14 41 38·42	−14 18 27·8	0·51217	0·61933	27 2
3·5	14 41 11·21	−14 16 54·1	0·51307	0·61925	27 5
Juni 4·5	14 40 44·69	−14 15 23·8	0·51400	0·61918	27 9
5·5	14 40 18·90	−14 13 56·9	0·51496	0·61911	27 12
6·5	14 39 53·88	−14 12 33·5	0·51594	0·61904	27 16
7·5	14 39 29·63	−14 11 13·7	0·51705	0·61897	27 20
Juni 8·5	14 39 6·16	−14 9 57·4	0·51800	0·61890	27 24
9·5	14 38 43·50	−14 8 44·8	0·51908	0·61883	27 28
10·5	14 38 21·65	−14 7 36·1	0·52018	0·61876	27 32
11·5	14 38 0·63	−14 6 31·3	0·52131	0·61868	27 36
Juni 12·5	14 37 40·45	−14 5 30·4	0·52246	0·61861	27 41
13·5	14 37 21·13	−14 4 33·5	0·52363	0·61854	27 45
14·5	14 37 2·68	−14 3 40·7	0·52482	0·61847	27 50
15·5	14 36 45·10	−14 2 52·0	0·52604	0·61840	27 54
Juni 16·5	14 36 28·39	−14 2 7·5	0·52728	0·61833	27 59
17·5	14 36 12·55	−14 1 27·2	0·52854	0·61826	28 4
18·5	14 35 57·60	−14 0 51·0	0·52982	0·61819	28 9
19·5	14 35 43·55	−14 0 19·0	0·53112	0·61812	28 14
Juni 20·5	14 35 30·40	−13 59 51·4	0·53244	0·61805	28 19
21·5	14 35 18·16	−13 59 28·1	0·53378	0·61798	28 24
22·5	14 35 6·82	−13 59 9·1	0·53513	0·61791	28 30
23·5	14 34 56·39	−13 58 54·4	0·53650	0·61784	28 35
Juni 24·5	14 34 46·87	−13 58 43·1	0·53789	0·61777	28 41
25·5	14 34 38·27	−13 58 38·2	0·53929	0·61769	28 46
26·5	14 34 30·60	−13 58 36·8	0·54071	0·61762	28 52
27·8	14 34 23·86	−13 58 39·2	0·54215	0·61755	28 58
Juni 28·5	14 34 18·05	−13 58 47·1	0·54359	0·61748	29 3
29·5	14 34 13·17	−13 58 58·8	0·54505	0·61741	29 9
30·5	14 34 9·24	−13 59 14·8	0·54651	0·61734	29 15
31·5	14 34 6·25	−13 59 35·1	0·54798	0·61728	29 21

Am 15. Juni 1894 beträgt:
Die Grösse des Planeten: 13ᵐ·8; die Lichtstärke: 0·95;
die Reduction auf das Äquinoctium 1855·0 in A: −2ᵐ 9ˢ; in δ: +10″·3;
die einer Variation der A von $\pm 1^m$ entsprechende Änderung der Declination $\mp 4''·4$.

Mit der Veröffentlichung der auf den letzten Seiten befindlichen Ephemeriden für den Lauf des Planeten (279) Thule ist das Ziel der vorliegenden Abhandlung erreicht. Im Interesse der erst später möglichen wissenschaftlichen Verwerthung der Bewegung dieses Planeten sei es gestattet, dem Wunsche Ausdruck zu geben, dass jene — leider nicht zahlreichen — Astronomen, welchen mächtige Instrumente zu Gebote stehen, dem lichtschwachen Asteroiden in Zukunft einige Aufmerksamkeit widmen mögen. Es wird wesentlich von der Zahl der sorgfältig beobachteten Erscheinungen abhängen, ob das durch Discussion der Bewegungsverhältnisse dieses Planeten erreichbare Ziel auch wirklich erreicht werden kann.

Am Schlusse dieser Auseinandersetzungen angelangt, erfülle ich nur eine angenehme Pflicht, wenn ich mir erlaube, Herrn Director Prof. Dr. E. Weiss, dessen Rath mir auch bei Durchführung der vorliegenden Arbeit zu Theil wurde, für diese Unterstützung meinen Dank auszudrücken.

XXI. SITZUNG VOM 22 OCTOBER 1891.

Der Vorsitzende, Herr Vicepräsident Dr. J. Stefan, begrüsst bei Eröffnung der Sitzung das neu eingetretene wirkliche Mitglied Herrn Oberbergrath Dr. E. Mojsisovics v. Mojsvár.

Hierauf gibt der Vorsitzende Nachricht von dem heute erfolgten Ableben des correspondirenden Mitgliedes dieser Classe Herrn Prof. Dr. E. Fleischl v. Marxow an der k. k. Universität in Wien.

Die anwesenden Mitglieder erheben sich zum Zeichen des Beileides von ihren Sitzen.

Der Secretär legt das erschienene Heft VII (Juli 1891) des 100. Bandes, Abtheilung II. a der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Prof. J. Wiesner übermittelt für die akademische Bibliothek ein Exemplar des von ihm herausgegebenen Werkes: „Die Elementarstructur und das Wachsthum der lebendigen Substanz".

Das c. M. Herr Hofrath Prof. Dr. A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz: „Über das Verhalten des Tricalciumphosphats gegen Kohlensäure und Eisenhydroxyd", von Dr. G. von Georgievics.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über die Verdampfungswärme", von Dr. Gustav Jäger in Wien.
2. „Kurzer Vorbericht über die Ergebnisse der in den Jahren 1890 und 1891 im südwestlichen Kleinasien durchgeführten geologischen Untersuchungen", von Gejza v. Bukowski in Wien.

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr überreicht eine Abhandlung von Prof. F. Ruth an der k. k. Bergakademie in Leoben: „Über einen neuen Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der klinogonalen Axonometrie".

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine im chemischen Institute der Universität Graz ausgeführte Untersuchung von Dr. G. Pum: „Über die Einwirkung von Jodwasserstoffsäure auf das Cinchonin".

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck überreicht folgende drei Abhandlungen:

1. „Über arithmetische Progressionen, in denen Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind".
2. „Arithmetische Relationen".
3. „Über den quadratischen Restcharakter".

Ferner überreicht Herr Prof. Gegenbauer eine Abhandlung von J. A. Gmeiner in Innsbruck, betitelt: „Eine neue Darstellung des biquadratischen Charakters".

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Bauer Alexander, Die ersten Versuche zur Einführung der Gasbeleuchtung in Österreich. (Mit 3 Abbildungen.) Wien 1891; 8°.

Pihl O. A., The stellar cluster χ Persei. (Micrometrically surveyed.) Christiania 1891; 4°.

Wiesner J., Die Elementarstructur und das Wachsthum der lebenden Substanz. Wien 1892; 8°.

Über die inneren Kräfte von Flüssigkeiten und Gasen

von

C. Puschl.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. October 1891.)

1. Wenn eine Flüssigkeit, unter dem äusseren Drucke p stehend, bei Erhöhung ihrer Temperatur t um dt ihr Volumen v um dv erweitert und die Wärme dabei nebst der äusseren Arbeit $= pdv$ im Allgemeinen auch eine innere Arbeit $= idv$ leistet, so muss nach bekannten, in der mechanischen Wärmetheorie angenommenen Sätzen die Summe $p+i$ der Bedingung

$$p+i = T\left(\frac{dp}{dt}\right)$$

entsprechen, wo T die absolute Temperatur bedeutet und die Klammern des Differentialquotienten von p anzeigen, dass er sich auf constantes Volumen bezieht.

Aus dieser Gleichung ergibt sich durch Differentiation für constante Temperatur

$$\left(\frac{dp}{dv}\right) + \left(\frac{di}{dv}\right) = T\left(\frac{d^2p}{dv\,dt}\right)$$

oder, wenn man die experimentell ermittelbare Grösse

$$-v\left(\frac{dp}{dv}\right) = e$$

setzt und sonach e der Elasticitätscoëfficient oder die reciproke Zusammendrückbarkeit ist:

$$\left(\frac{di}{dv}\right) = \frac{1}{v}\left[e - T\left(\frac{de}{dt}\right)\right].$$

Für den kritischen Zustand einer Flüssigkeit, wo dieselbe mit ihrem Dampfe identisch und $e = 0$ ist, folgt hieraus

$$\left(\frac{di}{dv}\right) = -\frac{T}{v}\left(\frac{de}{dt}\right);$$

es ist also, weil e im genannten Punkte durch Erwärmung bei constantem Volumen positiv wird, $\left(\frac{di}{dv}\right)$ negativ, d. h. die Grösse i nimmt durch Compression zu.

Lässt man eine Flüssigkeit von ihrem kritischen Zustande an unter gleich bleibendem Drucke immer tiefer erkalten und denkt man sich einfach, dass sie bis zum absoluten Nullpunkte der Temperatur nicht erstarre, so wird für dieselbe zuletzt $T=0$; dann ist

$$\left(\frac{di}{dv}\right) = \frac{e}{v}$$

geworden und folglich bei einer gewissen Temperatur von negativen zu positiven Werthen übergegangen. In dem Punkte, wo dieser Zeichenwechsel eintritt, ist

$$\left(\frac{di}{dv}\right) = 0,$$

hier nimmt i durch Compression nicht mehr zu und ist also unter dem obwaltenden Drucke ein Maximum. Bei der kritischen Temperatur, wo i durch Compression wächst, tritt dessen Maximum erst bei einem den kritischen übersteigenden Druck ein, woraus folgt, dass dasselbe mit Abnahme der Temperatur auf kleinere Drucke übergeht, und es muss daher auch eine Temperatur geben, bei welcher jenes Maximum auf den gewöhnlichen Druck fällt. Je nach der Lage dieser Temperatur wird folglich die Grösse i für eine Flüssigkeit unter den gewöhnlichen Umständen durch Compression entweder zuerst bis zu einem Maximum wachsen und dann abnehmen, oder dieselbe wird schon von Anfang an abnehmen. Beide Fälle kommen wirklich vor.

2. Um dies aus Versuchsdaten zu entnehmen, kann man dem Ausdrucke für $p+i$ eine etwas veränderte Form geben.

Setzt man nämlich die als Ausdehnungscoëfficient zu bezeichnende Grösse

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{dt} = a,$$

so wird $\left(\frac{dp}{dt}\right) = ae$ und man hat folglich

$$p + i = Tae.$$

Für Wasser ist bei 4° unter dem gewöhnlichen Drucke $a = 0$ und daher

$$1 + \frac{di}{dp} = Te \frac{da}{dp}.$$

Amagat findet bei einem Drucke von 500 Atmosphären zwischen 0° und 10°

$$a = 0{\cdot}000156;$$

da die Zunahme von a mit dem Drucke immer langsamer wird, so kann man für den Anfangsdruck

$$\frac{da}{dp} > \frac{0{\cdot}000156}{500}$$

setzen und hiermit erhält man, $e = 20000$ und $T = 277$ gesetzt:

$$\frac{di}{dp} > 0{\cdot}728,$$

wonach i durch Compression zunimmt.[1]

---

[1] Man kann übrigens für das Dichtemaximum des Wassers den wirklichen Werth von $\frac{di}{dp}$ leicht finden. Bedeutet $c = \frac{1}{e}$ die Zusammendrückbarkeit, so ist allgemein

$$\frac{da}{dp} = -\frac{dc}{dt};$$

demnach wird für den genannten Punkt

$$1 + \frac{di}{dp} = -\frac{T}{c} \cdot \frac{dc}{dt}$$

und mit den bezüglichen Angaben von Pagliani und Vicentini berechnet sich $\frac{di}{dp} = 0{\cdot}865$.

Unter dem Drucke von 3000 Atmosphären wird bei niedriger Temperatur a stationär und somit

$$1+\frac{di}{dp}=Ta\frac{de}{dp},$$

während $a=0\cdot000383$ und e verdoppelt ist. Die Zunahme von e als gleichmässig angenommen, ist für den genannten Druck

$$\frac{de}{dp}=\frac{20000}{3000}$$

und man erhält, wieder $T=277$ gesetzt:

$$\frac{di}{dp}=-0\cdot293,$$

wonach i jetzt durch Compression abnimmt und folglich ein Maximum überschritten hat.

Für Äther nimmt a durch Compression ab, während ae wächst; diese Zunahme wird aber auch hier langsamer, so dass die Grösse i, während sie bis zum Drucke von 1000 Atmosphären sich wenig ändert, durch höheren Druck entschieden abnimmt und also ein Maximum überschritten hat. Da wahrscheinlich weiterhin die Zunahme von ae sich noch verlangsamt, so wird damit die Summe $p+i$ zunächst mehr und mehr stationär werden und bei hinreichender Compression wird daher annähernd $di=-dp$ sein. Dieser Fall dürfte bei einer so schwer zusammendrückbaren Flüssigkeit wie Quecksilber schon ohne weitere Verdichtung erreicht sein.

Das einschlägige Verhalten der festen Körper entspricht wirklich der angedeuteten Vermuthung. Bei seinen Versuchen über die Temperaturveränderung von Metalldrähten bei Dehnung und Zusammenziehung fand Edlund,[1] dass die verschluckte oder entwickelte Wärme innerhalb der Elasticitätsgrenze dem spannenden Gewichte und somit auch der erzeugten Volumveränderung proportional war. Hieraus folgt, dass in diesen Versuchen die bezügliche Summe $p+i$ für jeden Draht constant blieb, d. h. es war jedesmal $di=-dp$ oder i nahm bei Dehnung

[1] Poggendorff's Annalen, Bd. CXXVI, S. 539.

um den gleichen Betrag wie der äussere Zug $(-p)$ zu. Es ist klar, dass i, durch Dehnung wachsend, einem Maximum zugehen muss, dessen Existenz man sonach als erwiesen betrachten kann, welches aber im Allgemeinen nicht erreichbar sein dürfte.

Man denke sich einen festen Körper, welcher, ohne eine bleibende Veränderung zu erleiden, eine mechanische Ausdehnung bis zum Maximum von i gestatte. Bei Annäherung an dasselbe wird natürlich $p+i$ nicht constant bleiben, sondern mit wachsender Geschwindigkeit abnehmen, und es kann diese Abnahme so weit gehen, dass $p+i=0$ und bei weiterer Dehnung negativ wird; dann ist aber zugleich der entsprechende Werth von a negativ geworden, d. h. der Körper zieht sich nun bei Erwärmung zusammen. Es scheint sonach Kautschuk ein Körper zu sein, bei welchem durch hinreichende Dehnung die Grösse i ihrem Maximum nahe kommt oder es vielleicht sogar überschreitet.

3. Im Nullpunkte der absoluten Temperatur ist für jede Substanz $p+i=0$. Durch eine Erhöhung der Temperatur um dt wird hier

$$\frac{di}{dt}=ae$$

und man sieht, dass a von $T=0$ angefangen positiv oder negativ ausfällt, je nachdem i dort mit steigender Temperatur zu- oder abnimmt. Sehr bemerkenswerth ist es nun, dass der letztere Fall sich immer durch blosse Compression in den ersteren überführen lässt.

Aus dem vorigen Ausdrucke für $p+i$ folgt nämlich

$$\frac{di}{dp}=-1+T\frac{d(ae)}{dp}$$

und es hat sich ergeben, dass für jede unter gewöhnlichem Drucke stehende Flüssigkeit bei einer gewissen Temperatur $\frac{di}{dp}=0$ werden muss. Von diesem Punkte an wird letzterer Quotient mit sinkender Temperatur negativ, bis er bei $T=0$ algebraisch am kleinsten, nämlich $=-1$ wird. Es erhellt also, dass i durch Compression für $T=0$ stärker abnimmt als für jeden Punkt oberhalb, und folglich muss es immer eine Compression oder Verdichtung geben, welche bewirkt, dass die

genannte Grösse dortselbst kleiner ausfällt als für jeden anderen Punkt. Ist dies durch entsprechenden Druck erzielt, so bleibt unter demselben Drucke die Summe $p+i$ für jede Temperatur ober $T=0$ positiv, der Eintritt eines negativen Werthes von a erscheint somit dann überhaupt ausgeschlossen.

Demnach kann a, wenn dessen Werth für eine Substanz durch Erkalten unter dem gewöhnlichen Drucke Null und negativ wird, durch Compression derselben stets positiv bleibend erhalten werden. Es muss dann offenbar einen Druck geben, welcher der grösste ist, wobei durch Erkalten $a=0$ werden kann. Da nun für den Verlauf eines Nullwerthes von a die Bedingung

$$\frac{da}{dt}dt+\frac{da}{dp}dp=0$$

zu erfüllen ist, so sieht man, dass, weil a in diesem Falle durch Compression wachsen muss, der zu $a=0$ gehörige Druck mit sinkender Temperatur immer grösser wird, so lange dabei $\frac{da}{dt}$ positiv bleibt oder a durch Erkalten abnimmt; sobald aber

$$\frac{da}{dt}=a=0$$

wird, hat wirklich der Druck seinen grössten für $a=0$ möglichen Werth erreicht. Zugleich folgt, dass dann $\frac{d^2a}{dt^2}$ positiv und somit der Nullwerth von a für constanten Druck ein Minimum ist. Diesen merkwürdigen Zustand habe ich in einer früheren Abhandlung[1] als Halt- und Wendepunkt der Dichte bezeichnet.

Lässt man von diesem Punkte an den Druck abnehmen, so wird das Minimum von a negativ und es gibt folglich dann jedesmal zwei Temperaturen, wobei $a=0$ wird; bei der höheren ist $\frac{da}{dt}$ positiv und die Dichte ein Maximum, bei der tieferen ist jener Quotient negativ und die Dichte ein Minimum. Je kleiner der Druck, desto stärker negativ wird das Minimum von a und desto weiter gehen dessen zwei Nullwerthe auseinander, indem

[1] Diese Berichte, Bd. XCVIII, Abth. II. a., Jänner 1889, S. 174.

nämlich das Maximum der Dichte auf immer höhere, das Minimum dagegen auf immer tiefere Temperaturen fortrückt. Der Druck kann so klein werden, dass letzteres gerade auf $T = 0$ fällt; für noch kleinere Drucke gibt es weiter kein Minimum der Dichte mehr, sondern es bleibt dann α von ihrem Maximum angefangen für alle tieferen Temperaturen und auch bei $T = 0$ negativ.

Da ein Dichtemaximum überhaupt nur dann eintreten kann, wenn α durch Compression zunimmt, so gilt das Gesagte nicht für das Wasser allein, sondern auch für die bekannten, bei niedriger Temperatur ein Dichtemaximum darbietenden festen Körper, was insofern wichtig ist, als hier das Bedenken wegfällt, welches bei Wasser daraus entspringt, dass es durch Kälte zu erstarren pflegt.

Bei dem Drucke des Halt- und Wendepunktes der Dichte ist der Nullwerth von α und der gleichzeitige Nullwerth von $\frac{dv}{dt} = \alpha v$ ein Minimum, d. h. beide Grössen nehmen mit einander bei constantem Drucke sowohl mit sinkender, als auch mit steigender Temperatur zu. Durch eine Verstärkung des Druckes wird das Minimum von α wie dasjenige von $\frac{dv}{dt}$ positiv und zugleich verschieben sich beide Minima, aber ersteres schneller als letzteres, auf höhere Temperaturen. Liesse man also Wasser bei einem solchen Drucke erkalten, so würde es kein Dichtemaximum mehr, sondern nur ein Minimum von α und weiterhin auch ein Minimum von $\frac{dv}{dt}$ erreichen. Bei dem Quecksilber erreicht α in der That nach der Ausdehnungsformel von Wüllner ungefähr bei 80° ein Minimum, und die bei niedriger Temperatur eintretende Constanz des Quotienten $\frac{dv}{dt}$ kann als dessen entsprechendes Minimum gelten. Ich glaube demnach, dass, wenn es möglich wäre, Quecksilber mechanisch auszudehnen, ein Zustand desselben verwirklicht werden könnte, wobei es sich durch Erwärmung zusammenzöge. Der bei Wasser positive Druck des Halt- und Wendepunktes der Dichte müsste hier negativ sein.

Ähnlich wie bei Quecksilber scheint auch bei den festen Metallen die Wärmeausdehnung mit der Temperatur zu verlaufen.

Wenn meine Anschauung richtig ist, würde sonach ein Metall, bis zu einem hinreichenden Grade mechanisch ausgedehnt, sich ähnlich wie stark gedehnter Kautschuk verhalten. Wirklich erwähnt Edlund,[1] dass Metalldrähte bei sehr starker Dehnung nicht kälter, sondern wärmer wurden, wozu er allerdings bemerkt, dass dieselben dann schon ihre Elasticitätsgrenze überschritten hatten; immerhin aber dürfte die Sache Beachtung verdienen, da vielleicht jene beobachtete Erwärmung nicht ganz auf Rechnung des Überschreitens der Elasticitätsgrenze zu setzen ist.

Indem die Summe $p+i$ für ein Dichtemaximum Null wird, ist es unmittelbar evident, dass i auch negativ sein kann. Da nun diese für gewöhnlich positive Grösse bei flüssigen und festen Körpern durch Compression entweder nach Überschreitung eines Maximums oder schon von Anfang an abnimmt, so scheint es, dass dieselbe durch hinreichend gesteigerten Druck jedesmal endlich auf Null gebracht und dann negativ werden müsste. Erniedrigung der Temperatur würde den hiezu nöthigen Druck vermindern, und bei Temperaturen nahe dem absoluten Nullpunkte muss i für jeden Körper selbst bei geringem Drucke negativ sein.

4. Für eine Flüssigkeit nimmt unter den gewöhnlichen Umständen das Product ae durch Compression zu und vermöge der aus $\left(\frac{dp}{dt}\right) = ae$ folgenden Gleichung

$$\left(\frac{de}{dt}\right) = -v\left(\frac{d(ae)}{dv}\right)$$

ergibt sich, dass $\left(\frac{de}{dt}\right)$, wie im kritischen Punkte, auch im gewöhnlichen Falle positiv ist.

Bei einer gewissen Temperatur zwischen der kritischen und $T=0$ wird für gewöhnlichen Druck $\left(\frac{di}{dv}\right) = 0$ und i ein Maximum, welches für höhere Temperaturen auf grössere Drucke übergeht und bei der kritischen Temperatur auf einen den kritischen über-

[1] Poggendorff's Annalen, Bd. CXIV, S. 37.

steigenden Druck fällt. Da der Verlauf dieses Maximums der Bedingung

$$\left(\frac{d^2i}{dv^2}\right)dv+\left(\frac{d^2i}{dv\,dt}\right)dt=0$$

entsprechen muss, so ist gleichzeitig $\left(\frac{d^2i}{dv\,dt}\right)$ negativ; aus dem Obigen folgt aber

$$\left(\frac{d^2i}{dv\,dt}\right)=-\frac{T}{v}\left(\frac{d^2e}{dt^2}\right)$$

und man sieht also, dass $\left(\frac{d^2e}{dt^2}\right)$ sowohl für den kritischen Punkt, als auch für die gewöhnlichen Zustände einer Flüssigkeit positiv sein muss.

Der bei einer gewöhnlichen Flüssigkeit und namentlich im Maximum von i durch Compression wachsende Werth von ae geht, indem seine Zunahme sich mehr und mehr verlangsamt, offenbar einem Maximum zu. Denkt man sich dieses erreicht, so ist $\left(\frac{de}{dt}\right)=0$ und zugleich, weil dann e für constantes Volumen ein Maximum ist, $\left(\frac{d^2e}{dt^2}\right)$ negativ; letzterer Quotient hat also während des Überganges sein Vorzeichen gewechselt. In dem Punkte, wo derselbe Null wird, ist $\left(\frac{de}{dt}\right)$ für constantes Volumen ein Maximum und somit $\left(\frac{d^3e}{dt^3}\right)$ negativ; hieraus folgt, dass der für die gewöhnlichen Zustände einer Flüssigkeit positive Werth von $\left(\frac{d^2e}{dt^2}\right)$ nicht nur durch Verdichtung bei constanter Temperatur, sondern auch durch Erwärmung bei constanter Dichte abnimmt und daher auch im letzteren Falle endlich sein Vorzeichen wechseln muss.

Wie aus dem Gesagten erhellt, geht der Nullwerth von $\left(\frac{de}{dt}\right)$ und das entsprechende Maximum von ae mit steigender Temperatur auf grösseres Volumen (oder kleinere Dichte) über. Demnach wird man, eine Flüssigkeit von ihrem kritischen Punkte an comprimirend, wobei ae wächst, schon entsprechend früher

zu einem Maximum dieses Productes und gleichzeitigen Nullwerthe von $\left(\frac{de}{dt}\right)$, also zu einem Punkte kommen, von wo an bei weiterer Compression ersteres abnimmt und letzterer Quotient negativ wird.

5. In einer früheren Abhandlung[1] habe ich gefunden, dass a, bei einer Flüssigkeit durch Compression abnehmend, einem jedenfalls nur durch sehr starken Druck erreichbaren Minimum zugeht. Tritt dieses Minimum ein, so nimmt ae bereits mit dem Drucke zu; hieraus folgt, dass ae, wenn es nach Überschreitung seines Maximums abnimmt, bei hinreichender Compression ein Minimum werden muss. Für beide Haltpunkte dieses Productes ist der Quotient $\left(\frac{de}{dt}\right) = 0$ und zwischen beiden ist er negativ.

Mit sinkender Temperatur geht das Maximum von ae auf grössere, das Minimum dagegen auf kleinere Dichte über und es müssen daher beide bei einer gewissen, von der Natur des bezüglichen Körpers abhängigen Temperatur zusammentreffen. Ist eine Substanz bei der obwaltenden Temperatur schon unter dem gewöhnlichen Drucke soweit verdichtet, dass ae seinen zwei schon fast zusammenfallenden Haltpunkten zugleich nahe steht, so wird dieselbe bei Compression einen fast unveränderlichen Werth jenes Productes zeigen müssen. In einem Zustande solcher Verdichtung dürften die Metalle sich wirklich befinden, indem für dieselben, wie erwähnt wurde, die Summe $p+i$ bei mechanischer Dehnung constant und demgemäss der entsprechende Werth von ae vom äusseren Zuge unabhängig erscheint.

Wenn ae für eine Substanz bei ihrer Compression vom gewöhnlichen Drucke an stationär ist, nimmt dabei a noch ab und hat folglich bei einem grösseren Drucke ein Minimum und bei einem kleineren (schon negativen) Drucke ein Maximum. Ist die gedachte Substanz fest und hinreichend dehnbar, so kann eine starke mechanische Ausdehnung es erzielen, dass a sein Maximum wirklich erreicht, hierauf abnimmt, endlich Null und dann negativ wird. Ich glaube demnach, dass es möglich sein muss, jeden sich auf gewöhnliche Weise verhaltenden festen Körper, wenn

[1] Diese Berichte, Bd. XCVIII, Abth. II. a, October 1889, S. 1337.

er nur eine hinreichende Dehnbarkeit besitzt, durch spannenden Zug auf das Verhalten des stark gespannten Kautschuks zu bringen, welches also nach dieser Anschauung keineswegs eine Anomalie ist. Es hängt jedesmal nur von der Grösse des obwaltenden (positiven oder negativen) Druckes ab, ob für einen Körper, wenn er von höherer Temperatur an erkaltet, a immer positiv bleibt oder auch negativ werden kann; letzteres ist der Fall, so lange der Druck nicht über eine gewisse, von der Natur jedes Körpers bedingte Grenze geht. Diese Grenze ist der Druck des Halt- und Wendepunktes der Dichte, welcher für die meisten Substanzen negativ zu sein scheint.

6. Wenn man eine Flüssigkeit in ihrem kritischen Punkte comprimirt, so nimmt i zu und wird endlich ein Maximum, wo somit

$$\left(\frac{de}{dt}\right) = \frac{e}{T}$$

ist und daher ae durch Compression noch wächst.

Mit sinkender Temperatur und also für den flüssigen Zustand wird der zum Maximum von i gehörige Druck immer kleiner. Umgekehrt wird derselbe mit steigender Temperatur und also für den Gaszustand zunächst grösser; aus dem Gesagten ergibt sich aber bereits, dass hierbei eine Grenze erreicht werden muss.

Soll nämlich, während v und t wechseln, i in seinem Maximum und somit $\left(\frac{di}{dv}\right) = 0$ bleiben, so muss nach dem Vorigen

$$\left(\frac{d^2i}{dv^2}\right) dv = \frac{T}{v}\left(\frac{d^2e}{dt^2}\right) dt$$

sein; es kann folglich der Druck nur so lange mit der Temperatur zunehmen, als $\left(\frac{d^2e}{dt^2}\right)$ positiv bleibt. Dieser Quotient nimmt aber, wie sich oben ergab, sowohl durch Verdichtung bei constanter Temperatur, als auch durch Erwärmung bei constanter Dichte ab und er muss daher für das Maximum von i, indem hierfür Dichte und Temperatur mit einander wachsen, endlich Null werden; der dann obwaltende Druck ist der grösste, wobei $\left(\frac{di}{dv}\right) = 0$ sein kann. Indem jetzt $\left(\frac{d^2e}{dt^2}\right)$ negativ wird, geht weiterhin für

den Gaszustand das Maximum von i mit steigender Temperatur auf immer kleinere Drucke über.

Für den gewöhnlichen Zustand der permanenten Gase ist annähernd $i = 0$ und nimmt durch Verdichtung zu. Nach dem Vorstehenden wird dabei jedenfalls eine Dichte erreicht, wobei i ein Maximum ist; setzt man die Compression weiter fort, so nimmt i ab und es muss eine Dichte geben, wobei wieder $i = 0$ und dann negativ wird. Es ist sonach ein positiver Werth von i für ein permanentes Gas nur zwischen einer unteren und einer oberen Grenze des Druckes möglich.

7. Im kritischen Zustande eines dann mit der entsprechenden Flüssigkeit identischen Gases ist $\left(\frac{di}{dt}\right) = 0$ und i für constantes Volumen ein Maximum.[1] Von da an verschiebt sich dieses Maximum, wenn der Druck zunimmt, nothwendig auf eine höhere Temperatur; man sieht aber wieder, dass dieser Verlauf eine Grenze hat. In der bezüglichen Gleichung

$$\left(\frac{d^2 i}{dt^2}\right) dt = \frac{T}{v}\left(\frac{d^2 e}{dt^2}\right) dv$$

wird nämlich der zuerst positive Werth von $\left(\frac{d^2 e}{dt^2}\right)$, durch Compression und Erwärmung abnehmend, für das genannte Maximum endlich Null, und somit geht, indem jetzt jener Quotient negativ wird, das in Rede stehende Maximum von i bei weiterer Compression auf immer tiefere Temperaturen zurück. In solcher Weise verlaufend, muss es bei einem den kritischen schon sehr weit übersteigenden Drucke wieder auf die kritische Temperatur treffen und dann unter dieselbe hinabgehen.

Die experimentell bestimmbare Grösse $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ ist vermöge der Gleichung

$$\left(\frac{di}{dt}\right) = T\left(\frac{d^2 p}{dt^2}\right)$$

ebenfalls im kritischen Punkte ein Maximum und muss von da an durch Erwärmung bei constantem Volumen langsam abnehmen.

---

[1] Diese Berichte, Bd. C, Abth. II. a, Juli 1891.

Nach dem Vorigen kann man aber durch Compression bewirken, dass dieses Maximum erst bei einer höheren Temperatur eintritt, und es ist möglich, dass die höchste Temperatur, bis zu welcher es auf solche Weise verschoben werden kann, bei Stickstoff, Sauerstoff und Luft nahe 200° beträgt. In diesem Falle wird $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ für die genannten Gase bei entsprechender Compression von 0° an noch wachsen und erst bei einer höheren Temperatur stationär werden, wie es Amagat neuestens beobachtet hat.

Schon früher[1] habe ich gezeigt, dass der im kritischen Punkte maximale Werth von a, zur Bedingung $\frac{da}{dt} = 0$ gehörig, durch Compression sich auf höhere Temperaturen verschiebt und dass es eine höchste Temperatur gibt, auf welche er fallen kann. Wenn a ein jener Bedingung entsprechendes Maximum ist, nimmt $\frac{dv}{dt}$ durch Erwärmung noch zu und es ist möglich, dass dieser Quotient für die genannten Gase bei starker Compression von 0° an noch wächst und erst bei einer höheren Temperatur stationär wird, wie es gleichfalls von Amagat beobachtet wurde.

8. Die höchste Temperatur, bis zu welcher das Maximum von i durch Compression sich verschieben lässt, bildet eine Grenze, oberhalb welcher $\left(\frac{di}{dt}\right)$ bei allen Temperaturen und Drucken negativ ist. Da nach dem Obigen der Werth von i für ein permanentes Gas bei jeder Temperatur nur zwischen einer unteren und einer oberen Grenze des Druckes positiv bleiben kann, so muss man auch bei jener Grenztemperatur von dem Zustande aus, wo der genannte Quotient verschwindet, einerseits durch Verdünnung des Gases zu einem Drucke kommen, wo $i = 0$ ist und durch Compression zunimmt, während man anderseits durch Verdichtung des Gases zu einem Drucke kommen muss, wo $i = 0$ ist und durch Compression abnimmt; man sieht leicht, dass diese zwei Drucke mit steigender Temperatur einander immer näher rücken und endlich zusammenfallen. Für den hiermit erreichten Zustand ist

---

[1] Diese Berichte, Bd. XCVI, Abth. II, November 1887, S. 1028.

$$\left(\frac{di}{dv}\right) = i = 0$$

und die entsprechende Temperatur bildet eine Grenze, oberhalb welcher i bei allen Temperaturen und Drucken negativ ist. Bei dem bezeichneten Zustande sind Temperatur und Druck für jedes Gas offenbar schon sehr hoch und der Ausdehnungscoëfficient bei constantem Volumen ist noch immer stark positiv; es ist nämlich daselbst wie für ein ideales Gas

$$\left(\frac{dp}{dt}\right) = \frac{p}{T}.$$

Wenn i durch Compression ein Maximum wird, so nimmt, wie man sofort sieht,

$$ae = \left(\frac{dp}{dt}\right)$$

noch zu und erreicht ein Maximum erst durch stärkeren Druck. Denkt man sich also von dem Punkte aus, wo i durch Compression ein Maximum $= 0$ ist, dieselbe fortgesetzt, so wird bei einem gewissen Drucke

$$\left(\frac{d^2p}{dv\,dt}\right) = 0.$$

Lässt man von da an die Temperatur steigen und gleichzeitig den Druck so abnehmen, dass die vorstehende Bedingung immer erfüllt bleibt, so hat man

$$d\left(\frac{dp}{dt}\right) = \left(\frac{d^2p}{dt^2}\right) dt,$$

woraus folgt, dass der maximale Werth von $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ mit steigender Temperatur fortwährend abnimmt; er wird daher endlich Null. Im dann erreichten Zustande wird dieser Quotient nicht nur bei Erwärmung, sondern auch, weil er durch Druck ein Maximum ist, bei Verdünnung wie bei Verdichtung negativ; die entsprechende Temperatur bildet also eine Grenze, ober welcher die beiden Ausdehnungscoëfficienten schon allenthalben negativ sind. Diese Temperatur ist nach dem Gesagten offenbar ausser ordentlich hoch.

Indem der Werth von $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ vom gedachten Punkte an bei Verdichtung abnimmt, kann man durch angemessene Erniedrigung der Temperatur bewirken, dass er Null bleibt. Dieses weit genug fortsetzend, kommt man nach dem Obigen nothwendig zu einem Punkte, wo jener Quotient und somit dessen Nullwerth durch Druck ein Minimum ist; die entsprechende Temperatur bildet eine Grenze, unterhalb welcher die beiden Ausdehnungscoëfficienten bei allen Temperaturen und Drucken positiv sind, während oberhalb das hier beginnende Gebiet negativer Wärmeausdehnung sich mehr und mehr ausbreitet. Vielleicht ist dieser Grenzzustand eines Gases, wo jedenfalls der Druck ein sehr hoher ist, wenigstens bei Wasserstoff experimentell erreichbar. Die bisherigen Resultate der Versuche Amagat's erscheinen bei diesem Gase einer solchen Erwartung nicht ungünstig.

Kehren wir zu dem Punkte zurück, wo die zwei Ausdehnungscoëfficienten durch Druck Maxima $= 0$ sind. Von da an kann man bei fortwährend abnehmender Temperatur den Druck so wechseln lassen, dass a immer in seinem Maximum, nämlich $\frac{da}{dp} = 0$ bleibt und man muss auf solche Weise, während a immer grösser wird und der zuerst wachsende Druck schliesslich abnimmt, zum kritischen Punkte kommen, wo a ein Maximum $= \infty$ ist.

Von dem Punkte an, wo beide Ausdehnungscoëfficienten durch Druck Minima $= 0$ sind, kann man bei fortwährend zunehmender Temperatur den Druck so wechseln lassen, dass a immer in seinem Minimum und also ebenfalls $\frac{da}{dp} = 0$ bleibt. Man muss auf solche Weise, während a immer stärker negativ wird und der zuerst wachsende Druck schliesslich abnimmt, zu einem Punkte kommen, wo a ein Minimum $= -\infty$ ist; hiermit ist ein (dem schon bekannten unteren coordinirter) oberer kritischer Punkt erreicht. Entsprechende Zustände der Materie scheinen den auf der Sonne bei immenser Temperatur sich abspielenden Vorgängen zu Grunde zu liegen.

9. In den gewöhnlichen Gasen und Dämpfen scheint im Allgemeinen die Grösse i einen positiven Werth zu haben und es

gibt dann ohne Zweifel jedesmal eine Verdünnung, wobei $i = 0$ ist. Durch weitere Verdünnung scheint i negativ werden zu müssen, und diese Annahme wird durch den Wasserstoff, für welchen i schon bei gewöhnlicher Dichte schwach negativ ist, thatsächlich bestätigt.

Wenn für ein Gas i negativ ist und durch Verdünnung numerisch wächst, während p mit der Dichte schnell abnimmt, so kann es nicht ausbleiben, dass für eine gewisse starke Verdünnung $p+i = 0$ wird und weiterhin negativ ausfällt. Da nun aber bei unendlicher Verdünnung eines Gases die Werthe von p und i jedenfalls verschwinden, so muss es offenbar eine Verdünnung geben, bei welcher die Summe $p+i$ am stärksten negativ, also ein Minimum und somit

$$\left(\frac{di}{dv}\right) = \frac{e}{v}$$

ist; die Grösse i nimmt folglich dann bereits mit dem Volumen zu, d. h. sie hat schon früher ein Minimum überschritten.

Zugleich mit der Summe $p+i$ erreicht durch Verdünnung eines Gases auch der Quotient $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ ein negatives Minimum, welches mit steigender Temperatur sich auf immer stärkeren Druck verschiebt und daher mit dem bei gewöhnlicher Temperatur auf sehr starke Compression fallenden Maximum derselben Grösse endlich, aber bei einer schon excessiv hohen Temperatur zusammentrifft. Einen ähnlichen Verlauf wie das genannte Minimum muss, wie sich aus dem Gesagten entnehmen lässt, auch der Nullwerth von $p+i$ befolgen, bis derselbe auf jene schon früher erwähnte höchste Temperatur trifft, auf welche er fallen kann.

Es ergibt sich also der Schluss, dass die von gewöhnlicher Dichte an mit dem Drucke abnehmenden Ausdehnungscoëfficienten eines Gases für einen bei gewöhnlicher Temperatur schon sehr niedrigen Druck Null werden und für jede weitere Verdünnung negativ sind. Der Druck, wobei der Wechsel des Vorzeichens eintritt, wird durch Erkalten niedriger und durch Erwärmen höher.

Die bisher nicht genügend erklärten Resultate der Radiometerversuche und Beobachtungen an Kometen scheinen in der

That schon gegenwärtig als Belege dafür angeführt werden zu dürfen, dass Gase auch ohne hohe Temperatur, sobald sie nur hinreichend verdünnt sind, nicht mehr die gewöhnliche, sondern die entgegengesetzte Wärmeausdehnung zeigen, dass sie nämlich dann beim Erwärmen mehr oder weniger stark sich zusammenziehen und umgekehrt beim Erkalten sich ausdehnen.

10. In der vorliegenden Abhandlung konnte die nähere Bedeutung von i bisher ausser Betracht bleiben. In zwei bezüglichen früheren Aufsätzen[1] findet sich jedoch diese Grösse bereits in zwei wesentlich verschiedene Theile zerlegt.

Bedeutet nämlich r die ausdehnende Kraft, welche die Wärme im Volumen v eines Körpers ausübt, und q eine aus inneren Kräften resultirende, das Volumen zusammenziehende Kraft, so ist für das Gleichgewicht der auf das Volumen influirenden Kräfte

$$r = p + q.$$

Enthält das Volumen v des gedachten Körpers die Wärmemenge w und geht dieselbe durch Ausdehnung um dv bei constanter Temperatur in $w + dw$ über, so hat man als Ausdruck der dabei verschluckten Wärmemenge dl die Gleichung:

$$dl = \frac{r\,dv}{A} + dw,$$

wo A das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit vorstellt. Da andererseits

$$dl = \frac{(p+i)\,dv}{A}$$

ist, so ergibt sich zu näherer Bestimmung der Grösse i der Ausdruck:

$$i = q + A\frac{dw}{dv}.$$

Für Wasser ist i schon im Dichtemaximum und noch mehr unterhalb desselben negativ; da in diesem Falle r ohne Zweifel eine stark ausdehnende und q eine stark zusammenziehende Kraft ist, muss $\left(\frac{dw}{dv}\right)$ negativ sein, und es ist daher zu erwarten,

[1] Diese Berichte, Bd. XCVII, S. 1118 und Bd. XCVIII, S. 174.

dass die specifische Wärme des Wassers durch Compression merklich zunimmt.

Auch für Wasserstoff von gewöhnlicher Dichte ist i experimentell negativ. Da nun nach Versuchen von Joly[1] die specifische Wärme bei constantem Volumen durch Compression zwar für Luft und Kohlensäure wächst, für Wasserstoff dagegen abnimmt, so ist bei letzterem Gase $\left(\frac{dw}{dv}\right)$ positiv anzunehmen und man sieht, dass dann q negativ sein muss. Diese in dichteren Gasen positive Grösse kann also durch Verdünnung negativ werden, d. h. sie kann aus einer das Volumen zusammenziehenden in eine dasselbe ausdehnende Kraft übergehen.

Das Verhalten des Wasserstoffes scheint zu beweisen, dass bei hinreichend verdünnten Gasen $\frac{dw}{dv}$ positiv ist. Denkt man sich nun ein Gas, für welches dieser Fall, wie bei Wasserstoff, bereits stattfindet, noch weiter und zwar so stark verdünnt, dass nach obiger Darlegung $p+i=0$ wird, dann ist zugleich

$$r+A\frac{dw}{dv}=0$$

und folglich r negativ. Demnach scheint es, dass bei Verdünnung eines Gases nicht nur die Kraft q, sondern auch, aber erst bei einer viel stärkeren Verdünnung, die Kraft r das Vorzeichen wechselt, dass also die Wärme dann aus einer das Volumen ausdehnenden in eine es zusammenziehende Kraft übergeht.

In der zweiten der vorhin citirten Abhandlungen bin ich zu dem Schlusse gekommen, dass die für eine gewöhnliche Flüssigkeit stark positiven Kräfte r und q durch Compression endlich beide, und zwar q früher als r, negativ werden. Dies würde mit dem hier gewonnenen Resultate, wonach die für gewöhnlich positive Grösse i in jedem Körper bei hinreichender Compression negativ werden muss, sich gut vereinigen.

Wenn die Kräfte r und q in einem Körper bei Veränderung seiner Dichte den angedeuteten Verlauf nehmen, so muss jede derselben in einem permanenten Gase, welches man von einer

[1] Wied. Beiblätter, Bd. XV, S. 344.

gewöhnlichen Dichte an immer stärker zusammendrückt, bei einer bestimmten Dichte ein Maximum werden. Man sieht aber leicht, dass die Permanenz des Gaszustandes nur möglich ist, oder mit anderen Worten, dass der Druck nur dann continuirlich mit der Dichte zunehmen kann, wenn das Maximum von q früher eintritt als dasjenige von r. Findet bei einem Gase das Gegentheil statt, so müsste von einem gewissen Punkte an wegen Annäherung an das Maximum von r der Druck mit dem Volumen abnehmen, was mit der Stabilität nicht verträglich ist; es tritt daher jedenfalls schon vor Erreichung des Maximums von r ein instabiler Zustand ein und ein neues stabiles Gleichgewicht kann sich erst wieder herstellen, sobald auch die Kraft q ihr Maximum überschritten hat und mit dem Volumen, wie die Kraft r, aber schneller als diese abnimmt. Fallen die Maxima von r und q bei einer gleichen Dichte zusammen, so hat die Differenz $r-q=p$ bei dieser Dichte einen Halt- und Wendepunkt; der bezügliche Zustand ist also der kritische.

In einem permanenten Gase, wo nämlich das Maximum von q auf die kleinere Dichte fällt, rücken demnach durch Erkalten die Maxima von r und q einander immer näher, bis sie bei der kritischen Temperatur gerade auf die gleiche Dichte zusammentreffen; bei weiterem Erkalten gehen sie wieder auseinander, aber dann fällt das Maximum von q auf die grössere Dichte: das permanente Gas ist ein gewöhnlicher Dampf geworden.

Über die Resultante einer Covariante und einer Grundform

von

Dr. **Gustav Kohn**,

Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. October 1891.)

Aus einem allgemeinen Satze, welchen ich vor Kurzem in diesen Sitzungsberichten (Bd. C, S. 878) gegeben habe,[1] ist zu schliessen, dass die Resultante von zwei Covarianten desselben Systems von binären Grundformen in einer ausgedehnten Reihe von Fällen in Factoren zerlegbar ist, indem sie durch gewisse Potenzen der Discriminanten der einzelnen Grundformen und der Resultanten von je zwei unter ihnen theilbar wird. Es erwächst nun die Aufgabe, die angedeutete Zerlegung der Resultante von zwei Covarianten wirklich zu leisten. Für den speciellen Fall, dass eine der beiden Covarianten mit einer der Grundformen identisch ist, wird diese Aufgabe in der vorliegenden Note auf algebraischem Wege vollständig gelöst.[2]

---

[1] Dieser Satz lautet:

Jede Covariante vom Index i des Systems der binären Formen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$, in der die Coëfficienten dieser Formen, beziehungsweise im Grade $g_1, g_2, \ldots\ldots, g_\varkappa$ vorkommen, ist durch die

$$[g_1k_1+g_2k_2+\ldots+g_\varkappa k_\varkappa-i]^{\text{te}}$$

Potenz eines Linearfactors theilbar, den die Grundformen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$, beziehungsweise zur Potenz $k_1, k_2, \ldots, k_\varkappa$ als Factor enthalten.

[2] Der allgemeine Fall, bei dessen Behandlung die Einführung der associirten Wurzeln und deren geometrische Interpretation (vergl. diese Berichte, Bd. C, S. 865 f.) gute Dienste leistet, wird in einer Abhandlung untersucht, deren Erscheinen in den Monatsheften für Math. u. Phys. in Aussicht steht.

Eine Covariante eines simultanen Systems von binären Formen mit allgemeinen Coëfficienten ist bekanntlich durch Angabe ihres ersten Coëfficienten, den man auch als Quelle der Covariante zu bezeichnen pflegt, vollständig definirt. Zwischen den Quellen von Covarianten bestehen genau dieselben Relationen wie zwischen den Covarianten selbst. Es ist daher die Theilbarkeit der Quelle einer Covariante durch die λ^{te} Potenz des ersten Coëfficienten einer der Grundformen nothwendig und hinreichend dafür, dass die Covariante selbst die λ^{te} Potenz dieser Grundform als Factor enthalte.

Wird in jeder der Grundformen der erste Coëfficient der Einheit gleichgesetzt, dann wird durch Angabe ihres ersten Coëfficienten φ eine Covariante nicht mehr vollständig bestimmt sein. Es wird eine „einfachste" Covariante Φ mit dem ersten Coëfficienten φ geben, welche keine der Grundformen als Factor enthält, und aus dieser einfachsten Covariante Φ werden alle übrigen, für welche φ der erste Coëfficient ist, durch Multiplication mit Potenzen der Grundformen hervorgehen. Denn aus der neuen Gestalt φ des ersten Coëfficienten der Covariante kann dessen ursprüngliche Gestalt (dadurch, dass man durch Hinzufügung passender Potenzen der ersten Coëfficienten der Grundformen alle Glieder homogen macht) nur bis auf eventuell multiplicatorisch hinzutretende Potenzen der ersten Coëfficienten der Grundformen restituirt werden.

Wir erinnern noch daran, dass, wenn eine Covariante, die keine der Grundformen als Factor enthält, als Function der Wurzeln der Grundformen betrachtet wird, der höchste Grad, in welchem in ihrem Leitgliede eine Wurzel einer Grundform vorkommt, den Grad der Covariante in den Coëfficienten der betreffenden Grundform angibt.

Ist

$$f_1(x_1, x_2) = (x_1 - \alpha_1 x_2)(x_1 - \alpha_2 x_2)\dots(x_1 - \alpha_{n_1} x_2)$$

eine von den Grundformen, so ergibt sich endlich aus der bekannten Gestalt, welche eine Covariante als Function der Wurzeln der Grundformen besitzt, dass, wenn man in ihrem Ausdrucke überall an Stelle der Wurzel α_1 die Variable x_1 einsetzt und die einzelnen Glieder durch Hinzufügung passender Potenzen von x_2

homogen macht, eine simultane Covariante des Formensystems zum Vorschein kommt, welches von der Form

$$f_1^{(1)}(x_1, x_2) = (x_1 - \alpha_2 x_2)(x_1 - \alpha_3 x_2) \ldots (x_1 - \alpha_{n_1} x_2)$$

in Verbindung mit den neben $f_1(x_1, x_2)$ ursprünglich vorhandenen Grundformen gebildet wird.

Nachdem diese Vorerinnerungen erledigt sind, wenden wir uns dem Gegenstande unserer Untersuchung zu.

Es seien $\varkappa$ beliebige Grundformen $f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa$ vorgelegt, welche sämmtlich den ersten Coëfficienten gleich eins haben, und es sei

$$\begin{aligned}
f_1(x, 1) &= (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{n_1}) \\
f_2(x, 1) &= (x - \alpha_{n_1+1})(x - \alpha_{n_1+2}) \ldots (x - \alpha_{n_1+n_2}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_\varkappa(x, 1) &= (x - \alpha_{n-n_\varkappa+1})(x - \alpha_{n-n_\varkappa+2}) \ldots (x - \alpha_n)
\end{aligned}$$

Es sei ferner Π eine beliebige simultane Covariante dieser Grundformen, vom Grade g_1 in den Coëfficienten von f_1, vom Grade g_2 in den Coëfficienten von f_2, ..., vom Grade $g_\varkappa$ in den Coëfficienten von $f_\varkappa$ und man habe

$$\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; x, 1) = (\alpha_1^{g_1}\varphi_1 + \psi_1)x^\mu + \ldots \qquad (1)$$

eine Gleichung, durch welche angedeutet werden soll, dass der erste Coëfficient der als Function der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ dargestellten Covariante Π die Form besitzt

$$\alpha_1^{g_1}\varphi_1 + \psi_1,$$

wo die Function φ_1 die Wurzel α_1 von f_1 gar nicht mehr enthält, während diese Wurzel in der Function ψ_1 in keinem höheren als dem $(g_1 - 1)^{\text{ten}}$ Grade vorkommt.

Die Resultante R_{Π, f_1} der Covariante Π und der Grundform f_1, welche wir untersuchen wollen, ist gegeben durch

$$R_{\Pi, f_1} = \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \alpha_1, 1)\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \alpha_2, 1) \ldots \ldots \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \alpha_{n_1}, 1).$$

Setzt man in dem Factor $\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \alpha_1, 1)$ an Stelle von α_1 überall x ein, oder, was auf dasselbe hinauskommt, ersetzt man in der Covariante $\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; x, 1)$ die Wurzel α_1 durch x, so erhält man der oben gemachten Bemerkung zufolge in nicht homogener Schreibweise eine Covariante des Formensystems, welches aus der Form $f_1^{(1)}$

$$f_1^{(1)}(x, 1) = (x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\dots(x - \alpha_{n_1})$$

und den Formen $f_2, f_3, \dots f_\varkappa$ sich zusammensetzt.

Der erste Coëfficient der so erlangten Covariante

$$\Pi(x, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n; x, 1)$$

ist sofort anzugeben[1]: er ist gleich φ_1.

Dies folgt direct aus der Gleichung (1), da α_1 in keinem Gliede von $\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n; x, 1)$ zu einer höheren Potenz vorkommt als zur g_1^{ten} und somit nur aus dem ersten Gliede von $\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n; x, 1)$ durch Substitution von x für α_1 ein Glied mit dem Factor $x^{\mu+g_1}$ hervorgeht.

Nun braucht $\Pi(x, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n; x, 1)$ keineswegs die „einfachste" Covariante des Formensystems $f_1^{(1)}, f_2, f_3, \dots f_\varkappa$ zu sein, welche φ_1 als ersten Coëfficienten besitzt. Diese einfachste Covariante mag mit Φ_1 bezeichnet werden.

Wir wollen jetzt die Voraussetzung machen, dass die Function φ_1 der Wurzeln $\alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ eine beliebige Wurzel von $f_1^{(1)}$ zum Grade g_{11} und eine beliebige Wurzel von f_r $(r = 2, 3, \dots \varkappa)$ zum Grade g_{1r} enthalte. Dann wird die einfachste simultane Covariante Φ_1 des Formensystems $f_1^{(1)}, f_2, f_3, \dots f_\varkappa$, welche φ_1 als ersten Coëfficienten besitzt, die Coëfficienten von $f_1^{(1)}$ zum Grade g_{11} und jene von f_r $(r = 2, 3, \dots \varkappa)$ zum Grade g_{1r} enthalten.

Von der Covariante Φ_1 kann sich jede andere, welche ebenfalls φ_1 zum ersten Coëfficienten hat, nur durch multiplicatorisch hinzutretende Potenzen der Grundformen unterscheiden.

Aus diesem Grunde wird:

$$\Pi(x, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n; x, 1) =$$
$$= \Phi_1(x, 1) \cdot [f_1^{(1)}(x, 1)]^{\lambda_{11}} \cdot [f_2(x, 1)]^{\lambda_{12}} \cdot [f_3(x, 1)]^{\lambda_{13}} \dots [f_\varkappa(x, 1)]^{\lambda_{1\varkappa}}.$$

Die Exponenten $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots \lambda_{1\varkappa}$ bestimmen sich durch Vergleichung der Gradzahlen, in welchen die Wurzeln $\alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ auf beiden Seiten dieser Gleichung auftreten.

---

[1] Werden die ersten Coëfficienten der Grundformen f_1 (und $f_1^{(1)}$), $f_2, \dots, f_\varkappa$ nicht gleich eins, sondern bez. gleich $a_0, b_0, \dots, k_0$ vorausgesetzt, so wird der erste Coëfficient von $\Pi(x, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n; x, 1)$ gleich $a_0^{g_1} b_0^{g_2} \dots k_0^{g_\varkappa} \varphi_1$, woraus die weiter unten gegebene Factorenzerlegung dieser Covariante des Formensystems $f_1^{(1)}, f_2, \dots, f_\varkappa$ direct folgt.

Linker Hand kommt in dieser Gleichung jede der Lösungen $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{n_1}$ von $f_1^{(1)}$ zum g_1^{ten} Grade vor, rechter Hand zum Grade $g_{11}+\lambda_{11}$; es folgt also:

$$\lambda_{11} = g_1 - g_{11}.$$

Linker Hand kommt jede Lösung von f_r $(r = 2, 3, \ldots \varkappa)$ zum g_r^{ten} Grade vor, rechter Hand zum Grade $g_{1r}+\lambda_{1r}$; es folgt also:

$$\lambda_{1r} = g_r - g_{1r}. \qquad (r = 2, 3, \ldots \varkappa)$$

Substituirt man in der obigen Gleichung α_1 für x, so geht dieselbe über in:

$$\Pi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n; \alpha_1, 1) = \\ = \Phi_1(\alpha_1, 1)[(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots(\alpha_1-\alpha_{n_1})]^{g_1-g_{11}} \cdot [f_2(\alpha_1, 1)]^{g_2-g_{12}} \\ \cdot [f_3(\alpha_1, 1)]^{g_3-g_{13}} \ldots [f_\varkappa(\alpha_1, 1)]^{g_\varkappa-g_{1\varkappa}}$$

Denkt man sich auch alle analogen Gleichungen gebildet, welche entstehen, wenn man α_1 mit irgend einer der übrigen Wurzeln von f_1 vertauscht, und multiplicirt alle diese Gleichungen mit einander, so kommt:

$$R_{\Pi, f_1} = \Phi_1(\alpha_1, 1) \cdot \Phi_2(\alpha_2, 1) \ldots \Phi_{n_1}(\alpha_{n_1}, 1) \cdot \\ \cdot \Delta_{f_1}^{g_1-g_{11}} R_{f_1, f_2}^{g_2-g_{12}} R_{f_1, f_3}^{g_3-g_{13}} \ldots R_{f_1, f_\varkappa}^{g_\varkappa-g_{1\varkappa}},$$

wo Δ_{f_1} die Discriminante von f_1 und allgemein R_{f_1, f_r} die Resultante von f_1 und f_r bedeutet. Hiemit ist die angestrebte Factorenzerlegung der Resultante R_{Π, f_1} geleistet.

Für den besonderen Fall, dass der Grad der Covariante Π in den Coëfficienten der Grundform f_1 mit dem Gewicht des ersten Coëfficienten von Π übereinstimmt (was soviel heisst, als dass die Function φ_1 unserer Betrachtung sich auf eine Constante c reducirt), ist die Factorenzerlegung der Resultante von Π und f_1 von mir schon in einer früheren Arbeit durchgeführt worden (vergl. a. a. O. S. 880).

In diesem Falle ist $g_{11} = g_{12} = g_{13} = \ldots = g_{1\varkappa} = 0$, so dass man hat

$$R_{\Pi, f_1} = c^{n_1} \Delta_{f_1}^{g_1} \cdot R_{\Pi, f_2}^{g_2} \cdot R_{\Pi, f_3}^{g_3} \ldots R_{\Pi, f_\varkappa}^{g_\varkappa}.$$

Über arithmetische Progressionen, in denen Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Im §. 11 des vierten Haupttheiles seiner „Théorie des nombres“ hat Legendre eine allgemeine Formel zur Bestimmung der Anzahl jener Glieder einer arithmetischen Progression, in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, angegeben, die durch eine Reihe von gegebenen Primzahlen nicht theilbar sind, und mit Hilfe derselben mehrere interessante zahlentheoretische Sätze über arithmetische Progressionen aufgestellt, von denen allerdings die Behauptung, dass alle in einer vorgegebenen Zahl a nicht enthaltenen Primzahlen sich auf die $\varphi(a)$ verschiedenen Progressionen mit der Differenz a, deren Anfangsglieder die zu a theilerfremden ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots a$ sind, gleichmässig vertheilen, sich als nicht stichhältig erweist, was übrigens auch schon daraus hervorgeht, dass, wie Herr Tchebychef im Jahre 1878 bewiesen hat und eine Durchmusterung der Primzahltafeln bestätigt, die Primzahlen von der Form $4s+1$ bedeutend zahlreicher sind, als diejenigen von der Form $4s+3$. Die angezogene Legendre'sche Formel, welche in der letzten Zeit ziemlich in Vergessenheit gerathen zu sein scheint, ist nur ein Glied in einer langen Kette von wichtigen zahlentheoretischen Sätzen über arithmetische Progressionen, von denen mehrere in der vorliegenden Mittheilung abgeleitet werden sollen.

§. 1. Da sämmtliche Wurzeln der Congruenz ersten Grades

$$ax \equiv b \pmod{x},$$

wenn a und $\varkappa$ theilerfremd sind, durch die Linearform $\alpha_\varkappa + mk$ gegeben werden, wo $\alpha_\varkappa$ die unterhalb $\varkappa$ liegende positive Wurzel derselben vorstellt, so sind die durch $\varkappa$ theilbaren Glieder der arithmetischen Reihe

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots.\ na-b \quad (a>0;\ a>b), \qquad 1)$$

in welcher Differenz und Anfangsglied, also auch a und b theilerfremd sind,

$$\alpha_\varkappa a-b,\ (\alpha_\varkappa+\varkappa)a-b,\ (\alpha_\varkappa+2\varkappa)a-b,\ \ldots,$$
$$\left(\alpha_\varkappa+\left\{\left[\frac{n}{\varkappa}\right]-1\right\}\right)a-b, \text{ eventuell } \left(\alpha_\varkappa+\left[\frac{n}{\varkappa}\right]\varkappa\right)a-b\Big),$$

wo das zuletzt erwähnte Glied offenbar nur dann auftreten kann, wenn der bei der Division von n durch $\varkappa$ verbleibende Rest $\varepsilon_\varkappa$ nicht kleiner als $\alpha_\varkappa$ ist. Aus der Gleichung

$$n=\left[\frac{n}{\varkappa}\right]\varkappa+\varepsilon_\varkappa$$

folgt die Relation

$$\left[\frac{n}{\varkappa}\right]-\left[\frac{n-\alpha_\varkappa}{\varkappa}\right]=\begin{cases}1\\0\end{cases}$$

je nachdem $\alpha_\varkappa<\varepsilon_\varkappa$ oder $\alpha_\varkappa\geqq\varepsilon_\varkappa$ ist, und daher ist allgemein das grösste der durch $\varkappa$ theilbaren Glieder der vorgelegten Progression

$$\left(\alpha_\varkappa+\left[\frac{n_\varkappa-\alpha_\varkappa}{\varkappa}\right]\varkappa\right)a-b,$$

so dass also ihre Anzahl gleich

$$\left[\frac{n-\alpha_\varkappa}{\varkappa}\right]+1=\left[\frac{n+(\varkappa-\alpha_\varkappa)}{\varkappa}\right]$$

ist. Nun ist aber $\alpha'_\varkappa=\varkappa-\alpha_\varkappa$ die kleinste positive Wurzel der Congruenz

$$ax\equiv -b \pmod{\varkappa}$$

und desshalb hat man das folgende von Legendre a. a. O. gefundene Resultat:

Von den ersten n aufeinanderfolgenden Gliedern der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots \quad (a>0;\ a>b),$$

deren Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, enthalten $\left[\frac{n+\alpha'_\varkappa}{\varkappa}\right]$ die zu a theilerfremde ganze Zahl $\varkappa$ als Factor, wo $\alpha'_\varkappa$ die kleinste positive Wurzel der Congruenz

$$ax+b\equiv 0 \pmod{\varkappa}$$

vorstellt.

Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei für alle in Betracht kommenden ganzzahligen Werthe von x existirende, im Übrigen ganz willkürliche Functionen und

$$h(x)=\sum_d f\left(\frac{x}{d}\right)g(d), \qquad 2)$$

wo die Summation bezüglich d über alle Theiler der ganzen Zahl x auszudehnen ist. Es soll nun zunächst die Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} h(\lambda a-b)$$

untersucht werden. Nach den eben gemachten Erörterungen ist derjenige Theil derselben, welcher sich auf irgend einen bestimmten Theiler y eines Gliedes der arithmetischen Progression 1) bezieht

$$g(y)\left\{f\left(\frac{a\alpha_y-b}{y}\right)+f\left(a+\frac{a\alpha_y-b}{y}\right)+f\left(2a+\frac{a\alpha_y-b}{y}\right)+\ldots+\right.$$
$$\left.+f\left(\left[\frac{n-\alpha_y}{y}\right]a+\frac{a\alpha_y-b}{y}\right)\right.=$$
$$=g(y)\left\{f\left(a-\frac{a\alpha'_y+b}{y}\right)+f\left(2a-\frac{a\alpha'_y+b}{y}\right)+f\left(3a-\frac{a\alpha'_y+b}{y}\right)+\right.$$
$$\left.+\ldots+f\left(\left[\frac{n+\alpha'_y}{y}\right]a-\frac{a\alpha'_y+b}{y}\right)\right.$$

und demnach hat man, da nur zu a theilerfremde Zahlen, diese aber sämmtlich als Theiler der Glieder der arithmetischen Reihe auftreten können, die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} h(\lambda a-b)=\sum_{x=1}^{x=na-b} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) g(x), \qquad 3)$$

wo

$$F\left(\left[\frac{n+a'_x}{x}\right]\right)=\sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} f\left(\mu a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$=\sum_{\mu=0}^{\mu=\left[\frac{n-\alpha_x}{x}\right]} f\left(\mu a+\frac{a\alpha_x-b}{x}\right)$$

ist.

Da die Function $h(x)$ in Bezug auf die Functionen $f(x)$ und $g(x)$ vollkommen symmetrisch ist, so folgt aus der eben aufgestellten Gleichung die bemerkenswerthe Relation

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) g(x)=\sum_{x=1}^{x=na-b} G\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) f(x), \qquad 4)$$

wo

$$G\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)=\sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} g\left(\mu a-\frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$=\sum_{\mu=0}^{\mu=\left[\frac{n-\alpha_x}{x}\right]} g\left(\mu a+\frac{a\alpha_x-b}{x}\right)$$

ist.

Ist $a=2$, $b=1$, handelt es sich also um die Progression der ungeraden Zahlen, so ist x ungerade und

$$\alpha'_x=\frac{x-1}{2}, \qquad \alpha_x=\frac{x+1}{2};$$

die Gleichungen 3) und 4) gehen demnach in diesem Falle in die folgenden über:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} h(2\lambda-1) = \sum_{x=1}^{x=n} F\left(\left[\frac{2n-1}{4x-2}+\frac{1}{2}\right]\right) g(2x-1)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} F\left(\left[\frac{2n-1}{4x-2}+\frac{1}{2}\right]\right) g(2x-1) = \sum_{x=1}^{x=n} G\left(\left[\frac{2n-1}{4x-2}+\frac{1}{2}\right]\right) f(2x-1).$$

Es mag noch darauf hingewiesen werden, dass jedesmal, wenn x ein Theiler von n ist, $\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right] = \frac{n}{x}$ wird.

Es soll nun eine Reihe von besonders interessanten speciellen Fällen dieser allgemeinen Formeln aufgestellt werden, die zu bemerkenswerthen Theoremen führen.

§. 2. Die Function $f(x)$ sei so beschaffen, dass für alle ganzzahligen Werthepaare x, y

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

ist, und es habe $g(x)$ den Werth 0, wenn x keine r^{te} Potenz ist oder einen von $p_1, p_2, \ldots, p_s$ verschiedenen Primfactor enthält, in allen anderen Fällen aber den Werth $f(x)f_1(x)$. Alsdann ist

$$h(x) = f(x)\left(\sum_{d_r} f_1\left(\frac{x}{d_r}\right)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s} \qquad 5)$$

wo die Summation bezüglich d_r über alle Theiler der ganzen Zahl x zu erstrecken ist, deren complementärer Divisor eine r^{te} Potenz ist, und mit $\left(\sum_x f_2(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$ die Summe der Werthe bezeichnet wird, welche die Function $f_2(x)$ annimmt, wenn für ihr Argument nur jene von den durch x bezeichneten ganzen Zahlen genommen werden, die lediglich aus den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ zusammengesetzt sind. Für die durch Gleichung 5) definirte specielle Function $h(x)$ besteht nach den obigen Entwicklungen die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} h(\lambda a-b) =$$

$$= \left(\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x^r}\right) f(x^r) f_1(x^r)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s} \qquad 6)$$

$$= \left(\sum_{x=1}^{x=na-b} H\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$$

wo

$$H\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]}{}' f(a(\lambda x - \alpha_x') - b) f_1\left(\lambda a - \frac{a\alpha_x' + b}{x}\right)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n-\alpha_x}{x}\right]}{}' f(a(\lambda x + \alpha_x) - b) f_1\left(\lambda a + \frac{a\alpha_x - b}{x}\right)$$

ist und die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass nur jene Werthe von λ zu nehmen sind, für welche die zugehörigen Argumente der Function $f_1(y)$ r^{te} Potenzen sind.

Es mögen nun einige von den zahlreichen interessanten Relationen, welche in 6) enthalten sind, näher erörtert werden.

α) Ist

$$r = 1, f_1(x) = \mu(x),$$

so wird

$$\left(\sum_{d_1} f_1\left(\frac{x}{d_1}\right)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s} = \prod_{\lambda} \{1 + \mu^{\varkappa_\lambda}(p_\lambda)\},$$

wo das Product bezüglich λ über alle Primtheiler von x auszudehnen ist, und $\varkappa_\lambda$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem $\lambda \leqq s$ oder $\lambda > s$ ist. Diese Gleichung zeigt, dass $h(x)$ den Werth $f(x)$ oder 0 besitzt, je nachdem x zu dem Producte $p_1, p_2, \ldots, p_s$, welches zur Differenz a der arithmetischen Progression 1) relativ prim sein soll, theilerfremd ist oder nicht, und daher stellt in diesem Falle der auf der linken Seite der Gleichung 6) stehende Ausdruck die Summe derjenigen Werthe vor, welche die Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument jene Glieder der erwähnten arithmetischen Progression durchläuft, welche zu diesem Producte theilerfremd sind. Man hat demnach für diese Summe die zwei Ausdrücke

$$\left(\sum_{x=1}^{x=na-b} F\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) f(x)\mu(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s} \qquad 7)$$

$$\left(\sum_{x=1}^{x=na-b} \mathrm{M}\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$$

wo

$$\mathrm{M}\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]} \mu\left(\lambda a - \frac{a\alpha_x'+b}{x}\right) f(a(\lambda x-\alpha_x')-b) =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\left[\frac{n-\alpha_x}{x}\right]} \mu\left(\lambda a + \frac{a\alpha_x - b}{x}\right) f(a(\lambda x+\alpha_x)-b)$$

ist.

Ist

$$s = \Theta(na-b),$$

d. i. stellen die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ alle Primzahlen des Intervalles $1 \ldots na-b$ vor, so ist nur dann ein zu dem Producte derselben theilerfremdes Glied in der arithmetischen Progression 1) vorhanden, wenn $a-b=1$ ist, und demnach sieht man, dass die Summen

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} F\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) f(x)\mu(x), \quad \sum_{x=1}^{x=na-b} \mathrm{M}\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

den Werth $f(1)$ oder 0 besitzen, je nachdem $a-b=1$ oder $a-b>1$ ist. Als ganz specieller Fall ist in diesem Satze die bekannte Formel

$$\sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \mu(x) = 1$$

enthalten.

Nimmt man

$$s = \Theta(\sqrt{na-b}),$$

so sind nur jene Glieder der arithmetischen Progression 1) zu dem Producte $p_1 p_2 \dots p_s$ theilerfremd, welche Primzahlen des Intervalles $\sqrt{na-b} \dots na-b$ sind, und eventuell noch die Zahl 1, falls $a-b=1$ ist. Die Ausdrücke 7) stellen daher in diesem Falle die Summe der Werthe vor, welche die Function $f(x)$ annimmt, wenn ihr Argument jene Glieder der arithmetischen Progression 1) durchläuft, welche Primzahlen des eben genannten Intervalles sind, eventuell noch vermehrt um $f(1)$.

Wird in den Ausdrücken 7) speciell

$$f(x) = x^x,\ x^x \lambda(x)$$

gesetzt, so entstehen die Gleichungen

$$\varphi^{(x)}_{a,b}(n) = \left(\sum_{x=1}^{x=na-b} x^x S'_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu(x)\right)_{p_1, p_2, \dots, p_s}$$

$$= \left(\sum_{x=1}^{x=na-b} \mathrm{M}_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\right)_{p_1, p_2, \dots, p_s}$$

$$A^{(x)}_{a,b}(n) = \left(\sum_{y=1}^{x=na-b} x^x \Lambda_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu^2(x)\right)_{p_1, p_2, \dots, p_s}$$

$$= \left(\sum_{x=1}^{x=na-b} \bar{\mathrm{M}}^{(x)}_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda(x)x^x\right)_{p_1, p_2, \dots, p_s}$$

wo

$$S'_x\left(\left[\frac{n+a'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)^x$$

$$\mathrm{M}_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \mu\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)(\{\lambda x - \alpha'_x\}a - b)^x$$

$$\Lambda_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \lambda\left(\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)\left(\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)^x$$

$$M_x^{(\rho)}\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]} \mu_x\left(\lambda a - \frac{a\alpha_x'+b}{x}\right)\left(\lambda a - \frac{a\alpha_x'+b}{x}\right)^{\rho} (x \geqq 2)$$

ist und

$\varphi_{a,b}^{(x)}(n)$ die Summe der x^{ten} Potenzen derjenigen Glieder der arithmetischen Progression 1) vorstellt, welche durch keine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ theilbar sind,

$A_{a,b}^{(x)}(n)$ aber den Überschuss der Summe derjenigen von diesen Potenzen, deren Basen aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, über die Summe der übrigen.

Setzt man in der ersten von diesen speciellen Formeln $x=0$, so erhält man für die Anzahl der zum Producte $p_1 p_2 \ldots p$ theilerfremden Glieder der arithmetischen Progression 1) einerseits den im Anfange erwähnten von Legendre ermittelten Ausdruck

$$\left(\sum_{x=1}^{x=na-b}{}' \left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$$

anderseits die neue Darstellung

$$\left(\sum_{x=1}^{x=na-b} M_0\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}.$$

Nimmt man in den obigen Entwicklungen für b zwei verschiedene von den zu a theilerfremden $\varphi(a)$ Zahlen des Intervalles $1 \ldots a-1$ b_1 und $b_2 < b_1$, so können auch die einander entsprechenden zugehörigen grössten ganzen Zahlen $\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]$ sich höchstens um eine Einheit unterscheiden, und demnach kann auch die Differenz der bezüglichen eben ermittelten Summen 7) nicht mehr betragen als

$$\left(\sum_{x=1}^{x=na-b_2} \left|f\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]^{+}\right) ax - (a\alpha_x'+b)\right|\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu^2(x)\right)_{p_1, p_2, \ldots, p_s}$$

wo mit $\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]^+$ die grössere der beiden einander entsprechenden ganzen Zahlen bezeichnet wird. Man sieht demnach, dass die Anzahlen derjenigen Glieder von zwei verschiedenen arithmetischen Progressionen mit der Differenz a, welche zu dem Producte $p_1, p_2, \ldots, p_s$ theilerfremd sind, sich um nicht mehr als

$$\left(\sum_{x=1}^{x=na-b}\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu^2(x)\right)_{p_1,p_2,\ldots,p_s}$$

d.i. um nicht mehr als die Anzahl aller zu a theilerfremden ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots na-b_2$, welche durch kein Quadrat theilbar und nur aus den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ zusammengesetzt sind, unterscheiden können. Von dieser Zahl kann man offenbar im Allgemeinen nur behaupten, dass sie sicher nicht grösser als 2^s-1 ist, keineswegs aber, wie Legendre a. a. O. thut, dass sie s nicht überschreiten kann. Stellen nun die Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_s$ alle $\sqrt{na}$ nicht übertreffenden Primzahlen dar, so ist

$$s = \Theta(\sqrt{na})$$

und es ergibt sich demnach für die Differenz der Anzahlen ϑ_1 und ϑ_2 der in zwei verschiedenen arithmetischen Progressionen mit der Differenz a enthaltenen zwischen $\sqrt{na}$ und $na-b$ befindlichen Primzahlen die Beziehung

$$|\vartheta_1 - \vartheta_2| \leqq 2^{\vartheta(\sqrt{na})} - 1.$$

Da sich alle ungeraden Primzahlen auf die erwähnten $\varphi(a)$ Progressionen vertheilen, so ist demnach

$$\vartheta_1 = \frac{\vartheta(na-b) - \vartheta(\sqrt{na})}{\varphi(a)} + \varepsilon(2^{\vartheta(\sqrt{na})} - 1) \quad (|\varepsilon| \leqq 1).$$

Bedenkt man nun, dass asymptotisch nach Tchebychef

$$\vartheta(m) = \frac{m}{\log m - 1}$$

ist, so erkennt man, dass aus dieser Relation keinesfalls die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} \frac{\vartheta_1 \varphi(a)}{\vartheta(na-b) - \vartheta(\sqrt{na})} = 1$$

gefolgert werden kann, was doch der Fall sein müsste, wenn die im Anfange erwähnte Behauptung Legendre's richtig wäre.

β) Setzt man ferner in 5)

$$r = 1, \quad s = \Theta(na-b), \quad f_1(x) = \alpha(x),$$

wo

$$\alpha(1) = 0, \qquad \alpha(x) = 0 \tag{8}$$

ist, wenn x eine Primzahl in einer höheren als der zweiten, oder mehr als eine Primzahl in einer höheren als der ersten Potenz erhält,

$$\alpha(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)} f_2(p_1) \tag{9}$$

wird, wenn x den Primfactor p_1 in der zweiten, die übrigen $\tilde{\omega}(x) - 1$ aber nur in ersten Potenz enthält, endlich $\alpha(x)$ durch die Gleichung

$$\alpha(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+1} \sum_{\lambda} f_2(p_\lambda) \tag{10}$$

definirt ist, wo die Summation über alle Primfactoren der ganzen Zahl x auszudehnen ist, wenn x durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, so wird die Function $h(x)$ gleich $f(x) f_2(x)$, wenn x eine Primzahl ist, während sie in allen anderen Fällen den Werth 0 besitzt. Die auf der linken Seite der Gleichung 6) stehende Summe ist demnach bei dieser Specialisirung die Summe $F_{a,b}(n)$ der Werthe, welche das Product $f(x) f_2(x)$ annimmt, wenn sein Argument alle Glieder der arithmetischen Progression durchläuft, welche Primzahlen sind, und daher hat man die Formel

$$F_{a,b}(n) = \sum_{x=1}^{x=na-b} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) f(x)\alpha(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} A\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

wo

$$A\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \alpha\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x + b}{x}\right)(f(a(\lambda x - \alpha'_x) - b)$$

ist. Aus derselben ergibt sich für die Anzahl $\Theta_{a,b}(n)$ der unter den Gliedern der arithmetischen Progression 1) enthaltenen Primzahlen der bemerkenswerthe Ausdruck

$$\Theta_{a,b}(n) = \sum_{x=1}^{x=na-b} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) f(x)\,\alpha_0(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} A_0\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

wo

$$A_0\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \alpha_0\left(\left[\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right]\right) f(\alpha(\lambda x-\alpha'_x)-b)$$

ist und $\alpha_0(x)$ den Werth der Function $\alpha(x)$ für $f_2(x) = \frac{1}{f(x)}$ bezeichnet. Ein specieller Fall dieser Formel ist die Relation

$$\Theta_{a,b}(n) = \sum_{x=1}^{x=na-b} \left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\left(\frac{a^2}{x}\right)\alpha_1(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} A_1\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

wo

$$A_1\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \alpha_1\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

ist und für die Function $\alpha_1(x)$ an die Stelle der Gleichungen 8) 9), 10) die folgenden treten

$$\alpha_1(1) = 0, \quad \alpha_1(x) = 0$$
$$\alpha_1(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)}$$
$$\alpha_1(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+1}.$$

Dieselbe geht einerseits für $a = 1$, $b = 0$ in die bekannte Bugajef'sche Formel für die Anzahl aller n nicht überschreitenden Primzahlen

$$\Theta(n) = \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x}\right] \alpha_1(x)$$

über, anderseits liefert sie die nur die Hälfte der für die eben angeführte nöthigen Operationen erfordernde neue

$$\Theta(n) = 1 + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{2}\right]} \left[\frac{n}{4x-2} + \frac{1}{2}\right] \alpha_1(2x-1) \quad (n \text{ ungerade}).$$

Unter diesen $\Theta(n)$ Primzahlen haben, wie man durch Specialisirung der eben aufgestellten allgemeinen Formeln erhält,

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+3}{4}\right]} \left\{ \left[\frac{\left[\frac{n+3}{4}\right]+x-1}{4x-1}\right] \alpha_1(4x-1) + \left[\frac{\left[\frac{n-1}{4}\right]+3x-2}{4x-3}\right] \alpha_1(4x-3) \right\}$$

die Form $4s+1$ und

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n+1}{4}\right]} \left\{ \left[\frac{\left[\frac{n+1}{4}\right]+x-1}{4x-3}\right] \alpha_1(4x-3) + \left[\frac{\left[\frac{n+1}{4}\right]+3x-1}{4x-1}\right] \alpha_1(4x-1) \right\}$$

die Form $4s-1$.

Die Differenz aus der Anzahl derjenigen Glieder der arithmetischen Progression 1), welche Primzahlen sind, und der Anzahl aller n nicht überschreitenden Primzahlen beträgt nach den obigen Entwicklungen

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} \left\{ \left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right] \left(\frac{a^2}{x}\right) - \left[\frac{n}{x}\right] \right\} \alpha_1(x).$$

Könnte man zeigen, dass diese Summe nicht negativ ist, oder wenigstens, dass sie dem absoluten Betrage nach $\varepsilon\Theta(n)$ ($|\varepsilon|<1$) ist, so wäre damit ein neuer Beweis des zuerst von Dirichlet strenge abgeleiteten Satzes, dass in einer unbegrenzten arithmetischen Progression, deren Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, unendlich viele Primzahlen vorkommen, geliefert. Ein solcher ist mir aber auf diesem Wege bisher nicht gelungen.

Definirt man die Function $\alpha_2(x)$ durch die folgenden, den Formeln 8), 9), 10) entsprechenden Relationen

$$\alpha_2(1) = 0, \qquad \alpha_2(x) = 0$$

$$\alpha_2(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)} \left(\frac{4\Delta}{p_1}\right)$$

$$\alpha_2(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+1} \sum_{\lambda} \left(\frac{4\Delta}{p_\lambda}\right)$$

so erhält man für den Überschuss der Summe derjenigen Werthe, welche die Function $f(x)$ erhält, wenn ihr Argument jene unter den Gliedern der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots,\ na-b \quad (a>0;\ a>b)$$

vorkommenden ungeraden Primzahlen durchläuft, von denen die vorgegebene Zahl Δ quadratischer Rest ist, über die Summe der den übrigen zu 2Δ theilerfremden, in derselben auftretenden Primzahlen entsprechenden Werthe von $f(x)$ die zwei Ausdrücke

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) f(x)\,\alpha_2(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} A_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

wo

$$A_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \alpha_2\left(\lambda a - \frac{a\,\alpha'_x+b}{x}\right) f((\lambda x-\alpha'_x)a-b)$$

ist.

Man sieht also namentlich, dass es unter den $\Theta_{a,b}(n)$ in der arithmetischen Progression 1) vorkommenden ungeraden Primzahlen um

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} \left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\left(\frac{a^2}{x}\right)\alpha_2(x) = \sum_{x=1}^{x=na-b} A'_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

mehr solche gibt, von denen 4Δ quadratischer Rest ist, also solche, von denen es Nichtrest ist, wo

$$A_2'\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]} \alpha_2\left(\lambda a - \frac{a\alpha_x'+b}{x}\right)$$

ist.

Es übertrifft demnach die Anzahl derjenigen Glieder der arithmetischen Progression 1), welche Primzahlen von der Form $4s+1$ sind, die Anzahl derjenigen, welche Primzahlen von der Form $4s+3$ sind, um

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} \left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\left(\frac{a^2}{x}\right)\alpha_3(x) = \sum_{x=1}^{x=na-b} A_3\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

und die Anzahl derjenigen, welche Primzahlen von einer der Formen $8s+1$, $8s-1$ sind, die Anzahl jener, welche Primzahlen von einer der beiden Formen $8s+3$, $8s-3$ sind um

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} \left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\left(\frac{a^2}{x}\right)\alpha_4(x) = \sum_{x=1}^{x=na-b} A_4\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

wo

$$A_3\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]} \alpha_3\left(\lambda a - \frac{a\alpha_x'+b}{x}\right)$$

$$A_4\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]} \alpha_4\left(\lambda a - \frac{a\alpha_x'+b}{x}\right)$$

ist und für die Functionen $\alpha_3(x)$ und $\alpha_4(x)$ die Relationen 8), 9), 10) in die folgenden speciellen übergehen:

$$\alpha_3(1) = 0, \qquad \alpha_3(x) = 0$$

$$\alpha_3(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+\frac{p_1-1}{2}}\left(\frac{4}{p_1}\right)$$

$$\alpha_1(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+1}\sum_{\lambda}\left(\frac{4}{p_\lambda}\right)(-1)^{\frac{p_\lambda-1}{2}}.$$

$$\alpha_4(1) = 0, \quad \alpha_4(x) = 0$$

$$\alpha_4(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+\left[\frac{p_1+1}{4}\right]}\left(\frac{4}{p_1}\right)$$

$$\alpha_4(x) = (-1)^{\tilde{\omega}(x)+1}\sum_{\lambda}\left(\frac{4}{p_\lambda}\right)(-1)^{\left[\frac{p_\lambda+1}{4}\right]}$$

γ) Wird in 5)

$$s = \Theta(na-b); \quad f_1(x) = \mu(\sqrt[r]{x}), \text{ beziehungsweise } \lambda_\varrho(\sqrt[r]{x})$$

gesetzt, so hat $h(x)$ im ersten Falle den Werth 0 oder $f(x)$, je nachdem x durch eine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist oder nicht, im zweiten aber $f(x)$ oder 0, je nachdem sämmtliche Exponenten der die ganze Zahl x zusammensetzenden Primzahlpotenzen nach dem Modul $r\varrho$ einer unterhalb r befindlichen Zahl congruent sind oder nicht. Es stellt demnach die auf der linken Seite der Gleichung 6) stehende Summe im ersten Falle die Summe $\overline{F}_{a,b}(n)$ der Werthe vor, welche die Function $f(x)$ annimmt; wenn für ihr Argument alle Glieder der arithmetischen Progression 1) gesetzt werden, welche durch keine r^{te} Potenz (ausser 1), theilbar sind, im zweiten Falle aber die Summe $F^{(1)}_{a,b}(n)$ jener Werthe von $f(x)$, welche diese Function annimmt, wenn ihr Argument diejenigen Glieder der erwähnten Progression durchläuft, bei deren Darstellung durch ein Product von Primzahlpotenzen kein Exponent nach dem Modul $r\varrho$ grösser als $r-1$ ist. Aus der Gleichung 6) folgen daher die Relationen

$$\overline{F}_{a,b}(n) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x^r}\right) f(x^r)\,\mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \mathrm{M}^{(r)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

$$F^{(1)}_{a,b}(n) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} F\left(\left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x^r}\right) f(x^r)\,\lambda_\varrho(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \Lambda^{(1)}_\varrho\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

wo

$$\mathrm{M}^{(r)}\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]}{}' f(a(\lambda x-\alpha_x')-b)\,\mu\left(\sqrt[r]{\lambda a-\frac{a\alpha_x'+b}{x}}\right)$$

$$\Lambda_\rho^{(1)}\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)=\sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]}{}' f(a(\mu x-\alpha_x')-b)\lambda_\rho\left(\sqrt[r]{\mu a-\frac{a\alpha_x'+b}{x}}\right)$$

ist.

Durch zweckentsprechende Specialisirung der Function $f(x)$ findet man, dass die Summe der x^{ten} Potenzen derjenigen Glieder der arithmetischen Progression 1), welche durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, gleich

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} x^{rx}S_x'\left(\left[\frac{n+\alpha_{x^r}'}{x^r}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x^r}\right)\mu(x)=\sum_{x=1}^{x=na-b}\mathrm{M}_x^{(r)}\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

ist, während der Überschuss der Summe derjenigen unter ihnen, welche aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, über die Summe der übrigen

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]}\Lambda_x\left(\left[\frac{n+\alpha_{x^r}'}{x^r}\right]\right)x^{rx}\left(\frac{a^2}{x^r}\right)\lambda^r(x)\mu(x)=\sum_{x=1}^{x=na-b}\overline{\mathrm{M}}_x^{(r)}\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

beträgt, wo

$$\mathrm{M}_x^{(r)}\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]}{}'\mu\left(\sqrt[r]{\lambda a-\frac{a\alpha_x'+b}{x}}\right)(\{\lambda x-\alpha_x'\}a-b)^x$$

$$\overline{\mathrm{M}}_x^{(r)}\left(\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]\right)=$$

$$=\sum_{\mu_1=1}^{\mu_1=\left[\frac{n+\alpha_x'}{x}\right]}{}'\lambda(a(\mu_1x-\alpha_x')-b)\,\mu\left(\sqrt[r]{\mu_1a-\frac{a\alpha_x'+b}{x}}\right)(a(\mu_1x-\alpha_x')-b)^x$$

ist.

Ebenso ergibt sich, dass die Summe der x^{ten} Potenzen derjenigen Glieder der arithmetischen Progression 1), bei deren Darstellung durch ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $r\rho$, einer unterhalb r liegenden ganzen Zahl congruent sind, gleich ist:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} x^{rx} S'_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda_\rho(x) = \sum_{x=1}^{x=na-b} \Lambda^{(1)}_{\rho,x}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

sowie, dass die Summe derjenigen unter ihnen, welche aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt sind, die Summe der übrigen um

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} \Lambda_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\right) x^{rx}\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda^r(x)\lambda_\rho(x) =$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \overline{\Lambda}^{(1)}_{\rho,x}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

übertrifft, wo

$$\Lambda^{(1)}_{\rho,x}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \lambda_\rho\left(\sqrt[r]{\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}}\right)\{(\mu x-\alpha'_x)a-b\}^x$$

$$\overline{\Lambda}^{(1)}_{\rho,x}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \lambda((\mu x-\alpha'_x)a-b)\lambda_\rho\left(\sqrt[r]{\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}}\right)\cdot$$

$$\cdot\{(\mu x-\alpha'_x)a-b\}^x$$

ist.

Von den zahlreichen Theoremen, welche aus den eben entwickelten Formeln abgeleitet werden können, mögen hier die folgenden besonders angeführt werden:

Unter den ersten n Gliedern der unbegrenzten arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots, \qquad (a>0;\ a>b),$$

in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, befinden sich $\frac{a^r n}{\zeta(r)\varphi_r(a)} + A_1 n^{\frac{1}{r}}$ durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbare, wo A_1 eine für alle Werthe von n endliche Zahl bezeichnet.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig herausgegriffenes Glied der unbegrenzten arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots \quad (a>0;\ a>b),$$

in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, beträgt im Mittel $\frac{a^r}{\zeta(r)\varphi_r(a)}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein willkürlich gewähltes Glied der unbegrenzten arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots \quad (a>0;\ a>b),$$

in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, durch keine $(2r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar ist, beträgt im Mittel $\frac{2\Gamma(2r+1)a^{2r}}{(2\pi)^{2r}B_r\varphi_{2r}(a)}$.

Beiläufig der $\frac{6a^2}{\pi^2\varphi_2(a)}^{\text{te}}$ Theil von allen Gliedern der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots \quad (a>0;\ a>b),$$

in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, ist aus lauter verschiedenen Primfactoren zusammengesetzt.

Ungefähr der $\frac{90a^4}{\pi^4\varphi_4(a)}^{\text{te}}$ Theil von allen Gliedern der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots \quad (a>0;\ a>b),$$

in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, enthält keinen biquadratischen Theiler (ausser 1).

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige ganze Zahl zur ganzen Zahl a theilerfremd und durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, ist $\frac{\varphi(a)}{a}$-mal so gross, als die Wahrscheinlichkeit,

dass ein willkürlich herausgegriffenes Glied der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots \quad (a>0;\ a>b);$$

in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist.

Die Wahrscheinlichkeiten, dass irgend ein beliebig gewähltes Glied einer der beiden arithmetischen Progressionen

$$a-b,\ 2a_1-b,\ 3a-b,\ \ldots \quad (a>0;\ a>b)$$
$$a_1-b_1,\ 2a_1-b_1,\ 3a_1-b_1,\ \ldots \quad (a_1>0;\ a_1>b_1),$$

in denen Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, verhalten sich wie $\frac{a^r}{\varphi_r(a)}$ zu $\frac{a_1^r}{\varphi_r(a_1)}$.

Es ist um so wahrscheinlicher, dass ein beliebig herausgegriffenes Glied einer arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, je kleiner die Anzahl der Systeme von r die Differenz nicht übertreffenden ganzen Zahlen ist, welche ein zu derselben theilerfremdes Zahlensystem bilden, und je grösser die Differenz ist.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Darstellung eines beliebigen Gliedes der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots \quad (a>0;\ a>b),$$

in welcher Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, durch ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $r\rho$ einer ganzen Zahl unterhalb r congruent sind, beträgt im Mittel $\frac{a^{r(\rho-1)}\varphi_{r\rho}(a)\zeta(r\rho)}{\varphi_r(a)\,\zeta(r)}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Darstellung eines beliebigen Gliedes der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots \quad (a>0;\ a>b)$$

mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach

dem Modul $2r\rho$ einer ganzen Zahl unterhalb r congruent sind, beträgt im Mittel $\frac{(2\pi)^{2r\rho} B_{r\rho} a^{r(2\rho-1)} \varphi_{2r\rho}(a)}{2\Gamma(2r\rho+1)\varphi_r(a)\zeta(r)}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Darstellung eines willkürlich herausgegriffenen Gliedes der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots \quad (a>0;\ a>b)$$

mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $2r\rho$ einer ganzen Zahl unterhalb $2r$ congruent sind, beträgt im Mittel $\frac{(2\pi)^{2r(\rho-1)}\Gamma(2r+1) B_{r\rho} a^{2r(\rho-1)} \varphi_{2r\rho}(a)}{\Gamma(2r\rho+1) B_r \varphi_{2r}(a)}$.

Unter den Gliedern einer arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz gibt es um so mehr solche Zahlen, bei deren Darstellung als ein Product von Primzahlpotenzen nur Exponenten auftreten, welche nach dem Modul $r\rho$ einer ganzen Zahl unterhalb r congruent sind, je grösser die Differenz und die Anzahl der Systeme von $r\rho$ dieselbe nicht übertreffenden ganzen Zahlen und je kleiner die Anzahl der Systeme von r solchen unter ihnen ist, welche ein zur Differenz theilerfremdes System von $r\rho$, beziehungsweise r ganzen Zahlen bilden.

Unter den ersten n Gliedern der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots \quad (a>0;\ a>b)$$

mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz gibt es

$$\sum_{x=1}^{x=na-b} \left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right] \left(\frac{a^2}{x}\right) \lambda_\rho(x)$$

ρ^{te} Potenzen.

δ) Es sei ferner

$$r=1, \quad s=\Theta(na-b), \quad f(x)=x^x$$

und der Reihe nach

$$f_1(x)=\frac{\mu(x)}{x^x}, \left(\frac{D}{x}\right) x^{\mu-x}, \frac{\mu(x)}{x^x}\left(\frac{\Delta}{x}\right),$$

wo Δ eine Fundamentaldriscriminante ist, dann wird beziehungsweise

$$h(x) = \varphi_x(x),\ \varphi_{\mu,x}(D, x),\ \chi_x(\Delta, x),$$

und es ergeben sich aus der Gleichung 6) die speciellen Relationen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_x(\lambda a - b) = \sum_{x=1}^{x=na-b} S'_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} H_1\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\mu,x}(D, \lambda a - b) = \sum_{x=1}^{x=na-b} S'_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)x^\mu\left(\frac{D}{x}\right)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} H_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \chi_x(\Delta, \lambda a - b) = \sum_{x=1}^{x=na-b} S'_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2\Delta}{x}\right)\mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} H_3\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right),$$

wo

$$H_1\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = x^x \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \mu\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right) = x^x \mathrm{M}_0^{(1)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)$$

$$H_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = x^{\mu-x} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} (a(\lambda x - \alpha'_x) - b)^\mu \left(\frac{D}{\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}}\right)$$

$$H_3\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = x^x \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \mu\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)\left(\frac{\Delta}{\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}}\right)$$

ist.

Berücksichtigt man, dass für jede beliebige ganze Zahl n die Relation

$$K(\Delta n^2) = \chi_1(n)\frac{\log E_1(\omega)}{\log E(\Delta n^2)}$$

besteht, wo $K(D)$ die Classenzahl, $E(D)$ die Fundamentaleinheit der Discriminante D,

$$E_1(\omega) = e^{(\sqrt{\Delta})\sum_{m=1}^{m=\infty}\left(\frac{\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}} \qquad \left(\omega = e^{\frac{2\pi i}{(\sqrt{\Delta})}}\right)$$

$$= \frac{t+u\sqrt{\Delta}}{r}$$

und $(\sqrt{\Delta})$ der Hauptwerth von $\sqrt{\Delta}$ ist, so erhält man aus der letzten Gleichung die interessante Beziehung

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \log E(\Delta(\lambda a-b)^2)K(\Delta(\lambda a-b)^2) =$$

$$= \frac{1}{2\log E_1(\omega)} \sum_{x=1}^{x=na-b} \left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\left[\frac{n+\alpha'_x+x}{x}\right]\left(\frac{a^2\Delta}{x}\right)\mu(x).$$

Die eben aufgestellten Relationen lassen sich mit Hilfe der bekannten Formeln

$$\frac{1}{2}a_1^\mu+(a_1+h)^\mu+(a_1+2h)^\mu+\ldots+(b-h)^\mu+\frac{1}{2}b^\mu =$$

$$= \frac{b^{\mu+1}-a_1^{\mu+1}}{(\mu+1)h} + \sum_{x=1}^{x=n}(-1)^{x-1}\binom{\mu}{2x-1}\frac{B_x h^{2x-1}}{2x}(b^{\mu-2x+1}-a_1^{\mu-2x+1})+$$

$$+R_n \qquad (b = a_1+(n-1)h)$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\left(\frac{D}{n}\right) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}}$$

wo für positive ganzzahlige μ R_n verschwindet, für beliebige reelle aber jedenfalls

$$|R_n| < \frac{h^{2n-1}}{2n}\binom{\mu}{2n-1}B_n\left(b^{\mu-2n+1}-a_1^{\mu-2n+1}\right)$$

ist, und unter Benützung des Umstandes, dass nach einem bekannten Dirichlet'schen Satze

$$\left|\sum_{x=n+1}^{x=\infty}\left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x^\lambda}\right| < \frac{12|D|}{n^\lambda}$$

ist, in die folgenden verwandeln

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_x(\lambda a-b) = \frac{n^{x+1}a^x}{(x+1)\zeta(x+1)\varphi_{x+1}(a)} + An^x$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\mu,x}(D, \lambda a-b) =$$

$$= \frac{n^{x+1}}{a(x+1)} \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{D}{x}\right) \frac{1}{x^{\mu-x+1}} \prod_{1}^{r}{}_{\lambda} \left(1-\left(\frac{D}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{x-\mu+1}_\lambda}\right) + Bn^x$$

$$(x>\mu;\ a = p_1'^{\rho_1} p_2'^{\rho_2} \dots p_r'^{\rho_r};\ p'_1>2)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\mu,\mu}(D, \lambda a-b) =$$

$$= \frac{n^{\mu+1}}{(\mu+1)a} \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{D}{x}\right)\frac{1}{x} \prod_{1}^{r}{}_{\lambda} \left(1-\left(\frac{D}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'_\lambda}\right) + B_1 n^{\mu+\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \chi_x(\Delta, \lambda a-b) = \frac{n^{x+1}}{(x+1)a \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{1}{x^{x+1}} \prod_{1}^{r}{}_{\lambda} \left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{x+1}_\lambda}\right)} + Cn^x$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \log E(\Delta(\lambda a-b)^2) K(\Delta(\lambda a-b)^2) =$$

$$= \frac{n^2}{2a \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{1}{x^2} \prod_{1}^{r}{}_{\lambda} \left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^2_\lambda}\right)} + C_1 n$$

wo A, B, C, B_1, C_1 für alle Werthe von n endlich bleiben.

Ist

$$D = \Delta Q^2,$$

sind ferner $q_1, q_2, \dots, q_\rho$ die sämmtlichen Primfactoren von Q und bezeichnet man endlich die Bernoulli'sche Function n^{ter} Ordnung mit $\varphi(z, m)$, so ergeben sich aus diesen Gleichungen auf Grund von bekannten Theoremen des Herrn Berger die folgenden bemerkenswerthen Beziehungen

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\varphi_{\varkappa-2\sigma,\varkappa}(D,\lambda a-b)=\frac{(-1)^{\sigma+1}(2\pi)^{2\sigma+1}n^{\varkappa+1}}{2a(\varkappa+1)\Pi(2\sigma+1)|\sqrt{-\Delta}|}\cdot$$

$$\cdot\prod_{1}^{r_\lambda}\left(1-\left(\frac{\Delta Q^2}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{2\sigma+1}_\lambda}\right)\prod_{1}^{\rho_\mu}\left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\lambda}\right)\frac{1}{q^{2\sigma+1}_\lambda}\right)\cdot$$

$$\cdot\sum_{\lambda=1}^{h=-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{-\Delta},2\sigma+1\right)+An^{\varkappa}\quad(\Delta<0)$$

$$=\frac{(-1)^{\sigma+1}(2\pi)^{2\sigma+1}n^{\varkappa+1}}{a(\varkappa+1)\Pi(2\sigma+1)|\sqrt{-\Delta}|}\prod_{1}^{r_\lambda}\left(1-\left(\frac{\Delta Q^2}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{2\sigma+1}_\lambda}\right)\cdot$$

$$\cdot\prod_{1}^{\rho_\mu}\left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\lambda}\right)\frac{1}{q^{2\sigma+1}_\lambda}\right)\sum_{h=1}^{h=\left[\frac{-\Delta-1}{2}\right]}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{-\Delta},2\sigma+1\right)+An^{\varkappa}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\varphi_{\varkappa-2\sigma-1,\varkappa}(D,\lambda a-b)=\frac{(-1)^{\sigma}(2\pi)^{2\sigma+2}n^{\varkappa+1}}{2a(\varkappa+1)\Pi(2\sigma+2)|\sqrt{\Delta}|}\cdot$$

$$\cdot\prod_{1}^{r_\lambda}\left(1-\left(\frac{\Delta Q^2}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{2\sigma+2}_\lambda}\right)\prod_{1}^{\rho_\mu}\left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\lambda}\right)\frac{1}{q^{2\sigma+2}_\lambda}\right)\sum_{h=1}^{h=\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{\Delta},2\sigma+2\right)+$$

$$+An^{\varkappa}\quad(\Delta>0)$$

$$=\frac{(-1)^{\sigma}(2\pi)^{2\sigma+2}n^{\varkappa+1}}{2a(\varkappa+1)\Pi(2\sigma+2)|\sqrt{\Delta}|}\prod_{1}^{r_\lambda}\left(1-\left(\frac{\Delta Q^2}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{2\sigma+2}_\lambda}\right)\prod_{1}^{\rho_\mu}\left(1-\left(\frac{\Delta}{q_\lambda}\right)\frac{1}{q^{2\sigma+2}_\lambda}\right)\cdot$$

$$\cdot\sum_{h=1}^{h=\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{\Delta},2\sigma+2\right)+An^{\varkappa}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\chi_{2\sigma}(\Delta,\lambda a-b)=$$

$$=\frac{(-1)^{\sigma+1}2\Pi(2\sigma+1)|\sqrt{-\Delta}|n^{2\sigma+1}}{a\prod_{1}^{r_\lambda}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{2\sigma+1}_\lambda}\right)\sum_{h=1}^{h=-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{-\Delta},2\sigma+1\right)(2\pi)^{2\sigma+1}}+$$

$$+Bn^{2\sigma}\quad(\Delta<0)$$

$$= \frac{(-1)^{\sigma+1}\Pi(2\sigma)\,|\sqrt{-\Delta}|\,n^{2\sigma+1}}{(2\pi)^{2\sigma+1}a\prod_{1}^{r}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{2\sigma+1}}\right)}+\sum_{h=1}^{h=\left[\frac{-\Delta-1}{2}\right]}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{-\Delta},2\sigma+1\right)$$

$$+Bn^{2\sigma}\quad(\Delta<0)$$

$$\sum_{\lambda=n}^{\lambda=n}\chi_{2\sigma+1}(\Delta,\lambda a-b)=$$

$$=\frac{(-1)^{\sigma}2\Pi(2\sigma+1)\,|\sqrt{\Delta}|\,n^{2\sigma+2}}{(2\pi)^{2\sigma+2}\,a\prod_{1}^{r}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{2\sigma+2}_\lambda}\right)}+\sum_{h=1}^{h=\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{\Delta},2\sigma+2\right)$$

$$+Bn^{2\sigma+1}\quad(\Delta>0)$$

$$=\frac{(-1)^{\sigma}\Pi(2\sigma+1)\,|\sqrt{\Delta}|\,n^{2\sigma+2}}{(2\pi)^{2\sigma+2}a\prod_{1}^{r}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{2\sigma+2}_\lambda}\right)}+\sum_{h=1}^{h=\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{\Delta},2\sigma+2\right)$$

$$+Bn^{2\sigma+1}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\log E\,(\Delta(\lambda a-b)^2)\,K(\Delta(\lambda a-b)^2)=$$

$$=\frac{4\,|\sqrt{\Delta}|\,n^2}{(2\pi)^2 a\prod_{1}^{r}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{2}_\lambda}\right)}+\sum_{h=1}^{h=\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{\Delta},2\right)+Bn\quad(\Delta>0)$$

$$=\frac{2\,|\sqrt{\Delta}|\,n^2}{(2\pi)^2 a\prod_{1}^{r}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'^{2}_\lambda}\right)}+\sum_{h=1}^{h=\left[\frac{\Delta-1}{2}\right]}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\varphi\left(\frac{h}{\Delta},2\right)+Bn.$$

Von den speciellen Fällen derselben mögen die folgenden angeführt werden:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\varphi_{x-2,x}(-7,\lambda a-b)=\frac{32\pi^3 n^{x+1}}{343\sqrt{7}(x+1)a}\prod_{1}^{r}\left(1-\left(\frac{7}{p'_\lambda}\right)\frac{(-1)^{\frac{p'_\lambda-1}{2}}}{p'^{3}_\lambda}\right)+An^x$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\varphi_{\varkappa-2,\varkappa}(-11,\lambda a-b)=\frac{12\pi^3 n^{\varkappa+1}}{121\sqrt{11}(\varkappa+1)a}\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1-\left(\frac{11}{p'_\lambda}\right)\frac{(-1)^{\frac{p'_\lambda-1}{2}}}{p'^3_\lambda}\right)+An^{\varkappa}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\varphi_{\varkappa-3,\varkappa}(5,\lambda a-b)=\frac{8\pi^4 n^{\varkappa+1}}{375\sqrt{5}(\varkappa+1)a}\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1+\frac{(-1)^{\left[\frac{p'_\lambda}{5}+\frac{1}{2}\right]+\frac{p'_\lambda+1}{2}}}{p'^4_\lambda}\right)+An^{\varkappa}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\varphi_{\varkappa-4,\varkappa}(-3,\lambda a-b)=\frac{4\pi^5 n^{\varkappa+1}}{729\sqrt{3}(\varkappa+1)a}\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1+\frac{(-1)^{\left[\frac{p'_\lambda}{6}+\frac{1}{2}\right]+\frac{p'_\lambda+1}{2}}}{p'^5_\lambda}\right)+An^{\varkappa}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\chi_2(-7,\lambda a-b)=\frac{343\sqrt{7}n^3}{96a\pi^3\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1+\frac{(-1)^{\left[\frac{p'_\lambda}{7}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{p'_\lambda}{14}+\frac{1}{2}\right]+\frac{p'_\lambda+1}{2}}}{p'^3_\lambda}\right)}+Bn^1$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\chi_2(-11,\lambda a-b)=\frac{121\sqrt{11}n^3}{36a\pi^3\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1-\left(\frac{11}{p'_\lambda}\right)\frac{(-1)^{\frac{p'_\lambda-1}{2}}}{p'^3_\lambda}\right)}+Bn^2$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\chi_3(5,\lambda a-b)=\frac{375\sqrt{5}n^4}{32a\pi^4\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1+\frac{(-1)^{\left[\frac{p'_\lambda}{5}+\frac{1}{2}\right]+\frac{p'_\lambda+1}{2}}}{p'^4_\lambda}\right)}+Bn^3$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\chi_4(-3,\lambda a-b)=\frac{729\sqrt{3}n^5}{20a\pi^5\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1-\frac{(-1)^{\left[\frac{p'_\lambda}{6}+\frac{1}{2}\right]+\frac{p'_\lambda+1}{2}}}{p'^5_\lambda}\right)}+Bn^4$$

Für negative Fundamentaldiscriminanten Δ hat man ferner die Relation

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\varphi_{\mu,\mu}(\Delta,\lambda a-b)=\frac{2\pi K(\Delta)n^{\mu+1}}{\tau\left|\sqrt{-\Delta}\right|(\mu+1)a}\prod_{1}^{r}{}_{\lambda}\left(1-\left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'_\lambda}\right)+B_1 n^{\mu+\frac{1}{2}}$$

wo τ die Anzahl der Transformationen eine Form der Discriminante Δ in sich selbst ist. Dieselbe zerfällt in die folgenden drei Gleichungen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\mu,\mu}(-3, \lambda a-b) = \frac{\pi n^{\mu+1}}{3a(\mu+1)\sqrt{3}} \prod_{1}^{r_\lambda} \left(1 + \frac{(-1)^{\left[\frac{p'_\lambda}{6}+\frac{1}{2}\right]+\frac{p'_\lambda+1}{2}}}{p'_\lambda}\right) + B_1 n^{\mu+\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\mu,\mu}(-4, \lambda a-b) = \frac{\pi n^{\mu+1}}{4a(\mu+1)} \prod_{1}^{r_\lambda} \left(1 + \frac{(-1)^{\frac{p'_\lambda+1}{2}}}{p'_\lambda}\right) + B_1 n^{\mu+\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \varphi_{\mu,\mu}(\Delta, \lambda a-b) = \frac{\pi K(\Delta) n^{\mu+1}}{a(\mu+1)\left|\sqrt{-\Delta}\right|} \prod_{1}^{r_\lambda} \left(1 - \left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'_\lambda}\right) + B_1 n^{\mu+\frac{1}{2}}.$$

Von den aus den entwickelten Formeln sich ergebenden Theoremen mögen folgende drei erwähnt werden:

Die mittlere Anzahl der Darstellungen eines Gliedes der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots\ (a>0;\ a>b;\ a = p_1'^{\lambda_1} p_2'^{\lambda_2} \ldots p_r'^{\lambda_r})$$

mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz durch das System der quadratischen Formen der Fundamentaldiscriminante Δ ist gleich

$$\frac{\tau}{a} \prod_{1}^{r_\lambda} \left(1 - \left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\frac{1}{p'_\lambda}\right) \sum_{x=1}^{x=\infty} \left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{1}{x}.$$

Die mittlere Anzahl der Darstellungen eines Gliedes der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots\ (a>0;\ a>b;\ a = p_1'^{\lambda_1} p_2'^{\lambda_2} \ldots p_r'^{\lambda_r})$$

mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz durch das System der quadratischen Formen der negativen Fundamentaldiscriminante Δ ist gleich

$$\frac{2\pi \prod_{1}^{r_\lambda} \left(1 - \left(\frac{\Delta}{p'_\lambda}\right)\right) K(\Delta)}{a\left|\sqrt{-\Delta}\right|}.$$

Ein Glied einer arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a lässt sich im Mittel $\frac{1}{a}$-mal so oft durch das System der quadratischen Formen der Fundamentaldiscriminante Δ darstellen, als sich irgend eine ganze Zahl durch das System der quadratischen Formen der Discriminante $a^2\Delta$ darstellen lässt.

ε) Setzt man endlich

$$f(x) = 1, \quad s = \Theta(na-b)$$

und der Reihe nach

$$f_1(x) = x^x, \quad \mu_\sigma(\sqrt[r]{x})\,x^x,$$

so wird $h(x)$ gleich der Summe $P_{x,r}(x)$ der x^{ten} Potenzen derjenigen Theiler der ganzen Zahl x, welche r^{te} Potenzen sind, beziehungsweise der Summe $\tau_{x,r,\sigma}(x)$ derjenigen unter ihnen, welche durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, und man erhält demnach aus 6) die speciellen Formeln

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} P_{x,r}(\lambda a-b) = \sum_{x-1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} \left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\left(\frac{a^2}{x^r}\right) x^{rx}$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} G_1\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \tau_{x,r,\sigma}(\lambda a-b) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[r]{na-b}\right]} \left[\frac{n+\alpha'_{x^r}}{x^r}\right]\left(\frac{a^2}{x^r}\right)\mu_\sigma(x)\,x^{rx}$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} G_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right),$$

wo

$$G_1\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)^x$$

$$G_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{x=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]}{}' \left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)^x \mu_\sigma\left(\sqrt[r]{\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}}\right)$$

ist.

Von den in diesen Formeln enthaltenen asymptotischen Gesetzen der Zahlentheorie mögen die folgenden angeführt werden:

Die Summe der reciproken x^{ten} Potenzen derjenigen Theiler eines Gliedes einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a, welche r^{te} Potenzen sind, ist im Mittel gleich $\dfrac{\zeta(r(x+1))\varphi_{r(x+1)}(a)}{a^{r(x+1)}}$.

Die Summe der reciproken $(2x-1)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler eines Gliedes einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a, welche r^{te} Potenzen sind, beträgt im Mittel $\dfrac{(2\pi)^{2xr}B_{xr}\varphi_{2xr}(a)}{2a^{2xr}\Gamma(2xr+1)}$.

Die Summe der reciproken x^{ten} Potenzen derjenigen Theiler eines Gliedes einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen sind, ist im Mittel gleich $\dfrac{(2\pi)^{2r(x+1)}B_{r(x+1)}\varphi_{2r(x+1)}(a)}{2a^{2r(x+1)}\Gamma(2r(x+1)+1)}$.

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a, besitzt im Mittel $\dfrac{\zeta(r)\varphi_r(a)}{a^r}$ Theiler, welche r^{te} Potenzen sind.

Die Summe der reciproken x^{ten} Potenzen derjenigen Theiler eines Gliedes einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, ist im Mittel gleich $\dfrac{\zeta(r(x+1))a^{(\sigma-1)r(x+1)}\varphi_{r(x+1)}(a)}{\zeta(\sigma r(x+1))\varphi_{\sigma r(x+1)}(a)}$.

Die Summe der reciproken $(2x-1)^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen Theiler eines Gliedes einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, ist im Mittel gleich

$$\frac{\Gamma(2\sigma rx+1)B_{rx}a^{2rx(\sigma-1)}\varphi_{2rx}(a)}{(2\pi)^{2\sigma x(\sigma-1)}\varphi_{2\sigma rx}(a)\Gamma(2rx+1)B_{\sigma rx}}.$$

Die Summe der reciproken x^{ten} Potenzen derjenigen Theiler eines Gliedes einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit

zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, ist im Mittel gleich

$$\frac{\Gamma(2\sigma r(\varkappa+1)+1)B_{r(\varkappa+1)}a^{2r(\varkappa+1)(\sigma-1)}\varphi_{2r(\varkappa+1)}(a)}{(2\pi)^{2r(\varkappa+1)(\sigma-1)}\Gamma(2r(\varkappa+1)+1)B_{\sigma r(\varkappa+1)}\varphi_{2\sigma r(\varkappa+1)}(a)}.$$

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a hat im Mittel $\frac{\zeta(r)a^{r(\sigma-1)}\varphi_r(a)}{\zeta(\sigma r)\varphi_{\sigma r}(a)}$ Theiler, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a hat im Mittel $\frac{2\Gamma(2\sigma r+1)\zeta(r)a^{r(2\sigma-1)}\varphi_r(a)}{(2\pi)^{2\sigma r}B_{\sigma r}\varphi_{2\sigma r}(a)}$ $(r>1)$ Theiler, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a hat im Mittel $\frac{\Gamma(2\sigma r+1)B_r a^{2r(\sigma-1)}\rho_{2r}(a)}{(2\pi)^{2r(\sigma-1)}\Gamma(2r+1)B_{\sigma r}\varphi_{2\sigma r}(a)}$ Theiler, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

§. 3. Setzt man in 2) der Reihe nach

$$g(x)=\mu(x),\ \psi_0(x),\ \mu^2(x),\ \mu(x),\ \mu^2(x),\ \lambda(x)x^x,\ \lambda(x)\omega(x),$$
$$\lambda(x)\psi_0(x^2),\ \lambda(x)\psi_0^2(x)$$

und gleichzeitig beziehungsweise

$$f(x)=S_x(x),\ \varphi_x(x),\ f_\gamma(x),\ \psi_x(x),\ \rho_{x,2}(x),\ \mu^2(x),\ \omega(x),\ \psi_0(x^2),\ \psi_0^2(x)$$

so wird

$$h(x)=\varphi^{(x)}(x),\ \psi_x(x),\ \frac{f_{\gamma-1}(x)\psi(x^2\pi^{\gamma-2}(x))}{(\gamma-1)^{\tilde{\omega}(x)}},\ x^x,\ \psi_x(x),\ \lambda(x)\varphi_x(x),$$
$$\begin{cases}0 & (x>1)\\ 1 & (x=1)\end{cases},\ \begin{cases}0\\1\end{cases},\ \begin{cases}0\\1\end{cases},$$

je nachdem in den zwei letzten Fällen x kein Quadrat oder ein Quadrat ist, und daher folgen aus 3) und 4) die Gleichungen:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\varphi^{(\lambda)}(\lambda a-b)=\sum_{x=1}^{x=na-b}\bar{S}_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \mathrm{M}_0\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) S_x(x)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \psi_x(\lambda a-b) = \sum_{x=1}^{x=na-b} \Psi'_0\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\varphi_x(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \Phi'_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\psi_0(x)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{f_{\gamma-1}(\lambda a-b)\psi((\lambda a-b)^2\pi^{\gamma-2}(\lambda a-b))}{(\gamma-1)^{\omega(\lambda a-b)}} =$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} F_\gamma\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\mu^2(x)\left(\frac{a^2}{x}\right)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \overline{\mathrm{M}}_2^{(0)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right) f_\gamma(x)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (\lambda a-b)^x = \sum_{x=1}^{x=na-b} \Psi'_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \mathrm{M}_0\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\psi_x(x)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \psi_x(\lambda a-b) = \sum_{x=1}^{x=na-b} \overline{\mathrm{M}}_2^{(0)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\rho_{x,2}(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} P'_{x,2}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu_2(x)$$

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=n} \lambda(\mu a-b)\varphi_x(\mu a-b) = \sum_{x=1}^{x=na-b} \overline{\mathrm{M}}_2^{(0)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda(x)x^x$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \Lambda_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\mu_2(x)$$

$$Q^{(2)}_{a,b}(n) = \sum_{x=1}^{x=na-b} \Lambda^{(1)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\psi_0(x^2)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \overline{\Psi}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda(x)\psi_0(x^2)$$

$$Q^{(3)}_{a,b}(n) = \sum_{x=1}^{x=na-b} \Lambda^{(2)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\psi_0^2(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \tilde{\Psi}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda(x)\psi_0^2(x)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=na-b} \Lambda^{(3)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\omega(x) =$$

$$= \sum_{x=1}^{x=na-b} \Omega'\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda(x)\omega(x) = \begin{cases} 1 & (a-b=1) \\ 0 & (a-b>1) \end{cases}$$

wo $Q^{(\lambda)}_{a,b}(n)$ die Anzahl derjenigen Glieder der arithmetischen Progression 1) bezeichnet, welche λte Potenzen sind, und

$$\Psi'_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \psi_x\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$\overline{S}_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} S_x\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$F_\gamma\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} f_\gamma\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$\Phi'_x\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \varphi_x\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$P'_{x,\lambda}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \rho_{x,\lambda}\left(\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$\Lambda^{(1)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \lambda\left(\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)\psi_0\left(\left(\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)^2\right)$$

$$\Lambda^{(2)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \lambda\left(\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)\psi_0^2\left(\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$\Lambda^{(3)}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\mu=1}^{\mu=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \lambda\left(\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)\omega\left(\mu a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$\overline{\Psi}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \psi_0\left(\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)^2\right)$$

$$\tilde{\Psi}\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \psi_0^2\left(\lambda a - \frac{a\alpha'_x+b}{x}\right)$$

$$\Omega'\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]} \omega\left(\lambda a - \frac{a\alpha_x+b}{x}\right)$$

ist.

Von weiteren Theoremen, welche aus den Formeln 2) und 3) auf dem bisher eingeschlagenen Wege abgeleitet werden können, mögen schliesslich noch die folgenden angeführt werden:

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a besitzt im Mittel $\frac{\zeta(r)\varphi_r(a)}{a^{r-\lambda}\zeta(\lambda)\varphi_\lambda(a)}$ Theiler, welche r^{te} Potenzen sind und einen complementären Divisor haben, welcher durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist.

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a besitzt im Mittel $\frac{\zeta(r)\, a^{r(\sigma-1)+\lambda}\varphi_r(a)}{\zeta(\sigma r)\zeta(\lambda)\varphi_{\sigma r}(a)\,\varphi_\lambda(a)}$ Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a besitzt im Mittel $\frac{2\Gamma(2\sigma r+1)\,\zeta(r)\, a^{r(2\sigma-1)+\lambda}\varphi_r(a)}{(2\pi)^{2\sigma r}B_{\sigma r}\varphi_{2\sigma r}(a)\,\zeta(\lambda)\varphi_\lambda(a)}$ $(r>1)$ Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Jedes Glied einer unbegrenzten arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz a besitzt im Mittel $\frac{\Gamma(2\sigma r+1)B_r a^{2r(\sigma-1)+\lambda}\varphi_{2r}(a)}{(2\pi)^{2r(\sigma-1)}\Gamma(2r+1)B_{\sigma r}\varphi_{2\sigma r}(a)\zeta(\lambda)\varphi_\lambda(a)}$ Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche $(2r)^{\text{te}}$ Potenzen und durch keine $(2\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind.

Bezeichnet $\mathfrak{D}'_2(m)$ die Anzahl derjenigen Glieder der arithmetischen Progression

$$a-\frac{a\alpha'_x+b}{x},\quad 2a-\frac{a\alpha'_x+b}{x},\quad \ldots,\quad ma-\frac{a\alpha'_x+b}{x}$$

(in welcher a und b theilerfremd sind), welche durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar sind, so ist die Anzahl derjenigen unter den Gliedern der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots\quad (a>0;\ a>b)$$

welche Primzahlen sind, gleich

$$\sum_{x=1}^{x=n}\mathfrak{D}'_2\left(\left[\frac{n+\alpha'_x}{x}\right]\right)\left(\frac{a^2}{x}\right)\lambda(x)\,\tilde{\omega}(x).$$

Es ist bei theilerfremden a und b

$$\prod_{1}^{\left[\rho_x\right]}(2\sin\rho_x\pi)^{2\left[\frac{n+\alpha_x}{x}\right]\left(\frac{a^2}{x}\right)}=2^{\left[\frac{n+\alpha'_2}{2}\right]\left(\frac{a^2}{2}\right)}\prod_{1}^{n}(\lambda a-b)\quad (a>0;a>b)$$

wo das Product bezüglich ρ_x über alle reducirten positiven echten Brüche mit dem Nenner x zu erstrecken ist, welche nicht grösser als $\frac{1}{2}$ sind.

Die Summe der Theiler der ersten n Glieder der arithmetischen Progression

$$a-b,\ 2a-b,\ 3a-b,\ \ldots \quad (a>0;\ a>b)$$

mit zum Anfangsgliede theilerfremder Differenz vermehrt um die Summe der Reste, welche bleiben, wenn man die um n vergrösserte kleinste positive Wurzel jeder der für alle zu a theilerfremden, n nicht überschreitenden Module m gebildeten Congruenzen

$$ax+b \equiv 0 \pmod{m}$$

durch den Modul m dividirt, übertrifft die Summe der genannten Congruenzwurzeln um das n-fache ihrer Anzahl.

Arithmetische Relationen

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

In dem vor Kurzem ausgegebenen Hefte des 14. Bandes der „Acta mathematica“ beweist Herr J. Hacks[1] die wohl zuerst von Herrn Bugajef aufgestellten Gleichungen

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\lambda]{n}]} \left[\frac{n}{x^\lambda}\right] \mu(x) = \mathfrak{D}_\lambda(n) \qquad 1)$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\lambda]{x}]} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) = n, \qquad 2)$$

in denen $\mathfrak{D}_\lambda(n)$ die Anzahl jener ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ bezeichnet, welche durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, auf einem neuen Wege und erschliesst aus dem speciellen Falle $\lambda = 2$ der ersten von ihnen in etwas einfacherer Weise als Herr J. Perott den Euklid'schen Satz, dass die Anzahl der Primzahlen unendlich ist. Dass nicht nur die zweite Relation aus der ersten, sondern auch umgekehrt die erste aus der zweiten leicht abgeleitet werden kann, wie Herr J. Hacks zeigt, lässt sich durch das folgende auch auf andere Fälle anwendbare Verfahren leicht erweisen. Schreibt man in 2) für n: $\left[\frac{n}{y^\lambda}\right]$ multiplicirt sodann mit $\mu(y)$ und summirt von $y = 1$ bis $y = [\sqrt[\lambda]{n}]$, so erhält man die Gleichung

[1] „Einige Anwendungen der Function $[x]$.“ A. a. O., S. 329—336.

$$\sum_{y=1}^{y=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \left[\frac{n}{y^\lambda}\right] = \sum_{x,y=1}^{x,y=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{(xy)^\lambda}\right]\right) \mu(y).$$

Vereinigt man nun auf der rechten Seite derselben alle Glieder, in denen xy den Werth z hat, so ergibt sich als Coëfficient von $\mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{z^\lambda}\right]\right)$ die über alle Theiler d von z erstreckte Summe

$$\sum_d \mu(d),$$

welche bekanntlich den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem $z = 1$ oder $z > 1$ ist, und demnach entsteht die Formel 1).

Ausser den zwei genannten Formeln habe ich bei verschiedenen Gelegenheiten[1] eine Reihe von analogen auf die Function $\mathfrak{D}_\lambda(n)$ bezüglichen Relationen ermittelt, von denen beispielsweise die folgenden erwähnt werden mögen:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) x^\varkappa = \sum_{x=1}^{x=n} \left[\frac{n}{x^\lambda}\right] \varphi_\varkappa(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mathfrak{D}_{\sigma\lambda}\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) = \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{\lambda,0,\sigma}(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \rho_{\varkappa,\lambda}(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \psi_\varkappa(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) \lambda_r(x) = 1$$

---

[1] „Arithmetische Theoreme." Denkschr. d. mathem.-naturw. Cl. der k. Akad. d. Wissensch., 49. Bd. — „Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie." A. e. a. O. — „Über die Divisoren der ganzen Zahlen." Diese Sitzb., 91. Bd., II. Abth., S. 600—621. — „Zur Theorie der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen." Denkschr. d. mathem.-naturw. Cl. d. k. Akad. d. Wissensch., 50. Bd.

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\lambda]{n}]} \mathfrak{Q}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) \tau_{1,\lambda x,\sigma}(x) = \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{\lambda,x,\sigma}(x).$$

Alle diese und zahlreiche andere Formeln derselben Kategorie, welche sich theils auf die Function $\mathfrak{Q}_\lambda(n)$, theils auf andere zahlentheoretische Functionen beziehen, folgen aus einer allgemeinen Relation, welche zunächst aufgestellt und sodann durch Specialisirung zur Ableitung von mehreren interessanten Sätzen und Formeln benützt werden soll.

Es sei

$$\sum_{x_\lambda} B\left(\left[\frac{n}{f(x_\lambda)}\right]\right) g(x_\lambda) = A(n), \tag{3}$$

wo die Summation bezüglich x_λ über alle n nicht überschreitenden ganzen Zahlen auszudehnen ist, welche eine vorgeschriebene, durch den Index λ charakterisirte Eigenschaft besitzen. Schreibt man in dieser Gleichung für n: $\left[\frac{n}{(x_\mu)}\right]$, multiplicirt, sodann mit $h(x_\mu)$ und summirt über alle n nicht übersteigenden ganzen Zahlen, welchen die durch den Index μ angegebene Eigenschaft zukommt, so erhält man die Formel

$$\sum_{x_\mu} B\left(\left[\frac{n}{f(x_\mu)}\right]\right) h(x_\mu) = \sum_{x_\lambda, x_\mu} B\left(\left[\frac{n}{f(x_\lambda) f(x_\mu)}\right]\right) g(x_\lambda) h(x_\mu).$$

Ist nun die Function $f(x)$ so beschaffen, dass für alle in Betracht kommenden Werthepaare x_λ, x_μ die Beziehung

$$f(x_\lambda) f(x_\mu) = f(x_\lambda x_\mu) = f(z)$$

besteht, und ist ferner die über alle der Gleichung

$$x_\lambda x_\mu = z \qquad (x_\lambda \leqq n;\ y_\mu \leqq n) \tag{4}$$

genügenden Werthepaare x_λ, x_μ ausgedehnte Summe

$$\sum_{x_\lambda, x_\mu} g(x_\lambda) h(x_\mu) = k(z), \tag{5}$$

so verwandelt sich diese Gleichung in

$$\sum_{z} B\left(\left[\frac{n}{f(z)}\right]\right) k(z) = \sum_{x_\mu} A\left(\left[\frac{n}{f(x_\mu)}\right]\right) h(x_\mu), \qquad 6)$$

in welcher für z alle durch die Gleichung 4) bestimmten ganzen Zahlen zu setzen sind.

Dies ist die erwähnte allgemeine Relation, welche nun auf mehrere bemerkenswerthe specielle Fälle angewendet werden soll. Dass dieselbe auch ihr Analogon in der Theorie der complexen Zahlen hat, ist selbstverständlich.

Ist

$$B(x) = 1, \quad f(x) = x, \quad x_\lambda = x^\lambda, \quad x_\mu = x^\mu,$$

so gehen die Gleichungen 3)—6) in die folgenden über

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\lambda}\right] g(x^\lambda) = A(n)$$

$$x^\lambda y^\mu = z$$

$$\sum' g(x^\lambda) h(y^\mu) = k(z) \qquad 7)$$

$$\sum_{z=1}^{z=n}{}' \left[\frac{n}{z}\right] k(z) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} A\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) h(x^\mu),$$

wo die Marke am Summenzeichen anzeigt, dass für z nur diejenigen ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ zu nehmen sind, welche ein Product aus einer λten und einer μten Potenz sind.

Nun ist

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\lambda}\right] = \sum_{x,\,y=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right],\,y=n} \varepsilon\left(\frac{n}{x^\lambda y}\right) g(x^\lambda)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right) \left(\sum_{d_\lambda} g\left(\frac{r}{d_\lambda}\right)\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \bar{g}_\lambda(r)$$

$$= \overline{G}_\lambda(n)$$

$$\sum_{z=1}^{z=n}{}' \left[\frac{n}{z}\right] k(z) = \sum_{x,\,z=1}^{x,\,z=n} \varepsilon\left(\frac{n}{xz}\right) k(z)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} \varepsilon\left(\frac{n}{r}\right)\left(\sum_{d}^{(s)} k(d)\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=n} k(r)$$

$$= \overline{K}(n),$$

wo $\overline{g}_\lambda(r)$ die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $g(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle Theiler $\frac{r}{d_\lambda}$ von r durchläuft, welche λ^{te} Potenzen sind, und $\overline{k}(r)$ die Summe jener Werthe, welche die Function $k(x)$ erhält, wenn für ihr Argument alle zu den Zahlen z gehörigen Theiler der ganzen Zahl r gesetzt werden.

Für die Function $\overline{k}(r)$ erhält man aus der Relation 7), wie man leicht erkennt, den Ausdruck

$$\overline{k}(r) = \sum_{d_\mu} \overline{g}_\lambda(d_\mu) h\left(\frac{r}{d_\mu}\right) \qquad 8)$$

$$= \sum_{d_\lambda} \overline{h}_\mu(d_\lambda) g\left(\frac{r}{d_\lambda}\right),$$

wo

$$\overline{h}_\mu(r) = \sum_{d_\mu} h\left(\frac{r}{d_\mu}\right)$$

ist. Die eben gemachten Erörterungen führen zu der Relation

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) h(x^\mu) = \overline{K}(n). \qquad 9)$$

Von besonderem Interesse sind diejenigen speciellen Fälle dieser Formel, in denen die Function $g(x)$ so beschaffen ist, dass

$\overline{g}_\lambda(x)$ den Werth 1 oder 0 besitzt, je nachdem die ganze Zahl x eine bestimmte Eigenschaft besitzt oder nicht. In einem solchen Falle stellt die Function $\overline{G}_\lambda(n)$ die Anzahl aller ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ vor, welche die eben erwähnte Eigenschaft besitzen, und es ist $\overline{k}(r)$ die Summe derjenigen Werthe, welche die Function $h(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle Theiler der ganzen Zahl r durchläuft, welche μ^{te} Potenzen sind und einen complementären Divisor besitzen, dem die vorgeschriebene Eigenschaft zukommt.

Beachtet man nun, dass der Ausdruck

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\mu}\right] h(x^\mu) \qquad 10)$$

die Summe der Werthe ergibt, welche die Function $h(x)$ annimmt, wenn für ihr Argument der Reihe nach alle jene Theiler jeder einzelnen von den ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ gesetzt werden, welche μ^{te} Potenzen sind, so erhält man das interessante Resultat, dass die Ersetzung von $\left[\frac{n}{x^\mu}\right]$ durch die eben angeführte specielle Function $\overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right)$ in 10) der Unterdrückung derjenigen von den genannten Theilern gleichkommt, deren complementärer Divisor die vorgeschriebene Eigenschaft nicht besitzt.

Einer von den eben erörterten speciellen Fällen ergibt sich, wenn man

$$g(x) = \mu\left(\sqrt[\lambda]{x}\right)$$

setzt; denn es ist

$$\sum_{d_\lambda} \mu\left(\sqrt[\lambda]{\frac{x}{d_\lambda}}\right) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

je nachdem x durch eine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist oder nicht. Nach 9) ist also

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \mathfrak{Q}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) h(x^\mu) = \sum_{x=1}^{x=n} h_{\lambda,\mu}(x),$$

wo $h_{\lambda,\mu}(r)$ die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $h(x)$ annimmt, wenn ihr Argument jene Theiler der ganzen Zahl r durchlauft, welche μ^{te} Potenzen sind und einen durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbaren complementären Divisor besitzen.

Da, wie ich gezeigt habe,

$$\mathfrak{D}_\lambda(m) = \frac{m}{\zeta(\lambda)} + A_m m^{\frac{1}{\lambda}}$$

ist, wo A_m eine für alle Werthe von m endliche Grösse vorstellt, so kann die Relation 11) auch in folgender Form geschrieben werden

$$\sum_{x=1}^{x=n} h_{\lambda,\mu}(x) = \frac{1}{\zeta(\lambda)} \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \left[\frac{n}{x^\mu}\right] h(x^\mu) + \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} A_x \left[\frac{n}{x^\mu}\right]^{\frac{1}{\lambda}} h(x^\mu) \quad 12)$$

in welcher sie zur Ableitung von verschiedenen asymptotischen Gesetzen der Zahlentheorie benützt werden kann.

In der Gleichung 11) sind die im Anfange angegebenen sechs auf die Function $\mathfrak{D}_\lambda(n)$ bezüglichen Formeln als specielle Fälle enthalten.

Von den mannigfachen anderen Ausdrücken und Theoremen, welche sich aus 11) und 12) durch Specialisirung von $h(x)$ ableiten lassen, mögen folgende hier besondere Erwähnung finden:

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mathfrak{D}_{\sigma\lambda}\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) \lambda_\sigma(x) = \mathfrak{D}_\lambda(n)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) \mu_\sigma(x) = \mathfrak{D}_{\sigma\lambda}(n)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\sigma\lambda]{n}\right]} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^{\sigma\lambda}}\right]\right) x^{\varkappa\sigma\lambda} = \sum_{x=1}^{x=n} \alpha_{\varkappa,\lambda,\sigma}(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\lambda}\right]\right) \tau_{r,\lambda\varkappa,\sigma} = \sum_{x=1}^{x=n} \tau_{r\lambda,\varkappa,\sigma}(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=n} \mathfrak{D}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\mu(x) = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \mu(x).$$

Die Anzahl derjenigen unter den Theilern einer ganzen Zahl mit durch keine λte Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $2r$ einer der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, r$ congruent sind, übertrifft die Anzahl der übrigen im Mittel um

$$\frac{\log 2}{r\zeta(\lambda)} + \frac{\pi}{r^2\zeta(\lambda)} \sum_{\nu=1}^{\nu=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{2r}.$$

Ist

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0,$$

so hat jede ganze Zahl des Intervalles $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ im Mittel

$$\frac{1}{2\zeta(\lambda)}\left(\log n + 2C + \frac{\log 2}{r} + \frac{\pi}{r^2} \sum_{\nu=1}^{\nu=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{2r}\right)$$

Theiler mit durch keine λte Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $2r$ einer der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, r$ congruent sind, und

$$\frac{1}{2\zeta(\lambda)}\left(\log n + 2C + \frac{\log 2}{r} - \frac{\pi}{r^2} \sum_{\nu=1}^{\nu=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{2r}\right)$$

solche von ihnen, welche eine der Formen $2\mu r$, $(2\mu+1)r+1$, $(2\mu+1)r+2$, $\ldots$, $(2\mu+2)r-1$ besitzen.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel

$$\frac{1}{2\zeta(\lambda)}\left(s\log 10 + 2C - 1 + \frac{\log 10}{9} + \frac{\log 2}{r} + \frac{\pi}{r^2} \cdot \sum_{\nu=1}^{\nu=\left[\frac{r}{2}\right]} (r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{2r}\right)$$

Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $2r$ einer der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, r$ congruent sind, und

$$\frac{1}{2\zeta(\lambda)}\left(s\log 10+2C-1+\frac{\log 10}{9}+\frac{\log 2}{r}-\frac{\pi}{r^2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu=\left[\frac{r}{2}\right]}(r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{2r}\right)$$

solche von ihnen, welche eine der Formen $2\mu r$, $(2\mu+1)r+1$, $(2\mu+1)r+2$, ..., $2(\mu+1)r-1$ besitzen.

Die Anzahl derjenigen unter den ungeraden Theilern einer ganzen Zahl mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $4r$ einer ganzen Zahl unterhalb $2r$ congruent sind, übertrifft die Anzahl der übrigen im Mittel um

$$\frac{\pi}{4r\zeta(\lambda)}\sum_{\nu=1}^{\nu=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}.$$

Ist

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0,$$

so hat jede ganze Zahl des Intervalles $n-\eta+1\ldots n+\eta$ im Mittel

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(\log n+2C+\log 2+\frac{\pi}{4r}\sum_{\nu=1}^{\nu=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

ungerade Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $4r$ einer ganzen Zahl unterhalb $2r$ congruent sind, und

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(\log n+2C+\log 2-\frac{\pi}{4r}\sum_{\nu=1}^{\nu=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

solche von ihnen, welche eine der Formen $4\mu r+2r+1$, $4\mu r+2r+3$, ..., $4(\mu+1)r-1$ besitzen.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(s\log 10+2C-1+\log 2+\frac{\log 10}{9}+\frac{\pi}{4r}\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $4r$ einer ungeraden Zahl unterhalb $2r$ congruent sind, und

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(s\log 10+2C-1+\log 2+\frac{\log 10}{9}-\frac{\pi}{4r}\sum_{\nu=1}^{\nu=r}\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

solche von ihnen, welcher eine der Formen $4\mu r+2r+1$, $4\mu r+2r+3$, ..., $4(\mu+1)r-1$ besitzen.

Die Anzahl derjenigen geraden Divisoren einer ganzen Zahl mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $4r$ einer der Zahlen $2, 4, 6, \ldots, \ldots, 2r$ congruent sind, übertrifft die Anzahl der übrigen von ihnen im Mittel um

$$\frac{\log 2}{2r\zeta(\lambda)}+\frac{\pi}{4r^2\zeta(\lambda)}\sum_{\nu=1}^{\nu=r}(2r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\cdot$$

Ist

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0$$

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0,$$

so besitzt jede ganze Zahl des Intervalles $n-\eta+1\ldots n+\eta$ im Mittel

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(\log n+2C-\log 2+\frac{\log 2}{2r}+\frac{\pi}{4r^2}\sum_{\nu=1}^{\nu=r}(2r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

gerade Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $4r$ einer der Zahlen 2, 4, 6, ..., $2r$ congruent sind, und

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(\log n+2C-\log 2-\frac{\log 2}{2r}-\frac{\pi}{4r^2}\sum_{\nu=1}^{\nu=r}(2r-2\nu+1)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

solche von ihnen, welche eine der Formen $4\mu r+2r+2$, $4\mu r+2r+4$, ..., $4(\mu+1)r$ besitzen.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(s\log 10+2C-1-\log 2+\frac{\log 10}{9}+\frac{\log 2}{2r}+\frac{\pi}{4r^2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu=r}(2r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

gerade Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche nach dem Modul $4r$ einer der Zahlen 2, 4, 6, ..., $2r$ congruent sind, während die Anzahl der übrigen von ihnen

$$\frac{1}{4\zeta(\lambda)}\left(s\log 10+2C-1-\log 2+\frac{\log 10}{9}-\frac{\log 2}{2r}-\frac{\pi}{4r^2}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{\nu=1}^{\nu=r}(2r-2\nu+1)\operatorname{cotang}\frac{(2\nu-1)\pi}{4r}\right)$$

beträgt.

Ist

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\,n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0,$$

so besitzt jede ganze ganze Zahl des Intervalles $n-\eta+1\ldots n+\eta$ im Mittel

$$\frac{1}{\zeta(\lambda)\zeta(\sigma)}\left(\log n+2C+\frac{\sigma}{\zeta(\sigma)}\sum_{x=2}^{x=\infty}\frac{\log x}{x^\sigma}\right)$$

Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, und

$$\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma)}\right)\frac{\log n+2C}{\zeta(\lambda)}-\frac{\sigma}{\zeta(\lambda)\zeta^2(\sigma)}\sum_{x=2}^{x=\infty}\frac{\log x}{x^\sigma}$$

solche von ihnen, welche mindestens einen Primfactor in der σ^{ten} oder einer höheren Potenz enthalten.

Ist

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\eta}{n}=0$$

$$\lim_{\eta,\, n=\infty}\frac{\sqrt{n}}{\eta}=0,$$

so besitzt jede ganze Zahl des Intervalles $n-\eta+1 \ldots n+\eta$ im Mittel ebenso viele Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche durch keine (mindestens eine) σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, als jede ganze Zahl des Intervalles $1 \ldots ne$.

Jede s-zifferige Zahl hat im Mittel

$$\frac{1}{\zeta(\sigma)\zeta(\lambda)}\left(s\log 10+2C-1+\frac{\log 10}{9}+\frac{\sigma}{\zeta(\sigma)}\sum_{x=2}^{x=\infty}\frac{\log x}{x^\sigma}\right)$$

Theiler mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche durch keine σ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, und

$$\left(1-\frac{1}{\zeta(\sigma)}\right)\frac{1}{\zeta(\lambda)}\left(s\log 10+\frac{\log 10}{9}+2C-1\right)-\frac{\sigma}{\zeta(\lambda)\zeta^2(\sigma)}\sum_{x=2}^{x=\infty}\frac{\log x}{x^\sigma}$$

von diesen Theilern, welche wenigstens einen Primfactor in einer höheren als der $(\sigma-1)^{\text{ten}}$ Potenz enthalten.

Die Anzahl derjenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, und einen durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbaren complementären Divisor besitzen, ist für $r>1$ im Mittel gleich

$$\frac{\zeta(r)}{\zeta(\lambda)\zeta(\sigma r)}.$$

Die Summe der reciproken x^{ten} Potenzen derjenigen unter den Divisoren einer ganzen Zahl mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welcher r^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma r)^{\text{te}}$ Potenz (ausser 1) theilbar sind, ist im Mittel gleich $\frac{\zeta(r(x+1))}{\zeta(\lambda)\zeta(\sigma r(x+1))}$.

Die Summe der reciproken x^{ten} Potenzen derjenigen Theiler einer ganzen Zahl, welche r^{te} Potenzen sind und einen complementären Divisor besitzen, welcher durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbar ist, beträgt im Mittel $\frac{\zeta(r(x+1))}{\zeta(\lambda)}$.

Unter denjenigen Theilern einer ganzen Zahl mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche r^{te} Potenzen von solchen ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von der Form $x\rho$ und $x\rho+1$ auftreten, gibt es im Mittel um $\frac{\zeta(r\rho)}{\zeta(\lambda)\zeta(r)}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der letzteren Exponenten gerade ist, als solche, bei denen dieselbe ungerade ist.

Unter denjenigen ungeraden Theilern einer ganzen Zahl mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche Quadrate von solchen ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von einer der Formen $3x$, $3x+1$ auftreten, gibt es im Mittel $\frac{\pi^4}{120\zeta(\lambda)}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der zuletzt genannten Exponenten gerade ist, als solche, bei denen dieselbe ungerade ist.

Unter denjenigen ungeraden Theilern einer ganzen Zahl mit durch keine λ^{te} Potenz (ausser 1) theilbarem complementären Divisor, welche Quadrate von solchen ganzen Zahlen sind, bei deren Darstellung als Producte von Primzahlpotenzen nur Exponenten von einer der Formen $6x$, $6x+1$ auftreten, gibt es im Mittel $\frac{188643\,\pi^{10}}{21794572800\zeta(\lambda)}$ mehr solche, bei denen die Anzahl der Exponenten der zweiten Form gerade ist, als solche, bei denen dieselbe ungerade ist.

Einen zweiten speciellen Fall derselben Kategorie erhält man, wenn man

$$\lambda = 1,\ g(x) = \lambda_\sigma(x)$$

setzt, weil

$$\sum_d \lambda_\sigma\left(\frac{x}{d}\right) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

ist, je nachdem x eine σ^{te} Potenz ist oder nicht. Da in diesem Falle

$$\overline{G}_\lambda(n) = [\sqrt[\sigma]{n}]$$

ist, so entsteht aus 9) die Relation

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\mu]{n}]} \left[\sqrt[\sigma]{\frac{n}{x^\mu}}\right] h(x^\mu) = \sum_{x=1}^{x=n} \overline{h}_{\sigma,\mu}(x),$$

in welcher $\overline{h}_{\sigma,\mu}(x)$ die Summe derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $h(x)$ annimmt, wenn ihr Argument jene Theiler der ganzen Zahl r durchläuft, welche μ^{te} Potenzen sind, und einen complementären Divisor besitzen, der eine σ^{te} Potenz ist.

Von den zahlreichen interessanten Fällen dieser Formel mögen die folgenden angeführt werden

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\sqrt[x\rho]{\frac{n}{x^\rho}}\right] \mu(x) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \lambda_x(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\sqrt[x\rho]{\frac{n}{x^\rho}}\right] \mu_x(x) = [\sqrt[\rho]{n}]$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\sqrt[\rho]{\frac{n}{x^\rho}}\right] \lambda_\sigma(x) = [\sqrt[\sigma\rho]{n}]$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\sqrt[2\rho]{\frac{n}{x^\rho}}\right] \frac{f_{\beta-2}(x)\psi(x^2\pi^{\beta-3}(x))}{(\beta-2)^{\bar{\omega}(x)}} = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} f_\beta(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \left[\sqrt[2\rho]{\frac{n}{x^\rho}}\right] \omega_x(x) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt[\rho]{n}]} \psi_x(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \left[\sqrt[\mu\sigma]{\frac{n}{x^\mu}}\right] \frac{\tau_{r,\varkappa,\sigma}(x)}{x^\varkappa} = \sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \rho_{\varkappa,r}(x).$$

Die Annahme

$$\lambda = 1, \quad g(x) = \alpha_0(x)$$

führt endlich, da bekanntlich

$$\sum_d \alpha_0\left(\frac{x}{d}\right) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

ist, je nachdem x eine Primzahl ist oder nicht, zu einem dritten Falle desselben Formelkreises, nämlich zu der Relation

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \Theta\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) h(x^\mu) = \sum_{x=1}^{x=1} h_\mu(x),$$

in welcher $h_\mu(x)$ die Summe jener Werthe bezeichnet, welche die Function $h(x)$ annimmt, wenn für ihr Argument alle Theiler der ganzen Zahl x mit primzahligem complementären Divisor gesetzt werden, welche μ^{te} Potenzen sind.

Ist ferner die Function $g(x)$ so beschaffen, dass für alle in Betracht kommenden Werthe des Argumentes

$$g(x)g(y) = g(xy)$$

ist und

$$h(x) = g(x)h_1(x),$$

so wird bei den gemachten Annahmen über die Functionen $B(x)$ und $f(x)$ und die Zahlen x_λ, x_μ die Formel 6)

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) g(x^\mu) h_1(x^\mu) = \sum_{z=1}^{z=n}{}' \left[\frac{n}{z}\right] g(z) H_1(z),$$

wo $H_1(z)$ die über alle der Gleichung

$$x^\lambda y^\mu = z$$

genügenden Werthe von y ausgedehnte Summe der Werthe von $h_1(y)$ ist, oder also

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) g(x^\mu) h_1(x^\mu) = \sum_{r=1}^{r=n} G(r)$$

$$= \overline{G}(n),$$

wenn $G(r)$ die Summe der Werthe vorstellt, welche das Product $g(x)\,H_1(x)$ annimmt, wenn für sein Argument alle zu den Zahlen z gehörigen Theiler der ganzen Zahl r gesetzt werden.

Aus dieser Relation folgert man sofort das Theorem:

Ist die Function $h_1(y)$ so beschaffen, dass die über alle der Gleichung

$$x^\lambda y^\mu = z$$

genügenden Werthe von y ausgedehnte Summe $H_1(z)$ ihrer Werthe gleich 1 oder 0 ist, je nachdem die Zahl z eine bestimmte Eigenschaft besitzt oder nicht, ist ferner $\overline{G}_\lambda(n)$ die Summe der Werthe, welche die der Bedingung

$$g(x)g(y) = g(xy)$$

genügende Function $g(x)$ annimmt, wenn ihr Argument der Reihe nach alle Theiler jeder der ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ durchläuft, welche λ^{te} Potenzen sind, so gibt die Summe

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) g(x) h_1(x)$$

die Summe jener Werthe an, welche die Function $g(x)$ erhält, wenn für ihr Argument der Reihe nach alle Theiler jeder der ganzen Zahlen von 1 bis n gesetzt werden, welche die erwähnte Eigenschaft besitzen.

Nach diesem Satze geben also die Ausdrücke

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\sigma\lambda]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^{\sigma\lambda}}\right]\right) g(x^{\sigma\lambda})\,\mu(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) g(x^{\lambda})\,\lambda_\sigma(x)$$

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) g(x^{\lambda})\,\alpha_0(x)$$

der Reihe nach die Summen jener Werthe an, welche die Function $g(x)$ annimmt, wenn ihr Argument alle Theiler jeder der ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ durchläuft, welche λ^{te} Potenzen und durch keine $(\sigma\lambda)^{\text{te}}$ Potenz theilbar, beziehungsweise $(\sigma\lambda)^{\text{te}}$ Potenzen beziehungsweise λ^{te} Potenzen von Primzahlen sind.

Aus der eben aufgestellten allgemeinen Relation folgt u. A. auch die Beziehung

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\lambda]{n}\right]} \overline{G}_{\sigma\lambda}\left(\left[\frac{n}{x^{\lambda}}\right]\right) g(x^{\lambda})\,\mu_\sigma(x) = \overline{G}_\lambda(n).$$

Mit Hilfe des in den bisherigen Entwicklungen benützten Verfahrens beweist man endlich den Satz:

Ist die Function $g_1(x)$ so beschaffen, die die über alle der Gleichung

$$x^\lambda y^\mu = z$$

genügenden Werthe von x ausgedehnte Summe $G_1(z)$ den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem die Zahl z eine bestimmte Eigenschaft besitzt oder nicht, ist ferner $\overline{G}_1'(n)$ die Summe der Werthe, welche das Product $g_1(x)h(x)$, dessen Factor $h(x)$ die Bedingung

$$h(x)h(y) = h(xy)$$

erfüllt, annimmt, wenn sein Argument der Reihe nach alle Theiler jeder der ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots n$ durchlauft, welche λ^{te} Potenzen sind, so gibt die Summe

$$\sum_{x=1}^{x=\left[\sqrt[\mu]{n}\right]} \overline{G}_\lambda\left(\left[\frac{n}{x^\mu}\right]\right) h(x^\mu)$$

die Summe jener Werthe an, welche die Function $h(x)$ erhält, wenn für ihr Argument der Reihe nach alle Theiler jeder der ganzen Zahlen von 1 bis n gesetzt werden, welche die erwähnte Eigenschaft besitzen.

Über den quadratischen Restcharakter

von

Leopold Gegenbauer,

c. M. k. Akad.

Ich habe vor Kurzem [1] die Relationen

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{x=m_1-1} \left[\frac{x m_0}{2 m_1} + \frac{1}{2}\right]} \qquad 1)$$

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{x=\frac{m_1-1}{2}} \left[\frac{(2x-1) m_0}{2 m_1} + \frac{1}{2}\right]} \qquad 2)$$

bewiesen, von denen die erste, wie meine Ableitung zeigt, auch für gerade m_1 gilt. In dieser Mittheilung sollen nun aus diesen Gleichungen einige bemerkenswerthe Folgerungen gezogen werden. Die zweite von ihnen lässt sich übrigens, wie ich hier zeigen will, unter Benützung des quadratischen Reciprocitätsgesetzes unmittelbar aus der bekannten Gleichung

$$(m_0, m_1) = \sum_{x=1}^{x=\frac{m_1-1}{2}} \left[\frac{x m_0}{m_1}\right]$$

ableiten. Setzt man in derselben nämlich

$$x = \frac{m_1+1}{2} - x_1,$$

---

[1] „Note über das Legendre-Jacobi'sche Symbol." Diese Sitzungsber. Bd. 100, Abth. II. a., S. 855—864.

so erhält man

$$(m_0, m_1) = \frac{(m_0-1)(m_1-1)}{4} + \sum_{x=1}^{x=\frac{m_1-1}{2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{(2x-1)m_0}{2m_1}\right]$$

oder, da für jedes nicht ganzzahlige α

$$[-\alpha] = -1-[\alpha]$$

ist,

$$(m_0, m_1) + \sum_{x=1}^{x=\frac{m_1-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)m_0}{2m_1} + \frac{1}{2}\right] = \frac{(m_0-1)(m_1-1)}{4},$$

durch welche Gleichung die eben gemachte Behauptung erhärtet wird.

Der einfachste Fall der Gleichung 1), welcher besagt, dass die durch das Kronecker-Schering'sche Lemma definirte charakterische Zahl $(2, m_0)$ von 2 in Bezug auf eine ungerade Zahl m_0 gleich der an $\frac{m_0}{4}$ zunächst liegenden ganzen Zahl ist, ist längst bekannt. Zu dieser höchst interessanten Bestimmung eines quadratischen Restcharakters mit Hilfe einer einzigen nächsten ganzen Zahl wurden später von Herrn V. Buniakowsky[1] und mir[2] noch die weiteren derselben Kategorie angehörigen Relationen

$$\left(\frac{3}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_0}{6}+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\left(\frac{6}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_0}{12}+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\left(\frac{5}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_0}{5}+\frac{1}{2}\right]}$$

---

[1] „Sur les congruences binômes exponentielles à base 3 et sur plusieurs nouveaux théorèmes relatifs aux résidus et aux racines primitives." Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersburg. T. XIV, p. 356—381.

[2] „Über das Legendre-Jacobi'sche Symbol." Diese Sitzungsber., Bd. 91, Abth. II, S. 11—33.

hinzugefügt, deren erste den speciellsten Fall der Gleichung 2) repräsentirt. Noch weitere ebenso einfache Ausdrücke bei beliebigem ungeraden m_0 vermochte ich bisher nur für einige wenige mit den eben angeführten im engsten Zusammenhange stehende Legendre-Jacobi'sche Symbole, wie beispielsweise $\left(\frac{m_0}{2rm_0 \pm 3}\right), \left(\frac{m_0}{2rm_0 \pm 5}\right)$ zu ermitteln. Aus den Gleichungen 1) und 2) kann man nun für eine Reihe von quadratischen Restcharakteren Darstellungen mit Hilfe von zwei nächsten ganzen Zahlen erschliessen, von denen ich am zuletzt angeführten Orte schon die durch die Relation

$$\left(\frac{7}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_0}{14}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{m_0}{7}+\frac{1}{2}\right]}$$

gegebene ohne Beweis mitgetheilt habe, zu welcher in den folgenden Zeilen noch einige andere hinzugefügt werden sollen. Berücksichtigt man übrigens, dass $\left[\frac{m_0}{7}+\frac{1}{2}\right]$ für alle zu 7 theilerfremden ungeraden Zahlen m_0, welche nicht die Form $14t \pm 5$ besitzen, gerade für diese aber ungerade ist, so sieht man, dass für alle ungeraden Zahlen m_0 von einer der vier Formen $14t \pm 1$ $14t \pm 3$ die den vorangeführten Gleichungen vollkommen entsprechende Relation

$$\left(\frac{7}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_0}{14}+\frac{1}{2}\right]}$$

besteht, während für die Zahlen m_0 von einer der beiden Formen $14t \pm 5$

$$\left(\frac{7}{m_0}\right) = -(-1)^{\left[\frac{m_0}{14}+\frac{1}{2}\right]}$$

ist. Ähnliche einfache Resultate erlangt man auch in anderen Fällen, wenn man entweder m_1 nicht allgemein, sondern von geeigneter Form annimmt, oder m_0 passend wählt, wie an einigen Beispielen gezeigt werden wird.

Die im Anfange erwähnten Gleichungen 1) und 2) nebst der Formel

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = (-1)^{\sum_{x=1}^{x=m_1-1}\left[\frac{xm_0}{2m_1}\right]} \qquad 2a)$$

unterscheiden sich von den übrigen bisher gebrauchten Darstellungen des quadratischen Restcharakters mit Hilfe von grössten ganzen Zahlen dadurch, dass bei ihnen der Nenner des Legendre-Jacobi'schen Symbols in den Zählern der auftretenden Ausdrücke vorkommt, wesshalb sich aus ihnen mit Leichtigkeit einfache Algorithmen zur Bestimmung dieses Zeichens ableiten lassen, von denen einer hier angegebenen werden mag.

Die ungerade Zahl m_0, welche zu m_1 theilerfremd ist, kann stets auf die Form

$$m_0 = 2m_1t_1 \pm m_2 \qquad 3)$$

gebracht werden, wo m_2 positiv, ungerade, kleiner als m_1 und zu dieser Zahl relativ prim ist. Führt man diesen Werth von m_0 in die Gleichungen 1) und 2) ein, so verwandeln sich dieselben in

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]t_1 + \sum_{x=1}^{x=m_1-1}\left[\frac{1}{2} \pm \frac{xm_2}{2m_1}\right]} \qquad 4)$$

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]t_1 + \sum_{x=1}^{x=\frac{m_1-1}{2}}\left[\frac{1}{2} \pm \frac{(2x-1)m_2}{2m_1}\right]} \qquad 5)$$

Da m_2 zu m_1 theilerfremd ist, so kann für keinen der in Betracht kommenden Werthe von x $\frac{xm_2}{2m_1}$, beziehungsweise $\frac{(2x-1)m_2}{2m_1}$ den Bruchrest $\frac{1}{2}$ besitzen, und demnach ist

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{xm_2}{2m_1}\right] = -\left[\frac{1}{2} + \frac{xm_2}{2m_1}\right],$$

so dass aus jeder der beiden Gleichungen die für ungerade m_0 und m_1 auch mit Hilfe des quadratischen Reciprocitätsgesetzes erweisbare Relation

$$\left(\frac{m_1}{2m_1t_1 + m_2}\right) = \left(\frac{m_1}{2m_1t_1 - m_2}\right)$$

folgt, in welcher als specieller Fall die Gleichung

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = \left(\frac{m_1}{-m_2}\right)$$

enthalten ist. Die Gleichungen 4) und 5) können auch in die folgende zusammengefasst werden:

$$\left(\frac{m_1}{2m_1 t_1 \pm m_2}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right] t_1} \left(\frac{m_1}{m_2}\right), \qquad 6)$$

welche ein bemerkenswerthes Analogon zum bekannten Additionstheoreme der quadratischen Restcharaktere bildet. Aus derselben folgen u. A. die zwei Relationen

$$\left(\frac{m_1}{4t_1 m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)$$

und, falls m_1 mindestens doppeltgerade, oder, wenn es ungerade ist, primär ist

$$\left(\frac{m_1}{2t_1 m_1 + m_2}\right) = \left(\frac{m_1}{m_2}\right),$$

welche auch mit Hilfe der Theorie der Gauss'schen Summen ermittelt werden können.

Ist nun

$$m_1 = g_2 m_2 + \mu_2 \quad (0 < \mu_2 < m_2),$$

so kann man auf Grund des Additionstheorems der Symbole die Gleichung 6) auch in folgender Weise schreiben

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right] t_1} \left(\frac{\mu_2}{m_2}\right),$$

welche Relation wegen der Gleichung

$$m_2 = 2\mu_2 t_2 \pm m_3,$$

wo m_3 wieder positiv, ungerade, kleiner als μ_2 und zu μ_2 theilerfremd ist, mit Hilfe der eben gefundenen Formel in die folgende übergeführt werden kann:

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right] t_1 + \left[\frac{\mu_2}{2}\right] t_2} \left(\frac{m_2}{m_3}\right).$$

Da man durch Fortsetzung dieses Verfahrens schliesslich zu einer Zahl $m_\nu = +1$ gelangen muss, so hat man den folgenden Ausdruck für den quadratischen Restcharakter:

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]t_1+\left[\frac{\mu_2}{2}\right]t_2+\left[\frac{\mu_3}{2}\right]t_3+\cdots+\left[\frac{\mu_{\nu-1}}{2}\right]t_{\nu-1}}$$

aus welchem sich der folgende Algorithmus zur Bestimmung des Legendre-Jacobi'schen Symbols ergibt:

Leitet man aus den zwei theilerfremden ganzen Zahlen m_0 und m_1, von denen mindestens die erste ungerade ist, in der durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
m_0 &= 2m_1t_1 \pm m_2\\
m_1 &= g_2m_2 + \mu_2\\
m_2 &= 2\mu_2t_2 \pm m_3\\
m_2 &= g_3m_3 + \mu_3\\
m_3 &= 2\mu_3t_3 \pm m_4\\
&\cdots\cdots\cdots\\
m_{\nu-1} &= 2\mu_{\nu-1}t_{\nu-1} \pm 1
\end{aligned}$$

angegebenen Weise die ganzen Zahlen, $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{\nu-1}; t_1, t_2, \ldots, t_{\nu-1}$ ab, so hat das verallgemeinerte Legendre'sche Symbol $\left(\frac{m_1}{m_0}\right)$ den Werth $+1$ oder -1, je nachdem die Anzahl derjenigen unter den Divisoren $m_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_{\nu-1}$ mit zugehörigem einfach-geraden Quotienten $2t_1, 2t_2, \ldots, 2t_{\nu-1}$, welche einfach gerade oder von der Form $4s+3$ sind, gerade oder ungerade ist.

Wie rasch dieser Algorithmus oft zum Ziele führt, mag aus dem folgenden Beispiele ersehen werden. Es ist

$$\begin{aligned}
1847 &= 6.365 - 343\\
365 &= 1.343 + 22\\
343 &= 16.22 - 9\\
343 &= 38.9 + 1
\end{aligned}$$

und demnach hat man die Gleichung

$$\left(\frac{365}{1847}\right) = +1.$$

Es sollen nun aus den Gleichungen 4) und 5) durch passende Specialisirung von m_1, beziehungsweise m_2, neue Relationen ermittelt werden.

Ist $m_1 = 10$, so wird die Summe im Exponenten von -1 auf der rechten Seite der Gleichung 4)

$$\sum_{x=1}^{x=9}\left[\frac{1}{2} \pm \frac{x m_2}{20}\right]$$

gleich $0, \pm 6, \pm 15, \pm 20$, je nachdem m_0 von der Form $20t \pm 1$, $20t \pm 3$, $20t \pm 7$, $20t \pm 9$ ist, und demnach ist

$$\left(\frac{10}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_0}{20}+\frac{1}{2}\right]},$$

wenn m_0 die Form $20t \pm 1$, $20t \pm 3$ oder $20t \pm 9$ besitzt; ist aber m_0 von der Form $20t \pm 7$, so besteht die Relation

$$\left(\frac{10}{m_0}\right) = -(-1)^{\left[\frac{m_0}{20}+\frac{1}{2}\right]}.$$

Für $m_1 = 11$ erhält die im Exponenten von -1 auf der rechten Seite der Gleichung 5) befindliche Summe

$$\sum_{x=1}^{x=5}\left[\frac{1}{2} + \frac{(2x-1)m_2}{22}\right]$$

den Werth $0, \pm 3, \pm 6, \pm 8, \pm 10$, je nachdem m_0 nach dem Modul 22 einer der Zahlen $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 9$ congruent ist und demnach besteht für alle ungeraden Zahlen von einer der 8 Zahlformen $22t \pm 1$, $22t \pm 5$, $22t \pm 7$, $22t \pm 9$ die Relation

$$\left(\frac{11}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_0}{22}+\frac{1}{2}\right]},$$

während für $m_0 = 22t \pm 3$ die Gleichung

$$\left(\frac{11}{m_0}\right) = -(-1)^{\left[\frac{m_0}{22}+\frac{1}{2}\right]}$$

besteht.

Setzt man $m_1 = 13$, so wird der Exponent von -1 in der Gleichung 5) nach dem Modul 2 der Reihe nach den Zahlen 0, ± 4, ± 7, ± 9, ± 12, ± 15 congruent, wenn m_0 nach dem Modul 26, beziehungsweise ± 1, ± 3, ± 5, ± 7, ± 9, ± 11 congruent ist. Da nun in diesem Falle $\left[\frac{m_1}{2}\right]$ gerade ist und $\left[\frac{9m_0}{26} + \frac{1}{2}\right]$ den eben angeführten Zahlformen von m_0 entsprechend die Werthe t_1, $t_1 \pm 1$, $t_1 \pm 2$, $t_1 \pm 2$, $t_1 \pm 3$, $t_1 \pm 4$ erhält, so hat man die Gleichung

$$\left(\frac{13}{m_0}\right) = -(-1)^{\left[\frac{m_0}{26}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{9m_0}{26}+\frac{1}{2}\right]}.$$

Nimmt man $m_1 = 14$, so erhält die oben erwähnte Summe in der Gleichung 4) die Werthe 0, ± 9, ± 16, ± 30, ± 36, ± 42, je nachdem m_0 nach dem Modul 28 einer der Zahlen ± 1, ± 3, ± 5, ± 9, ± 11, ± 13 congruent ist, und daher hat man die Relationen

$$\left(\frac{14}{m_0}\right) = -(-1)^{\left[\frac{m_0}{28}+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\left(\frac{14}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_0}{28}+\frac{1}{2}\right]},$$

je nachdem m_0 eine zu 7 theilerfremde ungerade Zahl von der Form $28t \pm 3$ ist oder nicht.

Ist endlich $m_1 = 17$, so ist der Werth der oben erwähnten Summe in der Gleichung 5) 0, ± 5, ± 9, ± 13, ± 16, ± 21, ± 24, ± 28, wenn m_0 nach dem Modul 34, beziehungsweise den Zahlen ± 1, ± 3, ± 5, ± 7, ± 9, ± 11, ± 13, ± 15 congruent ist. Da in diesem Falle $\left[\frac{m_1}{2}\right]$ gerade ist und $\left[\frac{3m_0}{17} + \frac{1}{2}\right]$ den eben angeführten Formen von m_0 entsprechend die Werthe $2t_1$, $2t_1 \pm 1$, $2t_1 \pm 1$, $2t_1 \pm 1$, $2t_1 \pm 2$, $2t_1 \pm 2$, $2t_1 \pm 2$, $2t_1 \pm 3$ erhält, so hat man die Gleichung

$$\left(\frac{17}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{3m_0}{17}+\frac{1}{2}\right]},$$

wenn m_0 eine der zwölf Formen $34t \pm 1$, $34t \pm 3$, $34t \pm 5$, $34t \pm 7$, $34t \pm 9$, $34t \pm 13$ besitzt, während für $m_0 = 34t \pm 11$, $34t \pm 15$ die Gleichung

$$\left(\frac{17}{m_0}\right) = -(-1)^{\left[\frac{3m_0}{17}+\frac{1}{2}\right]}$$

besteht.

Hat m_2 den Werth 1, so wird die auf der rechten Seite der Gleichung 4) im Exponenten von -1 stehende Summe

$$\sum_{x=1}^{x=m_1-1}\left[\frac{1}{2} \pm \frac{x}{2m_1}\right]$$

gleich 0 und daher hat man die Beziehung

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = \left(\frac{m_1}{2m_1 t_1 \pm 1}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]},$$

welche lehrt, dass der quadratische Restcharakter von m_1 in Bezug auf $2m_1 t_1 \pm 1$ stets gleich $+1$ ist, ausser wenn m_1 von der Form $4s+3$ und die an $\frac{m_0}{2m_1}$ zunächst liegende ganze Zahl ungerade ist.

Ist $m_2 = 3$, so wird die im eben erwähnten Exponenten auftretende Summe

$$\sum_{x=1}^{x=m_1-1}\left[\frac{1}{2} \pm \frac{3x}{2m_1}\right],$$

da keines ihrer Glieder dem absoluten Betrage nach grösser als 1 sein kann und diesen Werth nur dann erhält, wenn x der Bedingung

$$m_1 > x > \frac{m_1}{3}$$

genügt, gleich $m_1 - 1 - \left[\frac{m_1}{3}\right]$ und demnach hat man die Relation

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = \left(\frac{m_1}{2m_1 t_1 \pm 3}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]+m_1-1-\left[\frac{m_1}{3}\right]}, \qquad 7)$$

so dass also speciell, wenn m_1 mehrfach gerade ist, die Gleichung

$$\left(\frac{m_1}{2m_1 t_1 \pm 3}\right) = -(-1)^{\left[\frac{m_1}{3}\right]}$$

besteht, während, falls m_1 die Form $4s+1$ besitzt,

$$\left(\frac{m_1}{2m_1t_1 \pm 3}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{3}\right]}$$

ist. Die letzte Gleichung zeigt, dass das Symbol $\left(\frac{m_1}{2m_1t_1 \pm 3}\right)$ den Werth $+1$ besitzt, wenn m_1 von der Form $12g+1$ ist, während es gleich -1 wird, wenn m_1 nach dem Modul 12 der Zahl $+5$ congruent ist. Aus der abgeleiteten Formel ersieht man ferner, dass das Symbol $\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = \left(\frac{m_1}{2m_1t_1 \pm 3}\right)$ den Werth

$$-(-1)^{g\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]}, (-1)^{g\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]}, (-1)^{(g-1)\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]}$$

erhält, wenn m_1 von der Form $6g+5$, beziehungsweise $6g+1$ oder $6g+4$ beziehungsweise $6g+2$ ist.

Je nach der Beschaffenheit von m_1 kann man ferner, wie man leicht findet, die Formel 7) in einer der folgenden Weisen schreiben:

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{6}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]} (m_1 = 6s+1)$$

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = -(-1)^{\left[\frac{m_1}{6}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]} (m_1 = 6s-1)$$

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{6}-\frac{1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]} (m_1 = 6s-2)$$

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = -(-1)^{\left[\frac{m_1}{6}-\frac{1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]} (m_1 = 6s+2).$$

Nimmt man ferner $m_2 = 5$, so erhält die im Exponenten der eben angezogenen Gleichung befindliche Summe

$$\sum_{x=1}^{x=m_1-1} \left[\frac{1}{2} \pm \frac{5x}{2m_1}\right]$$

da jene von ihren Gliedern, in denen x dem Intervalle $1 \ldots \frac{m_1}{5}$ angehört, gleich 0 sind, diejenigen, in denen x der Bedingung

$$\frac{3m_1}{5} > x > \frac{m_1}{5}$$

genügt, den Werth 1 besitzen, die übrigen aber gleich 2 werden, den Werth $\left[\frac{3m_1}{5}\right] - \left[\frac{m_1}{5}\right]$ und daher hat man die Relation

$$\left(\frac{m_1}{2m_1t_1 \pm 5}\right) = {}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{3m_1}{5}\right]-\left[\frac{m_1}{5}\right]}.$$

Nun ist die Differenz $\left[\frac{3m_1}{5}\right] - \left[\frac{m_1}{5}\right]$ gerade oder ungerade, je nachdem m_1 von einer der 4 Formen $10s \pm 1$, $10s \pm 4$ oder von einer der Formen $10s \pm 3$, $10s \pm 2$ ist, und daher hat man den angeführten Zahlformen entsprechend die Relationen

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = \left(\frac{m_1}{2m_1t_1 \pm 5}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = \left(\frac{m_1}{2m_1t_1 \pm 5}\right) = -(-1)^{\left[\frac{m_0}{2}\right]\left[\frac{m}{2m}+\frac{1}{2}\right]}.$$

Da

$$\left[\frac{3m_1}{5}\right] - \left[\frac{m_1}{5}\right] \equiv \left[\frac{m_1}{5} \pm \frac{1}{2}\right] \pmod 2$$

ist, je nachdem m_1 ungerade oder gerade ist, so lässt sich die eben ermittelte Formel auch in folgende zwei zerlegen:

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = \left(\frac{m_1}{2m_1t_1 \pm 5}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_1}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{m_1}{5}+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = \left(\frac{m_1}{2m_1t_1 \pm 5}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{m_1}{5}-\frac{1}{2}\right]},$$

von denen ich die erste a. a. O. in etwas anderer Form und auf einem weniger einfachen Wege ermittelt habe. Ich benütze diese Gelegenheit, um den daselbst im Exponenten befindlichen Druckfehler $r-1$ st. r zu verbessern.

Durch dasselbe Raisonnement würde man die Gleichung

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = \left(\frac{m_1}{2m_1t_1 \pm 7}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]+m_1-1+\left[\frac{m_1}{7}\right]+\left[\frac{3m_1}{7}\right]+\left[\frac{5m_1}{7}\right]}$$

ermitteln können.

Stellt man die ungerade zu m_1 theilerfremde Zahl m_0 in der Form

$$m_0 = (2t_1+1)m_1 \pm m_2$$

dar, wo m_1 und $m_2 < m$ theilerfremd und nach dem Modul 2 incongruent sind, so dass also

$$t_1 = \left[\frac{m_0}{2m_1}\right]$$

ist, und setzt dies in die Formeln 1) und 2) ein, so erhält man die neuen Relation

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = \left(\frac{m_1}{(2t_1+1)m_1 \pm m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}\right] + \sum_{x=1}^{x=m_1-1}\left[\frac{x+1}{2} \pm \frac{xm_2}{2m_1}\right]}$$

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{(2x-1)m_2}{2m_1}\right]}\left(\frac{\pm 2}{m_1}\right) =$$

$$= (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_1}{2m_1}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{m_1-1}{2}}\left[\frac{(2x-1)m_2}{2m}\right] + \left[\frac{m_1 \pm 1}{4}\right]}$$

oder, da in der zweiten von ihnen $m_2 = 2\mu_2$ ist, nach einer bekannten Formel

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m}\right]}\left(\frac{\pm m_2}{m_1}\right).$$

Vereinigt man in der im Exponenten der ersten von ihnen stehenden Summe die Glieder mit geradem x und dann jene, in denen x ungerade ist, so verwandelt sich die Relation in die folgende

$$\left(\frac{m_1}{m_0}\right) = \left(\frac{m_1}{(2t_1+1)m_1 \pm m_2}\right) =$$

$$= (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}\right] + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m_1-1}{2}\right]}\left[\frac{1}{2} + \frac{xm_2}{m_1}\right] + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{m_1}{2}\right]}\left[\pm\frac{(2x-1)m_2}{2m_1}\right]}.$$

Vergleicht man diese Relation mit der unmittelbar vorhergehenden, so erkennt man, dass, falls m_1 ungerade und die zu m_1 theilerfremde Zahl m_2 gerade ist, die folgende Congruenz besteht:

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m_1-1}{2}} \left[\frac{1}{2} \pm \frac{xm_2}{m_1}\right] \equiv \frac{m_1^2-1}{8} \pmod 2.$$

Dass diese Beziehung nicht mehr besteht, wenn m_1 und m_2 einen gemeinsamen Theiler haben, zeigt schon das einfache Beispiel $m_1 = 21$, $m_2 = 6$, in welchem die Summe ± 16, $\frac{m_1^2-1}{8}$ aber 55 ist.

Auf dem oben auseinandergesetzten Wege leitet man aus diesen allgemeinen Formeln leicht die folgenden speciellen Relationen ab:

$$\left(\frac{m_1}{(2t_1+1)m_1 \pm 2}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}\right]+\left[\frac{m_1}{4}+\frac{1}{2}\right]}\left(\frac{\pm 1}{m_1}\right) =$$

$$= (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m}{2m_1}\right]+\left[\frac{m_1\pm 1}{4}\right]} \qquad (m_1 \text{ ungerade})$$

$$\left(\frac{2m_1}{2(2t_1+1)m_1 \pm 1}\right) = (-1)^{m_1\left[\frac{m_0}{4m_1}\right]} \cdot (\pm 1)^{m_1}$$

$$\left(\frac{m_1}{(2t_1+1)m_1 \pm 2^\lambda \alpha^{2\mu}}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}\right]+(\lambda-1)\left[\frac{m_1+1}{4}\right]+\left[\frac{m_1\pm 1}{4}\right]}$$

$(m_1, \alpha$ ungerade$)$

$$\left(\frac{m_1}{(2t_1+1)m_1 \pm 6}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}\right]+\left[\frac{m}{6}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{m_1\pm 1}{4}\right]}$$

(m_1 ungerade)

$$\left(\frac{m}{(2t_1+1)m_1 \pm 10}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}\right]+\left[\frac{m_1}{5}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{m_1\pm 1}{4}\right]}$$

(m_1 ungerade)

$$\left(\frac{m_1}{(2t_1+1)m_1 \pm 12}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}\right]+\left[\frac{m_1}{12}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{m_1\pm 1}{4}\right]}$$

(m_1 ungerade)

$$\left(\frac{m_1}{(2t_1+1)\pm 14}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}\right]+\left[\frac{m_1}{7}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{m_1}{14}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{m_1\pm 1}{4}\right]}$$

(m_1 ungerade)

$$\left(\frac{2m_1}{2(2t_1+1)m_1 \pm 3}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}\right]+\left[\frac{m_1-1}{2}\right]+\left[\frac{m_1}{6}\right]+\frac{1\mp 1}{2}\left[\frac{m_1}{2}\right]}$$

$$\left(\frac{2m_1}{2(2t_1+1)m_1 \pm 5}\right) =$$

$$= (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1\mp 1}{2}\right]+\left[\frac{3m_1}{10}\right]+\left[\frac{m_1}{10}\right]+\left[\frac{m_1}{5}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{3m_1}{5}+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\left(\frac{2m_1}{2(2t_1+1)m_1 \pm 7}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{3\mp 1}{2}\right]+\left[\frac{m_1-1}{2}\right]+\left[\frac{m_1}{14}\right]+\left[\frac{3m_1}{14}\right]}$$

$$\cdot (-1)^{\left[\frac{5m_1}{14}\right]+\left[\frac{2m_1}{7}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{m_1}{7}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{3m_1}{7}+\frac{1}{2}\right]}$$

$$\left(\frac{2m_1}{2(2t_1+1)m_1 \pm 9}\right) = (-1)^{\left[\frac{m_1}{2}\right]\left[\frac{m_0}{2m_1}+\frac{1\mp 1}{2}\right]+\left[\frac{m_1}{18}\right]+\left[\frac{3m_1}{18}\right]+\left[\frac{5m_1}{18}\right]}$$

$$\cdot (-1)^{\left[\frac{7m_1}{18}\right]+\left[\frac{m_1}{9}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2m_1}{9}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{3m_1}{9}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{4m_1}{9}+\frac{1}{2}\right]}$$

Schreibt man die im Exponenten von -1 in der Gleichung $2a$) auftretende Summe in der Form

$$\sum_{x=1}^{x=\frac{m_1-1}{2}}\left[\frac{xm_0}{2m_1}\right] + \sum_{x=1}^{x=\frac{m_1-1}{2}}\left[\frac{(m_1-x)m_0}{2m_1}\right]$$

und beachtet, dass die zweite von diesen Summen gleich

$$\frac{m_0-1}{2}\cdot\frac{m_1-1}{2} - \sum_{x=1}^{x=\frac{m-1}{2}}\left[\frac{xm_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]$$

ist, sowie dass

$$\left[\frac{xm_0}{2m_1}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{xm_0}{2m_1}\right] = \begin{cases}0\\1\end{cases}$$

wird, je nachdem der in $\frac{xm_0}{2m_1}$ enthaltene Bruchrest kleiner oder grösser als $\frac{1}{2}$ ist, so erkennt man, dass das quadratische Reci-

procitätsgesetz die in dem folgenden Theoreme angegebene Beziehung ausspricht:

Die Anzahl der ungeraden unter den grössten ganzen Zahlen, welche in den Brüchen

$$\frac{m_0}{2m_1}, 2\frac{m_0}{2m_1}, 3\frac{m_0}{2m_1}, \ldots, (m_1-1)\frac{m_0}{2m_1}$$

enthalten sind, ist nach dem Modul 2 der Anzahl derjenigen in der ersten Hälfte enthaltenen Brüche, deren Bruchrest grösser als $\frac{1}{2}$ ist, congruent oder nicht, je nachdem mindestens eine oder keine der beiden theilerfremden Zahlen m_0, m_1 von der Form $4s+1$ ist.

Zum Schlusse will ich bei dieser Gelegenheit noch folgende zwei leicht zu beweisende Sätze angeben:

Ist τ die Anzahl der Transformationen einer Form der Fundamentaldiscriminante Δ in sich selbst, $\varphi(\Delta, n)$ die Anzahl der Darstellungen der ganzen Zahl n durch das System der quadratischen Formen der genannten Discriminante

$$Y(x)-Z(x)i^{\frac{1}{2}(\Delta-1)^2}\sqrt{\Delta} = 2\prod_a (x-e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}})$$

$$Y(x)+Z(x)i^{\frac{1}{2}(\Delta-1)^2}\sqrt{\Delta} = 2\prod_b (x-e^{\frac{2b\pi i}{\Delta}})$$

wo das erste auf a bezügliche Product über alle zu Δ theilerfremden Zahlen unterhalb Δ erstreckt wird, für welche das Legendre-Jacobi'sche Symbol $\left(\frac{a}{\Delta}\right) = +1$ ist, das auf b bezügliche aber über alle von ihnen, für welche $\left(\frac{b}{\Delta}\right) = -1$ ist, so hat man für alle x, die dem absoluten Betrage noch kleiner als 1 sind, die Beziehung

$$\left(\frac{Y(x)-Z(x)(\sqrt{\Delta})}{Y(x)+Z(x)(\sqrt{\Delta})}\right)^{\tau} = \prod_n^{\infty} (1-x^n)^{\frac{(\sqrt{\Delta})\varphi(\Delta, n)}{n}}$$

wo $(\sqrt{\Delta})$ der Hauptwerth von $\sqrt{\Delta}$ ist.

Addirt man zu allen Gliedern eines vollständigen Restensystems für den ungeraden Modul m mit Ausschluss der Null eine Zahl α, so besitzen unter den dadurch entstehenden Zahlen $r-1$, denselben (quadratischen, beziehungsweise cubischen beziehungsweise biquadratischen) Charakter, wie die Zahl α, es gehören zu jeder Gruppe eines von α verschiedenen Charakters r, und es ist endlich eine durch den Modul theilbar, wo r für quadratische Reste $\frac{m-1}{2}$, für cubische $\frac{\text{Norm } m-1}{3}$, für biquadratische $\frac{\text{Norm } m-1}{4}$ ist.

Dieses Theorem enthält als speciellen Fall einen in Legendre's „Théorie des nombres" aufgestellten Satz.

Über einen neuen Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der klinogonalen Axonometrie

von

F. Ruth in Leoben.

(Mit 3 Textfiguren.)

Der bekannte Fundamentalsatz Pohlke's lautet:

Drei beliebige von einem Punkte ausgehende Strecken in einer Ebene[1] können stets als die schiefe Projection von drei gleich langen zu einander senkrechten Strecken im Raume angesehen werden.

Da dieser Satz dem construirenden Geometer hinsichtlich der Wahl der Lage der Axen und der Verkürzungsmassstäbe die grösstmöglichste Freiheit gestattet, gesellt sich zu dem theoretischen Interesse, welches der Satz verdient, noch die praktische Bedeutung hinzu und so ist es begreiflich, dass sich viele Geometer[2] damit befassten, die Richtigkeit des Satzes zu beweisen und Constructionen anzugeben, um die wahre Grösse der Strecken sowohl, sowie die Richtung des projicirenden Strahles zu finden.

---

[1] Mit der Beschränkung, dass höchstens zwei derselben in eine Gerade fallen dürfen und nur eine Null sein darf.

[2] Vergl. Pohlke darst. Geometrie, II. Aufl. Deschwanden, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1861 (S. 254), 1862 (S. 159) und 1864 (S. 273). Schwarz, Crelle, Journal für Math. 63. Bd. 1864. Reye, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1866 (S. 350). Fiedler, darst. Geometrie, III. Aufl. I. Theil, S. 334 u. s. w. Pelz, diese Berichte 1877. Peschka, ebenda 1878. Drasch Zeitschrift für das Realschulwesen, 1883. Schur, Mathematische Annalen, 1885. Mandl, diese Berichte, 1886. Im Journal f. Math., 106. Bd. 1890, S. 121—123, hat Herr A. Beck eine Construction, um aus den gegebenen Bildstrecken das Originalaxenkreuz zu ermitteln, mitgetheilt.

Es sei hier gestattet, der Reihe der publicirten Beweise, die von verschiedenen Gedanken ausgehen, einen neuen Beweis anzuschliessen, welcher vielleicht aus dem Grunde nicht ohne Interesse sein dürfte, als er einfach ist und daher auch leichter im Gedächnisse behalten werden kann. Wir suchen den Beweis für die Richtigkeit des Pohlke'schen Satzes dadurch herzustellen, dass wir nachstehenden Satz beweisen:

„Irgend eine Ellipse und ein beliebiger Punkt in der Ebene derselben können stets als schiefe Projection der Basis und Spitze eines ganz beliebigen geraden Kreiskegels und insbesonders auch eines gleichseitigen[1] betrachtet werden."

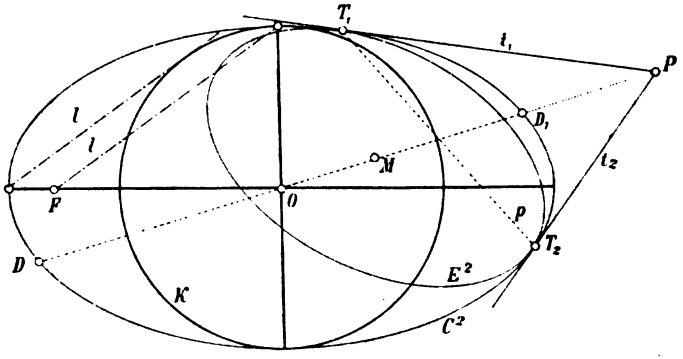


Fig. 1.

Um diesen Satz zu beweisen, stellen wir folgende Betrachtungen an: „Eine beliebige Ellipse C^2, Fig. 1, kann stets als die schiefe Projection einer Kugel K angesehen werden."

Wir können die Grösse der Kugel und die Richtung C des projicirenden Strahles leicht angeben, indem wir erstere durch den Scheitelkreis K über der kleinen Achse der Ellipse und letztere in der Umlegung durch die Tangenten aus den Endpunkten der grossen Achse an diesen Scheitelkreis, oder durch

[1] Das ist eines solchen, bei welchem jeder zu einer Erzeugenden senkrechte Schnitt eine gleichseitige Hyperbel ist, der also unendlich viele Tripel von zu einander senkrecht stehenden Erzeugenden hat.

Verbindung der Endpunkte der kleinen Achse mit den Brennpunkten F repräsentirt haben.

„Eine der Ellipse C^2 einbeschriebene Ellipse E^2, siehe Fig. 1, welche die erstere doppelt berührt, ist die schiefe Projection eines ebenen Querschnittes jener Kugel.

Wir sehen die Richtigkeit des Ausgesprochenen ein, wenn wir E^2 als die Basis eines Cylinders, dessen Erzeugende parallel mit der Richtung des projicirenden Strahles gehen, nehmen; dieser Cylinder hat dann mit dem die Kugel projicirenden, also auch mit der Kugel zwei Tangentialebenen gemeinsam, durchdringt daher die Kugel in zwei ebenen Querschnitten, also in Kreisen, deren gemeinsame Projection eben jene Ellipse E^2 ist. Hiebei ist P der Schnittpunkt der gemeinsamen Tangenten von C^2 und E^2, die schiefe Projection der Spitze des an die Kugel längs eines dieser ebenen Querschnitte berührend gelegten Kegels und auf dem der gemeinsamen Berührungssehne conjugirten Durchmesser OM gelegen. „Ein Kreis auf einer Kugel und der Mittelpunkt der Kugel sind aber jederzeit Basis und Spitze eines Rotationskegels.“

Ist nun eine Ellipse E^2 und ein Punkt O in ihrer Ebene gegeben, so bedarf es nur mehr der Annahme eines Punktes P auf OM von der oben gegebenen Bedeutung um die Contour C^2 einer Kugel,[1] von welcher E^2 die Projection eines ebenen Querschnittes ist, zu bestimmen und hiedurch E^2 und O als Projection der Basis und Spitze eines geraden Kreiskegels hinzustellen.

Um aber den durch E^2 und O abgebildeten Kegel zu einem gleichseitigen zu machen, hat man nichts weiter zu thun als MP gleich 2 MO zu machen.

Betrachten wir, siehe Fig. 2, ein einem Kreise einbeschriebenes gleichseitiges Dreieck ABC, so finden wir die Höhe MO des gleichseitigen Kegels über diesem Kreise, indem wir über der

[1] Legt man aus P an E^2 die Tangenten t_1 und t_2 und bestimmt die Berührungspunkte T_1, T_2, so kennt man von der Contourellipse den Mittelpunkt und zwei Tangenten mit den Berührungspunkten und hat die Mittel diese entweder aus den conjugirten Durchmessern etc. zu construiren, oder die Axen und Brennpunkte direct zu bestimmen. (Siehe auch Pelz, Axenconstruction der Kegelschnitte, diese Berichte, Bd. LXXIII, 1876.)

Höhe AD des gleichseitigen Dreieckes als Durchmesser einen Halbkreis beschreiben, dessen Mittelpunkt ω leicht erhalten wird. AO

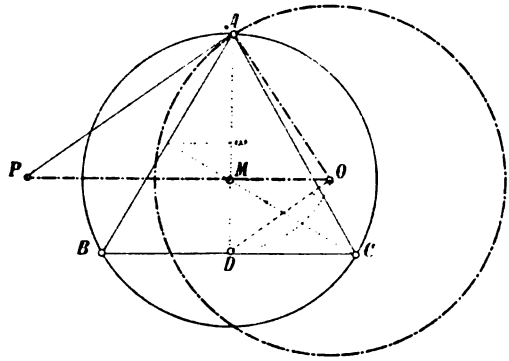


Fig. 2.

ist dann die Länge der Erzeugenden und der Halbmesser der durch den Kreis gelegten Kugel, welche O zum Mittelpunkt hat und P ist die Spitze des die Kugel längs dieses Kreises berührenden Kegels. Aus den beiden Dreiecken MOD und MPA welche, wie ersichtlich ist, ähnlich sind, ergibt sich aber wegen $MA = 2\,MD$ für den gleichseitigen Kegel unmittelbar $MP = 2\,MO$.

Sind demnach in Fig. 3, OA, OB, OC die schiefen Projectionen dreier Strecken $O_0 A_0$, $O_0 B_0$ und $O_0 C_0$ des Raumes, so legen wir durch ABC eine Ellipse, welche wir als schiefe Projection eines Kreises ansehen, jedoch so, dass wir zugleich ABC als die schiefe Projection eines gleichseitigen Dreieckes betrachten. Dieses wird aber bekanntlich erreicht, wenn man den Schwerpunkt M des Dreieckes ABC zum Mittelpunkt der umbeschriebenen Ellipse nimmt. Hiedurch wird eine Ellipse be-

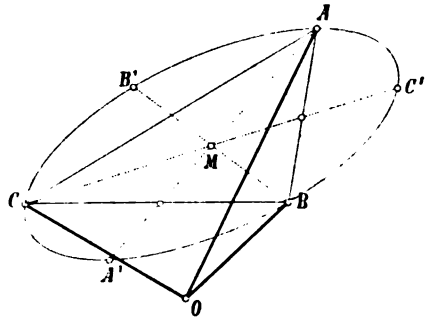


Fig. 3.

stimmt,[1] und diese Ellipse und O bilden nach dem Vorausgeschickten die schiefe Projection der Basis und Spitze eines gleichseitigen Kreiskegels. A_0, B_0, C_0 ist ein gleichseitiges Dreieck, dem Basiskreis eingeschrieben und daher O_0A_0, O_0B_0 und O_0C_0 drei gleich lange und zu einander senkrechte Strecken, und der Pohlke'sche Satz hiedurch bewiesen.

Für die Bestimmung der Originallänge der Strecken und der Richtung des projicirenden Strahles würde man nur die Axen der Ellipse C^2 zu construiren haben; indem man auf der Verlängerung der Höhe über M hinaus diese Höhe zweimal aufträgt, erhält man den Punkt P, und die Tangenten aus diesem an die Ellipse, die mit M als Mittelpunkt dem Dreieck ABC umschrieben wurde, gelegt, gibt die Hilfsmittel, um auf verschiedenen Wegen zu den gewünschten Resultate zu gelangen; jedoch wollen wir diese Constructionen hier nicht weiter verfolgen.

Wie bei diesem Gedankengang eine Verallgemeinerung des Satzes für ein beliebiges Axensystem bewiesen wird, bedarf wohl keiner weiteren Erörterung.

---

[1] Macht man $MA' = MA$, $MB' = MB$, $MC' = MC$, so erhält man in A' B' C' drei weitere Punkte; überdies, und das ist für die Construction des Originaldreibeins nützlich, wenn man die Affinität zwischen Kreis und Ellipse verwerthet, sind die Seiten des Dreieckes den Verbindungsstrahlen der Gegenecken mit dem Schwerpunkt conjugirt.

Eine neue Darstellung des biquadratischen Charakters

von

Josef Anton Gmeiner in Innsbruck.

Ist $m = a+bi$ eine ungerade complexe ganze Zahl, p deren Norm und $\alpha+\beta i$ eine beliebige zu m theilerfremde ganze Zahl; setzen wir ferner

$$\left[\frac{a\alpha+b\beta}{p}\right] = K_1, \left[\frac{a\beta-b\alpha}{p}\right] = K_2, \left\{\frac{a\alpha+b\beta}{p}\right\} = \Lambda_1 \text{ und } \left\{\frac{a\beta-b\alpha}{p}\right\} = \Lambda_2,$$

wobei allgemein $[A]$ die grösste in A enthaltene ganze Zahl und $\{A\}$ die nächste ganze Zahl von A bedeuten soll, und ist

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta i &= (K_1+K_2 i)(a+bi)+(x+yi) \\ \text{und} \quad \alpha+\beta i &= (\Lambda_1+\Lambda_2 i)(a+bi)+(u+vi) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

so sind $x+yi$ und $u+vi$ die Zahlen, welche Gauss in seiner „theoria residuorum biquadraticorum“ als simpliciter residuum minimum, den kurzweg kleinsten Rest, und residuum absolute minimum, den absolut kleinsten Rest der Zahl $\alpha+\beta i$ modulo m bezeichnet.

Setzt man

$$\xi = ax+by,\ \eta = ay-bx,\ \mu = au+bv \text{ und } \nu = av-bu,$$

so folgt aus der Definition der kurzweg und absolut kleinsten Reste unmittelbar

$$0 \leqq \xi \leqq p-1,\ 0 \leqq \eta \leqq p-1,\ -\frac{p-1}{2} \leqq \mu \leqq \frac{p-1}{2}$$
$$\text{und } -\frac{p-1}{2} \leqq \nu \leqq \frac{p-1}{2} \qquad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) folgt ferner

$x+yi \equiv u+vi \pmod{m}$, also auch $ax+ayi \equiv au+avi \pmod{m}$ und, da

$$ai \equiv b \pmod{m}$$

ist,

$$ax+by \equiv au+bv \pmod{m} \text{ und daher auch } \left(\text{mod.}\frac{p}{t}\right),$$

wo t den grössten gem. Theiler von a und b bezeichnet.

Es ist also

$$\xi \equiv \mu \left(\text{mod.}\frac{p}{t}\right). \tag{3}$$

Ebenso findet man aus

$$b(x+yi) \equiv b(u+vi) \pmod{m},$$

da

$$bi \equiv -a \pmod{m}$$

ist,

$$\eta \equiv \nu \left(\text{mod.}\frac{p}{t}\right). \tag{4}$$

Nehmen wir nun weiter an, dass in $m = a+bi$ a und b zu einander theilerfremd seien, so bestehen, wie Gauss bewiesen hat, zwischen den Grössen ξ und η folgende Beziehungen:

1. Es kann nicht eine der Grössen ξ und η Null sein, ohne dass auch die andere Null ist.

2. Es kann nicht $\xi = \eta$ sein.

3. Es kann nicht $\xi + \eta = p$ sein.

Aus diesen Relationen zwischen ξ und η und aus den Congruenzen (3) und (4) ergeben sich unmittelbar die folgenden zwischen den Zahlen μ und ν bestehenden Beziehungen:

1. „Es kann nicht eine der Grössen μ und ν Null sein, ohne dass zugleich auch die andere Null ist.“ Denn aus $\mu = 0$ würde der Reihe nach $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\nu = 0$ folgen, und für $\nu = 0$ ergeben sich dieselben Gleichungen in umgekehrter Reihenfolge. Lässt man also den Rest Null ausser Acht, so kann man sagen, μ und ν können nur die Werthe $\frac{p-1}{2}, \frac{p-3}{2}, \ldots 2, 1, -1, -2, \ldots -\frac{p-1}{2}$ annehmen.

2. „Es kann nicht $\mu = \nu$ sein“; denn daraus würde $\xi = \eta$ folgen.

3. „Es kann nicht $\mu+\nu=0$ sein“; denn daraus würde sich $\xi+\eta=p$ ergeben.

Diese Sätze lassen sich leicht auch direct beweisen.

Ist $\mu=au+bv=0$, so ist $au=-br$, also $a\nu=(a^2+b^2)v=pr$.

Da nun a zu p theilerfremd ist, so muss ν durch p theilbar und daher zufolge (2) $\nu=0$ sein.

Wäre $\mu=\nu$, also $au+bv=av-bu$, so würde daraus

$$a^2(u-v)+ab(u+v)=p(u-v)+b(au+bv+av-bu)=$$
$$p(u-v)+b(\mu+\nu)=p(u-v)+2b\mu=0$$

folgen. Demnach müsste μ durch p theilbar sein, was zufolge (2) nicht möglich ist.

Wäre $\mu+\nu=0$, also $a(u+v)+b(v-u)=0$, so müsste

$$a^2(u+v)+ab(v-u)=p(u+v)+b(\nu-\mu)=p(u+v)-2b\mu=0$$

sein, was wieder die Theilbarkeit von μ durch p voraussetzen würde.

Bezüglich der Zahlen μ und ν besteht ferner noch der Satz:

„Wenn zwei Zahlen dasselbe μ, beziehungsweise dasselbe ν entspricht, so entspricht ihnen auch dasselbe ν, beziehungsweise μ, und sie sind daher einander modulo m congruent.“

Beweis:

Aus $\mu=au+bv$ und $\nu=av-bu$ folgt unmittelbar $a\mu-b\nu=$ $=pu$.

Es ist daher

$$a\mu\equiv b\nu\pmod{p}. \tag{5}$$

Sind nun $\mu_1\nu_1$ und $\mu_2\nu_2$ je zwei zusammengehörige Werthe von μ und ν und ist $\mu_1=\mu_2$, so folgt aus (5)

$$b\nu_1\equiv b\nu_2\pmod{p},$$

also, da b zu p theilerfremd ist,

$$\nu_1\equiv\nu_2\pmod{p},$$

und dies ist zufolge (2) nur möglich, wenn $\nu_1=\nu_2$ ist.

Ebenso folgt aus der Annahme $\nu_1=\nu_2$ die Gleichung $\mu_1=\mu_2$.

Aus diesem Satze erkennen wir, dass, während $\alpha+\beta i$ ein vollständiges Restensystem modulo m durchläuft, die Zahlen μ

und ν alle Werthe $-\frac{p-1}{2}, -\frac{p-3}{2}, \ldots -2, -1, 1, 2, \ldots \frac{p-3}{2}, \frac{p-1}{2}$ annehmen müssen.

Wir wollen nun untersuchen, in welcher Beziehung die zu den einander associirten Zahlen $\alpha+\beta i$ und $i(\alpha+\beta i)$ gehörigen μ und ν modulo m zu einander stehen.

Es sei $\mu_1\nu_1$ das zu $\alpha+\beta i$ und $\mu_2\nu_2$ das zu $i(\alpha+\beta i)$ gehörige Werthepaar von μ und ν, dann ist

$$\mu_1 \equiv a\alpha+b\beta \pmod{p}, \quad \nu_1 \equiv a\beta-b\alpha \pmod{p}$$
$$\mu_2 \equiv -a\beta+b\alpha \pmod{p} \text{ und } \nu_2 \equiv a\alpha+b\beta \pmod{p},$$

wie sich aus der zweiten der Gleichungen (1) leicht ergibt.

Es ist also

$$\mu_2 \equiv -\nu_1 \pmod{p} \text{ und } \nu_2 \equiv \mu_1 \pmod{p}$$

und daher $\mu_2 = -\nu_1$ und $\nu_2 = \mu_1$.

Nehmen wir die vier einander associirten Zahlen $(\alpha+\beta i)i^\varkappa$ ($\varkappa = 0, 1, 2, 3$) und bezeichnen die ihnen entsprechenden Werthepaare von μ und ν mit $\mu_\varkappa$ und $\nu_\varkappa$, so ist demnach

$$\mu_2 = -\nu_1, \nu_2 = \mu_1, \mu_3 = -\nu_2 = -\mu_1, \nu_3 = \mu_2 = -\nu_1,$$
$$\mu_4 = -\nu_3 = \nu_1, \nu_4 = \mu_3 = -\mu_1.$$

Wir haben daher folgendes Schema:

	μ	ν
$\alpha+\beta i$	μ_1	ν_1
$i(\alpha+\beta i)$	$-\nu_1$	μ_1
$i^2(\alpha+\beta i)$	$-\mu_1$	$-\nu_1$
$i^3(\alpha+\beta i)$	ν_1	$-\mu_1$

Dieses Schema sagt uns: Unter den vier associirten Zahlen gibt es immer eine, für welche $\mu>0$ und $\nu>0$, eine, für welche $\mu<0$ und $\nu>0$, eine, für die $\mu<0$ und $\nu<0$, und endlich eine, für die $\mu>0$ und $\nu<0$ ist. Es gibt also im ganzen Restensystem

modulo m $\frac{p-1}{4}$ Zahlen, für welche $\mu>0$ und $\nu>0$, $\frac{p-1}{4}$ Zahlen, für welche $\mu<0$ und $\nu>0$ ist, u. s. w.

Wir können daher das vollständige Restensystem modulo m auch so in Viertelrestensysteme eintheilen, dass wir in das erste Viertelsystem jene Zahlen nehmen, für welche $\mu>0$ und $\nu>0$, in das zweite jene, für welche $\mu<0$ und $\nu>0$, in das dritte jene, für welche $\mu<0$ und $\nu<0$, in das vierte jene, für welche $\mu>0$ und $\nu<0$ ist. Dadurch kommt jede der associirten Zahlen in eine andere Gruppe, und zwar wenn $\alpha+\beta i$ der ersten Gruppe angehört, so gehören bei dieser Eintheilung die Zahlen $i(\alpha+\beta i)$, $i^2(\alpha+\beta i)$ und $i^3(\alpha+\beta i)$ der Reihe nach in die zweite, dritte und vierte Gruppe.

Wir haben also durch unsere Eintheilung das vollständige Restensystem modulo m regelrecht in Viertelrestensysteme zerlegt.

Aus diesen Betrachtungen folgt unter Berücksichtigung der Relationen (2), (3) und (4), dass, wenn $\alpha+\beta i$ zum ersten Viertelsysteme gehört, $\xi=\mu$ und $\eta=\nu$ sein muss. Ebenso erkennt man, dass $\mu=\xi-p$ und $\nu=\eta$ oder $\mu=\xi-p$ und $\nu=\eta-p$ oder $\mu=\xi$ und $\nu=\eta-p$ sein muss, je nachdem $\alpha+\beta i$ dem zweiten, dritten oder vierten Viertelsystem angehört.

Vergleichen wir nun die Grössen Λ_1 und K_1 einerseits und die Grössen Λ_2 und K_2 anderseits miteinander, so finden wir Folgendes:

α) Es gehöre $\alpha+\beta i$ dem ersten Viertelsystem an; dann ist $\mu=\xi$ und $\nu=\eta$, also $u+vi=x+yi$, folglich auch

$$\Lambda_1=K_1 \text{ und } \Lambda_2=K_2.$$

β) Gehört $\alpha+\beta i$ zum zweiten Viertelsystem, so ist $\mu=\xi-p$ und $\nu=\eta$, d. h.

$$ay-bx=av-bu,$$
$$by+ax=au+bv+p$$

und daraus ergibt sich $x=a+u$ und $y=b+v$, folglich ist nach (1)

$$(\Lambda_1+\Lambda_2 i)m=(K_1+K_2 i)m+m, \text{ also}$$
$$\Lambda_1=K_1+1 \text{ und } \Lambda_2=K_2.$$

γ) Gehört $\alpha+\beta i$ zum dritten Viertelsystem, so ist $\mu = \xi - p$ und $\nu = \eta - p$, d. h.

$$ay - bx = av - bu + p \text{ und } by + ax = au + bv + p$$

und demzufolge $x = u + a - b$ und $y = v + a + b$.

Wir erhalten somit

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2 i)m = (K_1 + K_2 i)m + (1+i)m, \text{ mithin}$$
$$\Lambda_1 = K_1 + 1 \text{ und } \Lambda_2 = K_2 + 1.$$

δ) Ist endlich $\alpha+\beta i$ eine Zahl des vierten Viertelsystems, so ist $\mu = \xi$ und $\nu = \eta - p$, d. h.

$$ay - bx = av - bu + p \text{ und } by + ax = au + bv.$$

Aus diesen Gleichungen findet man $x = u - b$ und $y = v + a$.

Es ist demnach im vorliegenden Falle

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2 i)m = (K_1 + K_2 i)m + im, \text{ also}$$
$$\Lambda_1 = K_1 \text{ und } \Lambda_2 = K_2 + 1.$$

Es sei nun im Folgenden m eine zweigliedrige ungerade Primzahl, $u_r + v_r i$ ein beliebiger absolut kleinster Rest modulo m, k eine beliebige, zu m theilerfremde, reelle ganze Zahl, und wir setzen

$$\Lambda_{1,r} = \left\{\frac{(au_r + bv_r)k}{p}\right\}, \quad \Lambda_{2,r} = \left\{\frac{(av_r - bu_r)k}{p}\right\},$$

$$K_{1,r} = \left[\frac{(au_r + bv_r)k}{p}\right], \quad K_{2,r} = \left[\frac{(av_r - bu_r)k}{p}\right],$$

$$d_{1,r} = \Lambda_{1,r} - K_{1,r} \text{ und } d_{2,r} = \Lambda_{2,r} - K_{2,r};$$

dann ist

$$(u_r + v_r i)k \equiv (u_{x_r} + v_{x_r} i)\, i^{d_{1,r} + 2d_{1,r}d_{2,r} + 3d_{2,r}} \pmod{m}, \quad (6)$$

wobei $u_r + v_r i$ und $u_{x_r} + v_{x_r} i$ absolut kleinste Reste des ersten Viertelsystems sind.

Beweis:

α) Gehört $(u_r + v_r i)k$ dem ersten Viertelsystem an, so ist, wie wir gesehen haben, $\Lambda_{1,r} = K_{1,r}$ und $\Lambda_{2,r} = K_{2,r}$, also $d_{1,r} = d_{2,r} = 0$, somit, wenn wir der Kürze wegen noch

$$d_{1,r} + 2d_{1,r}d_{2,r} + 3d_{2,r} = D_r$$

setzen,

$$D_r = 0,$$

also die Formel (6) richtig.

β) Gehört $(u_r+v_r i)k$ dem zweiten Viertelsystem an, so ist $\Lambda_{1,r}=K_{1,r}+1$ und $\Lambda_{2,r}=K_{2,r}$, also $d_{1,r}=1$ und $d_{2,r}=0$, mithin

$$D_r = 1,$$

d. h. die Formel (6) ist auch für diesen Fall richtig.

γ) Gehört $(u_r+v_r i)k$ zum dritten Viertelsystem, so ist $\Lambda_{1,r}=$ $=K_{1,r}+1$ und $\Lambda_{2,r}=K_{2,r}+1$, also $d_{1,r}=d_{2,r}=1$ und

$$D_r = 6 \equiv 2 \pmod 4;$$

es besteht also wieder die Congruenz (6).

δ) Gehört $(u_r+v_r i)k$ zum vierten Viertelsystem, so ist $\Lambda_{1,r}=$ $=K_{1,r}$ und $\Lambda_{2,r}=K_{2,r}+1$, $d_{1,r}=0$ und $d_{2,r}=1$, also

$$D_r = 3,$$

somit bleibt die Formel (6) auch in diesem Falle bestehen, womit die Allgemeingiltigkeit derselben bewiesen ist.

Bilden wir alle Producte, welche wir erhalten, indem wir k mit je einem Reste des ersten Viertelsystems multipliciren, stellen für jedes dieser Producte die Congruenz (6) auf und multipliciren alle diese Congruenzen miteinander, so bekommen wir

$$k^{\frac{p-1}{4}} \prod_{1}^{\frac{p-1}{4}}{}_r (u_r+v_r i) \equiv \prod_{1}^{\frac{p-1}{4}}{}_r (u_{x_r}+v_{x_r} i)\, i^{\sum_{1}^{\frac{p-1}{4}}{}_r D_r} \pmod m.$$

Nun ist bekanntlich das Product auf der rechten Seite dieser Congruenz mit dem Producte auf der linken Seite identisch und zu m theilerfremd. Es ist daher

$$k^{\frac{p-1}{4}} \equiv i^{\sum_{1}^{\frac{p-1}{4}}{}_r D_r} \pmod m. \tag{7}$$

Da

$$\Lambda_{1,r} = \left\{\frac{(au_r+bv_r)k}{p}\right\} = \left\{\frac{\mu_r k}{p}\right\}, \quad \Lambda_{2,r} = \left\{\frac{(av_r-bu_r)k}{p}\right\} = \left\{\frac{\nu_r k}{p}\right\}$$

und ebenso

$$K_{1,r} = \left[\frac{\mu_r k}{p}\right] \text{ und } K_{2,r} = \left[\frac{\nu_r k}{p}\right]$$

ist, so nimmt D_r die Gestalt an

$$D_r = d_{1,r} + 2 d_{1,r} d_{2,r} + 3 d_{2,r} =$$
$$= \left(\left\{\frac{\mu_r k}{p}\right\} - \left[\frac{\mu_r k}{p}\right] + 2\left(\left\{\frac{\mu_r k}{p}\right\} - \left[\frac{\mu_r k}{p}\right]\right)\left(\left\{\frac{\nu_r k}{p}\right\} - \left[\frac{\nu_r k}{p}\right]\right) + \right.$$
$$\left. + 3\left(\left\{\frac{\nu_r k}{p}\right\} - \left[\frac{\nu_r k}{p}\right]\right)\right).$$

Es ist demnach zufolge (7)

$$k^{\frac{p-1}{4}} \equiv i^{\sum_r^{\frac{p-1}{4}} \left(\left\{\frac{\mu_r k}{p}\right\} - \left[\frac{\mu_r k}{p}\right] + 2\left(\left\{\frac{\mu_r k}{p}\right\} - \left[\frac{\mu_r k}{p}\right]\right)\left(\left\{\frac{\nu_r k}{p}\right\} - \left[\frac{\nu_r k}{p}\right]\right) + 3\left(\left\{\frac{\nu_r k}{p}\right\} - \left[\frac{\nu_r k}{p}\right]\right)\right)} \pmod{m}.$$

Diese Formel ist das Analogon zu der Formel

$$k^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\sum_r^{\frac{p-1}{2}} \left(\left\{\frac{rk}{p}\right\} - \left[\frac{rk}{p}\right]\right)} \pmod{p}$$

in der Theorie der quadratischen Reste, worin p eine ungerade reelle Primzahl und k eine beliebige, zu p theilerfremde, reelle ganze Zahl bedeutet.

Durch die soeben entwickelte Formel kann der biquadratische Charakter einer jeden zu m theilerfremden Zahl $\alpha + \beta i$ dargestellt werden; denn bekanntlich gibt es stets eine reelle ganze Zahl k von der Beschaffenheit, dass

$$\alpha + \beta i \equiv k \pmod{m}$$

ist, wenn, wie wir hier vorausgesetzt haben, m eine zweigliedrige Primzahl bedeutet.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. Band. IX. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

APR 10 1893

XXII. SITZUNG VOM 5. NOVEMBER 1891.

Der Secretär legt das erschienene Heft VI—VII (Juni—Juli 1891), Abth. II. a. und das Heft V (Mai 1891), Abth. III des 100. Bandes der Sitzungsberichte vor.

Das k. und k. Reichs-Kriegs-Ministerium „Marine-Section" spricht dem Präsidium der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften seine Zustimmung aus zu der gewünschten Bezeichnung der während der diesjährigen Expedition S. M. Schiffes „Pola" aufgefundenen, nach den bisher bekannten Lothungen tiefsten Stelle des Mittelmeeres als „Pola-Tiefe" und theilt mit, dass gleichzeitig an das k. und k. hydrographische Amt in Pola der Auftrag ergangen ist, die Daten betreffend diese Tiefe, sowie deren Namengebung in den von diesem Amte herausgegebenen „Hydrographischen Nachrichten" zu publiciren.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach in Prag übersendet eine Mittheilung über eine von med. stud. Ludwig Mach erdachte und bei seinen Versuchen mit Erfolg angewendete Modification des Jamin'schen Interferenzrefractometers.

Prof. O. Stolz in Innsbruck übersendet einen Aufsatz: „Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen".

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor an der k. k. Lehrerbildungsanstalt in Linz, übersendet eine vorläufige Mittheilung über „Neue Gallmilben" (2. Fortsetzung).

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus seinem Laboratorium: „Über die Darstellung der Methylpropylessigsäure aus Acetessigester und Malonsäure-Diäthylester und die Löslichkeitsbestimmungen einiger Salze dieser Säure und der Trimethylessigsäure", von Herrn Eduard Stiassny.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung: „Über die Berechnung einer Kometenbahn mit Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung".

Herr J. Liznar, Adjunct der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien, überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Eine Methode zur graphischen Darstellung der Richtungsänderungen der erdmagnetischen Kraft".

Über Achromasie

von

Dr. **Hanns Pitsch**,
k. k. Gymnasiallehrer in Böhmisch-Leipa.

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. October 1891.)

Bei der Berechnung achromatischer Prismen nach der von Euler (1747) und Dollond (1757)[1] aufgestellten Grundlage erfüllt man die Bedingung, dass die äussersten, sichtbaren Strahlen des Spectrums, nämlich die rothen und violetten, nach der Brechung in den Prismen parallel zu einander austreten. Natürlich kann diese Berechnung nur für einen ganz bestimmten Einfallswinkel gelten. Die Erfahrung zeigt nun, dass ein nach dieser Berechnung construirtes Prismensystem zwar eine Stellung gegenüber dem einfallenden Lichte besitzt, in welcher eine gute Achromasie erzielt wird, dass aber dann der Einfallswinkel des Lichtes nicht mit dem der Rechnung zu Grunde gelegten übereinstimmt. Eine bessere Übereinstimmung beider wird erreicht, wenn man die Rechnung so einrichtet, dass die gelben und violetten Strahlen parallel das Prismensystem verlassen, wiewohl auch

[1] Da der Antheil, welchen beide Männer an der bedeutenden Entdeckung besitzen, nur selten im richtigen Lichte dargestellt wird, möge hier eine darauf bezügliche Stelle aus Euler's Werk: Instruction détaillée pour porter les lunettes de toutes les différentes espèces au plus haut dégré de perfection dont elles sont susceptibles (A St. Pétersbourg, 1774), angeführt werden. Es heisst darin auf dem dritten Blatte der Vorrede: C'est sur cette preuve que j'ai hardiment soutenû, qu'en emploïant différens milieux transparens, il serait très possible de diminuer, de reduire même à rien, tous les défauts aux quels la différente réfraction des rayons parut alors nécessairement assujettie.

Ce sentiment fut bientôt attaqué, avec beaucoup de chaleur par feu Mr. Dollond, qui soutint encore longtemps, que la démonstration rapportée du grand Newton était très solidement fondée, ne saurait souffrir

dann noch die angegebene Differenz auftritt und die Thatsache bestehen bleibt, dass man für zwei, durch ihre Brechungsquotienten für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien gegebene Glassorten nicht unmittelbar das zu einem bestimmten Prisma der einen Glassorte gehörige, achromatisirende Prisma der anderen Sorte bei vorgeschriebenem Einfallswinkel des Lichtes berechnen kann.

Der Unterschied in den oben erwähnten Rechnungsmethoden liegt in dem Umstande, dass bei der einen das Verhältniss der totalen Dispersionen, bei der anderen jenes der partiellen Dispersionen beider, zu einem achromatischen System verbundenen Glassorten genommen wird. Formell ausgedrückt, ist also für die eine Rechnungsweise das Verhältniss $\frac{n_v - n_r}{n'_v - n'_r}$; für die zweite $\frac{n_v - n_g}{n'_v - n'_g}$, oder in abgekürzter Schreibweise $\frac{\Delta n_{vr}}{\Delta n'_{vr}}$, $\frac{\Delta n_{vg}}{\Delta n'_{vg}}$ massgebend, wenn man die Brechungsquotienten der beiden Glassorten mit n, n' bezeichnet und die Farbe, für welche sie gelten, durch den Anfangsbuchstaben ihrer Benennung oder das Zeichen der Fraunhofer'schen Linie als Index sichtbar macht. Je nach der Wahl beider Farben ist aber das Verhältniss der partiellen Dispersionen zweier Glassorten sehr verschieden,[1] und

---

la moindre exception. Pour appuyer son opinion, il s'est avisé de faire plusieures expériences, sur la réfraction de différentes matières transparentes, principalement sur les différentes espèces de verre; or ces experiences ont si bien réussi, que mon sentiment en a été entièrement confirmé, que Mr. Dollond a été obligé de réconnaître son erreur. C'est sans doute une des plus importantes découvertes, vû qu'elle a déterminé cet habile artiste, à travailler avec le plus grand empressement à la perfection des lunettes ordinaires; il y a si bien réussi, qu'après un grand nombre d'essais inutiles. il a produit des lunettes, qui ont mérité d'abord l'admiration de tout le monde; par son application infatigable il les a enfin portées à un si haut dégré de perfection, qu'on les a généralement préférées aux télescopes catoptriques.

[1] So ist z. B. für zwei von den Herren Dr. Steinheil und Dr. Voit. Handbuch der angewandten Optik I, (S. 26), angeführte Glassorten, Flintglas Nr. 318 und Crownglas Nr. 506:

$$\frac{n_D - n_F}{n'_D - n'_F} = 0{\cdot}548; \quad \frac{n_F - n_G}{n'_F - n'_G} = 0{\cdot}520; \quad \frac{n_G - n_H}{n'_G - n'_H} = 0{\cdot}498.$$

schon Fraunhofer[1] bemühte sich, eine zur Berechnung jenes Verhältnisses, welches den besten optischen Gesammteffect liefert, brauchbare Formel abzuleiten. Die Formel, welche er hiefür aufstellte, weicht nicht unbeträchtlich von der Erfahrung ab. Später formten die Herren C. A. Steinheil und L. v. Seidel[2] die Fraunhofer'sche Formel um und erzielten hiemit wohl eine bessere, nicht aber eine in allen Fällen genügende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung. Ergebnisse solcher Art zeigen wohl hinreichend, dass die Grundlage der Lehre von der Achromasie noch keine gesicherte ist, und es möge daher im Folgenden der Versuch unternommen werden, eine mit der Erfahrung übereinstimmende Theorie derselben aufzustellen.

Die Betrachtungen sollen sich auf ein achromatisches Doppelprisma beziehen, das in der bekannten Weise aus zwei verschiedenen Glassorten zusammengesetzt ist. An einem solchen System ergeben sich die Verhältnisse am übersichtlichsten, und die Ausdehnung der Resultate auf andere Fälle bietet weiter keine Schwierigkeiten.

Auf das Prismensystem fällt ein Bündel paralleler, weisser Strahlen unter dem Einfallswinkel i und wird beim Durchgang durch die Prismen in seine farbigen Bestandtheile zerlegt, die dann unter verschiedenen Winkeln i_l die Prismen verlassen. i_l hängt von der Farbe des betreffenden Lichtstrahles ab, ist also eine Function der Wellenlänge l. Was für eine Function das sein kann, lehrt folgende Betrachtung. Bekanntlich besteht zwischen dem Winkel i, unter welchem ein Lichtstrahl in das Prisma mit dem brechenden Winkel α eintritt, und dem Winkel i_1, unter welchem er das Prisma wieder verlässt, die Relation:

$$\sin i_1 = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos \alpha \sin i.$$

Nach Cauchy's Dispersionsformel gibt es für den Brechungsquotienten n eine Reihe von der Form:

$$n = a + \frac{b}{l^2} + \frac{c}{l^4} + \ldots,$$

[1] Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungsvermögens verschiedener Glasarten in Bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernrohre. Fraunhofer's Gesammelte Schriften, S. 21.

[2] Siehe Handbuch der angewandten Optik von Dr. A. Steinheil und Dr. E. Voit, I, S. 253.

und ebenso lässt sich jede beliebige Potenz von n in eine nach steigenden Potenzen der Grösse $\frac{1}{l^2}$, die wir der Kürze wegen mit x bezeichnen wollen, geordnete Reihe entwickeln. Für $\sqrt{n^2-\sin^2 i}$ bekommt man daher die Entwicklung:

$$\sqrt{n^2-\sin^2 i} = n\left(1-\frac{1}{2}\frac{\sin^2 i}{n^2}-\frac{1}{8}\frac{\sin^4 i}{n^4}-\ldots\ldots\right)=$$
$$= m_0+m_1x+m_2x^2+\ldots\ldots,$$

so dass auch für sin i eine Reihe von der Form:

$$\sin i_1 = p_0+p_1x+p_2x^2+\ldots\ldots$$

gilt. Dringt nun der Lichtstrahl nach dem Verlassen des ersten Prismas in ein zweites, dessen erste Fläche parallel zur letzten des anderen Prismas steht, und verlässt er dasselbe unter dem Winkel i_2, so muss wieder:

$$\sin i_2 = \sin\alpha'\sqrt{n'^2-\sin^2 i_1}-\cos\alpha'\sin i_1,$$

wenn α' den Winkel und n' den Brechungsquotienten des zweiten Prismas bedeutet. Setzt man nun für sin i_1 und n' die ihnen entsprechenden, nach steigenden Potenzen von x geordneten Reihen, so resultirt auch für sin i_2 eine Reihe gleicher Art:

$$\sin i_2 = q_0+q_1x+q_2x^2+\ldots\ldots$$

Um das Verhalten des Winkels i_f in der Nähe eines Werthes i_0, welcher der Wellenlänge l_0 entsprechen soll, zu untersuchen, wird man die Function i_f nach dem Taylor'schen Lehrsatz in eine Reihe entwickeln:

$$i_f = (i_f)_0+\left(\frac{di_f}{dx}\right)_0(x-x_0)+\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2i_f}{dx^2}\right)_0(x-x_0)^2+\ldots\ldots,$$

wobei $x_0 = \frac{1}{l_0^2}$ und der Zeiger 0 andeutet, dass der betreffende Differentialquotient für eine bestimmte Farbe mit der Wellenlänge l_0 zu nehmen ist. Der Unterschied zwischen i_f und $(i_f)_0$, also die Abweichung des austretenden Strahles der Wellenlänge l von jenem mit der Wellenlänge l_0 ist demzufolge:

$$i_f - (i_f)_0 = \left(\frac{di_f}{dx}\right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2 i_f}{dx^2}\right)_0 (x - x_0)^2 + \ldots\ldots \quad 1)$$

Wegen der vorausgesetzten Convergenz dieser Reihe werden ihre Glieder umso kleiner, je mehr sie sich vom Anfangsglied entfernen. Bei vollkommener Achromasie müsste $i_f - i_0 = 0$, was auch l und l_0 bedeuten mögen. Diesem unmöglich zu erreichenden Idealzustand wird man sich umsomehr nähern, je mehr Glieder der Reihe man zum Verschwinden bringen kann, weil auch dann für jedes beliebige l die Differenz $i_f - (i_f)_0$ immer kleinere Werthe erhält. Die erste Bedingung für eine angenäherte Achromasie ist also:

$$\left(\frac{di_f}{dx}\right)_0 = 0.$$

Ist aber bei der Erfüllung dieser Bedingung die Bedeutung der Wellenlänge l_0 gleichgiltig? Über die richtige Wahl dieser Grösse liefert folgende Überlegung Aufschluss. Wenn man ein Doppelprisma so herstellt, dass die rothen und violetten Strahlen parallel austreten, so unterliegt es keinem Zweifel, dass man beim Gebrauche des optischen Systems nicht auf diese lichtschwachen Strahlen einstellt, sondern dass für die Einstellung jene, wenn auch nur wenig abweichende Richtung massgebend sein wird, in welcher die lichtstärksten Strahlen austreten. Wozu wurde aber dann der Parallelismus gerade für die genannten Strahlen erzielt? Ausserdem treten nicht nur die rothen und violetten Strahlen parallel zu einander aus, sondern im Allgemeinen gibt es für jede Farbe noch eine andere, deren Strahlen parallel mit den ihrigen austreten, wenn auch der Winkel, unter welchem dies geschieht, für jedes solche Farbenpaar eine andere Grösse besitzt. Und jedes dieser Farbenpaare hätte man mit gleichem Erfolge der Berechnung zu Grunde legen können. Bei einer anderen Wahl der Farben, für deren Strahlen man unmittelbar den Parallelismus nach der Brechung herstellt, ändert sich auch die Art der übrigen Farbenpaare mit Parallelstrahlen und zweifellos auch die Einstellung. Gegenüber dieser Willkür in der Berechnung zeigt aber die Erfahrung, dass es nur eine Stellung des optischen Systems in Bezug auf das einfallende Licht gibt, in welcher eine möglichst vollkommene Achromasie stattfindet.

Die oben für die Achromasie aufgestellte Bedingungsgleichung zeigt, dass bei ihrer Erfüllung die Strahlen von der Wellenlänge l_0 möglichst nahe beisammenbleiben, indem der Parallelismus zweier Nachbarstrahlen, da $(di_f)_0 = 0$ ist, sich auch nach der Brechung erhält. Ein solches Verhalten ist aber gerade für die wirksamsten Strahlen erwünscht, und man wird also für l_0 die Wellenlänge der wirksamsten Strahlen zu setzen haben. Für optische Zwecke sind es jene, welche die grösste Lichtintensität besitzen, für chemische Zwecke, z. B. bei photographischen Anwendungen, sind es jene, welchen die grösste chemische Wirksamkeit zukommt. Wir wollen den ersten Fall annehmen, da er wohl am häufigsten eintritt.

Fraunhofer hat die Helligkeitsverhältnisse des Sonnenspectrums untersucht und für dasselbe die Helligkeitscurve gezeichnet.[1] Die betreffende Zeichnung ist auch in Steinheil und Voit's Handbuch der angewandten Optik[2] genau reproducirt. Trägt man für die in derselben verzeichneten Fraunhofer'schen Linien die Wellenlänge ein (es sollen im Folgenden immer die von Herrn Prof. Dr. L. Ditscheiner gefundenen genommen werden), so findet man leicht, dass die grösste Lichtintensität circa der Wellenlänge $0{\cdot}574\ \mu$ entspricht und einen diesem Werthe gleich oder nahe kommenden wird man der Wellenlänge l_0 zur Erzielung einer möglichst vollkommenen Achromasie beilegen.

Um die Theorie mit der Erfahrung vergleichen zu können, wollen wir einen speciellen Fall der Berechnung unterziehen. Wir betrachten den Gang des Bündels paralleler Strahlen durch ein Doppelprisma aus zwei verschiedenen Glassorten. Es seien α und α' die Winkel der beiden vereinigten Prismen, positiv gerechnet, wenn sich die brechende Kante nach der einen, negativ, wenn sie sich nach der anderen Seite kehrt. Das erste Prisma wird von den Strahlen unter dem Winkel i getroffen, der immer positiv in Rechnung kommt. Nach dem Vorgang im genannten Handbuch[3] erhält der erste Prismenwinkel das negative Zeichen, wenn das Einfallsloth zwischen dem einfallenden Strahl und der

[1] Fraunhofer's gesammelte Schriften, 1. Abhandl., Taf. II.

[2] Taf. I.

[3] S. 24.

brechenden Kante liegt, und im Gegenfalle das positive. Das Zeichen des zweiten Prismenwinkels richtet sich dann nach seiner Lage in Bezug auf den ersten. Nach der Brechung an der Prismenfläche bildet der Strahl mit dem Lothe einen Winkel r_1, gelangt unter dem Winkel r_2 an die zweite Fläche, tritt unter dem Winkel r_1' in das zweite Prisma, erreicht die zweite Fläche desselben unter dem Winkel r_2' und verlässt es unter dem Winkel i'. Die Winkel r_1, r_2, r_1', r_2', i' bekommen jenes Zeichen, welches nach obigen Festsetzungen aus dem Brechungsgesetze folgt. Dann gelten für den Gang des Lichtes durch das Doppelprisma die Formeln:

$$\begin{aligned} \sin i &= n \sin r_1 \\ r_2 &= r_1 + \alpha \\ n \sin r_2 &= n' \sin r_1' \\ r_2' &= r_1' + \alpha' \\ n' \sin r_2' &= \sin i', \end{aligned}$$

oder nach Elimination der Grössen r_2 und r_2':

$$\left.\begin{aligned} \sin i &= n \sin r_1 \\ n \sin (r_1 + \alpha) &= n' \sin r_1' \\ n' \sin (r_1' + \alpha') &= \sin i'. \end{aligned}\right\} \qquad 2)$$

Ferner ist die Ablenkung δ, welche der Lichtstrahl beim Durchgang durch das Doppelprisma erleidet, aus der Gleichung:

$$\delta = i - i' + \alpha + \alpha'$$

zu rechnen. Durch Differentiation nach der Grösse x ergeben sich die Ausdrücke:

$$\cos i \frac{di}{dx} = \sin r_1 \frac{dn}{dx} + n \cos r_1 \frac{dr_1}{dx}$$

$$\sin (r_1 + \alpha) \frac{dn}{dx} + n \cos (r_1 + \alpha) \frac{dr_1}{dx} = \sin r_1' \frac{dn'}{dx} + n' \cos r_1' \frac{dr_1'}{dx}$$

$$\sin (r_1' + \alpha) \frac{dn'}{dx} + n' \cos (r_1' + \alpha') \frac{dr_1'}{dx} = \cos i' \frac{di'}{dx} \cdot$$

Die Endgleichung zur Bestimmung von $\frac{di'}{dx}$ erhält man durch Berücksichtigung des Umstandes, dass $\frac{di}{dx} = 0$, da für alle

Strahlen der Einfallswinkel derselbe bleibt, und durch Elimination der Grössen $\frac{dr_1}{dx}$ und $\frac{dr_1'}{dx}$. Letztere vollzieht sich wohl am einfachsten, wenn man die erste Gleichung mit dem Factor: $\cos(r_1+\alpha).\cos(r_1'+\alpha')$, die zweite mit: $\cos r_1 \cos(r_1'+\alpha')$, die dritte mit $\cos r_1 \cos r_1'$ multiplicirt und die so veränderten Gleichungen addirt.

$$\sin(r_1+\alpha)\cos r_1\cos(r_1'+\alpha')\frac{dn}{dx}+\sin(r_1'+\alpha)\cos r_1\cos r_1'\frac{dn'}{dx}=$$

$$=\sin r_1\cos(r_1+\alpha)\cos(r_1'+\alpha')\frac{dn}{dx}+\sin r_1'\cos r_1\cos(r_1'+\alpha')\frac{dn'}{dx}+$$

$$+\cos r_1\cos r_1'\cos i'\frac{di'}{dx}.$$

Eine passende Zusammenfassung entsprechender Glieder führt ferner zur Gleichung:

$$\cos r_1\cos r_1'\cos i'\frac{di'}{dx}=$$

$$\cos(r_1'+\alpha')[\sin(r_1+\alpha)\cos r_1-\cos(r_1+\alpha)\sin r_1]\frac{dn}{dx}+$$

$$+\cos r_1[\sin(r_1'+\alpha')\cos r_1'-\cos(r_1'+\alpha')\sin r_1']\frac{dn'}{dx},$$

oder:

$$\cos r_1\cos r_1'\cos i'\frac{di'}{dx}=\sin\alpha\cos(r_1'+\alpha)\frac{dn}{dx}+\sin\alpha'\cos r_1\frac{dn'}{dx};$$

$$\cos r_1\cos r_1'\cos i'\frac{di'}{dx}=\sin\alpha\cos r_2\frac{dn}{dx}+\sin\alpha'\cos r_1\frac{dn'}{dx}.$$

Die Bedingung $\frac{di'}{dx}=0$ ist also gleichbedeutend mit der Gleichung:

$$\sin\alpha\cos r_2\frac{dn}{dx}+\sin\alpha'\cos r_1\frac{dn'}{dx}=0,$$

welche im Verein mit den aus der Anwendung des Brechungsgesetzes abgeleiteten Formeln die Bedingung für eine möglichst gute Achromasie angibt. Sie ist nichts Anderes als eine Gleichung

zur Bestimmung des besten Verhältnisses $\frac{\Delta n}{\Delta n'}$, nämlich als Differentialquotient $\frac{dn}{dn'}$, genommen für die Wellenlänge l_0.

Da $\frac{dn}{dx}$ und $\frac{dn'}{dx}$ für die in Betracht kommenden Körper gleich bezeichnet sind, und cos r_1, cos r_2' der Natur der Sache nach nur positiv sein können, so ist die Gleichung nur erfüllbar, wenn α und α' entgegengesetzt bezeichnet, also bei beiden Prismen die brechenden Kanten entgegengesetzt gerichtet sind.

Eine weitere, leichte Verification bietet die Anwendung der Formel für den Fall, dass beide Glassorten identisch, also $n = n'$ und $\frac{dn}{dx} = \frac{dn'}{dx}$ ist. Dann wird sofort auch $r_2 = r_1'$, $r_2' = r_1' + \alpha' = = r_2 + \alpha'$, und die Bedingungsgleichung für Achromasie lautet:

$$\cos(r_2 + \alpha') \sin\alpha + \cos(r_2 - \alpha) \sin\alpha' = 0$$

und in weiterer Ausführung:

$$\cos r_2 (\sin\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\sin\alpha') + \sin r_2 (\sin\alpha\sin\alpha' - \cos\alpha\sin\alpha') = 0$$
$$\cos r_2 \sin(\alpha + \alpha') = 0.$$

Da der Factor cos r_2 der Natur der Sache nach nicht Null werden kann, so ist nur die Lösung: $\sin(\alpha+\alpha') = 0$, $\alpha + \alpha' = 0$ möglich. Die Winkel der beiden Prismen müssen entgegengesetzt gleich sein.

Die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Wellenlänge des benützten Lichtes wird im vorliegenden Fall am besten nach Cauchy's Dispersionsformel dargestellt:

$$n = a + \frac{b}{l^2} + \frac{c}{l^4} + \ldots = a + bx + cx^2 + \ldots$$
$$n' = a' + \frac{b'}{l^2} + \frac{c'}{l^4} + \ldots = a' + b'x + c'x^2 + \ldots$$

Aus dieser Annahme folgen für die in Betracht kommenden Differentialquotienten die Werthe:

$$\frac{dn}{dx} = b + 2cx + \ldots = b + \frac{2c}{l^2} + \ldots$$
$$\frac{dn'}{dx} = b' + 2c'x + \ldots = b' + \frac{2c'}{l^2} + \ldots$$

Hiedurch bekommt die Bedingungsgleichung für Achromasie die Gestalt:

$$\frac{\sin\alpha'\cos r_1}{\sin\alpha\cos r_2'}+\frac{b+\frac{2c}{l^2}}{b'+\frac{2c'}{l^2}}=0, \qquad 3)$$

in welcher sie am besten mit der Erfahrung verglichen werden kann.

Die Herren Steinheil und Voit theilen in ihrem Handbuch der angewandten Optik[1] ausführliche Messungen an einem Doppelprisma aus Crown- und Flintglas mit, bei welchem die Winkel die Grössen:

$$\alpha=-(60°\ 2'\ 10{\cdot}8''),\quad \alpha'=33°\ 35'\ 47{\cdot}3''$$

besitzen. Die Brechungsquotienten der genannten Glassorten für die Fraunhofer'schen Linien D_2, E, F sind:[2]

	Crownglas n	Flintglas n'	l
D_2.....	1·516274	1·603528	0·58910
E.....	1·519570	1·609450	0·52713
F.....	1·522437	1·614771	0·48622

aus welchen Angaben sich für die Cauchy'sche Dispersionsformel folgende Constanten berechnen:

Crownglas

$a = 1{\cdot}50263546$
$b = 0{\cdot}004843852 \qquad \log b = 0{\cdot}6851909-3$
$c = -0{\cdot}00003843412 \qquad \log(-c) = 0{\cdot}5847170-5$

Flintglas

$a' = 1{\cdot}58109252$
$b' = 0{\cdot}007410000 \qquad \log b' = 0{\cdot}8698182-3$
$c' = 0{\cdot}00013048 \qquad \log c' = 0{\cdot}1155454-4$

Zur Berechnung der Constanten wurden die Brechungsquotienten für die Fraunhofer'schen Linien D, E, F benützt,

[1] S. 28—33.
[2] A. a. O., S. 22 u. 27.

damit die Formel möglichst genau die Brechungsquotienten für den lichtstärksten Theil des Spectrums darstellt. Würde es sich in einem Apparat um die Verwendung der chemisch wirksamen Strahlen handeln, so müsste man einen möglichst genauen Anschluss der Formel an die Beobachtung im blau-violetten Theile des Spectrums erzielen und demgemäss die zur Berechnung der Constanten dienenden Wellenlängen für Strahlen aus diesem Theile wählen.

Die Beobachtung an dem oben angeführten Doppelprisma ergab, dass die Einstellung auf beste Achromasie dann erreicht ist, wenn die Strahlen eine Ablenkung $\gamma = 13° 36' 57 \cdot 8''$ erfahren. Weiter ergibt sich, dass die Einstellung des Doppelprismas auf beste Achromasie mit keinem besonderen Grad von Genauigkeit erfolgt, indem der mittlere Fehler des Resultates ungefähr dreissigmal grösser ist als jener bei der Bestimmung des Prismenwinkels.[1] Die Richtigkeit unserer Theorie vorausgesetzt, dass die Einstellung auf die parallel gemachten, lichtstärksten Strahlen erfolgt, lässt sich dieser Umstand sehr leicht erklären, da eben in der Nähe dieses Maximums eine kleine Änderung der Wellenlänge des Lichtes, wie auch aus der Fraunhofer'schen Zeichnung der Helligkeitscurve des Spectrums deutlich hervorgeht, keine nennenswerthe Änderung der Intensität bewirkt, also auch eine kleine Änderung der Einstellung keine sonderliche Veränderung des Bildes bewirken kann.

Zur Prüfung der Theorie hat man nun zu untersuchen, welche Strahlen im Prisma die angegebene Ablenkung erfahren und gleichzeitig den Formeln 2) und 3) genügen. Durch Anwendung einer beliebigen Näherungsmethode gelangt man zu dem Werthe $l_0 = 0 \cdot 57382$.

Für denselben ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
n_0 &= 1 \cdot 516992, \quad n_0' = 1 \cdot 604801 \\
i &= \quad 46° 36' 33'' \\
r_1 &= \quad 28 \quad 37 \quad 19 \cdot 4 \\
r_2 &= -(31 \quad 24 \quad 51 \cdot 4) \\
r_1' &= -(29 \quad 31 \quad 6 \cdot 3) \\
r_2' &= \quad 4 \quad 4 \quad 41 \cdot 0
\end{aligned}
$$

[1] A. a. O., S. 31.

$$i' = 6° 33' 11{\cdot}6''$$

$$\gamma = 13\ \ 36\ \ 57{\cdot}9$$

$$\frac{dn}{dn'} = \frac{b + \frac{2c}{l_0^2}}{b' + \frac{2c'}{l_0^2}} = 0{\cdot}56207.$$

Der gefundene Werth l_0 entspricht vollkommen der Wellenlänge für die von Fraunhofer angegebene Stelle der grössten Lichtintensität im Spectrum des Sonnenlichtes. Für das beste Verhältniss $\frac{\Delta n}{\Delta n'}$ ergab eine auf die Beobachtung gegründete Rechnung: 0·5628.[1] Nach der von den Herren Steinheil und Seidel aufgestellten, verbesserten Fraunhofer'schen Formel ergibt sich das Verhältniss für den besten optischen Gesammteffect der genannten Glassorten zu: 0·5590,[2] welcher Werth ziemlich bedeutend von dem auf die Beobachtung gegründeten abweicht. Der aus unserer Theorie abgeleitete Werth 0·5621 stimmt mit dem aus der Beobachtung folgenden umso vollkommener, als ja der letztere nicht unmittelbar aus der Beobachtung stammt, sondern unter der nicht ganz richtigen Voraussetzung berechnet wurde, dass die Einstellung auf die parallel austretenden gelben (Linie *D*) und violetten Strahlen erfolgt.

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung möge noch an einem zweiten Beispiele dargethan werden. Fraunhofer[3] bestimmte experimentell für Crownglas Nr. 13 und Flintglas Nr. 30 den für die Berechnung besten Werth des Zerstreuungsverhältnisses $\frac{\Delta n'}{\Delta n} = 1{\cdot}98$. Die Brechungsquotienten für die genannten Glassorten sind:

	n	n'	l
D	1·527982	1·630585	0·58942
E	1·531372	1·637356	0·52713
F	1·534337	1·643466	0·48622

[1] A. a. O., S. 32.

[2] S. 27.

[3] Gesammelte Schriften, S. 21.

Aus diesen Bestimmungen ergeben sich die Constanten:

Crownglas

$a = 1{\cdot}51438421$
$b = 0{\cdot}0047391063 \qquad \log b = 0{\cdot}6756965-3$
$c = -0{\cdot}00000521793 \quad \log(-c) = 0{\cdot}7174983-6$

Flintglas

$a' = 1{\cdot}60570731$
$b' = 0{\cdot}0080388922 \qquad \log b' = 0{\cdot}9051962-3$
$c' = 0{\cdot}00020984456 \quad \log c' = 0{\cdot}3218977-4.$

Die Rechnung liefert dann $\left(\frac{dn'}{dn}\right)_0 = \frac{b' + \frac{2c'}{l_0^2}}{b + \frac{2c}{l_0^2}} = 1{\cdot}9785.$

Auch hier ist die Übereinstimmung soviel wie vollkommen. Es ist somit der Beweis erbracht, dass der beste optische Gesammteffect bei einem achromatischen Doppelprisma erzielt ist, wenn für die wirksamen Strahlen der Parallelismus zweier unmittelbar benachbarter Strahlen auch nach der Brechung aufrecht bleibt.

Es erscheint nur noch wünschenswerth, dass man den Werth für l_0 nicht, wie es in der vorliegenden Arbeit nothgedrungen geschehen, aus einem einzigen Experiment ableitet, sondern für diesen Zweck eine ganze Reihe von Versuchen unternehmen würde, was umsomehr zu empfehlen wäre, als ja die praktische Optik ein wesentliches Interesse an der genauen Kenntniss dieses Werthes besitzt.

Das bei der Construction achromatischer Doppelprismen am häufigsten vorkommende Problem ist jenes, zu einem gegebenen Prisma für einen vorgeschriebenen Einfallswinkel des Lichtes jenes Prisma aus einer bestimmten Glassorte zu rechnen, welches die beste Achromasie bewirkt. Hiefür gestatten die abgeleiteten Formeln eine ziemlich bequeme Lösung. Der Gang der Rechnung ist ohne Schwierigkeit aus Folgendem ersichtlich:

$$n_0 = a + \frac{b}{l_0^2} + \frac{c}{l_0^4} \qquad n_0' = a' + \frac{b'}{l_0^2} + \frac{c'}{l_0^4}$$

$$\left(\frac{dn'}{dn}\right)_0 = \frac{b' + \frac{2c'}{l_0^2}}{b + \frac{2c}{l_0^2}}$$

$$\sin r_1 = \frac{\sin i}{n_0}$$

$$r_2 = r_1 + \alpha$$

$$\sin r_1' = \frac{n_0}{n_0'} \sin r_2$$

$$\operatorname{cotg} \alpha' = \operatorname{tg} r_1' - \frac{\cos r_1}{\cos r_1' \sin \alpha} \left(\frac{dn'}{dn}\right)_0 \qquad 4)$$

Aus Gleichung 3) folgt nämlich:

$$\frac{\cos(\alpha' + r_1')}{\sin \alpha'} = -\frac{\cos r_1}{\sin \alpha} \left(\frac{dn'}{dn}\right)_0$$

$$\cos r_1' \cot \alpha' - \sin r_1' = -\frac{\cos r_1}{\sin \alpha} \left(\frac{dn'}{dn}\right)_0,$$

aus welch' letzter Beziehung unmittelbar die Gleichung 4) hervorgeht. In Bezug auf ihre Anwendung möge nochmals darauf hingewiesen werden, dass auch für die darin vorkommenden Winkelgrössen die oben angeführte Zeichenregel gilt.

Von den drei in Betracht kommenden Grössen α, α', i können bei der Construction eines achromatischen Doppelprismas zwei beliebig gewählt werden, während über die dritte dann schon verfügt ist. Es liegt der Gedanke nahe, nur eine Grösse beliebig zu wählen und die beiden andern so zu bestimmen, dass nicht nur $\left(\frac{di'}{dx}\right)_0$, sondern auch noch $\left(\frac{d^2 i}{dx^2}\right)_0 = 0$, wodurch zweifellos der Grad der Achromasie sich erhöhen müsste. Die diesbezüglichen Gleichungen sind leicht zu entwickeln, bei ihrer Anwendung auf concrete Fälle zeigt sich aber, dass unter Benützung von Crown- und Flintglas die Auflösungen zum Theil imaginär ausfallen. Eine solche erhöhte Achromasie ist eben nur bei der Anwendung mehrerer Prismen zu erreichen. Die darauf bezüglichen Formeln, deren Entwicklung keine wesentlichen Schwierigkeiten bereitet, mögen übergangen werden, da der Fall mehrfacher achromatischer Prismen nur sehr selten in der Praxis vorkommt.

Die Anwendung der oben entwickelten Theorie auf die Lehre von den achromatischen Linsensystemen ergibt sich fast von selbst. Die Brennweite eines Linsensystems kann man durch

die Brennweite der einzelnen Linsen und ihre Distanzen von einander darstellen. Die Brennweite jeder Linse, oder besser ihr reciproker Werth lässt sich als Function des Brechungsexponenten n durch eine nach steigenden Potenzen der Grösse $\frac{1}{l^2} = x$ geordnete Reihe ausdrücken. Durch genau dieselben Überlegungen, wie sie früher angestellt wurden, kommt man zu der Entwicklung:

$$\frac{1}{F} - \frac{1}{F_0} = \left(d\frac{\frac{1}{F}}{dx}\right)_0 (x - x)_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\frac{1}{F}}{dx^2}\right)(x - x_0)^2 + \ldots$$

Die Achromasie wird einen umso höheren Grad erlangen, je mehr Glieder der Reihe man zum Verschwinden bringt. Die erste Bedingung, welche eine achromatische Combination zu erfüllen hat, ist also $\left(d\frac{\frac{1}{F}}{dx}\right)_0 = 0$ und falls dann noch verfügbare Grössen übrig bleiben $\left(\frac{d^2\frac{1}{F}}{dx^2}\right)_0 = 0$ u. s. w.

Es möge auch hier die Theorie beispielsweise auf einige specielle Fälle einfacher Art angewendet werden. Ein System von Linsen, welche so dicht aneinander stehen, dass man ihre gegenseitigen Entfernungen vernachlässigen kann, ist die Brennweite bekanntlich durch die Gleichung:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi'} + \frac{1}{\varphi''} + \ldots$$

gegeben, wenn $\varphi, \varphi', \varphi'' \ldots$ die Brennweiten der einzelnen Linsen darstellt. Die Bedingungsgleichungen für Achromasie sind dann:

$$\sum\left(d\frac{\frac{1}{\varphi}}{dn} \cdot \frac{dn}{dx}\right)_0 = 0$$

$$\sum\left[\frac{d^2\frac{1}{\varphi}}{dn^2}\left(\frac{dn}{dx}\right)^2 + \frac{d\frac{1}{\varphi}}{dn} \cdot \frac{d^2n}{dx^2}\right]_0 = 0$$

. . . . . .

Unter der üblichen Vernachlässigung der Linsendicke ist bekanntlich:

$$\frac{1}{\varphi} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

und daher:

$$d\frac{\frac{1}{\varphi}}{dn} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{\varphi}, \qquad \frac{d^2\frac{1}{\varphi}}{dn^2} = 0.$$

Die endgiltigen Formen der Bedingungsgleichungen sind daher:

$$\sum\left(\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{\frac{dn}{dx}}{n-1}\right)_0 = 0$$

$$\sum\left(\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{\frac{d^2n}{dx^2}}{n-1}\right)_0 = 0$$

. . . . . .

Die erste dieser Gleichungen hat die Form jener, welche für diesen Fall immer angeführt werden, nur dass der bestimmte Ausdruck $\frac{dn}{dx}$ für $x = \frac{1}{l_0^2}$ an Stelle der willkürlichen Grösse Δn getreten. Wesentlich neu sind die folgenden Gleichungen, die freilich erst bei der Erzielung höherer Grade der Achromasie unter Anwendung mehrerer Linsen zur Benützung kommen.

Die Frage, ob man nicht auch in besonderen Fällen durch Anwendung nur zweier Linsen eine Achromasie höherer Ordnung herzustellen ist, muss wieder verneint werden. Denn die Lösung dieses Problems enthalten die Gleichungen:

$$\frac{1}{\varphi_0}\left(\frac{\frac{dn}{dx}}{n-1}\right)_0 + \frac{1}{\varphi_0'}\left(\frac{\frac{dn'}{dx}}{n'-1}\right)_0 = 0$$

$$\frac{1}{\varphi_0}\left(\frac{\frac{d^2n}{dx^2}}{n-1}\right)_0 + \frac{1}{\varphi_0'}\left(\frac{\frac{d^2n'}{dx}}{n'-1}\right)_0 = 0$$

und es ist ersichtlich, dass beide Gleichungen, aus welchen nur das Verhältniss der Grössen φ bestimmbar ist, sich wider-

sprechen. Doch ist die Lösung sofort möglich, wenn man drei Linsen aus verschiedenen Glassorten combinirt. Ist nämlich die Brennweite F der ganzen Combination festgestellt, so ergeben sich die Brennweiten der drei Linsen aus den Gleichungen:

$$\frac{1}{\varphi_0}+\frac{1}{\varphi_0'}+\frac{1}{\varphi_0''}=\frac{1}{F_0}$$

$$\frac{1}{\varphi_0}\left(\frac{\frac{dn}{dx}}{n-1}\right)_0+\frac{1}{\varphi_0'}\left(\frac{\frac{dn'}{dx}}{n'-1}\right)_0+\frac{1}{\varphi_0''}\left(\frac{\frac{dn''}{dx}}{n''-1}\right)_0=0$$

$$\frac{1}{\varphi_0}\left(\frac{\frac{d^2n}{dx^2}}{n-1}\right)_0+\frac{1}{\varphi_0'}\left(\frac{\frac{d^2n'}{dx^2}}{n'-1}\right)_0+\frac{1}{\varphi_0''}\left(\frac{\frac{d^2n''}{dx^2}}{n''-1}\right)_0=0.$$

Wie aus den gewählten Beispielen hervorgeht, kommen in den Gleichungen zur Berechnung mehrelementiger, achromatischer Systeme die höheren Differentialquotienten der Brechungsexponenten vor. Zu ihrer Berechnung müssen immer mehr und mehr Glieder der Cauchy'schen Dispersionsformel herangezogen werden, so dass zur Erzielung höherer Grade der Achromasie auch die Brechungsverhältnisse der betreffenden Glassorten immer genauer und genauer bekannt sein müssen. Ferner finden sich in den Gleichungen nicht die Differentialquotienten der Brechungsexponenten selbst, sondern ihre Verhältnisse zu einander, z. B. $\frac{dn}{dn'}, \frac{d^2n}{d^2n'}$ u. s. w. Man kann daher ohne Änderung der Resultate für die Abhängigkeit der Brechungsquotienten von der Wellenlänge statt der Cauchy'schen irgend eine andere, mit der Erfahrung übereinstimmende Dispersionsformel, z. B. die so exacte Formel von Helmholtz, anwenden. Hängt nämlich in einer solchen Formel der Brechungsquotient unmittelbar von der Grösse u ab, die selbst wieder eine Function der Wellenlänge darstellt, so können sofort die in die Gleichung eingehenden Verhältnisse, wie $\frac{dn}{dn'}=\frac{\frac{dn}{du}}{\frac{dn'}{du}}$ u. s. w. abgeleitet werden.

Über die Verdampfungswärme

von

Dr. Gustav Jäger.

(Vorgelegt in der Sitzung am 22. October 1891.)

Die Verdampfungswärme der Flüssigkeiten wird wesentlich durch drei Umstände bedingt.

1. Muss die sich in Dampf verwandelnde Flüssigkeit äussere Arbeit leisten. Dieselbe ist $a = pv$, wenn p der Druck, unter welchem die Flüssigkeit verdampft, und v der Unterschied zwischen dem Dampfvolumen und dem ursprünglichen Volumen der verdampften Flüssigkeit ist. Für die praktische Rechnung können wir das Flüssigkeitsvolumen vernachlässigen und v einfach als das Dampfvolumen ansehen. Nehmen wir ferner noch das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz auch für Dämpfe als giltig an, so

$$pv = p_0 v_0 (1+\alpha t) = a_0 (1+\alpha t),$$

wenn wir mit a_0 die zu leistende äussere Arbeit bei der Temperatur 0° bezeichnen.

2. Hat die sich in Dampf verwandelnde Flüssigkeitsmolekel Arbeit zur Überwindung der Capillarkräfte zu leisten, welche beim Passiren der Flüssigkeitsoberfläche in Wirksamkeit treten. Diese Arbeit wird sich mit der Temperatur ändern, und zwar wollen wir annehmen, dass der entsprechende Temperaturcoëfficient mit jenem der Capillaritätsconstanten übereinstimmt. Dies kann natürlich nur angenähert der Fall sein, indem wir bei der Bestimmung der Capillaritätsconstanten nur jene Arbeit in Betracht ziehen, welche die Molekel leistet, wenn sie aus dem Inneren der Flüssigkeit an die Oberfläche tritt. Beim continuirlichen Übergange, welchen wir zwischen Flüssigkeit und Dampf

annehmen müssen, ist es jedoch unmöglich, die wirkliche Lage der Flüssigkeitsoberfläche zu bestimmen. Indem nämlich mit wachsender Temperatur die Dichte des Dampfes rasch zu-, diejenige der Flüssigkeit hingegen abnimmt, so ist damit jedenfalls eine Verschiebung der idealen Flüssigkeitsoberfläche verbunden, was zur Folge hat, dass der Temperaturcoëfficient des bewussten Theiles der Verdampfungswärme mit jenem der Capillaritätsconstanten nicht übereinstimmen kann. Doch glaube ich, dass, so lange wir unsere Untersuchungen weit unterhalb der kritischen Temperatur der Flüssigkeit ausführen, wir die Dampfdichte gegenüber der Flüssigkeitsdichte gleich Null setzen mithin auch die oben gemachte Annahme bezüglich des Temperaturcoëfficienten als angenähert richtig ansehen können. Es ist daher die bei der Verdampfung der Masseneinheit Flüssigkeit zur Überwindung der Capillarkräfte nöthige Arbeit

$$b = b_0(1-\varepsilon t),$$

wenn b_0 die entsprechende Arbeit bei 0° und ε der Temperaturcoëfficient der Capillaritätsconstanten ist.

3. Müssen wir annehmen, dass die Flüssigkeits- und Dampfmolekeln von einander verschieden sind. Es leuchtet dies ein, wenn wir bedenken, unter welch bedeutenden Druckunterschieden in den verschiedenen Aggregatzuständen die Molekeln stehen. Die zur Umwandlung der Constitution der Molekeln erforderliche Arbeitsgrösse bildet ebenfalls einen Bestandtheil der Verdampfungswärme. Wollten wir feststellen, inwieweit diese dritte Componente der latenten Wärme von der Temperatur abhängt, so müssten wir uns allzusehr ins Gebiet der Hypothese begeben, als dass wir davon für unsere Zwecke einen Nutzen hätten. Wir wollen daher diesen Theil der Verdampfungswärme durch

$$c = c_0(1+\beta t)$$

darstellen, wobei c auch alles enthalten soll, was etwa sonst noch auf die Verdampfungswärme von Einfluss sein könnte. Wir können daher letztere darstellen durch

$$r = a_0(1+\alpha t)+b_0(1-\varepsilon t)+c_0(1+\beta t) = r_0+(\alpha a_0-\varepsilon b_0+\beta c_0)t. \quad \ldots 1)$$

Wir erhalten also die Verdampfungswärme in erster Annäherung als lineare Function der Temperatur, ein Resultat,

welches auch die mechanische Wärmetheorie sowie das Experiment ergibt.

Von den einzelnen Constanten der Gleichung 1) kennen wir aus den Messungen der Verdampfungswärme $r_0 = a_0 + b_0 + c_0$, ferner die äussere Arbeit a_0, den Ausdehnungscoëfficienten der Gase α und den Temperaturcoëfficienten der Capillaritätsconstanten ε. Diese Grössen genügen aber noch nicht, um daraus Aufschluss über den Werth von b_0, c_0 und β zu erhalten.

Was uns besonders interessirt, ist die Grösse $b = b_0(1-\varepsilon t)$, die zur Überwindung der Capillarkräfte erforderliche Arbeit, weil wir mit Hilfe dieser Constanten einen Schluss auf die Grösse des inneren Druckes als auch auf den gegenseitigen Abstand der Molekeln der Flüssigkeit machen können. Ist die Grösse b bekannt, so findet man aus obigen Gleichungen mit Leichtigkeit β und c_0.

Die Kenntniss von b erlangen wir aus den Eigenschaften der Lösungen. Nach der bekannten Gleichung von Clapeyron-Clausius gilt für die Verdampfungswärme die Beziehung

$$r = ATu\frac{\partial p}{\partial T},$$

wenn A das calorische Äquivalent der Arbeit, T die absolute Temperatur, u den Unterschied zwischen dem specifischen Volumen des Dampfes und jenem der Flüssigkeit und p die Dampfspannung bedeutet. Für eine zweite Flüssigkeit ist gleicherweise

$$r' = ATu'\frac{\partial p'}{\partial T},$$

folglich

$$\frac{r'}{r} = \frac{u'}{u}\frac{\frac{\partial p'}{\partial T}}{\frac{\partial p}{\partial T}}.$$

Machen wir die bereits eingangs erwähnten Vernachlässigungen, indem wir nämlich annehmen, dass das specifische Volumen der Flüssigkeit gegenüber jenem des Dampfes verschwindend ist, dass wir ferner für die Dämpfe das Mariotte-

Gay-Lussac'sche Gesetz als giltig voraussetzen können, so $\frac{u'}{u} = \frac{p}{p'}$ also

$$\frac{r'}{r} = \frac{p\frac{\partial p'}{\partial T}}{p'\frac{\partial p}{\partial T}} \qquad \ldots 2)$$

Wie ich in den Abhandlungen: „Zur Theorie der Dampfspannung“ [1] und „Das Gesetz der Oberflächenspannung von Lösungen“ [2] gezeigt habe, lässt sich innerhalb enger Temperaturgrenzen die Abhängigkeit der Dampfspannung von der Temperatur darstellen durch

$$p = Ce^{-k\frac{1-\varepsilon t}{1+\gamma t}},$$

wobei C und k Constanten, γ der Ausdehnungscoëfficient der Gase sind. Differenziren wir die Gleichung nach t, so

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial T} = pk\frac{\varepsilon+\gamma}{(1+\gamma t)^2}$$

und gleicherweise

$$\frac{\partial p'}{\partial T} = p'k'\frac{\varepsilon'+\gamma}{(1+\gamma t)^2}.$$

Mit Zuhilfenahme dieser Gleichungen verwandelt sich Gleichung 2) in

$$\frac{r'}{r} = \frac{k'(\varepsilon'+\gamma)}{k(\varepsilon+\gamma)}. \qquad \ldots 3)$$

Ist a die Arbeit, welche eine Flüssigkeitsmolekel von der Masse m bei der Verdampfung zur Überwindung der Capillarkräfte zu leisten hat, und c die mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln, so

$$k = \frac{3a}{mc^2}, \quad k' = \frac{3a'}{mc'^2}.$$

---

[1] Wiener Berichte, XCIX, S. 679 ff.

[2] Ebenda, C, S. 511.

Wir nehmen nun an, dass die gestrichelten Buchstaben einer verdünnten Lösung, die ungestrichelten dem entsprechenden Lösungsmittel angehören; ferner sei die Lösung so beschaffen, dass bei der Verdampfung nur das Lösungsmittel verdampft, nicht aber die gelöste Substanz. Für diesen Fall habe ich gezeigt,[1] dass

$$a' = a(1+q\varkappa) \qquad \ldots 4)$$

$$mc'^2 = mc^2(1+q\lambda), \qquad \ldots 5)$$

wobei $\varkappa$ und λ Constanten, q die Zahl der im Liter der Lösung enthaltenen Grammmolekeln der gelösten Substanz sind, und c' sich nur auf die Molekel des Lösungsmittels bezieht. Es ist daher

$$\frac{k'}{k} = \frac{1+q\varkappa}{1+q\lambda} = 1+q(\varkappa-\lambda),$$

da $q\varkappa$ und $q\lambda$ gegen Eins kleine Grössen sind. Beachten wir noch, dass für verdünnte Lösungen ε' von ε sehr wenig verschieden ist, so können wir $\frac{\varepsilon'+\gamma}{\varepsilon+\gamma} = 1$ setzen, woraus für die Gleichung 3) folgt

$$r' = r[1+q(\varkappa-\lambda)]. \qquad \ldots 6)$$

Diese Gleichung, welche für Lösungen gilt, aus denen nur das Lösungsmittel verdampft, enthält den wichtigen Satz:

Die Verdampfungswärme der Lösung ist grösser als die des reinen Lösungsmittels, und es ist die Zunahme der Verdampfungswärme der Zahl der gelösten Molekeln proportional.

Wir haben hier also ein analoges Gesetz wie für die Dampfspannung, den Gefrierpunkt, die Capillaritätsconstante etc. der Lösungen.

Dasselbe Gesetz lässt sich auch aus der Gleichung 1) folgern. Halten wir nämlich die Temperatur constant, so

$$r = a+b+c, \quad r' = a+b'+c. \qquad \ldots 7)$$

Dass die äussere Arbeit a für Lösung und Lösungsmittel dieselbe Grösse ist, leuchtet ein, da wir aus beiden Flüssigkeiten

[1] Wiener Berichte, C, S. 512 ff.

denselben Dampf erhalten. Aber auch die Arbeit c halte ich für constant; denn es ist kein Grund vorhanden, in verdünnten Lösungen die Constitution der Molekeln für eine andere zu halten als im reinen Lösungsmittel. Das einzige, was nämlich die Molekel des Lösungsmittels in der Lösung erfährt, ist eine gewisse Energievermehrung, welche Gleichung 5) kennen lehrt. Diese Erhöhung der Energie ist gleichbedeutend mit einer Temperaturerhöhung. Da sich nun die specifische Wärme der Flüssigkeiten mit der Temperatur nur wenig ändert, so können wir daraus schliessen, dass die Constitution der Flüssigkeitsmolekeln durch die Temperatur ebenfalls nur geringe Änderungen erfährt, welche wir für unsere Zwecke vollständig vernachlässigen können.

Es unterscheidet sich also die Gleichung der Verdampfungswärme der Lösung von jener des Lösungsmittels nur durch das veränderte b, jene Grösse, welche die zur Überwindung der Capillarkräfte nöthige Arbeit enthält. Es ist nun der Gleichung 4) entsprechend

$$b' = b(1+q\varkappa),$$

was in Gleichung 7) eingesetzt, ergibt

$$r' = r\left(1 + \frac{b\varkappa}{r}\,q\right).$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit 6), so finden wir, dass

$$\varkappa - \lambda = \frac{b\varkappa}{r},$$

oder

$$b = \frac{\varkappa - \lambda}{\varkappa} r \qquad \ldots 8)$$

ist. Es ist somit ein Mittel gefunden, die Grösse b und damit auch alle übrigen Constanten der Gleichung 1) zu berechnen.

Aus den Messungen der Capillaritätsconstanten, welche ich an wässerigen Lösungen vornahm,[1] fand ich für Wasser $\varkappa = 0{\cdot}00808$. Dabei zeigte sich auch, dass die moleculare Änderung der Dampfspannung

$$\frac{p' - p}{p} = q\,(\varkappa - \lambda)k,$$

[1] Wiener Berichte, C, S. 514.

wobei die Buchstaben die bereits oben erwähnte Bedeutung haben. Aus dieser Gleichung ergab sich $\varkappa - \lambda = 0{\cdot}00165$. Nach Regnault ist die Verdampfungswärme des Wassers in Calorien

$$r = 606{\cdot}5 - 0{\cdot}695\, t,^1$$

daraus folgt für die Temperatur $13{\cdot}5°$ — für diese Temperatur sind nämlich die Grössen $\varkappa$ und $\varkappa - \lambda$ bestimmt — $r_{13{\cdot}5} = 597{\cdot}1$. Nach Gleichung 8) ist sodann

$$b = 121{\cdot}9 \text{ Calorien.}$$

In der Abhandlung „Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln“[2] zeigte ich, dass der innere Druck der Flüssigkeit

$$A = \frac{a\rho}{2m},$$

der Abstand der Flüssigkeitsmolekeln von einander

$$\delta = \frac{3m\alpha}{a\rho}$$

ist. $\frac{a}{m}$ ist die Arbeit, welche bei der Überführung der Masseneinheit Flüssigkeit in Dampf zur Überwindung der Capillarkräfte geleistet werden muss, also $\frac{a}{m} = b$; α ist die Capillaritätsconstante, ρ die Dichte der Flüssigkeit. Unsere Formeln werden demnach

$$A = \frac{b\rho}{2}, \quad \delta = \frac{3\alpha}{b\rho}.$$

Setzen wir für Wasser $\rho = 1$, $\alpha = 74{\cdot}4$ (c.-g.-s.) und verwandeln wir alles in absolutes Mass, so erhalten wir für den inneren Druck

$$A = 254.10^7 \text{ (c.-g.-s.)}$$

oder gleich 2508 Atmosphären, für den Abstand der Wassermolekeln von einander

$$\delta = 44.10^{-9}\, cm.$$

---

[1] Wüllner, Experimentalphysik, III, S. 716.

[2] Wiener Berichte, XCIX, S. 860 ff.

Wir müssen es wohl Zufall nennen, dass wir bei den gemachten Vernachlässigungen für δ trotzdem genau denselben Werth erhielten, welcher aus den Reibungsversuchen mit Wasserdampf[1] gefunden wurde.

Leider liegen geeignete Messungen der Capillaritätsconstanten von anderen als wässerigen Lösungen vorderhand nicht vor, um daraus direct obige Constanten berechnen zu können, doch dürfte ein indirecter Weg zur Auffindung derselben nicht weit von unserem Ziele abweichen. Ist nämlich p der osmotische Druck, welchen eine Grammmolekel im Liter ausübt, so ist, wie ich in der bereits erwähnten Abhandlung „Das Gesetz der Oberflächenspannung von Lösungen" (S. 509) zeigte,

$$\delta = \frac{2\varkappa\alpha}{p},$$

für eine andere Flüssigkeit also

$$\delta' = \frac{2\varkappa'\alpha'}{p},$$

da p von der Natur des Lösungsmittels unabhängig ist. Also

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{\varkappa\alpha}{\varkappa'\alpha'}.$$

Den relativen Abstand der Molekeln können wir aus dem specifischen und Moleculargewicht der Flüssigkeiten leicht berechnen. Kennen wir daher für eine Flüssigkeit bereits $\varkappa'$, so sind uns die Mittel gegeben, das $\varkappa$ verschiedener anderer Flüssigkeiten zu bestimmen. Aus den bekannten Grössen des Wassers berechnete ich die in folgender Tabelle zusammengestellten Zahlen.

	$\frac{\delta}{\delta'}$	α	$\varkappa$
Äther	1·77	20·65	0·0535
Schwefelkohlenstoff	1·48	33·84	0·0272
Chloroform	1·64	27·58	0·0370
Aceton	1·59	27·33	0·0363

[1] Siehe O. E. Meyer, Theorie der Gase, S. 231.

Die Werthe für α, welche für die Temperatur 0° gelten, entnahm ich meinen eigenen Messungen.[1]

$\varkappa-\lambda$ wurde aus den bereits oben angeführten Formeln

$$p = Ce^{-k\frac{1-\varepsilon t}{1+\gamma t}}, \quad \frac{p'-p}{p} = q(\varkappa-\lambda)k$$

berechnet. Zur Berechnung von k benützte ich die Werthe der Dampfspannung bei 20° und 25°, welche Regnault[2] angibt. Die Werthe von $\frac{p'-p}{p}$ fand ich aus den Angaben F. M. Raoult's.[3] Dieselben mussten jedoch erst nach unseren Masseinheiten umgerechnet werden, da Raoult die relative Änderung der Spannkraft angibt, die „ein Molekül einer festen Substanz in 100 g einer flüchtigen Flüssigkeit" hervorbringt. In folgender Tabelle habe ich Raoult's Angaben unter $\frac{p'-p}{p}$ (R.) angeführt, die nach unserem Masse unter $\frac{p'-p}{p}$. Die letzte Spalte enthält die Verdampfungswärme in Calorien.

	k	$\frac{p'-p}{p}$ (R.)	$\frac{p'-p}{p}$	$\varkappa-\lambda$	r
Äther	4·71	0·71	0·097	0·0205	94·00
Schwefelkohlenstoff	5·82	0·80	0·062	0·0106	90·20
Chloroform	6·33	1·30	0·085	0·0135	67·08
Aceton	6·59	0·59	0·073	0·0110	140·1

Folgende Tabelle enthält nun die Werthe für b, den inneren Druck in absolutem Masse A (c.-g.-s.), sowie in Atmosphären A (Atm.).

	b	A (c.-g.-s.)	A (Atm.)
Äther	36·02	$55 \cdot 10^7$	545
Schwefelkohlenstoff	35·15	95	935
Chloroform	24·47	78	768
Aceton	42·45	72	711

[1] Wiener Berichte, C, S. 258.
[2] Pogg. Annalen, CXI.
[3] Beibl. XII, S. 40 ff.

Es wäre jedenfalls werthvoll, wenn wir directe Bestimmungen der Capillaritätsconstanten auch anderer als wässeriger Lösungen hätten, wie auch Untersuchungen über die Verdampfungswärme von Lösungen.

Wie aus der Gleichung 6)

$$r' = r[1+q(\varkappa-\lambda)]$$

hervorgeht, ist die Grösse der Änderung der Verdampfungswärme lediglich von $\varkappa-\lambda$ abhängig. Für Wasser ist nun $\varkappa-\lambda = 0{\cdot}00165$, d. h. durch eine Grammmolekel im Liter gelöster Substanz würde die Verdampfungswärme noch nicht um $2\%_{00}$ erhöht. Es würde sich also diese Flüssigkeit zur Untersuchung nicht eignen. Doch dürfte sich an anderen Flüssigkeiten, wie etwa am Äther, für welchen $\varkappa-\lambda = 0{\cdot}0205$, die Erhöhung der Verdampfungswärme also schon $2\%_0$ ausmacht, unsere Theorie prüfen lassen.

Es liegt auch in meiner Absicht, sowohl bezüglich der Capillaritätsconstanten, als auch der Verdampfungswärme nicht wässeriger Lösungen entsprechende Experimente durchzuführen.

Über die Berechnung einer Kometenbahn mit Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung

von

Prof. Dr. **E. Weiss**,
w. M. k. Akad.

Im Laufe der letzten Jahre wurden von verschiedenen Seiten Methoden vorgeschlagen, bei der Berechnung der Bahn eines Körpers unseres Sonnensystems noch Glieder mit höheren Potenzen der Zwischenzeiten zu berücksichtigen als Olbers und Gauss in ihren Methoden beibehalten haben. Solche Methoden hätten ausser einem hohen theoretischen Interesse auch einen bedeutenden praktischen Werth, selbst wenn durch ihre Anwendung die Rechnung beträchtlich vergrössert würde, falls man hoffen könnte, dadurch schon gleich bei einer ersten Bahnberechnung ein der Wahrheit recht nahe kommendes Resultat zu erlangen. Dies war am Anfange, ja selbst bis gegen die Mitte unseres Jahrhunderts auch in der That der Fall, wo man bei Planeten mit der Bahnberechnung wartete, bis sich die Beobachtungen über mehrere Monate erstreckten, oder bei Kometen sich häufig damit begnügte, aus drei ziemlich entlegenen, als zuverlässig betrachteten Beobachtungen eine Bahn zu ermitteln. Anders aber liegen die Verhältnisse heutzutage, wo man in der Regel bei Planeten bereits zu einer Bahnberechnung schreitet, wenn die Beobachtungen erst drei, höchstens vier Wochen umspannen, oder bei Kometen, wenn sie kaum mehr als die eben genannte Zahl von Tagen verfolgt wurden. Bei so kurzen Bögen kann man aber nie mehr als eine ganz rohe Annäherung zu erlangen hoffen; es wäre daher nur ein unnützer Zeitverlust, wollte man schon bei einer ersten

Bahnberechnung durch Anwendung einer complicirten Methode und Berücksichtigung aller kleinen Correctionen die äusserste Genauigkeit anstreben. Dies bleibt zweckmässig einer zweiten Bahnbestimmung vorbehalten, für welche man sich nun, da man bereits Näherungswerthe der Elemente besitzt, die nöthigen Daten leicht mit aller wünschenswerthen Genauigkeit verschaffen kann.

Ich theile daher vollkommen die Meinung von Fabritius, dass bei Bahnberechnungen das Mitnehmen von Gliedern mit höheren Potenzen der Zwischenzeiten als den zweiten heutzutage nur dann Aussicht hat, eine allgemeinere Anwendung zu finden, wenn damit kein erheblich grösserer Arbeitsaufwand verbunden ist. Diese Anforderung erfüllt aber keine der bisher vorgeschlagenen Methoden in dem Masse, wie diejenige, deren Grundgedanken Fabritius bereits vor einer Reihe von Jahren in seiner interessanten Abhandlung „Über die Berechnung der richtigen Distanzen durch successive Annäherungen in dem Problem der Bahnbestimmung aus drei beobachteten Orten. Kiew 1877" entwickelt hat und auf welche er vor Kurzem unter dem Titel „Über eine leichte Methode der Bahnbestimmung mit Zugrundelegung des Principes von Gibbs" zurückgekommen ist.[1] Diese Methode ist aber leider auf Bahnbestimmungen von Kometen nicht mit Vortheil anwendbar, weil sie Unsicherheiten in die Rechnung hineinträgt, die nicht nothwendigerweise mit dem Probleme verknüpft sind. Dies lässt sich jedoch mittelst allgemeiner Raisonnements nicht leicht darthun; es tritt erst klar hervor, wenn man die Coëfficienten nicht bloss bis zu Zwischengleichungen, sondern bis zu den Schlussgleichungen algebraisch entwickelt, damit auch noch in diesen der Zusammenhang der in ihnen vorkommenden Grössen ersichtlich bleibt. Fabritius leitet überdies seine Fundamentalgleichungen 3) in der letztcitirten Abhandlung auf einem Umwege ab, der abgesehen davon, dass er die auszuführenden Operationen viel weitläufiger erscheinen lässt als sie wirklich sind, noch den viel schwerwiegenderen Übelstand mit sich führt,

[1] Astronomische Nachrichten, Bd. 128, S. 225 ff. Während des Druckes der vorliegenden Abhandlung hat Fabritius in demselben Bande der Astron. Nachr., S. 322, seine Methode auch auf die Bestimmung einer Kometenbahn, aber wieder bloss andeutungsweise, ausgedehnt.

dass die Coëfficienten $\frac{A_1B_3-A_3B_1}{B_3}$, $\frac{A_2B_3-A_3B_2}{B_2}$ u. s. w. nahezu die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen. Endlich ist es mir noch gelungen, die Gleichung für die geocentrische Distanz des mittleren Ortes derart zu transformiren, dass die Berechnung derselben sich nicht nur bequemer, sondern was noch wichtiger ist, sicherer gestaltet. Ich werde daher vor Allem die Grundformeln des Problems auf die, wie ich glaube, möglichst einfache Art so weit entwickeln, als wir es für unseren Zweck benöthigen, möchte aber vorher noch eine Bemerkung einschalten.

In den Lehrbüchern der Astronomie werden bei der Darlegung der Methoden der Bahnberechnung die dabei in Betracht kommenden Quantitäten nach Grössenordnungen classificirt, um sich ein Urtheil darüber zu bilden, welche Glieder zur Erzielung einer bestimmten Genauigkeit noch mitgenommen werden müssen. Hierbei lässt man gewöhnlich die in die Charakteristik unseres Sonnensystems multiplicirten Zwischenzeiten, ebenso wie die mittlerweile erfolgte Ortsveränderung der Erde und des Gestirnes als Grössen erster Ordnung gelten und gründet darauf Näherungsmethoden. Wenn nun die Bahnbestimmung aus einem kurzen Bogen vorgenommen wird, etwa aus Beobachtungen innerhalb 12—14 Tagen, dann beträgt kt beiläufig 0·2 und kann sowie die Bewegung der Erde zur Noth noch als eine Grösse erster Ordnung angesehen werden. Wenn man aber dann um die Convergenz der vorgeschlagenen Methode in Beispielen nachzuweisen, bis auf Zwischenzeiten von 50 und 60 oder noch mehr Tagen geht, so steigt kt bereits auf 0·9 und 1·0 und die Bewegung der Erde auf 50° bis 60°. Solche Grössen noch als Grössen erster Ordnung zu bezeichnen, deren höhere Potenzen ohne wesentliche Beeinträchtigung der Genauigkeit vernachlässigt werden können, ist unmathematisch und unlogisch und kann nur zu Trugschlüssen führen. Bei den Asteroiden tritt dies allerdings nicht hervor. Denn die von der dritten und vierten Potenz der Zeit abhängigen Glieder besitzen die Coëfficienten $\frac{1}{6r^3}$ und $\frac{1}{4r^4}\left(\frac{dr}{dt}\right)$ respective, und da bei den Asteroiden r meist grösser als 2·5

ist, sind diese Coëfficienten in der Regel viel kleiner als $\frac{1}{100}$ und $\frac{1}{150}\left(\frac{dr}{dt}\right)$. Bei den Asteroiden sind daher selbst bei sehr beträchtlichen Zwischenzeiten die in die höheren Potenzen der Zeit multiplicirten Glieder noch immer von sehr geringer Bedeutung, aber nicht desshalb, weil man die in die Charakteristik unseres Sonnensystems multiplicirten Zwischenzeiten als Grössen erster Ordnung auffassen kann, sondern weil die Coëfficienten der höheren Potenzen dieser Grössen, Grössen höherer Ordnung sind. Wendet man aber die obige Schlussweise statt auf Asteroiden auf Kometen an, so tritt bei kleinem r und grossem $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ der Trugschluss sofort klar zu Tage und macht sich auch gleich in sehr unliebsamer Weise geltend. Ein instructives Beispiel hiefür findet sich in der Eingangs angezogenen Abhandlung von W. Fabritius: „Über die Berechnung der richtigen Distanzen u. s. w." Von den drei Kometen, die darin berechnet werden, convergiren die successiven Hypothesen bei zweien nicht nur nicht, sondern führen von der Wahrheit weg, nämlich beim Kometen 1874 III (Coggia) bei einem Intervall von 44 Tagen zwischen der ersten und letzten Beobachtung, und beim Kometen 1877 I (Borelly) bei einem Intervall von 37 Tagen. Bei dem dritten Kometen endlich, dem 1877 III (Block Swift), ist bei 46tägigem Intervall das Normalverfahren ganz unanwendbar, während für Juno noch bei einem Intervalle von 260 Tagen eine ziemlich rasche Convergenz erzielt wird.

Rechnet man mit curtirten Distanzen, was die Relationen etwas vereinfacht und zählt man die Längen von einem Punkte an, mit der Länge II, so lauten unter Beibehaltung der allgemein üblichen Bezeichnungen die Fundamentalgleichungen einer Bahnbestimmung:

$$\left.\begin{aligned} &n_1[\varrho_1' \cos(\lambda_1-\Pi)-R_1\cos(L_1-\Pi)]-n_2[\varrho_2'\cos(\lambda_2-\Pi)-R_2\cos(L_2-\Pi)]+\\ &\qquad+n_3[\varrho_3'\cos(\lambda_3-\Pi)-R_3\cos(L_3-\Pi)]=0\\ &n_1[\varrho_1'\sin(\lambda_1-\Pi)-R_1\sin(L_1-\Pi)]-n_2[\varrho_2'\sin(\lambda_2-\Pi)-R_2\sin(L_2-\Pi)]+\\ &\qquad+n_3[\varrho_3'\sin(\lambda_3-\Pi)-R_3\sin(L_3-\Pi)]=0\\ &n_1\varrho_1'\operatorname{tg}\beta_1-n_2\varrho_2'\operatorname{tg}\beta_2+n_3\varrho_3'\operatorname{tg}\beta_3=0 \end{aligned}\right\} \ldots 1)$$

Um aus diesen Gleichungen möglichst einfach eine oder die andere Grösse eliminiren zu können, multipliciren wir die erste mit $q_x \sin P_x$, die zweite mit $-q_x \cos P_x$, die dritte mit S_x und addiren hierauf. Man erhält so

$$n_1\{\rho_1'[q_x \sin(P_x+\Pi-\lambda_1)+S_x \operatorname{tg}\beta_1]-R_1 q_x \sin(P_x+\Pi-L_1)\}-$$
$$-n_2\{\rho_2'[q_x \sin(P_x+\Pi-\lambda_2)+S_x \operatorname{tg}\beta_2]-R_2 q_x \sin(P_x+\Pi-L_2)\}+$$
$$+n_3\{\rho_3'[q_x \sin(P_x+\Pi-\lambda_3)+S_x \operatorname{tg}\beta_3]-R_3 q_x \sin(P_x+\Pi-L_3)\}=0.$$

Aus dieser Gleichung ist zunächst ersichtlich, dass sich die Winkel P_x und Π nicht trennen lassen, sondern in ihr und selbstverständlich auch in allen aus ihr abgeleiteten Relationen sich zu einem neuen Winkel $P_x+\Pi = Q_x$ zusammensetzen. Die Gleichung lässt sich daher einfacher so schreiben:

$$n_1\{\rho_1'[q_x \sin(Q_x-\lambda_1)+S_x \operatorname{tg}\beta_1]-R_1 q_x \sin(Q_x-L_1)\}-$$
$$-n_2\{\rho_2'[q_x \sin(Q_x-\lambda_2)+S_x \operatorname{tg}\beta_2]-R_2 q_x \sin(Q_x-L_2)\}+$$
$$+n_3\{\rho_3'[q_x \sin(Q_x-\lambda_3)+S_x \operatorname{tg}\beta_3]-R_3 q_x \sin(Q_x-L_3)\}=0. \quad \ldots 2)$$

Um aus derselben n_1 zu eliminiren, hat man zu setzen:

$$q_x \sin(Q_x-L_1)=0$$
$$q_x \sin(Q_x-\lambda_1)+S_x \operatorname{tg}\beta_1=0.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt $Q_x=L_1$; die zweite befriedigt man durch die Annahmen:

$$q_x = \operatorname{tg}\beta_1, \quad S_x = -\sin(Q_x-\lambda_1) = -\sin(L_1-\lambda_1).$$

In gleicher Weise wird die Elimination von n_3 bewirkt durch:

$$Q_x = L_3, \quad q_x = \operatorname{tg}\beta_3, \quad S_x = -\sin(L_3-\lambda_3).$$

Durch die Substitution dieser Werthe in die Gleichung 2) gewinnt man sofort Relationen, die sich von Fabritius' Gleichungen 3) nur dadurch unterscheiden, dass er mit den wirklichen, wir hier mit curtirten Distanzen rechnen. Dieselben gestalten sich wie folgt:

$$\frac{n_1}{n_2}\rho_1'[\sin(\lambda_1-L_3)\operatorname{tg}\beta_3-\sin(\lambda_3-L_3)\operatorname{tg}\beta_1]=$$
$$=\rho_2'[\sin(\lambda_2-L_3)\operatorname{tg}\beta_3-\sin(\lambda_3-L_3)\operatorname{tg}\beta_2]+$$
$$+\operatorname{tg}\beta_3[R_2 \sin(L_3-L_2)-\frac{n_1}{n_2}R_1 \sin(L_3-L_1)].$$

$$\frac{n_3}{n_2}\varrho_3'[\sin(\lambda_1-L_1)\operatorname{tg}\beta_3-\sin(\lambda_3-L_1)\operatorname{tg}\beta_1]=$$
$$=\varrho_2'[\sin(\lambda_1-L_1)\operatorname{tg}\beta_2-\sin(\lambda_2-L_1)\operatorname{tg}\beta_1]+$$
$$+\operatorname{tg}\beta_1\left[R_2\sin(L_2-L_1)-\frac{n_3}{n_2}R_3\sin(L_3-L_1)\right].$$

Zur Elimination von ϱ_1' und ϱ_3' wird erfordert:

$$q_x\sin(Q_x-\lambda_1)+S_x\operatorname{tg}\beta_1=0$$
$$q_x\sin(Q_x-\lambda_3)+S_x\operatorname{tg}\beta_3=0.$$

Daraus folgt zuvörderst:

$$q_x\sin(Q_x-\lambda_1)\operatorname{tg}\beta_3-q_x\sin(Q_x-\lambda_3)\operatorname{tg}\beta_1=0$$

oder

$$q_x\sin Q_x[\cos\lambda_1\operatorname{tg}\beta_3-\cos\lambda_3\operatorname{tg}\beta_1]-$$
$$-q_x\cos Q_x[\sin\lambda_1\operatorname{tg}\beta_3-\sin\lambda_3\operatorname{tg}\beta_1]=0.$$

Nimmt man also:

$$q_x\sin Q_x=\sin\lambda_1\operatorname{tg}\beta_3-\sin\lambda_3\operatorname{tg}\beta_1$$
$$q_x\cos Q_x=\cos\lambda_1\operatorname{tg}\beta_3-\cos\lambda_3\operatorname{tg}\beta_1,$$

so hat man weiter:

$$S_x=\sin(\lambda_3-\lambda_1)$$
$$q_x\sin(Q_x-W)=\sin(\lambda_1-W)\operatorname{tg}\beta_3-\sin(\lambda_3-W)\operatorname{tg}\beta_1$$
$$q_x\sin(Q_x-\lambda_2)+S_x\operatorname{tg}\beta_2=\sin(\lambda_2-\lambda_3)\operatorname{tg}\beta_1-\sin(\lambda_1-\lambda_3)\operatorname{tg}\beta_2+$$
$$+\sin(\lambda_1-\lambda_2)\operatorname{tg}\beta_3$$

und damit die mittlere Gleichung von Fabritius' System 2)

$$[\sin(\lambda_2-\lambda_3)\operatorname{tg}\beta_1-\sin(\lambda_1-\lambda_3)\operatorname{tg}\beta_2+\sin(\lambda_1-\lambda_2)\operatorname{tg}\beta_3]\varrho_2'=$$
$$=\frac{n_1}{n_2}R_1[\sin(\lambda_3-L_1)\operatorname{tg}\beta_1-\sin(\lambda_1-L_1)\operatorname{tg}\beta_3]-$$
$$-R_2[\sin(\lambda_3-L_2)\operatorname{tg}\beta_1-\sin(\lambda_1-L_2)\operatorname{tg}\beta_3)+$$
$$+\frac{n_3}{n_2}R_3[\sin(\lambda_3-L_3)\operatorname{tg}\beta_1-\sin(\lambda_1-L_3)\operatorname{tg}\beta_3].$$

Den Coëfficienten von ϱ_2', die Determinante des Gleichungssystems 1), wollen wir Kürze halber mit D bezeichnen; es ist also:

$$D=\sin(\lambda_2-\lambda_3)\operatorname{tg}\beta_1-\sin(\lambda_1-\lambda_3)\operatorname{tg}\beta_2+\sin(\lambda_1-\lambda_2)\operatorname{tg}\beta_3. \quad \ldots 3)$$

Um die eben entwickelten Gleichungen zusammenzuziehen und übersichtlicher zu gestalten, führen wir folgende Hilfsgrössen ein:

$$\left.\begin{aligned}
q_1 \sin Q_1 &= \sin\lambda_2 \operatorname{tg}\beta_3 - \sin\lambda_3 \operatorname{tg}\beta_2 \\
q_1 \cos Q_1 &= \cos\lambda_2 \operatorname{tg}\beta_3 - \cos\lambda_3 \operatorname{tg}\beta_2 \\
q_2 \sin Q_2 &= \sin\lambda_1 \operatorname{tg}\beta_3 - \sin\lambda_3 \operatorname{tg}\beta_1 \\
q_2 \cos Q_2 &= \cos\lambda_1 \operatorname{tg}\beta_3 - \cos\lambda_3 \operatorname{tg}\beta_1 \\
q_3 \sin Q_3 &= \sin\lambda_1 \operatorname{tg}\beta_2 - \sin\lambda_2 \operatorname{tg}\beta_1 \\
q_3 \cos Q_3 &= \cos\lambda_1 \operatorname{tg}\beta_2 - \cos\lambda_2 \operatorname{tg}\beta_1
\end{aligned}\right\} \quad \ldots 4$$

$$-2D = q_1 \sin(Q_1-\lambda_1) - q_2 \sin(Q_2-\lambda_2) + q_3 \sin(Q_3-\lambda_3),$$

denen man als Probe beifügen kann:

$$2\sin(\lambda_1-\lambda_3)\operatorname{tg}\beta_2 = q_1\sin(Q_1-\lambda_1) + q_2\sin(Q_2-\lambda_2) + q_3\sin(Q_3-\lambda_3). \quad \ldots 4^*)$$

Die Gleichungen lauten jetzt:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{n_1}{n_2}\varrho_1' &= \frac{q_1\sin(Q_1-L_3)}{q_2\sin(Q_2-L_3)}\varrho_2' + \\
&\quad + \frac{\operatorname{tg}\beta_3}{q_2\sin(Q_2-L_3)}\left[R_2\sin(L_3-L_2) - \frac{n_1}{n_2}R_1\sin(L_3-L_1)\right] \\
\frac{n_3}{n_2}\varrho_3' &= \frac{q_3\sin(Q_3-L_1)}{q_2\sin(Q_2-L_1)}\varrho_2' + \\
&\quad + \frac{\operatorname{tg}\beta_1}{q_2\sin(Q_2-L_1)}\left[R_2\sin(L_2-L_1) - \frac{n_3}{n_2}R_3\sin(L_3-L_1)\right] \\
\varrho_2' &= -\frac{q_2}{D}\left[\frac{n_1}{n_2}R_1\sin(Q_2-L_1) - R_2\sin(Q_2-L_2) + \frac{n_3}{n_2}R_3\sin(Q_2-L_3)\right]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots 5$$

Die letzte Gleichung kann in eine etwas einfachere Form gebracht werden, welche noch dazu den Vortheil darbietet, dass sie die Rechnung sicherer macht. Lässt man nämlich $N_1N_2N_3$ dieselben Symbole für die Erde bedeuten, wie n_1, n_2, n_3 für das Gestirn, nämlich die Dreiecksflächen zwischen dem zweiten und dritten, dem ersten und dritten und dem ersten und zweiten Radius vector, so ist bekanntlich allgemein:

$$N_1R_1\sin(L_1-\Pi) - N_2R_2\sin(L_2-\Pi) + N_3R_3\sin(L_3-\Pi) = 0. \quad \ldots 6)$$

Setzt man hierin den willkürlichen Winkel $\Pi = Q_2$ und eliminirt man sodann mit Hilfe dieser Gleichung $R_2 \sin(Q_2 - L_2)$ aus der früheren, so findet sich:

$$\rho_2' = \frac{q_2}{D}\left[\left(\frac{n_1}{n_2} - \frac{N_1}{N_2}\right) R_1 \sin(L_1 - Q_2) + \left(\frac{n_3}{n_2} - \frac{N_3}{N_2}\right) R_3 \sin(L_3 - Q_2)\right]. \quad \ldots 7)$$

Da $\frac{n_1}{n_2}$ und $\frac{N_1}{N_2}$ bei kleinen Zwischenzeiten von $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ und $\frac{n_3}{n_2}$, sowie $\frac{N_3}{N_2}$ von $\frac{\theta_3}{\theta_2}$ nur um Grössen zweiter Ordnung von der Einheit abweichen, heben sich in den Differenzen rechter Hand die endlichen Glieder vollständig auf, wenn man jeden der obigen Ausdrücke auf die Form $1+\varepsilon$ bringt und es bleiben nur die Glieder zweiter und höherer Ordnung zurück.[1]

Den Gleichungen 5) und 7) sind zur Vervollständigung noch die Relationen hinzuzufügen zwischen den geocentrischen und heliocentrischen Distanzen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= \rho_1'^2 \sec^2\beta_1 - 2R_1\rho_1' \cos(\lambda_1 - L_1) + R_1^2 \\ r_2^2 &= \rho_2'^2 \sec^2\beta_2 - 2R_2\rho_2' \cos(\lambda_2 - L_2) + R_2^2 \\ r_3^2 &= \rho_3'^2 \sec^2\beta_3 - 2R_3\rho_3' \cos(\lambda_3 - L_3) + R_3^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots 8)$$

Fabritius' Vorschlag geht nun dahin, aus der Gleichung 7) und der mittleren von 8) sich zunächst einen Näherungswerth von r_2 und ρ_2' abzuleiten, dann aus den Gleichungen 5) in Verbindung mit denen 8) ρ_1', ρ_3', r_1 und r_3 zu berechnen, hierauf mit Hilfe der so gewonnenen Werthe aus 7) und 8) neue verbesserte

---

[1] Setzt man für das Verhältniss der Dreiecksflächen den Ausdruck ein, den Gibbs in seiner weiter unten citirten Abhandlung dafür angegeben hat, so wird:

$$\frac{D\cdot\rho_2'}{q_2} = \frac{\theta_1(\mu_1 r_1^{-3} + \mu_2 r_2^{-3}) R_1 \sin(L_1 - Q_2) + \theta_3(\mu_3 r_3^{-3} + \mu_2 r_2^{-3}) R_3 \sin(L_3 - Q_2)}{\theta_2(1 - \mu_2 r_2^{-3})}$$

$$- \frac{\theta_1(\mu_1 R_1^{-3} + \mu_2 R_2^{-3}) R_1 \sin(L_1 - Q_2) + \theta_3(\mu_3 R_3^{-3} + \mu_2 R_2^{-3}) R_3 \sin(L_3 - Q_2)}{\theta_2(1 - \mu_2 R_2^{-3})}$$

und es lautet ein Näherungswerth X für die erste Zeile rechter Hand, von dem man mit Vortheil ausgehen kann:

$$X = \frac{1}{6} \cdot \frac{\theta_1\theta_3[(\theta_1 + \theta_2) R_1 \sin(L_1 - Q_2) + (\theta_2 + \theta_3) R_3 \sin(L_3 - Q_2)]}{\theta_2 r_2^3}.$$

Werthe von r_2 und ρ_2' sich zu bilden u. s. w., bis die Gleichungen 5), 7) und 8) vollständig befriedigt sind.

Die Determinante D (Gleichung 3) des Systemes 1) verschwindet, wie ihr Bau zeigt, wenn die drei Orte des Himmelskörpers in einem grössten Kreise liegen. Bei kurzen Zwischenzeiten ist dies jedoch, wenn die Bewegung des Gestirnes nicht zufälligerweise sehr unregelmässig war, stets sehr nahe der Fall. Dies macht die Bestimmung von ρ_2' unsicher, und desshalb die Berechnung von ρ_1' und ρ_3' aus demselben misslich; ja sie wird sogar illusorisch, falls L_1 und L_3 sehr nahe gleich Q_2 werden, d. h. so oft die Bewegung des Gestirnes auf den Sonnenort hinzielt, oder der sogenannte Ausnahmefall eintritt, da, wie ein Blick auf die Gleichungen 4) erkennen lässt, Q_2 die Länge des Knotens des grössten Kreises durch den ersten und dritten Ort des Himmelskörpers vorstellt.

Die soeben hervorgehobenen Mängel sind indess nicht bloss der Methode von Fabritius eigenthümlich: sie haften allen Methoden an, sobald es sich um die Bestimmung einer Bahn aus einem kurzen Bogen ohne irgend eine Voraussetzung über ihre Excentricität handelt. Nimmt man aber für die letztere schon von vorneherein einen bestimmten Werth an, wie bei ersten Bahnbestimmungen von Kometen den Werth Eins, dann kann man durch Weglassen von einer der Grundgleichungen 1) und Ersetzen derselben durch die Euler'sche (Lambert'sche) Gleichung einen grossen Theil der Unsicherheit beheben. Dies ist bei Olbers' schöner Methode der Fall, welche, wie im Folgenden gezeigt werden soll, mit geringfügigen Modificationen leicht so umgestaltet werden kann, dass bei der Ermittlung der Bahn auch die höheren Potenzen der Zeit ohne erheblichen Mehraufwand berücksichtigt werden können.

Eliminirt man ρ_2' aus den beiden letzten Gleichungen des Systems 1), so erhält man nach der Division mit n_3:

$$\begin{aligned}&\frac{n_1}{n_3}\rho_1'[\sin(\lambda_1-\Pi)\operatorname{tg}\beta_2-\sin(\lambda_2-\Pi)\operatorname{tg}\beta_1]+\\&\quad+\rho_3'[\sin(\lambda_3-\Pi)\operatorname{tg}\beta_2-\sin(\lambda_2-\Pi)\operatorname{tg}\beta_3]=\\&\quad=\left[\frac{n_1}{n_2}R_1\sin(L_1-\Pi)-\frac{n_2}{n_3}R_2\sin(L_2-\Pi)+R_3\sin(L_3-\Pi)\right]\operatorname{tg}\beta_2.\end{aligned}$$

Schafft man aus der rechten Seite der Gleichung mittelst der schon früher verwendeten Relation 6) das Glied $R_3 \sin(L_3 - \Pi)$ heraus, so ergibt sich nach weiterer Division mit $\operatorname{tg} \beta_2$:

$$\frac{n_1}{n_3} \rho_1' [\sin(\lambda_1 - \Pi) - \sin(\lambda_2 - \Pi) \operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{ctg} \beta_2] + \\ + \rho_3' [\sin(\lambda_3 - \Pi) - \sin(\lambda_2 - \Pi) \operatorname{tg} \beta_3 \operatorname{ctg} \beta_2] = \\ = \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3}\right) \sin(L_1 - \Pi) - \left(\frac{n_2}{n_3} - \frac{N_2}{N_3}\right) R_2 \sin(L_2 - \Pi).$$

Um der linken Seite dieser Gleichung eine geschmeidigere Form zu geben, führen wir die Hilfsgrössen ein:

$$\left.\begin{aligned} p_1 \sin(P_1 - \lambda_2) &= \sin(\lambda_3 - \lambda_2) \\ p_1 \cos(P_1 - \lambda_2) &= -\operatorname{tg} \beta_3 \operatorname{ctg} \beta_2 + \cos(\lambda_3 - \lambda_2) \\ p_3 \sin(P_3 - \lambda_2) &= \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \\ p_3 \cos(P_3 - \lambda_2) &= +\operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{ctg} \beta_2 - \cos(\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned}\right\} \quad \ldots 9)$$

Sie nimmt dadurch die Gestalt an:

$$p_1 \sin(P_1 - \Pi) \rho_3' - \frac{n_1}{n_3} p_3 \sin(P_3 - \Pi) \rho_1' = \\ = \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3}\right) R_1 \sin(L_1 - \Pi) - \left(\frac{n_2}{n_3} - \frac{N_2}{N_3}\right) R_2 \sin(L_2 - \Pi) \ldots . 10)$$

Sind P_1 und P_3 nicht nahezu gleich L_2, also der sogenannte Ausnahmefall nicht vorhanden, so geht diese Gleichung für $\Pi = L_2$ über in die einfachere:

$$\rho_3' = \frac{n_1}{n_3} \cdot \frac{p_3}{p_1} \cdot \frac{\sin(L_2 - P_3)}{\sin(L_2 - P_1)} \rho_1' + \frac{R_1 \sin(L_2 - L_1)}{p_1 \sin(L_2 - P_1)} \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3}\right),$$

oder für:

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{n_1}{n_3} \cdot \frac{p_3}{p_1} \cdot \frac{\sin(L_2 - P_3)}{\sin(L_2 - P_1)} \\ m &= \frac{R_1 \sin(L_2 - L_1)}{p_1 \sin(L_2 - P_1)} \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots 11)$$

in:

$$\rho_3' = M \rho_1' + m. \quad \ldots 12)$$

Behält man bloss Glieder erster Ordnung bei, so kann man m als eines zweiter vernachlässigen und $\frac{n_1}{n_3}$ durch das Verhältniss der Zwischenzeiten ersetzen. Dies führt auf die Grundgleichung von Olbers' berühmter Methode:

$$\varrho_3' = M\varrho_1', \qquad M = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3} \cdot \frac{p_3}{p_1} \cdot \frac{\sin(L_2 - P_3)}{\sin(L_2 - P_1)} \cdot \qquad \ldots 12^*)$$

Der äusserst durchsichtige Bau, den ich schon vor einigen Jahren bei den Grössen M und m durch Einführen der Hilfsgrössen 9), nämlich der grössten Kreise durch den ersten und zweiten und durch den zweiten und dritten Kometenort erzielt habe,[1] ermöglicht es, auf eine sehr einfache Weise auch die Glieder höherer Dimensionen der Zwischenzeiten zu berücksichtigen, und zwar die bis einschliesslich der vierten Dimension, wenn man von dem schönen Theoreme Gebrauch macht, welches Gibbs vor einiger Zeit durch eine originelle, scharfsinnige Analyse aufgefunden hat.[2] Nach demselben ist, bis auf die eben angegebene Grenze genau:

$$\left.\begin{aligned} \frac{n_1}{n_3} &= \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3} \cdot \frac{1+\mu_1 r_1^{-3}}{1+\mu_3 r_3^{-3}} = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\left[1 + \frac{\mu_1 r_1^{-3} - \mu_3 r_3^{-3}}{1+\mu_3 r_3^{-3}}\right] \\ \frac{n_2}{n_3} &= \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \cdot \frac{1-\mu_2 r_2^{-3}}{1+\mu_3 r_3^{-3}} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\left[1 - \frac{\mu_2 r_2^{-3} + \mu_3 r_3^{-3}}{1+\mu_3 r_3^{-3}}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots 13)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{12}(\vartheta_2\vartheta_3 - \vartheta_1^2) \qquad \mu_1 - \mu_3 = \frac{1}{6}\vartheta_2(\vartheta_3 - \vartheta_1)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{12}(\vartheta_1\vartheta_3 + \vartheta_2^2) \qquad \mu_1 + \mu_3 = \frac{1}{6}\vartheta_1\vartheta_3$$

$$\mu_3 = \frac{1}{12}(\vartheta_1\vartheta_2 - \vartheta_3^2) \qquad \mu_2 + \mu_3 = \frac{1}{6}\vartheta_1(\vartheta_3 + \vartheta_2)$$

$$\mu_2 - \mu_3 = \frac{1}{6}\vartheta_2\vartheta_3.$$

[1] E. Weiss, Über die Bestimmung von M bei Olbers' Methode der Berechnung einer Kometenbahn, mit besonderer Rücksicht auf den Ausnahmefall. Diese Berichte, Bd. 92, Abth. II, S. 1456 ff.

[2] J. W. Gibbs, On the Determination of elliptic Orbits from three complete Observations. Mem. of the Nation. Acad. of Sciences, IV, 2, p. 81 ff.

Bei der Erde kann man, wenn die Zwischenzeiten nicht allzu gross sind, wegen der geringen Excentricität ihrer Bahn in den Zählern der obigen Ausdrücke R_1, R_2 und R_3 unbedenklich durch $\frac{1}{2}(R_1+R_3)$ ersetzen und dann etwas einfacher schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\frac{N_1}{N_3} &= \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\left[1+\frac{4}{3}\cdot\frac{\vartheta_2(\vartheta_3-\vartheta_1)(R_1+R_3)^{-3}}{1+\mu_3 R_3^{-3}}\right]\\ \frac{N_2}{N_3} &= \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\left[1-\frac{4}{3}\cdot\frac{\vartheta_1(\vartheta_3+\vartheta_2)(R_1+R_3)^{-3}}{1+\mu_3 R_3^{-3}}\right].\end{aligned}\right\} \quad \ldots 14)$$

Damit wird:

$$m = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\cdot\frac{R_1\sin(L_2-L_1)}{\sin(L_2-P_1)}\left[\frac{\mu_1 r_1^{-3}-\mu_3 r_3^{-3}}{1+\mu_3 r_3^{-3}} - \frac{4}{3}\cdot\frac{\vartheta_2(\vartheta_3-\vartheta_1)(R_3+R_1)^{-3}}{1+\mu_3 R_3^{-3}}\right] \quad \ldots 15)$$

Beabsichtigt man also, die Rechnung bis auf Grössen vierter Dimension der Zwischenzeiten zu treiben, so hat man ausgehend von

$$M_0 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\cdot\frac{p_3}{p_1}\cdot\frac{\sin(L_2-P_3)}{\sin(L_2-P_1)} \quad \ldots 16)$$

die Rechnung bis auf r_1 und r_3 fortzuführen und sich dann zu bilden ein verbessertes M:

$$\left.\begin{aligned}M &= M_0(1+\xi)\\ \xi &= \frac{\mu_1 r_1^{-3}-\mu_3 r_3^{-3}}{1+\mu_3 r_3^{-3}} + \frac{1}{p_1'}\cdot\frac{R_1\sin(L_2-L_1)}{p_3\sin(L_2-P_3)}\cdot\\ &\quad\cdot\left[\frac{\mu_1 r_1^{-3}-\mu_3 r_3^{-3}}{1+\mu_3 r_3^{-3}} - \frac{4}{3}\,\frac{\vartheta_2(\vartheta_3-\vartheta_1)(R_3+R_1)^{-3}}{1+\mu_3 R_3^{-3}}\right].\end{aligned}\right\} \quad \ldots 17)$$

Sind die Zwischenzeiten zwischen der ersten und zweiten und zwischen der zweiten und dritten Beobachtung nahe gleich, was man bekanntlich stets anstrebt, und kann man demgemäss $\vartheta_3-\vartheta_1$ als eine Grösse zweiter Ordnung betrachten, so ist es vortheilhafter, statt r_1 und r_3 zu substituiren $\frac{r_3+r_1}{2}-\frac{r_3-r_1}{2}$ und $\frac{r_3+r_1}{2}+\frac{r_3-r_1}{2}$ und nach Potenzen von r_3-r_1 zu entwickeln.

Man kann dann weiters im Nenner ohne Beeinträchtigung der Genauigkeit $\mu_3 r_3^{-3}$ vernachlässigen, wodurch die Berechnung von μ_1 und μ_3 entfällt, und erhält:

$$\frac{\mu_1 r_1^{-3} - \mu_3 r_3^{-3}}{1+\mu_3 r_3^{-3}} = \frac{4}{3}\frac{\vartheta_2(\vartheta_3-\vartheta_1)}{(r_3+r_1)^3} + 4\vartheta_1\vartheta_3\frac{r_3-r_1}{(r_3+r_1)^4}$$

$$\xi = \frac{4}{3}\cdot\frac{\vartheta_2(\vartheta_3-\vartheta_1)}{(r_3+r_1)^3} + 4\vartheta_1\vartheta_3\frac{r_3-r_1}{(r_3+r_1)^4} + \frac{1}{\rho_1'}\frac{R_1\sin(L_2-L_1)}{p_3\sin(L_2-P_3)}\cdot \quad \ldots 17^*)$$

$$\cdot\left[\frac{4}{3}\vartheta_2(\vartheta_3-\vartheta_1)\left\{\frac{1}{(r_1+r_1)^3}-\frac{1}{(R_3+R_1)^3}\right\}+4\vartheta_1\vartheta_3\frac{r_3-r_1}{(r_3+r_1)^4}\right].$$

Nach dem Eingangs Gesagten glaube ich aber nicht, dass bei ersten Bahnbestimmungen das Einbeziehen der Glieder höherer Ordnung, trotzdem es, wie man sieht, sehr wenig Mühe verursacht, häufiger wird angewendet werden. Hingegen wird es sich empfehlen, bei späteren Bahnverbesserungen oder bei definitiven Bahnbestimmungen, um sich für die Vergleichung der Beobachtungen zunächst ein möglichst gutes Elementensystem abzuleiten, gleich von dem eben entwickelten Werthe von M auszugehen.

Bei kurzen Zwischenzeiten wird durch das Einbeziehen der Glieder höherer Ordnung M sich im Allgemeinen so wenig ändern, dass es in der Regel nicht nöthig sein wird, die Rechnung mit dem neuen Werthe von M zu wiederholen: man wird Differentialformeln anwenden können. Hierbei kommen folgende Gleichungen in Betracht:

$$r_1^2 = \rho_1'^2\sec^2\beta_1 - 2R_1\rho_1'\cos(\lambda_1-L_1)+R_1^2$$
$$r_3^2 = M^2\rho_1'^2\sec^2\beta_3 - 2MR_3\rho_1'\cos(\lambda_3-L_3)+R_3^2$$
$$s^2 = h^2\rho_1'^2+2\rho_1' g\,[\cos(G-\lambda_1)-M\cos(G-\lambda_3)]+g^2$$
$$h^2 = M^2\sec^2\beta_3 - 2M[\operatorname{tg}\beta_1\operatorname{tg}\beta_3+\cos(\lambda_3-\lambda_1)]+\sec^2\beta_1$$
$$6\vartheta_2 = (r_1+r_3+s)^{\frac{3}{2}}-(r_1+r_3-s)^{\frac{3}{2}}.$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Grössen g, G und h, sowie die anderen, zur Erleichterung der Berechnung nach Olbers' Methode gewöhnlich eingeführten Hilfsgrössen werde ich, um Wiederholungen zu vermeiden, erst später, bei der Zu-

sammenstellung der Formeln anführen, und bemerke daher hier nur, dass g und G weder M noch auch ρ'_1 enthalten.

Die Differentiation nach M und ρ'_1 liefert nach einigen einfachen Reductionen:

$$dr_1 = \sin\vartheta_1 \sec\beta_1 d\rho'_1$$
$$dr_3 = \sin\vartheta_3 \sec\beta_3 (Md\rho'_1 + \rho'_1 dM)$$
$$ds = h\cos\gamma d\rho'_1 + \frac{\rho'_1}{s}[\rho'_1(h\sin\zeta.\operatorname{tg}\beta_3 + h\cos\zeta\cos(H-\lambda_3)) - g\cos(G-\lambda_3)]dM.$$

Substituirt man diese Werthe in die Relation:

$$(dr_1+dr_3+ds)\sqrt{r_1+r_3+s} - (dr_1+dr_3-ds)\sqrt{r_1+r_3-s} = 0$$

und führt man überdies, was im Allgemeinen etwas bequemer ist, ein

$$\frac{d(\log\rho'_1)}{d\log M} = \frac{M}{\rho'_1}\cdot\left(\frac{d\rho'_1}{dM}\right),$$

so erhält man schliesslich:

$$\frac{d(\log\rho'_1)}{d(\log M)} = -\frac{M}{s}\cdot$$

$$\frac{s\sin\vartheta_3\sec\beta_3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \rho'_1[h\sin\zeta.\operatorname{tg}\beta_3 + h\cos\zeta\cos(H-\lambda_3)] - g\cos(G-\lambda_3)}{h\cos\gamma + (\sin\vartheta_1\sec\beta_1 + M\sin\vartheta_3\sec\beta_3)\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$$

$$\sin x = \frac{s}{r_1+r_3}\cdot \qquad \ldots 18)$$

Die Berechnung dieses Coëfficienten gestaltet sich viel einfacher als es auf den ersten Anblick den Anschein hat, weil die meisten der darin vorkommenden Grössen, so auch namentlich $h\sin\zeta$ und $h\cos\zeta\cos(H-\lambda_3)$ bereits in den vorhergehenden Rechnungen vorkommen.

Zur Ermittlung einer Kometenbahn nach diesen Vorschriften hat man, vollständig zusammengestellt, folgende Formeln durchzurechnen.

I.

$$\vartheta_1 = k(t_3 - t_2) \qquad \mu_1 = \frac{1}{12}(\vartheta_2\vartheta_3 - \vartheta_1^2)$$

$$\vartheta_2 = k(t_3 - t_1) \qquad \mu_2 = \frac{1}{12}(\vartheta_1\vartheta_3 + \vartheta_2^2)$$

$$\vartheta_3 = k(t_2 - t_1) \qquad \mu_3 = \frac{1}{12}(\vartheta_1\vartheta_2 - \vartheta_3^2)$$

$$\log k = 8{\cdot}2355814.$$

II.

$$p_1 \sin(P_1 - \lambda_2) = \sin(\lambda_3 - \lambda_2)$$
$$p_1 \cos(P_1 - \lambda_2) = -\operatorname{tg}\beta_3 \operatorname{ctg}\beta_2 + \cos(\lambda_3 - \lambda_2)$$
$$p_3 \sin(P_3 - \lambda_2) = \sin(\lambda_2 - \lambda_1)$$
$$p_3 \cos(P_3 - \lambda_2) = +\operatorname{tg}\beta_1 \operatorname{ctg}\beta_2 - \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$
$$M = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3} \cdot \frac{p_3}{p_1} \cdot \frac{\sin(L_2 - P_3)}{\sin(L_2 - P_1)}.$$

III.

$$g \sin(G - L_1) = R_3 \sin(L_3 - L_1)$$
$$g \cos(G - L_1) = -R_1 + R_3 \cos(L_3 - L_1)$$

$$\cos\psi_1 = \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1) \qquad B_1 = R_1 \sin\psi_1$$
$$\cos\psi_3 = \cos\beta_3 \cos(\lambda_3 - L_3) \qquad B_3 = R_3 \sin\psi_3.$$

IV.

$$h \cos\zeta \cos(H - \lambda_3) = M - \cos(\lambda_3 - \lambda_1)$$
$$h \cos\zeta \sin(H - \lambda_3) = \sin(\lambda_3 - \lambda_1)$$
$$h \sin\zeta = M \operatorname{tg}\beta_3 - \operatorname{tg}\beta_1.$$

V.

$$\cos\varphi = \cos\zeta \cos(G - H) \qquad A = g \sin\varphi$$
$$f_1 = h \cos\beta_1 \qquad c_1 = g \cos\varphi - f_1 R_1 \cos\psi_1$$
$$f_3 = \frac{h \cos\beta_3}{M} \qquad c_3 = g \cos\varphi - f_3 R_3 \cos\psi_3$$

VI.

$$\eta = -\frac{2\theta_2}{(r_1 + r_3)^{\frac{3}{2}}} \qquad s = \frac{2\theta_2 \mu}{\sqrt{r_1 + r_3}}$$

$$\sin\gamma = \frac{A}{s} \qquad u = s\cos\gamma$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{u + c_1}{f_1 B_1} \qquad r_1 = B_1 \sec\vartheta_1$$

$$\operatorname{tg}\vartheta_3 = \frac{u + c_3}{f_3 B_3} \qquad r_3 = B_3 \sec\vartheta_3$$

$$\varrho_1' = \frac{u + g\cos\varphi}{h}$$

$$\varrho_3' = M\varrho_1'.$$

μ ist mit dem Argumente η aus Encke's Tafel zur Erleichterung der Berechnung der Euler'schen (Lambert'schen) Gleichung zu entnehmen.

VII.

Berücksichtigung der Glieder höherer Ordnung.

$$\sin\varkappa = \frac{s}{r_3 + r_1}$$

$$\frac{d(\log\varrho_1')}{d(\log M)} = +\frac{M}{s}\,.$$

$$\frac{g\cos(G-\lambda_3) - \varrho_1'[h\sin\zeta\,.\operatorname{tg}\beta_3 + h\cos\zeta\cos(H-\lambda_3)] - s\sin\vartheta_3\sec\beta_3\operatorname{tg}\frac{\varkappa}{2}}{h\cos\gamma + (\sin\vartheta_1\sec\beta_1 + M\sin\vartheta_3\sec\beta_3)\operatorname{tg}\frac{\varkappa}{2}}$$

$$\xi = \frac{\mu_1 r_1^{-3} - \mu_3 r_3^{-3}}{1 + \mu_3 r_3^{-3}} +$$

$$+ \frac{1}{\varrho_1'}\cdot\frac{R_1\sin(L_2 - L_1)}{p_3\sin(L_2 - P_3)}\left[\frac{\mu_1 r_1^{-3} - \mu_3 r_3^{-3}}{1 + \mu_3 r_3^{-3}} - \frac{\mu_1 R_1^{-3} - \mu_3 R_3^{-3}}{1 + \mu_3 R_3^{-3}}\right].$$

Hier ist ξ bis Grössen vierter Ordnung einschliesslich streng genau. Begnügt man sich mit einer Genauigkeit bis auf Grössen dritter Ordnung oder ist ϑ_3 nahe gleich ϑ_1, so hat man einfacher:

$$\xi = \frac{4}{3} \cdot \frac{\vartheta_2(\vartheta_3-\vartheta_1)}{(r_3+r_1)^3} + 4\vartheta_1\vartheta_3 \frac{r_3-r_1}{(r_3+r_1)^3} + \frac{1}{\rho_1'} \cdot \frac{R_1 \sin(L_2-L_1)}{p_3 \sin(L_2-P_3)} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{4}{3} \vartheta_2(\vartheta_3-\vartheta_1) \left\{ \frac{1}{(r_3+r_1)^3} - \frac{1}{(R_3+R_1)^3} \right\} + 4\vartheta_1\vartheta_3 \frac{r_3-r_1}{(r_3+r_1)^3} \right]$$

$$d(\log M) = \log(1+\xi).$$

Zieht man es vor, statt die Differentialformeln zu benützen, mit dem verbesserten M die Rechnung von neuem durchzuführen, so bleiben dabei die Gleichungssysteme I bis III unverändert. Die weiteren Formeln, mittelst denen aus ρ_1' und ρ_3' die Elemente berechnet werden, sind zu bekannt, um noch hergesetzt zu werden.

Auch beim Ausnahmefall stösst das Mitnehmen höherer Potenzen der Zwischenzeiten auf keinerlei Schwierigkeiten, wenn man die Grundgleichung des Kometenproblems in der Form 10), die ich ihr gegeben habe, verwendet. Wie ich nämlich in meiner schon einmal angezogenen Abhandlung „Über die Bestimmung von M bei Olbers' Methode der Berechnung einer Kometenbahn" gezeigt habe, ist es beim Eintreten des Ausnahmefalles am zweckmässigsten, dem willkürlichen Winkel II den Werth zu ertheilen:

$$\Pi = \frac{1}{2}(P_1+P_3) \pm 90°.$$

Es resultirt dann nach 10) für:

$$M = \frac{n_1}{n_3} \cdot \frac{p_1}{p_3}$$

$$m = \left(\frac{n_1}{n_3} - \frac{N_1}{N_3}\right) \frac{R_1 \cos\left[L_1 - \frac{1}{2}(P_1+P_3)\right]}{p_1 \cos\frac{1}{2}(P_3-P_1)} -$$

$$- \left(\frac{n_2}{n_3} - \frac{N_2}{N_3}\right) \frac{R_2 \cos\left[L_2 - \frac{1}{2}(P_1+P_3)\right]}{p_1 \cos\frac{1}{2}(P_3-P_1)}$$

$$\rho_3' = M\rho_1' + m.$$

Wollte man hier wieder bis auf Grössen vierter Ordnung gehen, so würde die Berechnung von m bereits zu weitläufig, um eine allgemeine Anwendung finden zu können. Da überdies die

Endformeln mit Berücksichtigung des oben Gesagten sich fast unmittelbar hinschreiben lassen, enthalte ich mich, sie herzusetzen. Hingegen ist das Mitnehmen der Glieder dritter Ordnung unter der Voraussetzung, dass man $r_3 - r_1$ als eine Grösse erster Ordnung anzusehen berechtigt ist, noch nicht mit besonderen Weitläufigkeiten verbunden. Es ist dann nämlich einfacher:

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{\theta_1}{\theta_3}\left[1+\mu_1 r_1^{-3} - \mu_3 r_3^{-3}\right] =$$

$$= \left[1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{\theta_2(\theta_3-\theta_1)}{(r_3+r_1)^3} + 4\,\theta_1\theta_3\,\frac{r_3-r_1}{(r_3+r_1)^4}\cdots\right]$$

$$\frac{n_2}{n_3} = \frac{\theta_2}{\theta_3}\left[1-\mu_2 r_2^{-3} - \mu_3 r_3^{-3}\right] =$$

$$= \frac{\theta_2}{\theta_3}\left[1 - \frac{4}{3}\cdot\frac{\theta_1(\theta_3+\theta_2)}{(r_3+r_1)^3} + 4\,\frac{\theta_1\theta_3^2}{\theta_2}\cdot\frac{r_3-r_1}{(r_3+r_1)^4}\cdots\right],$$

wie man leicht findet, wenn

$$r_1 = \frac{r_3+r_1}{2} - \frac{r_3-r_1}{2}$$

$$r_2 = \frac{\theta_1 r_1 + \theta_3 r_3}{\theta_2} = \frac{r_3+r_1}{2} + \frac{\theta_3-\theta_1}{\theta_2}\cdot\frac{r_3-r_1}{2}$$

$$r_3 = \frac{r_3+r_1}{2} + \frac{r_3-r_1}{2}$$

einführt und die einfachen dabei sich ergebenden Reductionen vornimmt.

Man kann jetzt ferner in $\frac{N_1}{N_3}$ und $\frac{N_2}{N_3}$ das $R_3 - R_1$ enthaltende Glied unbedenklich fortlassen, $\frac{1}{2}(R_1+R_3)$ statt R_1 und R_2 annehmen und überdies schreiben:

$$\cos\left[L_1 - \frac{1}{2}(P_1+P_3)\right] = \cos\frac{1}{2}(L_1+L_2-P_1-P_3) +$$

$$+\sin\frac{1}{2}(L_1+L_3-P_1-P_3)\sin\frac{1}{2}(L_2-L_1)$$

$$\cos\left[L_2 - \frac{1}{2}(P_1+P_3) = \cos\frac{1}{2}(L_1+L_2-P_1-P_3) -\right.$$

$$-\sin\frac{1}{2}(L_1+L_2-P_1-P_3)\sin\frac{1}{2}(L_2-L_1).$$

Nach allen diesen Abkürzungen resultirt für m:

$$m = \frac{2\vartheta_1\vartheta_2(R_3+R_1)}{p_1 \cos\frac{1}{2}(P_3-P_1)}\left[K\left\{\cos W - \frac{1}{3}\cdot\frac{\vartheta_1+\vartheta_2}{\vartheta_3}\sin W \sin\frac{1}{2}(L_2-L_1)\right\} + \frac{\vartheta_1-\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{r_3-r_1}{(r_3+r_1)^3}\cos W\right] \quad \ldots 19)$$

$$K = \frac{1}{(r_3+r_1)^3} - \frac{1}{(R_3+R_1)^3}$$

$$W = \frac{1}{2}(L_1+L_2-P_1-P_3).$$

Wie man beim Ausnahmefall sich auf eine einfache Weise einen genäherten Werth von M verschaffen kann, habe ich in meiner bereits mehrfach citirten Abhandlung ausführlich erörtert; ich beschränke mich daher hier darauf, zu erwähnen, dass, wenn man mit w einen Winkel von 10° bezeichnet und setzt:

$$u = \frac{\sin w}{\sin(w+P_1-P_3)}$$

$$M' = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\cdot\frac{p_3}{p_1}\cdot u \qquad \ldots 20)$$

$$M'' = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3}\cdot\frac{p_3}{p_1}\cdot\frac{1}{u}$$

M' oder M'' ein sehr genäherter Werth von M ist, und zwar der grössere oder kleinere davon, je nachdem:

$$\left(\frac{1}{r_2^3}-\frac{1}{R_2^3}\right)\cos(L_2-P_3) \gtrless 0. \qquad \ldots 20^*)$$

Erkennt man nicht sofort aus anderen Überlegungen, ob $r_2 \gtrless R_2$, d. h. ob der Komet näher oder weiter von der Sonne absteht als die Erde, dann hat man die Rechnung sowohl mit M' als auch M'' bis auf r_1 und r_3 fortzuführen.

XXIII. SITZUNG VOM 12. NOVEMBER 1891.

Der Secretär legt eine von Dr. Gustav Jäger in Wien eingesendete Abhandlung vor, betitelt: „Zur Theorie der Dissociation der Gase".

Ferner legt der Secretär zwei versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor, und zwar:

1. Von Dr. Stefan Dolinar, Ober-Ingenieur der Südbahn in Graz, dessen Inhalt angeblich eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Anton Haas gefundene Neuerung auf dem Gebiete der Eisenhüttenkunde betrifft.
2. Von Dr. Th. v. Drogoslav-Truszkowski in Cairo, dessen Inhalt vorläufig nicht angegeben ist.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Czernowitz: „Über Dissociation in verdünnten Tartrat-Lösungen", von S. Sonnenthal.

Herr Custos Franz Heger, Leiter der anthropologisch-ethnographischen Abtheilung am k. k. naturhistorischen Hofmuseum in Wien, berichtet über die Resultate seiner dritten, zum Zwecke archäologischer und ethnographischer Forschungen mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften unternommenen Reise nach dem Kaukasus.

XXIV. SITZUNG VOM 19. NOVEMBER 1891.

Herr G. Czeczetka in Haselünne (Hannover) übersendet eine Mittheilung über die Darstellung reinen Tuberkulin's.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit des Herrn Stefan v. Niementowski, Privatdocent an der k. k. technischen Hochschule in Lemberg: „Über die *a*-Methyl-*o*-phtalsäure".

Selbständige Werke, oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Le Prince Grigori Stourdza, Les Lois Fondamentales de l'Univers. Paris, 1891; 4°.

Eine Methode zur graphischen Darstellung der Richtungsänderungen der erdmagnetischen Kraft

von

J. Liznar.

(Mit 2 Tafeln und 1 Textfigur.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. November 1891.)

Bei der graphischen Darstellung der Änderungen der erdmagnetischen Kraft hat man bisher die einzelnen Elemente getrennt zur Anschauung gebracht, wodurch es schwer war, sich ein richtiges Bild der wirklich eingetretenen Veränderungen zu verschaffen. Im Nachfolgenden soll in aller Kürze eine Methode erläutert werden, nach welcher man die Richtungsänderungen in höchst übersichtlicher Weise darstellen kann.

Eine um ihren Schwerpunkt nach allen Richtungen frei bewegliche Magnetnadel würde Lagen annehmen, welche den uns bekannten Perioden (tägliche, jährliche etc.) der Declination und Inclination entsprechen. Während einer solchen Periode beschreibt die Richtung der erdmagnetischen Kraft eine Kegelfläche. Denkt man sich zu einer bestimmten Richtung (etwa der mittleren) der Kraft eine Ebene senkrecht gelegt, so gäbe die Schnittcurve derselben mit der erwähnten Kegelfläche ein anschauliches Bild der Bewegung. Es wird sich also bei der Darstellung der Richtungsänderungen um die Bestimmung der Schnittpunkte der Kraftrichtung mit der bezeichneten Ebene, die als Zeichnungsfläche gedacht wird, handeln.

In der untenstehenden Figur stelle *obp* die Ebene eines magnetischen Meridians des Punktes *a* vor, in welchem die erdmagnetische Kraft die Richtung *am* hat. Denkt man sich mit dem Radius $ab = r$ eine Kugelfläche beschrieben und an den Punkt *m*

eine Tangentialebene gelegt, so steht diese senkrecht auf am und schneidet die Meridianebene in der Geraden PP_1. Diese Ebene wollen wir als Zeichnungsebene betrachten und die Schnittlinie PP_1 zur Ordinaten-, die zu ihr Senkrechte mX zur Abscissenaxe wählen. Ändert sich die Richtung der erdmagnetischen Kraft so, dass sie nach einer gewissen Zeit die Lage an annimmt, dann hat sich auch die Meridianebene von ihrer früheren Lage um den Winkel $bac = \delta$ gedreht und gleichzeitig die Inclination um den

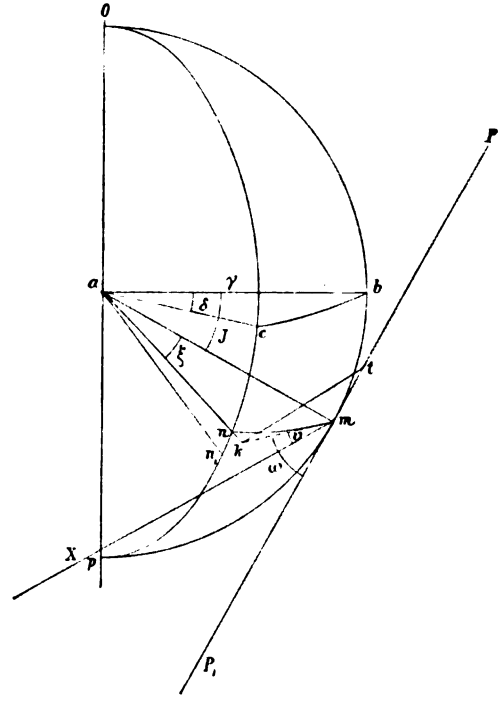


Fig. 1.

Betrag $nn_1 = i$ abgenommen. Denkt man sich ferner durch die beiden Radien am und an eine Ebene gelegt, so schneidet sie die Kugelfläche in einem grössten Kreise, von dem nur das Stück mn gezeichnet erscheint, und die Tangentialebene in einer Geraden km. Der Punkt k ist der Durchschnittspunkt der neuen Kraftrichtung mit der Tangentialebene. Bezeichnen wir den Winkel, welchen die Gerade km mit der Abscissenaxe mX bildet, mit v, so ist

die Abscisse $x = kt = km \cdot \cos v$
die Ordinate $y = mt = km \sin v$ } 1)

Um also die Coordinaten eines Durchschnittspunktes zu finden, hat man die Grösse km und den Winkel v zu bestimmen. Die Gerade km kann aus dem bei m rechtwinkligen Dreiecke akm berechnet werden. Bedeutet ξ den von den beiden Radien am und an eingeschlossenen Winkel, so ist

$$km = am \cdot \operatorname{tang} \xi = r \operatorname{tang} \xi.$$

Die Grösse ξ lässt sich aus dem sphärischen Dreiecke mnp bestimmen, denn es ist:

$$\cos \xi = \cos (np) \cos (mp) + \sin (np) \sin (mp) \cos \delta)$$

oder da:

$$(np) = 90 - (J - i)$$
$$(mp) = 90 - J$$
$$\cos \xi = \sin (J - i) \sin J + \cos (J - i) \cos J \cos \delta \qquad 2)$$

Um den Winkel v zu bestimmen, hat man zu berücksichtigen, dass

$$v = \omega - 90,$$

wenn ω den von den beiden Geraden mP_1 und km eingeschlossenen Winkel vorstellt. Diese beiden Geraden bilden aber die Tangenten zu den Bögen mp und mn, daher schliessen auch die beiden Bögen den Winkel ω ein. Aus dem sphärischen Dreiecke hat man also:

$$\sin (J - i) = \cos \xi \sin J + \sin \xi \cos J \cos \omega,$$

oder

$$\sin (J - i) = \cos \xi \sin J - \sin \xi \cos J \sin v \qquad 3)$$

Durch die im Vorstehenden entwickelten Formeln ist die gestellte Aufgabe ganz allgemein gelöst.[1] Die Berechnung der Coordinaten vereinfacht sich aber ungemein, wenn man annimmt, dass die Änderungen δ und i klein sind, wie dies bei der täglichen und jährlichen Periode thatsächlich der Fall ist. Unter dieser

[1] Dieser Formeln müsste man sich bedienen, wenn es sich um die Darstellung der säcularen Variation handeln würde.

Voraussetzung kann man statt des Sinus der kleinen Winkel δ und i den Bogen selbst setzen, und erhält so aus Gleichung 2)

$$\xi^2 = i^2 + \delta^2 \cos^2 J + \delta^2 i \sin J \cos J - \frac{\delta^2 i^2}{2} \cos^2 J$$

Die beiden letzten Theile auf der rechten Seite dieser Gleichung können ohneweiters gegen die vorhergehenden vernachlässigt werden, so dass

$$\xi = \sqrt{i^2 + \delta^2 \cos^2 J} \qquad 4)$$

Aus Gleichung 3), in welcher auch ξ einen kleinen Werth annimmt, folgt aber

$$\sin v = \frac{i}{\xi} = \frac{i}{\sqrt{i^2 + \delta^2 \cos^2 J}},$$

und daher

$$\cos v = \frac{\delta \cos J}{\sqrt{i^2 + \delta^2 \cos^2 J}}.$$

Nach Einsetzung der für ξ, $\sin v$ und $\cos v$ bestimmten Werthe in die Ausdrücke für x und y wird:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\delta \cos J \\ y &= ri. \end{aligned}\right\} \qquad 5)$$

Wenn also die Änderungen der Declination und Inclination klein sind, so wird die Berechnung der Coordinaten der einzelnen Durchschnittspunkte ungeheuer einfach; die Coordinaten sind dann den Änderungen proportional. Da von dem Radius r nur der Massstab der Zeichnung abhängt, so kann $r = 1$ gesetzt werden, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{aligned} x &= \delta \cos J \\ y &= i \end{aligned}\right\}^{1} \qquad 6)$$

[1] Zu diesen Ausdrücken für die Coordinaten gelangt man übrigens auch durch eine einfachere Betrachtung; ich habe sie absichtlich aus den allgemeinen Gleichungen abgeleitet.

Zur bequemen Berechnung von x könnte eine Tafel entworfen werden, aus der für jeden Werth von δ und J der zugehörige Werth $\delta \cos J$ oder des x zu entnehmen wäre. Bei der Darstellung des täglichen Ganges ist es zweckmässig, die Tangentialebene (Zeichnungsfläche) senkrecht gegen diejenige Kraftrichtung gelegt zu denken, welche dem Tagesmittel entspricht.

Nach dieser kurzen Darlegung der Methode will ich den täglichen Gang der Richtung der erdmagnetischen Kraft für die vier Orte: Jan Mayen, Pawlowsk, Tiflis und Batavia zur Darstellung bringen. Die geographischen Coordinaten dieser Orte sind:

Ort	Breite	Länge von Gr.
Jan Mayen...	70° 59′ N	8° 20′ W
Pawlowsk ...	59 41 N	30 29 E
Tiflis	41 43 N	44 47 E
Batavia	6 11 S	106 50 E

Von den Stationen Pawlowsk, Tiflis und Batavia habe ich die Jahresmittel für 1885 und von Jan Mayen die Mittel für 1882/83, wie man sie in den Publicationen vorfindet, benützt. Diese Daten sind in den nachfolgenden Tabellen unter δ (Declinationsänderung) und i (Inclinationsänderung) zusammengestellt; die Bedeutung der Columne $\delta \cos J$ ist wohl selbstverständlich. Die Coordinaten x und y wurden aus den unter $\delta \cos J$ und i stehenden Daten durch Multiplication mit 2·5 erhalten und bedeuten Centimeter, indem für die Darstellung eine Minute gleich 2·5 *cm* angenommen worden ist.[1] Bei Jan Mayen habe ich die Coordinaten nur für die aus den ruhigen Tagen abgeleiteten δ und i berechnet, da dieselben für die Daten aus allen Beobachtungen in dem angenommenen Massstabe zu gross ausgefallen wären. Die Werthe der Coordinaten sind in der Tafel I zur Darstellung des täglichen Ganges verwendet worden.

---

[1] Dieser Werth entspricht einer Entfernung der Zeichnungsfläche vom Beobachtungspunkte $r = 85 \cdot 9\ m$.

Täglicher Gang der Richtung der erdmagnetischen Kraft.

Jan Mayen 1882/83.

	Aus allen Tagen			Aus den ruhigen Tagen				
	δ	i	$\delta \cos J$	δ	i	$\delta \cos J$	x	y
1h a. m.	— 6'6	4'6	—1'26	—4'2	1'5	—0·80	—2·00	3·75
2	—10·5	5·0	—2·00	—6·4	1·6	—1·22	—3·05	4·00
3	—15·2	5·6	—2·89	—7·8	1·6	—1·48	—3·70	4·00
4	—16·9	5·0	—3·21	—8·4	1·5	—1·60	—4·00	3·75
5	—17·0	4·1	—3·23	—8·1	1·4	—1·54	—3·85	3·50
6	—13·7	2·4	—2·61	—7·0	1·2	—1·33	—3·32	3·00
7	— 9·3	0·7	—1·77	—5·1	0·9	—0·97	—2·42	2·25
8	— 6·8	—0·1	—1·29	—3·2	0·8	—0·61	—1·52	2·00
9	— 3·7	—0·7	—0·70	—0·6	0·8	—0·11	—0·27	2·00
10	— 2·4	—1·2	—0·46	2·1	0·9	0·40	1·00	2·25
11	— 0·5	—2·2	—0·09	4·6	0·8	0·88	2·20	2·00
Mitg.	2·5	—3·4	0·48	6·5	0·4	1·24	3·10	1·00
1h p. m.	3·7	—4·5	0·70	7·3	—0·2	1·39	3·47	—0·50
2	6·4	—5·6	1·22	7·1	—1·2	1·35	3·37	—1·00
3	7·4	—6·3	1·41	5·9	—2·2	1·12	2·80	—3·50
4	8·5	—6·1	1·62	4·3	—2·9	0·82	2·05	—7·25
5	10·6	—5·1	2·02	3·0	—3·2	0·57	1·42	—8·00
6	14·2	—3·1	2·70	2·3	—2·9	0·44	1·10	—7·25
7	15·2	—1·7	2·89	2·2	—2·2	0·42	1·05	—5·50
8	15·8	0·3	3·01	2·6	—1·3	0·49	1 22	—3·25
9	13·2	2·0	2·51	2·6	—0·3	0·49	1·22	—0·75
10	7·4	2·5	1·41	2·0	0·5	0·38	0·95	1·42
11	1·1	3·0	0·21	0·5	1·0	0·10	0·25	2·50
Mttn.	—3·6	4·0	—0·68	—1·8	1·3	—0·34	—0·85	3·25
	29°53'0	79°2'0	—	29°52'1	79°0'5	—	—	—

Täglicher Gang der Richtung der erdmagnetischen Kraft.

Pawlowsk 1885.

	δ	$\delta \cos J$	i	x	y
1ʰ a. m.	−1′49	−0′49	−0′41	−1·22	−1·02
2	−1·34	−0·44	−0·46	−1·10	−1·15
3	−1·72	−0·57	−0·47	−1·42	−1·17
4	−1·90	−0·63	−0·49	−1·57	−1·22
5	−1·94	−0·64	−0·52	−1·60	−1·30
6	−2 06	−0·68	−0·47	−1·70	−1·17
7	−2·15	−0·71	−0·26	−1·77	−0·65
8	−2·33	−0·77	0·12	−1·92	0·30
9	−2·29	−0·76	0·56	−1·90	1·40
10	−1·61	−0·53	0·95	−1·32	2·37
11	0·94	0·31	1·17	0·77	2·92
Mttg.	3·35	1·11	1·07	2·77	2·67
1ʰ p. m.	5·10	1·68	0·93	4·20	2·32
2	5·35	1·77	0·51	4·42	1·27
3	4·50	1·48	0·25	3·70	0·62
4	3·03	1·00	0·01	2·50	0·02
5	1·72	0·57	−0·10	1·42	−0·25
6	0·72	0·24	−0·11	0·60	−0·27
7	−0·33	−0·10	−0·21	−0 25	−0·52
8	−0·57	−0·19	−0·31	−0·47	−0·77
9	−0·98	−0·32	−0·40	−0·80	−1·00
10	−1·35	−0·45	−0·43	−1·12	−1·07
11	−1·72	−0·57	−0·45	−1·42	−1·12
Mttn.	−1·51	−0·50	−0·40	−1·25	−1·00
Mittel	0°32′43	—	7°44′53	—	—

Täglicher Gang der Richtung der erdmagnetischen Kraft.

Tiflis 1885.

	δ	i	$\delta \cos J$	x	y
1h a. m.	—0'77	—0'01	—0·43	—1·07	—0·10
2	—0·70	—0·10	—0·40	—1·00	—0·25
3	—0·61	—0·19	—0·34	—0·85	—0·47
4	—0·61	—0·22	—0·34	—0·85	—0·55
5	—0·83	—0·23	—0·47	—1·17	—0·57
6	—1·29	—0·23	—0·73	—1·82	—0·57
7	—1·88	—0·11	—1·06	—2·65	—0·27
8	—2·48	0·20	—1·40	—3·50	—0·50
9	—2·33	0·31	—1·31	—3·27	0·77
10	—1·02	0·19	—0·58	—1·45	0·47
11	0·95	—0·20	0·54	1·35	—0·50
Mttg.	2·69	—0·61	1·52	3·80	—1·52
1h p. m.	3·50	—0·67	1·98	4·95	—1·67
2	3·30	—0·48	1·86	4·65	—1·20
3	2·38	—0·17	1·34	3·35	—0·42
4	1·48	0·13	0·84	2·10	0·32
5	0·71	0·45	0·40	1·00	1·12
6	0·27	0·56	0·15	0·37	1·40
7	0·06	0·50	0·03	0·07	1·25
8	—0·24	0·35	—0·14	—0·35	0·87
9	—0·43	0·26	—0·24	—0·60	0·65
10	—0·64	0·12	—0·36	—0·90	0·30
11	—0·75	0·06	—0.42	—1·05	0·15
Mttn.	—0·82	0·01	—0·46	—1·15	0·02
Mittel	1°5'48 E	55°36'74	—	—	—

Täglicher Gang der Richtung der erdmagnetischen Kraft.

Batavia 1885.

	δ	i	$\delta \cos J$	x	y
1ʰ a. m.	−0′06	1′11	−0′05	−0·12	2·77
2	0·00	0·93	0·00	0·00	2·32
3	0·01	0·68	0·01	0·02	1·70
4	−0·03	0·54	−0·03	−0·07	1·85
5	−0·06	0·39	−0·05	−0·12	0·97
6	−0·16	0·12	−0·14	−0·35	0·30
7	−0·47	−0·21	−0·41	−1·02	−0·52
8	−1·26	−0·84	−1·11	−2·77	−2·10
9	−1·59	−1·86	−1·40	−3·50	−4·65
10	−1·40	−3·05	−1·23	−3·07	−7·62
11	−0·87	−3·67	−0·77	−1·92	−9·17
Mttg.	−0·11	−3·55	−0·10	−0·25	−8·87
1ʰ p. m.	0·58	−2·67	0·51	1·27	−6·67
2	1·01	−1·48	0·89	2·22	−3·70
3	1·35	−0·33	1·19	2·97	−0·82
4	1·30	0·71	1·15	2·87	1·77
5	1·04	1·35	0·92	2·30	3·37
6	0·53	1·60	0·47	1·17	4·00
7	0·37	1·70	0·33	0·82	4·25
8	0·14	1·76	0·12	0·30	4·40
9	0·01	1·77	0·01	0·02	4·42
10	−0·12	1·77	−0·11	−0·27	4·42
11	−0·14	1·71	−0·12	−0·30	4·27
Mttn.	−0·16	1·41	−0·14	−0·35	3·52
Mittel	1°53′3 E	28°10′3 S	—	—	—

Der Anfangspunkt der Coordinaten, der dem Tagesmittel der Declination und Inclination entspricht, ist mit O, die Abscissenaxe mit XX_1 und die Ordinatenaxe mit YY_1 bezeichnet. Die Abscissen, welche den Verschiebungen des Nordendes der Magnetnadel nach Ost entsprechen, wurden nach rechts, jene vom Mittel nach West auftretenden nach links aufgetragen. Die nach oben eingezeichneten Ordinaten entsprechen den negativen Abweichungen der Inclination. Die durch das Auftragen der zusammengehörigen Werthe der Coordinaten erhaltenen Punkte sind in der Zeichnung stark kenntlich gemacht und einem jeden die zugehörige Stundenzahl beigesetzt.

Ein Blick auf die Tafel genügt, um uns die grosse Verschiedenheit der täglichen Bewegung an den gewählten Stationen zur Anschauung zu bringen.[1] Bei allen Curven sieht man, dass der Weg, welchen die Kraftrichtung am Tage zurücklegt, ein ganz regelmässiger ist; die Nachtstunden zeigen aber mit Ausnahme von Jan Mayen grössere Unregelmässigkeiten. Hätte ich von Jan Mayen die Mittel aus allen Tagen genommen, so würden auch hier Unregelmässigkeiten in der Curve aufgetreten sein. Bei den Stationen Pawlowsk, Tiflis und Batavia ist die Bewegung während der Nacht eine verhältnissmässig sehr langsame, was an dem Zusammendrängen der Stundenpunkte erkannt wird, so dass der während der Nacht beschriebene Theil der Curve nur einen kleinen Bruchtheil derselben bildet. In Jan Mayen ist die Bewegung während der Nachtstunden eine zwar etwas langsamere als am Tage, doch bei weitem nicht von der untergeordneten Bedeutung wie bei den andern drei Orten.

Für die Grösse der täglichen Bewegung gibt der Flächeninhalt der Curven das beste Mass ab, und da alle in demselben Massstabe gezeichnet sind, so sehen wir auf den ersten Blick, wie gewaltig verschieden die Bewegung ist. Gewöhnlich glaubt man, dass die Bewegung der Kraftrichtung in der Nähe des Äquators viel kleiner sei als in höheren Breiten; aus dem Flächeninhalte der Curven für Batavia und Pawlowsk werden wir aber eines Besseren belehrt! Den Flächeninhalt der für Jan Mayen

[1] Die Richtung der Bewegung ist durch die beigezeichneten Pfeile ersichtlich gemacht.

dargestellten Curven kann man mit jenem der anderen Orte nicht vergleichen, da die Curve von Jan Mayen dem Jahre 1882/83 entspricht, während die übrigen die tägliche Bewegung des Jahres 1885 darstellen. Durch die grosse Verschiedenheit der dargestellten Curven wird es gerechtfertigt, warum ich gerade die Daten der angeführten Orte als Beispiele zur Darstellung wählte.

Diese Darstellungsweise hat nicht nur den grossen Vortheil, dass sie uns die wirkliche Bewegung der Kraftrichtung sehr schön veranschaulicht, sondern sie könnte sich auch zur Beantwortung so mancher Fragen sehr dienlich erweisen. Ich will nur ein Beispiel anführen. Um die Abhängigkeit der Grösse der täglichen Bewegung von den Sonnenflecken zu bestimmen, braucht man nur für die einzelnen aufeinanderfolgenden Jahre die Curven darzustellen und ihren Flächeninhalt zu bestimmen (etwa mittelst eines Planimeters); die Flächeninhalte werden die eingetretenen Veränderungen in der Grösse der Bewegung jedenfalls besser zur Anschauung bringen als jede der bisher betrachteten Grössen. Ein Vergleich solcher Curven von Orten verschiedener geographischer Lage dürfte auch einen besseren Überblick über die Abhängigkeit der Richtungsänderungen von der Lage des Ortes geben.

Ich muss leider aus Zeitmangel auf das Verfolgen der einschlägigen Fragen vorläufig verzichten, hoffe aber, dass es vielleicht jemand Anderer unternehmen wird, das oben nur Angedeutete näher zu untersuchen.

Zum Schlusse möchte ich noch in aller Kürze die jährliche Periode berühren, und sie nach der angegebenen Methode darzustellen suchen. Sie kann hier nur ganz schematisch behandelt werden, da ich sonst ein grösseres Material hiezu zusammenstellen müsste, wozu mir momentan die Zeit mangelt; aber auch aus der nur flüchtigen Behandlung wird man die Zweckmässigkeit der Darstellung ersehen können.

Die Darstellung des jährlichen Ganges der Kraftrichtung ist für die wenigsten Orte der Erde möglich, wenn man nicht Linien erhalten will, welche keine Regelmässigkeit und daher auch wenig Übersichtlichkeit zeigen. Während man beim täglichen Gang aus nur einem Jahre eine ganz hübsche Curve erhält, müssen zur

Ableitung des jährlichen Ganges sehr viele Jahre verwendet werden können. Es ist dies leicht begreiflich, wenn man erwägt, dass für die jährliche Periode ein Jahr ebensoviel ist als für die tägliche ein Tag. Sollte also für einen Ort die jährliche Periode mit derselben Genauigkeit abgeleitet werden können wie die tägliche aus den Beobachtungen eines Jahres, so müssten wenigstens 365jährige Beobachtungen zur Verfügung stehen; ein solches Material besitzen wir aber für keinen Ort der Erde, und es wird noch sehr lange dauern, bis ein derartiges Material gesammelt sein wird. Allein auch von diesem Umstande abgesehen, ist die Ableitung des jährlichen Ganges mit grösseren Schwierigkeiten verbunden als jene des täglichen. Während wir bei der Bestimmung des täglichen Ganges an die Variationsapparate nur die Anforderung stellen, dass ihr Normalstand im Laufe eines Tages unverändert bleibe, müssen wir dies beim jährlichen Gange für das ganze Jahr fordern oder wir müssen denselben im Laufe des Jahres sehr oft bestimmen; selbst kleine sich hiebei einschleichende Fehler können das Resultat bedeutend entstellen, da ja die Amplitude der jährlichen Änderung im Verhältniss zu diesen Fehlern nicht gross genug ist.

Aus diesem Grunde habe ich zur Darstellung des jährlichen Ganges die Mittelzahlen benützt, wie ich sie in meinen früheren Abhandlungen[1] für die beiden Hemisphären abgeleitet habe. Es können selbstverständlich selbst diese Mittelwerthe keinen Anspruch auf grosse Genauigkeit erheben. Ich habe es daher auch unterlassen, die Declinationsänderungen mit den zugehörigen Werthen von $\cos J$ zu multipliciren, habe vielmehr einfach die Mittelwerthe der δ mit dem Cosinus eines mittleren J multiplicirt, da es sich zunächst nur um die Darstellung der Bewegung handelt, ohne weitere Rücksicht auf die Grösse derselben. Für die nördliche Hemisphäre beträgt $J = 65° 28'3$, für die südliche $68° 50'5$. In der folgenden Tabelle sind die obgenannten Werthe der δ, i und $\delta \cos J$ für beide Hemisphären zusammengestellt. Die unter x und y befindlichen Zahlenwerthe stellen die Coordinaten vor. Da die Bewegung ziemlich klein ist, wurde

[1] Liznar: „Über den jährlichen Gang der magnetischen Declination." Meteor. Zeitschr., 1888. — „Die tägliche und jährliche Periode der magnetischen Inclination." Diese Berichte, Bd. XCVII, 1888.

eine Minute gleich 7 *cm* angenommen, was einer Entfernung der Zeichnungsfläche $r = 240 \cdot 6\ m$ entspricht.

Auf Tafel II sind die Linien, welche durch Verbindung der den einzelnen Monaten entsprechenden Punkte entstehen, verzeichnet.

Jährliche Richtungsänderung der erdmagnetischen Kraft.

Nördliche Hemisphäre.

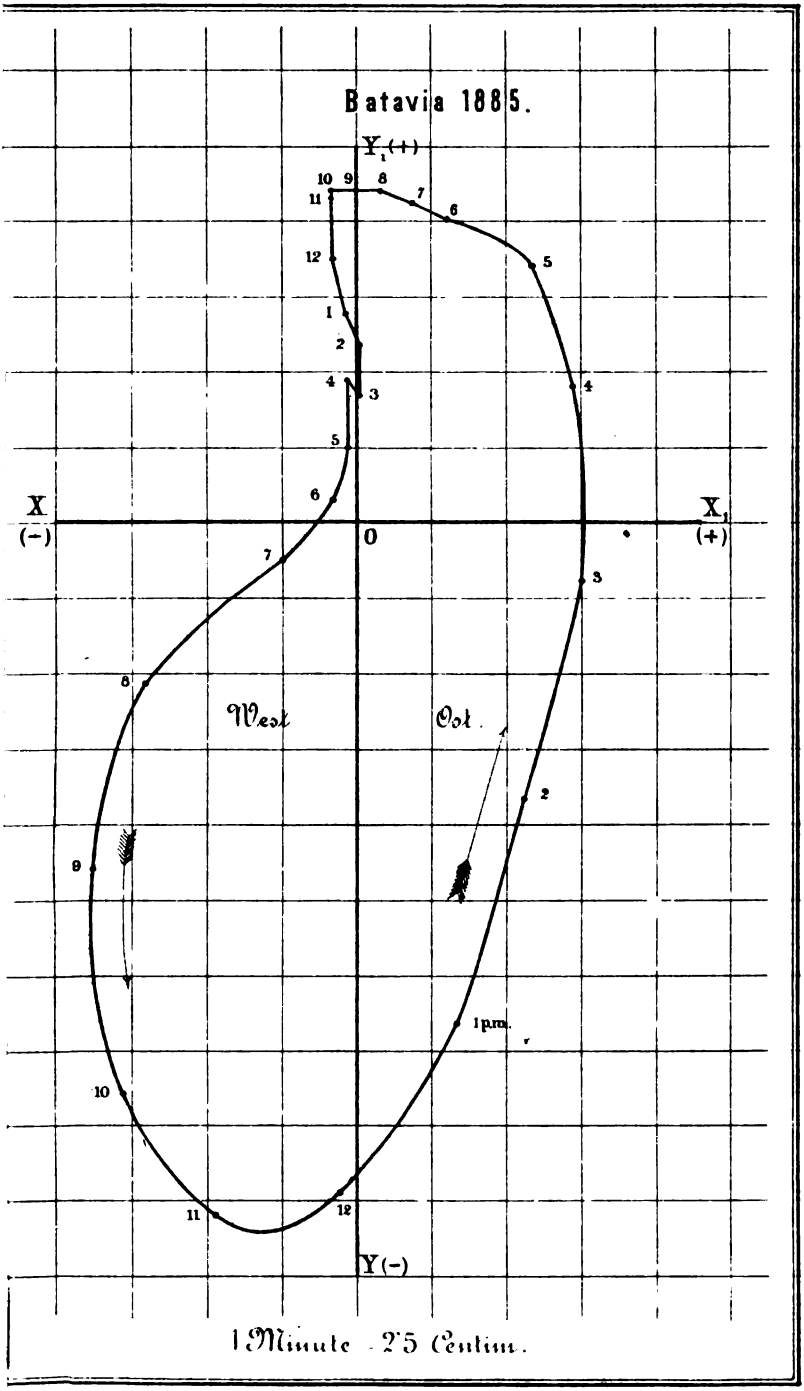
	δ	$\delta \cos J$	i	x	y
Jänner.....	—0'25	—0'10	0'44	—0·70	3·08
Februar....	—0·54	—0·22	0·27	—1·54	1·69
März	—0·27	—0·11	—0·04	—0·77	—0·28
April.....	—0·03	—0·01	—0·31	—0·07	—2·17
Mai.....	0·19	0·08	—0·70	0·56	—4·90
Juni.....	0·46	0·18	—0·92	1·26	—6·44
Juli	0·48	0·20	—0·54	1·40	—3·78
August	0·47	0·20	—0·34	1·40	—2·38
September .	0·31	0·13	0·10	0·97	0·70
October....	—0·07	—0·03	0·64	—0·21	4·68
November..	—0·30	—0·12	0·77	—0·84	5·39
December..	—0·36	—0·15	0·63	—1·05	4·41

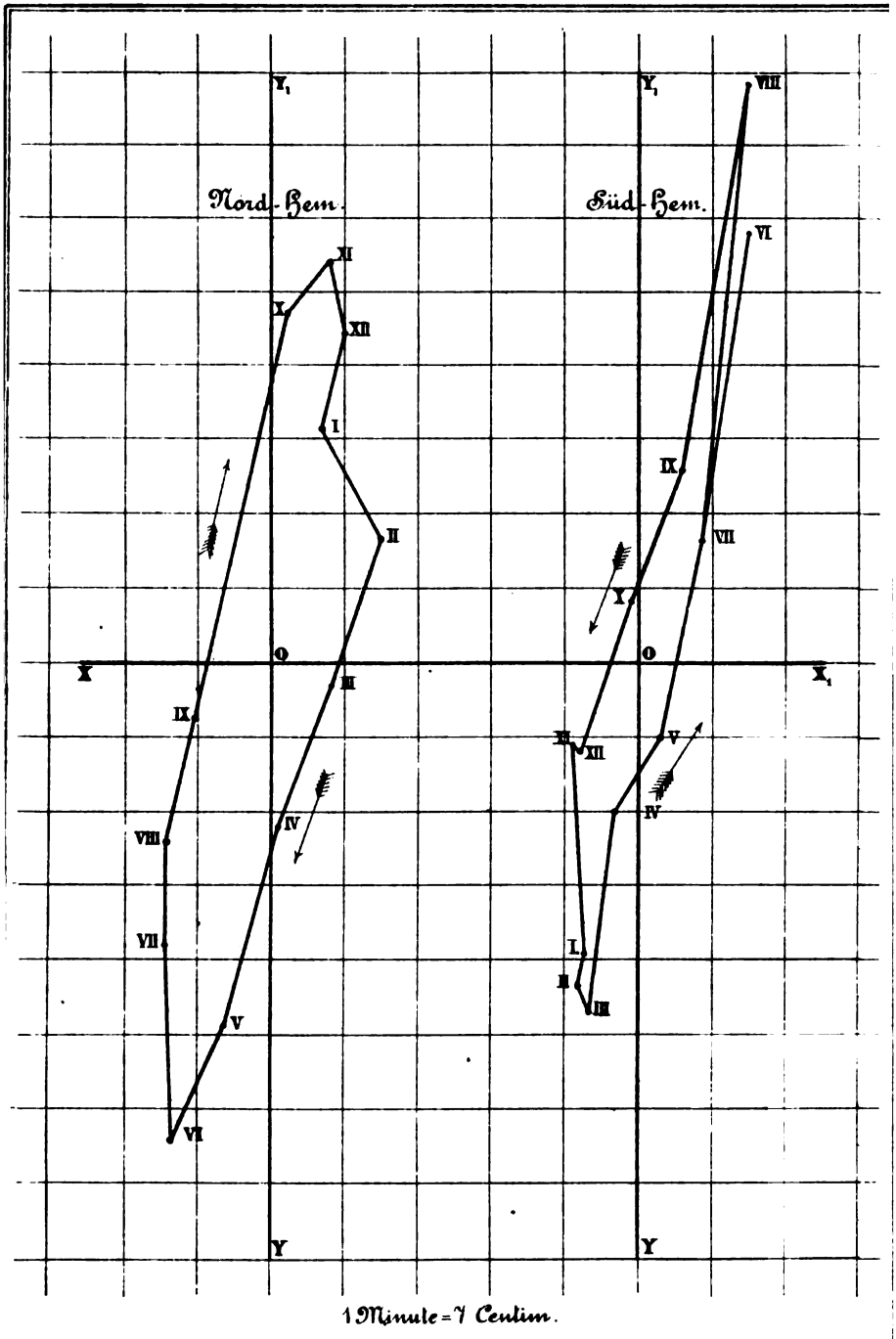
Südliche Hemisphäre.

	δ	$\delta \cos J$	i	x	y
Jänner.....	0'28	0'10	0'56	0·70	3·92
Februar....	0·31	0·11	0·62	0·77	4·34
März	0·27	0·10	0·67	0·70	4·69
April.....	0·10	0·04	0·28	0·28	1·96
Mai.....	—0·10	—0·04	0·13	—0·28	0·97
Juni.....	—0·42	—0·15	—0·84	—1·05	—5·88
Juli	—0·31	—0·11	—0·25	—0·77	—1·75
August	—0·41	—0·15	—1·12	—1·05	—7·84
September..	—0·25	—0·09	—0·37	—0·63	—2·59
October....	0·06	0·02	—0·12	0·14	—0·84
November..	0·30	0·11	0·24	0·77	1·68
December..	0·36	0·13	0·23	0·91	1·61

Die Punkte sind mit römischen Ziffern von I bis XII bezeichnet, welche den aufeinanderfolgenden Monaten Jänner bis December entsprechen. Für die nördliche Hemisphäre, wo das Beobachtungsmaterial ein reichhaltigeres ist, ergibt sich auch eine verhältnissmässig ziemlich regelmässig verlaufende Curve. Die Richtung der Bewegung ist durch die Pfeile ersichtlich gemacht; man sieht, dass die Bewegung des Nordendes der Magnetnadel auf beiden Hemisphären gerade entgegengesetzt ist. Die jährliche Bewegung auf beiden Hemisphären verhält sich also ganz ähnlich wie die tägliche.

Möge diese kurze Darlegung genügen, die Brauchbarkeit und Zweckmässigkeit der beschriebenen Darstellungsweise nachzuweisen und ihr viele Freunde zu erwerben.


Batavia 1885.
Y₁ (+)
X (−)
X₁ (+)
0
Y (−)
West
Ost
1 p.m.
1 Minute = 2·5 Centim.



Lith. Anst. v. J. Barth Fündnaus, Wien

Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen

(Nachtrag)

von

O. Stolz in Innsbruck.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. November 1891.)

In der Sitzung am 16. Mai 1890 legte ich der kaiserl. Akademie eine Abhandlung mit dem nämlichen Titel vor,[1] in welcher ein von L. Scheeffer zum Nachweise der Extreme von Functionen zweier Veränderlichen ersonnenes Verfahren erläutert und verallgemeinert wurde. Nunmehr bin ich in der Lage, ein anderes demselben Zwecke dienliches Verfahren darlegen zu können, welches auf einem von Herrn L. Barbera in Bologna ausgesprochenen Gedanken beruht und vielleicht als einfacher bezeichnet werden darf. Um die beiden Methoden ins richtige Licht zu setzen, erscheint es passend, noch mit einer Bemerkung auf die Scheeffer'sche zurückzukommen. Sie betrifft einen Satz, welcher in meiner soeben erwähnten Arbeit zwar mehrfach angewendet, aber weder ausdrücklich ausgesprochen, noch begründet ist.

1. Betrachten wir zunächst eine Function von zwei unabhängigen Veränderlichen $xy : f(x, y)$, so ist zur Ergänzung des a. a. O. in Nr. 3 Gesagten noch der folgende Satz hervorzuheben:

„Nachstehendes gibt die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu an, dass der Werth $f(0, 0)$ ein Maximum (Minimum)[2] ist. Man bestimme die obere (untere) Grenze der stetigen

[1] Veröffentlicht im 99. Bande dieser Sitzungsberichte, S. 495.

[2] Unter „Maximum" (Minimum) wird hier immer ein „eigentliches" verstanden. So heisst $f(0, 0)$ ein Maximum von $f(x, y)$, wenn eine positive Zahl δ sich so bestimmen lässt, dass für $r < \delta$ stets $f(x, y) - f(00) <$ ist. Vergl. a. a. O., S. 495.

Function $f(x, y)$ unter der Voraussetzung, dass x^2+y^2 gleich einer Constanten $r^2 (r>0)$ sei. Sie werde durch die Werthe $x=\varphi_2(r)$, $y=\psi_2(r)$ {beziehungsweise $x=\varphi_1(r)$, $y=\psi_1(r)$} erreicht, so dass diese obere und untere Grenze beziehungsweise durch

$$f(\varphi_2(r), \psi_2(r)) = f_2(r) \qquad f(\varphi_1(r), \psi_1(r)) = f_1(r)$$

dargestellt werden. Dann hat selbstverständlich jede der vier Functionen $\varphi_1(r)$, $\psi_1(r)$, $\varphi_2(r)$, $\psi_2(r)$ für $\lim r = +0$ den Grenzwerth 0. Gibt es nun eine positive Zahl δ von der Beschaffenheit, dass wenn nur die positive Zahl r kleiner als δ ist,

$$f_2(r) - f(0, 0) < 0 \qquad (f_1(r) - f(0, 0) > 0)$$

ausfällt, so ist der Werth $f(0, 0)$ ein Maximum (Minimum) der Function $f(x, y)$ an der Stelle $x=0$, $y=0$."

Dass unter der Voraussetzung, dass $f(x, y)$ in einem den Punkt $x=0$, $y=0$ umschliessenden Gebiete stetig ist, die obere Grenze dieser Function für alle jene Werthsysteme xy, wofür $x^2+y^2=r^2$ ist, in einer Stelle $x=\varphi_2(r)$, $y=\psi_2(r)$ erreicht werde, ist schon a. a. O. S. 498 bemerkt. Soll nun $f(0, 0)$ ein Maximum sein, d. h. soll es eine solche positive Zahl δ geben, dass wenn nur $x^2+y^2<\delta^2$ ist, $f(x, y)-f(0, 0)$ negativ ausfällt, so muss für $r<\delta$ auch

$$f_2(r) - f(0, 0) < 0 \qquad (a)$$

sein; man braucht ja nur $x=\varphi_2(r)$, $y=\psi_2(r)$ zu setzen. Besteht umgekehrt für die Werthe von r kleiner als δ die Relation *(a)*, so ergibt sich daraus, indem $f(x, y) \leqq f_2(r)$ für $x^2+y^2=r^2$ ist, dass für $0<r<\delta$

$$f(x, y) - f(0, 0) < 0,$$

$f(0, 0)$ somit ein Maximum ist.

Aus dem obigen Satze fliesst sofort als nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass der Werth $f(0, 0)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum von $f(x, y)$ ist, nachstehendes Verhalten der oberen und unteren Grenze $f_2(r)$, $f_1(r)$. „Es müssen, wenn für r eine beliebige Grenze δ festgesetzt wird, Werthe r', r''

beide kleiner als δ, vorhanden sein, wofür

$$f_1(r') \leqq f(0, 0) \leqq f_2(r'') \qquad (b)$$

ist." — Weiteres lässt sich zur Charakterisirung des zuletzt erwähnten Falles im Allgemeinen nicht angeben. „Weiss man aber von der Existenz einer solchen positiven Zahl α, dass weder $f_1(r)$, noch $f_2(r)$ für einen positiven Werth von r, der kleiner als α ist, den Werth $f(0, 0)$ annimmt,[1] so besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass $f(0, 0)$ weder ein Maximum, noch ein Minimum von $f(x, y)$ ist, in dem Vorhandensein einer solchen positiven Zahl δ, dass wenn nur

$$0 < r < \delta$$

ist,

$$f_1(r) < f(0, 0) < f_2(r)$$

ist." Dieser Satz geht vermittelst der bemerkenswerthen Eigenschaft der Functionen $f_1(r)$, $f_2(r)$, dass jede für alle Werthe von r im Intervalle $(0, \alpha)$ stetig ist, aus der Relation (b) unmittelbar hervor.[2]

Dass aber $f_1(r)$ (sowie $f_2(r)$) für jeden Werth von r zwischen 0 und α stetig ist, erweist sich als eine Folgerung aus dem Umstande, dass $f(x, y)$ als Function von x, y für alle Werthsysteme x, y, wofür $x^2+y^2 \leqq \alpha^2$ ist, stetig sein soll. Demnach lässt sich bekanntlich einer jeden positiven Zahl ε eine andere $\varkappa$ so zuordnen, dass $|f(x', y') - f(x, y)|$ stets kleiner als ε ist, wenn nur xy, $x'y'$ zwei Punkte innerhalb des Kreises $x^2+y^2 = \alpha^2$ bedeuten, deren Abstand $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$ kleiner als $\varkappa$ ist. Setzen wir hier

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \qquad x' = r'\cos\varphi \quad y' = r'\sin\varphi,$$

---

[1] Für $r = 0$ sind bis jetzt $f_1(r)$ und $f_2(r)$ nicht definirt; es liegt freilich nahe, $f_1(0) = f_2(0) = f(0, 0)$ zu setzen.

[2] Da man immerhin $\delta < \alpha$ annehmen kann, so ist $f_1(r)$ im Intervalle $(0, \delta)$ von r eine stetige Function von r. $f_1(r')$ ist kleiner als $f(0, 0)$; sollte es nun einen Werth von r, kleiner als δ, geben, wofür $f(r) > f(0, 0)$ ist, so müsste auch ein solcher vorhanden sein, wofür $f(r) = f(0, 0)$ ist. Dergleichen Werthe von r soll es aber nicht geben, folglich muss $f(r)$ für alle Werthe von r, kleiner als δ, kleiner als $f(0, 0)$ sein.

so brauchen wir nur $|r'-r| < \varkappa$ zu nehmen. Unter dieser Voraussetzung ist mithin

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - \varepsilon < f(r'\cos\varphi, r'\sin\varphi) < f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \varepsilon,$$

woraus, wenn wir uns

$$r'\cos\varphi = \varphi_1(r') \qquad r'\sin\varphi = \psi_1(r')$$

gesetzt denken, sich weiter ergibt, dass

$$f_1(r) - \varepsilon < f_1(r') \quad \text{oder} \quad -\varepsilon < f_1(r') - f_1(r)$$

ist. Setzt man umgekehrt $r\cos\varphi = \varphi_1(r)$, $r\sin\varphi = \psi_1(r)$, so gelangt man zur Relation

$$f_1(r') < f_1(r) + \varepsilon \quad \text{oder} \quad f_1(r') - f_1(r) < \varepsilon.$$

Demnach ist $|f_1(r') - f_1(r)|$ stets kleiner als ε, wenn nur $|r'-r|$ kleiner als $\varkappa$ ist. D. i. $f_1(r)$ ist eine stetige Function der Veränderlichen r für jeden besonderen Werth derselben, dessen Betrag unter α liegt.

Der letzte Satz ist, ohne desselben ausdrücklich zu erwähnen, a. a. O. S. 497 benützt. Wird nämlich eine ganze Function $G_n(xy)$ vorgelegt, welche an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ verschwindet und ausserdem der Bedingung entspricht, dass für $0 < r < \delta$ sowohl $|g_1(r)|$, als $|g_2(r)|$ grösser als $c'r^n$ ist, so kann weder $g_1(r)$, noch $g_2(r)$ innerhalb des Intervalles $(0, \delta)$ verschwinden, folglich auch keine der beiden Functionen wegen ihrer Stetigkeit ihr Zeichen wechseln. Da nun im Falle, dass $G_n(00) = 0$ weder Maximum, noch Minimum von $G_n(xy)$ ist, Werthe $r'r''$, beide kleiner als δ, vorhanden sind, wofür $g_1(r') < 0 < g_2(r'')$, so muss für alle Werthe von r kleiner als δ $g_1(r) < 0 < g_2(r)$ sein.

Die unmittelbare Anwendung des eingangs dieser Nummer aufgeführten Satzes würde in dem gewöhnlich vorliegenden Falle dass $f(x, y)$ in eine nach ganzen positiven Potenzen von x und y fortschreitende Reihe entwickelt werden kann, in der Regel nur unnöthige Weitläufigkeiten veranlassen. Scheeffer's neuer Gedanke besteht ja gerade darin, die Frage nach einem Extremum der Function $f(x, y)$ dadurch zu erledigen, dass der in Rede stehende Satz nur für eine aus den Anfangsgliedern der Entwickelung von $f(x, y)$ gebildete ganze Function $G_n(x, y)$ in Anspruch genommen wird.

2. Nach Barbera[1] ist der Werth $f(0, 0)$ ein totales Maximum, wenn das partiale Maximum der Function $f(x, y)$ in Beziehung auf die Veränderliche x allein, welches unter der Voraussetzung, dass y einen festen, aber willkürlichen Werth annimmt, eintritt und einem Werthe $x = \psi(y)$, der für $y = 0$ verschwindet, entspricht, d. i. die Function $f(\psi(y), y)$ für den Werth $y = 0$ ein Maximum erreicht. Dieser Gedanke führt ebenfalls auf eine vollkommen befriedigende Lösung der Aufgabe, die Extreme der Function $f(x, y)$ zu bestimmen. Dabei ist es jedoch bequemer, das Maximum (Minimum) von $f(x, y)$ an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ in der Art zu definiren, dass die Existenz einer solchen positiven Zahl δ verlangt wird, dass für alle Systeme von Werthen x, y, deren absolute Beträge kleiner als δ sind (ausgenommen $x = 0$, $y = 0$),

$$f(x, y) - f(0, 0) < 0 \quad (> 0) \tag{1}$$

ausfällt. $f(x, y)$ soll in einem den Punkt $x = 0$, $y = 0$ umschliessenden Gebiete eine stetige Function von xy sein.

Wir haben dann die folgende Reihe von Sätzen:

1) „Als nothwendig dazu, dass $f(0, 0)$ ein Maximum (Minimum) von $f(x, y)$ ist, erweist sich das Vorhandensein einer positiven Zahl δ von der folgenden Beschaffenheit. Man denke sich $x \gtrless 0$ und seinem Betrage nach kleiner als δ. Wenn dann die obere (untere) Grenze von $f(x, y)$ bei constantem x unter der Voraussetzung, dass y das Intervall $(-x, x)$ nicht verlässt, durch den Werth $y = \varphi(x)$ erreicht wird (wobei $\lim_{x=0} \varphi(x) = 0$ ist),[2] so ist $f(x, \varphi(x))$ stets kleiner (grösser) als $f(0, 0)$."

„Ähnliches muss gelten hinsichtlich der oberen (unteren) Grenze von $f(x, y)$ bei constantem y und Beschränkung von x auf das Intervall $(-y, y)$, welche durch den Werth $x = \psi(y)$ erreicht werden.

---

[1] Teoria della integrabilità delle funzioni e dei massimi e minimi degli integrali definiti, Bologna, 1890, p. 147 und Introduzione allo studio di Calcolo, ibidem 1881, p. 417.

[2] Für $x = 0$ ist $\varphi(x)$ bis jetzt nicht definirt; es liegt indess nahe, $\varphi(0) = 0$ zu setzen.

2) „Hinreichend dazu, dass $f(0,0)$ ein Maximum (Minimum) von $f(x, y)$ ist, erscheint das Zutreffen beider unter 1) aufgeführten Bedingungen. Demnach ist $f(0,0)$ Maximum, wenn es eine solche positive Zahl δ gibt, dass sowohl für

$$0<|x<\delta \qquad f(x, \varphi(x))<f(0,0), \tag{2}$$

als auch für

$$0<|y|<\delta \qquad f(\psi(y), y)<f(0,0) \tag{3}$$

ist."

Diese beiden Sätze ergeben sich auf ähnliche Weise wie die entsprechenden in Nr. 1. Man bedenke nur, dass wenn $f(x, \varphi(x))$ die obere Grenze von $f(x, y)$ bei constantem x und bei Beschränkung von y auf das Intervall $(-x, x)$ mit Einschluss seiner Grenzen vorstellt, alsdann für jedes diesen Bedingungen genügende Werthsystem xy

$$f(x, y)\leqq f(x, \varphi(x))$$

sein muss. Demnach folgt aus der Relation (2) unmittelbar die entsprechende in (1), jedoch nur für alle Werthsysteme xy, welche die Bedingungen

$$0<|y|\leqq|x|<\delta$$

befriedigen, während das Umgekehrte unmittelbar erhellt. Soll die Relation (1) in vollem Umfange, d. i. für alle Systeme xy, wofür $|x|<\delta$ und $|y|<\delta$ ist, bestehen, so muss zur Relation (2) noch (3) treten.

Nunmehr bezeichnen $f(x, \varphi_1(x))$ die untere, $f(x, \varphi_2(x))$ die obere Grenze von $f(x, y)$ bei constantem x und bei Beschränkung von y auf das Intervall $(-x, x)$. Dessgleichen sei $f\{\psi_1(y), y\}$ die untere, $f\{\psi_2(y), y\}$ die obere Grenze von $f(x, y)$ bei constantem y und Beschränkung von x auf das Intervall $(-y, y)$.

3) „Dazu, dass $f(0,0)$ kein Minimum von $f(x, y)$ ist, ist nothwendig und hinreichend, dass jeder positiven Zahl δ sich entweder eine Zahl x', deren Betrag kleiner als δ ist, so zuordnen lässt, dass

$$f(x', \varphi_1(x'))\leqq f(0,0) \tag{a}$$

ist oder eine Zahl y', deren Betrag kleiner als δ ist, so, dass

$$f(\psi_1(y'), y'')\leqq f(0,0) \tag{b}$$

ist."

„Dazu, dass $f(0, 0)$ kein Maximum von $f(x, y)$ ist, ist nothwendig und hinreichend, dass jeder positiven Zahl δ sich entweder eine Zahl x'', deren Beitrag kleiner als δ ist, so zuordnen lässt, dass

$$f(x'', \varphi_2(x'')) \geqq f(0, 0) \qquad (c)$$

ist oder eine Zahl y'', deren Betrag kleiner als δ ist, so, dass

$$f(\psi_2(y''), y'') \geqq f(0, 0) \qquad (d)$$

ist."

„Das Zutreffen der beiden soeben erwähnten Bedingungen erweist sich als nothwendig und hinreichend dazu, dass $f(0, 0)$ weder ein Minimum, noch ein Maximum von $f(x, y)$ bildet."

4) „Wenn für eine Function $f(x, y)$, wofür der Werth $f(0, 0)$ kein Extremum ist, z. B. die durch die Ungleichungen *(a)* und *(d)* bei Weglassung des Zeichens $=$ dargestellten Bedingungen erfüllt sind — und man weiss noch, dass eine positive Zahl δ sich so angeben lässt, dass weder $f(x, \varphi_1(x))$ für einen von Null verschiedenen Werth von x im Intervalle $(-\delta, \delta)$, noch $f(\psi_2(y), y)$ für einen von Null verschiedenen Werth von y im Intervalle $(-\delta, \delta)$ gleich $f(0, 0)$ ist; dann muss für jeden Werth von x, dessen Betrag kleiner als δ ist, $f(x, \varphi_1(x)) < f(0, 0)$ und für jeden Werth von y, dessen Betrag kleiner als δ ist, $f(\psi_2(y), y) > f(0, 0)$ sein."

Der letzte Satz ergibt sich aus dem Umstande, dass $f(x, y)$ eine für alle Punkte eines Rechteckes, dessen Mittelpunkt der Punkt $x = 0$, $y = 0$ ist, stetige Function von x und y sein soll, durch ähnliche Betrachtungen wie der entsprechende Satz in Nr. 1.

3. Wir wollen die vorstehenden Sätze zunächst zur Entscheidung der Frage benützen, ob für eine ganze Function $G(x, y)$ von x, y, welche für $x = 0$ und $y = 0$ verschwindet, der Werth $G(0, 0) = 0$ ein Extremum bildet oder nicht. Dann sind vor Allem zu ermitteln die untere und obere Grenze von $G(x, y)$ bei constantem x und bei Beschränkung von y auf das Intervall $(-x, x)$. Sie mögen mit $G(x, \varphi_1(x))$ und $G(x, \varphi_2(x))$ bezeichnet werden, da beide je einem Werthe der Function gleich sein müssen. Die jene Grenzen liefernden Werthe von y: $y = \varphi_1(x)$ und $y = \varphi_2(x)$ fallen entweder innerhalb des Intervalles $(-x, x)$ oder auf einen seiner Endwerthe $y = -x$ und $y = x$. Da $G(x, y)$

unter den gemachten Voraussetzungen eine stetige, mit einer Ableitung begabte Function von y ist, so muss im ersteren Falle $\varphi_1(x)$, sowie $\varphi_2(x)$ eine der Auflösungen der Gleichung $\frac{\partial G}{\partial y} = 0$ nach y sein. Hiebei ist es gestattet, für $|x|$ eine beliebige positive Zahl α von vorneherein als obere Grenze festzusetzen. Da $\lim \varphi_1(x)$ und $\lim \varphi_2(x)$ für $\lim x = 0$ Null sind, so müssen sich demnach $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ im Falle, dass sie zwischen $-x$ und x liegen, unter denjenigen nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von x fortschreitenden Reihen befinden, welche für y in die ganze Function $\frac{\partial G}{\partial y}$ gesetzt, sie identisch zum Verschwinden bringen und dabei selbst für $x=0$ verschwinden, d. h. kein constantes Glied enthalten. Bezeichnet man dieselben der Reihe nach mit $P_1(x)$, $P_2(x)$ ...., so hat man nun zu bilden die Ausdrücke

$$G(x, -x),\ G(x, x),\ G(x, P_1(x)),\ G(x, P_2(x)) \ldots \qquad (4)$$

Die willkürliche Zahl α darf man sich aber kleiner als 1 und weiter so klein denken, dass man aus den Anfangsgliedern der Reihen (4) zu erkennen im Stande ist, welche unter ihnen für die positiven und welche für die negativen Werthe von x, deren Betrag kleiner als α ist, das kleinste Resultat liefert, also als $G(x, \varphi_1(x))$ anzusehen ist. Es sei z. B. $x > 0$. Dann haben wir nun diejenigen der Reihe (4) zu betrachten, deren Anfangsglieder negativ sind. Hat x in diesen Gliedern durchaus verschiedene Exponenten, so ist $G(x, \varphi_1(x))$ diejenige der Reihen, worin der Exponent am kleinsten ist. Kommt dieser grösste Exponent in den Anfangsgliedern mehrerer der Reihen (4) vor, so erscheint $G(x, \varphi_1(x))$ als diejenige darunter, worin der Coëfficient des ersten Gliedes algebraisch am kleinsten ist. Sollten in den Anfangsgliedern zweier Reihen sowohl die Exponenten von x den grössten, als auch die Coëfficienten den kleinsten Werth besitzen, so wird das erste Paar von Gliedern, worin sich die beiden Reihen von einander unterscheiden, die Entscheidung bringen, welche von ihnen bei gehöriger Kleinheit von x den kleineren Werth liefert. Sind aber die Anfangsglieder aller Reihen (4) positiv, so kann man gleichwohl ähnlich verfahren, nur sind jetzt jene davon herauszuheben, in welchen der Exponent des ersten Gliedes am

grössten ist u. s. w. Ist endlich einer der Ausdrücke in der Reihe (4) gleich Null, während alle übrigen mit positiven Gliedern beginnen, so ist $G(x, \varphi_1(x)) = 0$. Die entsprechende Betrachtung ist anzustellen unter der Voraussetzung, dass x negativ ist.

Auf ähnliche Art wird der Ausdruck $G(x, \varphi_2(x))$ und weiter, indem man die Gleichung $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$ nach x auflöst, wodurch die Reihen $x = Q_1(y)$, $Q_2(y)$ .... sich ergeben mögen, und die Ausdrücke

$$G(-y, y), G(y, y), G(Q_1(y), y), G(Q_2(y), y) \ldots .$$

bildet, $G(\psi_1(y), y)$, sowie $G(\psi_2(y), y)$ gefunden, und zwar sowohl für positive, als negative y.

Sind aber die vier Functionen $G(x, \varphi_1(x))$ u. s. w. ermittelt, so lassen sich die Sätze der vorigen Nummer zur Anwendung bringen.[1]

Um Beispiele zur Erläuterung der soeben gegebenen Vorschriften zu erhalten, braucht man nur die Gleichungen von solchen Curven $G(x, y) = 0$ anzuschreiben, welchen der Anfangspunkt der Coordinaten als isolirter Punkt, und zwar auf einer oder mehreren reellen Tangenten angehört.[2] Jede, die linke Seite einer derartigen Gleichung bildende ganze Function von x, y hat im Punkte $x = 0$, $y = 0$ ein Extremum. Z. B. ist

$$G(x, y) = y^4 + x^6 + y\Phi_5(x, y) + \Phi_7(x, y) + \Phi_8(x, y) + \ldots, \quad (5)$$

worin $\Phi_n(xy)$ eine beliebige homogene Function n^{ter} Dimension von x, y bedeutet, so ist $G(x, y) = 0$ eine Curve, wozu der Punkt $x = 0$, $y = 0$ als isolirter auf der Tangente $y = 0$ gehört. $G(0, 0)$ ist ein Extremum von $G(xy)$, und zwar, da $G(x, 0)$ für alle Werthe von x von hinlänglich kleinem Betrage positiv ist, ein Minimum. Dasselbe lässt sich auch mit Hilfe der vorstehenden Bemerkungen nachweisen, wenn nur genügend viele Glieder von (5) bekannt sind. Es sei z. B. vorgelegt

$$G(x, y) = y^4 + x^6 - 108x^5y - x^8,$$

[1] Ist z. B. $G(x, \varphi_1(x)) = 0$ und $G(\psi_1(y), y) \geqq 0$, so ist der Werth $G(o, o) = 0$ ein uneigentliches Minimum von $G(x, y)$.

[2] Sind die Tangenten der Curve im isolirten Punkte $x = 0$, $y = 0$ paarweise complex-conjugirt, so lässt sich der Satz, dass $G(x, y)$ in ihm ein Extremum erreicht, schon mit Hilfe der Bemerkung, dass die Glieder niedrigster Ordnung eine definite Form bilden, beweisen.

so dass

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 4(y^3 - 27x^5) \quad \frac{\partial G}{\partial x} = 2\{3x - 270y - 4x^3\}x^4$$

ist. $\frac{\partial G}{\partial y} = 0$ liefert die Wurzel $y = 3x^{\frac{5}{3}}$ und es sind

$$G(x, -x) = x^4 + 109x^6 - x^8 \quad G(x, x) = x^4 - 107x^6 - x^8;$$

dagegen ist

$$G(x, 3x^{\frac{5}{3}}) = x^6 \mp 27x^{\frac{20}{3}} - x^8,$$

je nachdem x positiv oder negativ ist. Demnach ist, mag x positiv oder negativ sein,

$$G(x, \varphi_1(x)) = G(x, 3x^{\frac{5}{3}}),$$
$$G(x, \varphi_2(x)) = G(x, -x).$$

Die Gleichung $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$ hat die Wurzeln

$$x = 0 \qquad x = 90y + \ldots = Q(y).$$

Es ist nunmehr

$$G(-y, y) = y^4 + 109y^6 - y^8 \qquad G(y, y) = y^4 - 107y^6 - y^8$$
$$G(0, y) = y^4 \qquad G(Q(y), y) = y^4 - 18.90^5 y^6 + \ldots;$$

also hat man bei positivem und negativem y

$$G(\psi_1(y), y) = G(Q(y), y \qquad G(\psi(y), y) = G(-y, y).$$

Mithin ist, wenn nur $|x|$ gehörig klein ist,

$$G(x, \varphi_1(x)) > 0$$

und wenn nur $|y|$ gehörig klein ist,

$$G(\psi_1(y), y) > 0.$$

Somit ist der Werth $G(0, 0) = 0$ in der That ein Minimum von $G(xy)$.

4. Die unmittelbare Anwendung der Sätze von Nr. 3 auf eine vorgelegte Function $f(x, y)$ würde in der Regel zu über-

flüssigen Rechnungen führen. Es genügt vielmehr im Falle, dass $f(x, y)-f(0, 0)$ sich in eine nach positiven ganzen Potenzen von x und y fortschreitende Reihe entwickeln lässt, diese Sätze auf eine aus den Anfangsgliedern dieser Entwickelung gebildete ganze Function anzuwenden. Wir haben analog dem grundlegenden Scheeffer'schen Satze (a. a. O. Nr. 1) auch hier den folgenden Satz.

„Es sei

$$f(x, y)-f(0, 0) = G_n(x, y)+R_n(x, y),$$

worin G_n die Gesammtheit aller vorhandenen Glieder der n ersten Dimensionen in Bezug auf x und y, $R_n(x, y)$ den Rest der Reihe, d. i. die Gesammtheit der Glieder von höherer als n^{ter} Dimension bedeutet."

„Lassen sich dann ein Index n und positive Zahlen c' und δ so bestimmen, dass wenn $|x| < \delta$ ist, die obere und untere Grenze von $G_n(x, y)$ bei constantem x und bei Beschränkung von y auf das Intervall $(-x, x)$ ihrem Betrage nach grösser sind als $c'|x|^n$ und wenn $|y| < \delta$ ist, die obere und untere Grenze von $G_n(x, y)$ bei constantem y und bei Beschränkung von x auf das Intervall $(-y, y)$ ihrem Betrage nach grösser sind als $c'|y|^n$; — so haben die beiden Functionen

$$f(x, y) \qquad G_n(x, y)$$

an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ zugleich entweder ein Maximum oder ein Minimum, oder weder ein Maximum, noch ein Minimum."

Gegenüber den Ausführungen a. a. O. erscheint es hier nicht mehr nothwendig, auf den Beweis dieses Hauptsatzes näher einzugehen. Nur das sei bemerkt, dass im Falle, dass $G_n(0, 0) = 0$ weder ein Maximum, noch ein Minimum von $G_n(x, y)$ darstellt, jedenfalls entweder die untere Grenze $G_n(x, \bar{\varphi}_1(x))$ für alle Werthe von x, deren Betrag kleiner als δ ist, oder die untere Grenze $G_n(\bar{\psi}_1(y), y)$ für alle Werthe von y, deren Betrag kleiner als δ ist, negativ sein muss, während jedenfalls entweder die obere Grenze $G_n(x, \bar{\varphi}_2(x))$ für die nämlichen Werthe von x oder die obere Grenze $G_n(\bar{\psi}_2(y), y)$ für die nämlichen Werthe von y positiv ist. Es geht dies aus dem 4. Satze in Nr. 2 hervor, da zufolge der im obigen Satze aufgestellten Forderung weder eine der Grenzen

$G_n(x, \bar{\varphi}_1(x))$ und $G_n(x, \bar{\varphi}_2(x))$ für einen von Null verschiedenen Werth von x im Intervalle $(-\delta, \delta)$, noch eine der Grenzen $G_n(\psi_1(y), y)$ und $G_n(\bar{\psi}_2(y), y)$ für einen von Null verschiedenen Werth von y im Intervalle $(-\delta, \delta)$ verschwinden kann.

So hat z. B. nach Nr. 3 jede Function

$$b+y^4+x^6-108x^5y-x^8+R_8(x, y)$$

im Punkte $x=0$, $y=0$ ein Minimum. Noch einfacher wäre dieselbe Behauptung für jede Function

$$b+y^{2k}+x^{2k+2}+R_{2k+2}(x, y) \qquad (k=1, 2..)$$

zu erweisen.

Der vorstehende Satz lässt im Falle, dass der Werth $G_n(0,0)=0$ kein Extremum von $G_n(x, y)$ bildet, eine naheliegende Erweiterung zu. Dann kann nämlich sowohl eine der beiden unteren Grenzen $G_n(x, \bar{\varphi}_1(x))$ und $G_n(\bar{\psi}_1(y), y)$, als auch eine der beiden oberen $G_n(x, \bar{\varphi}_2(x))$ und $G_n(\bar{\psi}_2(y), y)$ verschwinden, und zwar nicht allein nur für die positiven oder nur für die negativen Werthe der bezüglichen Veränderlichen, welche dem Betrage nach klein genug sind, sondern auch für alle.

„Lassen sich zwei positive Zahlen c', δ so bestimmen, dass von den beiden unteren Grenzen $G_n(x, \bar{\varphi}_1(x))$ und $G_n(\bar{\psi}_1(y), y)$ wenigstens eine und diese mindestens für alle positiven oder für alle negativen Werthe der bezüglichen Veränderlichen x oder y, welche dem Betrage nach kleiner als δ sind, negativ, und zwar kleiner als $-c'|x|^n$, beziehungsweise $-c'|y|^n$ ist und dass von den beiden oberen Grenzen $G_n(x, \bar{\varphi}_2(x))$ und $G_n(\bar{\psi}_2(y), y)$ wenigstens eine und diese mindestens für die soeben genannten Werthe der bezüglichen Veränderlichen x oder y positiv, und zwar grösser als $c'|x|^n$, beziehungsweise $c'|y|^n$ ist, so haben die beiden Functionen

$$f(x, y) \qquad G_n(x, y)$$

an der Stelle $x=0$, $y=0$ kein Extremum, d. i. weder ein Maximum, noch ein Minimum."

Beispiele eines solchen Verhaltens findet man schon, wenn man $G_n(x, y)$ eine homogene Function von xy sein lässt. Man setze z. B. $G_n(xy) = x^2-y^2$, $(x+y)^2(x-y)$ oder irgend einem Ausdrucke von der Form $(x+y)^p(x-y)^q$.

5. Die Übertragung der vorstehenden Betrachtungen auf eine Function von beliebig vielen unabhängigen Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_m$ hat keine Schwierigkeit. Dabei dürfen wir annehmen, dass diese Function $f(x_1 \ldots x_m)$ in der Umgebung der Stelle $x_1 = 0 \ldots x_m = 0$ untersucht werde. Es handelt sich dann vor Allem darum, den aus allen möglichen Werthsystemen, die den Bedingungen

$$-\delta < x_r < \delta \qquad (r = 1, 2 \ldots m) \tag{6}$$

genügen, bestehenden Bereich der m-fachen Mannigfaltigkeit $x_1 \ldots x_m$ in m Theilbereiche von der folgenden Beschaffenheit zu zerlegen. Der erste von ihnen ist bestimmt durch die Ungleichungen

$$-\delta < x_1 < \delta, \quad |x_2| \leqq |x_1| \quad |x_3| \leqq |x_1| \quad \ldots\ldots \quad |x_m| \leqq |x_1|$$

d. h. x_2 darf alle Werthe des Intervalles $(-x_1, x_1)$ annehmen, x_3 dessgleichen u. s. f. bis x_m. In derselben Art wird der zweite Theilbereich bestimmt, nämlich durch die Ungleichungen

$$|x_1| \leqq |x_2| \quad -\delta < x_2 < \delta \quad |x_3| \leqq |x_2| \ldots\ldots\ldots |x_m| \leqq |x_2| ;$$

Der m^{te} und letzte endlich durch die Ungleichungen:

$$|x_1| \leqq |x_m| \quad |x_2| \leqq |x_m| \quad |x_3| \leqq |x_m| \ldots\ldots\ldots -\delta < x_m < \delta.$$

Wir lassen zunächst x_1 constant und bestimmen die obere und untere Grenze von $f(x_1 \ldots x_m)$ bei Beschränkung der $x_2, x_3, \ldots x_m$ auf den Bereich

$$|x_2| \leqq |x_1| \quad |x_3| \leqq |x_1| \ldots\ldots |x_m| \leqq |x_1|. \tag{7}$$

Setzen wir auch hier voraus, dass die vorgelegte Function für alle Stellen eines Bereiches von der Form (6) stetig sei, so muss es eine Stelle des Bereiches (7) geben, wozu als Werth der Function $f(x_1 \ldots x_m)$ die genannte obere und eine, wozu als Werth von $f(x_1 \ldots x_m)$ die genannte untere Grenze gehört. Wenn ausserdem angenommen wird, dass $f(x_1 \ldots x_m)$ eine ganze Function von $x_1 \ldots x_m$ ist — was ja zunächst hinreicht — so befinden sich diese beiden Stellen, falls sie dem Innern des Bereiches (7) angehören, unter den Werthsystemen $x_2 \ldots x_m$, welche die $(m-1)$ Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0 \ldots \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0 \tag{7*}$$

befriedigen.[1] Jede von ihnen kann aber auch in der Begrenzung des Bereiches (7) liegen, d. i. sie kann entweder eine der 2^{m-1} Stellen

$$x_2 = \pm x_1 \quad x_3 = \pm x_1 \dots x_m = \pm x_1$$

sein oder einem der $(m-1)2^{m-2}$ Bereiche

$$x_2 = \pm x_1 \dots x_{r-1} = \pm x_1 \quad |x_r| < |x_1| \quad x_{r+1} = \pm x_1 \dots x_m = \pm x_1 \qquad (r = 2, 3 \dots m) \tag{8}$$

oder einem der $\binom{m-1}{2} 2^{m-3}$ Bereiche angehören, welche dadurch definirt sind, dass von den $m-1$ Veränderlichen $x_2 \dots x_{m-1}$ $m-3$ constant, und zwar entweder gleich $-x_1$ oder x_1 sind, während die beiden übrigen x_r, x_s bloss an die Bedingung geknüpft sind, ihrem Betrage nach unter $|x_1|$ zu verbleiben u. s. f. Am Schlusse sind die $(m-1)2$ Bereiche

$$|x_2| < |x_1| \dots |x_{r-1}| < |x_1| \quad x_r = \pm x_1 \quad |x_{r+1}| < |x_1| \dots |x_m| < x_1 \qquad (r = 2, 3 \dots m)$$

als solche aufzuführen, in denen eine der in Rede stehenden Stellen vorkommen kann.[2] Sollte eine von ihnen im Bereiche (8) sich befinden, so muss das noch unbekannte x_r der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} = 0 \tag{9}$$

genügen, nachdem darin die Veränderlichen

$$x_2 \dots x_{r-1} x_{r+1} \dots x_m$$

durch die in (8) vorgeschriebenen Werthe $-x_1$ oder x_1 ersetzt sind. Von den an zweiter Stelle genannten Bereichen sind zu ermitteln die durch die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_r} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x_s} = 0, \qquad (r \gtrless s) \tag{10}$$

---

[1] Da bei Behandlung des Problems der Extreme einer Function von m Veränderlichen das entsprechende Problem für die Functionen von $1, 2, \dots m-1$ Veränderlichen als gelöst zu betrachten ist, so hat es keinen Anstand, den im Text erwähnten Satz hier zu benützen.

[2] Die Anzahl der hier genannten Bereiche und Stellen ist 3^{m-1}.

worin man für die übrigen $m-3$ Veränderlichen je einen der Werthe $-x_1$ oder x_1 einzusetzen hat, im Vereine mit diesen bestimmten Werthsysteme $x_2 \ldots x_m$ u. s. f.

Die so erhaltenen Systeme von Gleichungen (7*), (9), (10) u. s. w. versucht man nach $x_2 \ldots x_m$ durch nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von x_1 fortschreitende Reihen aufzulösen, wodurch man in bekannter Weise zu den gesuchten Grenzen von $f(x_1 \ldots x_m)$ bei constantem x_1 und Beschränkung der übrigen Veränderlichen auf den Bereich (7) geführt wird.

Nunmehr sind die untere und die obere Grenze von $f(x_1 \ldots x_m)$ unter der Voraussetzung, dass je eine der Veränderlichen $x_2 \ldots x_m$ fest bleibt und jede der übrigen auf das durch diesen constanten Werth und den ihm entgegengesetzten bestimmte Intervall eingeschränkt wird, zu ermitteln.

Nach Aufstellung dieser $2m$ Grenzen geht man zur Anwendung der Sätze über, welche den in Nr. 2 und 4 ausgesprochenen analog sind.

Zur Theorie der Dissociation der Gase

von

Dr. **Gustav Jäger.**

In mehrfacher Weise wurde schon die Theorie der Dissociation der Gase in ihrer Abhängigkeit vom Drucke und von der Temperatur sowohl nach den Principien der mechanischen Wärmetheorie, als auch theilweise nach den Anschauungen der kinetischen Gastheorie entwickelt, und zwar in der allgemeinsten und ausführlichsten Form wohl von Boltzman.[1] Derselbe geht von der Ansicht aus, dass die zu einer Molekel gehörigen Atome als nicht dissociirt anzusehen sind, sobald der Raum, in welchem sie sich befinden, eine bestimmte Grösse nicht überschreitet. Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher dies stattfindet, lässt sich unter Zuziehung der Geschwindigkeit und chemischen Anziehung der Molekeln berechnen, und es kann daraus der Grad der Dissociation abgeleitet werden.

Eine rein kinetische Theorie dieses Gegenstandes gibt L. Natanson.[2] Dieser geht folgendermassen vor: „Die Bedingungen dafür, dass ein Molekül entsteht, wenn zwei Atome zusammentreffen, werden, je nach den über die gegenseitige Einwirkung der Atome angenommenen Voraussetzungen, sehr verschieden sein. Als Hypothese (α) wollen wir jene Annahme bezeichnen, woraus sich in Bezug auf den Verlauf eines Zusammenstosses zweier Atome zwei entgegengesetzte Fälle ergeben: entweder ist der Zusammenstoss ein „„associirender““ (die Bewegung wird in eine stationäre umgewandelt, ein Molekül wird

---

[1] Wied. Ann., XXII, S. 39.

[2] Ebenda, XXXVIII, S. 288.

gebildet) oder ein „„normaler““ (die Atome gehen sogleich und von selbst auseinander), wie solche von den Molekülen gewöhnlicher Gase beständig ausgeführt werden. Mit dieser Hypothese (α) müssen wir natürlich zugleich annehmen, dass ein Molekül, welches einmal entstanden ist, nicht von selbst zerfallen kann, dass dies nur durch äussere Einwirkung geschehen kann. Als Hypothese (β) wollen wir dagegen jede Annahme bezeichnen, wonach der obige Unterschied fehlt: zwei zusammentreffende Atome gehen immer über kurz oder lang von selbst auseinander. Es kann nur der Zeitraum, während dessen sie ein System bilden, je nach den Umständen der Bewegung verschieden gross ausfallen. Alsdann ist zwischen einem Zusammenstosse und der Bildung eines Moleküls keine scharfe Grenze vorhanden: während der Zeitdauer des Zusammenstosses bilden eben die Atome ein Molekül. Dann ist jeder Zusammenstoss ein associirender, jedes Molekül muss eine gewisse Zeit existiren und dann von selbst zerfallen.“ Wir sehen, dass die Hypothese (β) nur in anderen Worten die Ansicht Boltzmann's wiedergibt. Beide Hypothesen kleidet Natanson in mathematische Formeln, gelangt jedoch für die Abhängigkeit der Dissociation von der Temperatur zu solch verwickelten Ausdrücken, dass es einen nicht abzusehenden Zeitaufwand kosten würde, die Formeln an einem Beispiele zu verificiren. Er selbst begnügte sich desshalb auch damit, für die extremen Fälle einer sehr niedrigen und einer sehr hohen Temperatur zu zeigen, dass in dem einen Falle keine, im anderen vollständige Dissociation eintritt. Unter solchen Umständen erschien es mir wünschenswerth, auf der Basis der kinetischen Gastheorie nach Wegen zu suchen, welche einen leichten Vergleich zwischen Theorie und Beobachtung ermöglichen.

Es ist allgemeine Annahme, dass die Dissociation einer Molekel an eine ganz bestimmte Temperatur gebunden ist. Sobald also die kinetische Energie einer Molekel eine gewisse Grösse übersteigt, wird sie in ihre Theilmolekeln zerfallen. Nach dem Zerfalle wird jedoch die kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung einer jeden Theilmolekel kleiner sein als jene der undissociirten Molekel, oder was dasselbe ist, nach der Dissociation werden sich im Allgemeinen die Theilmolekeln auf einer niedrigeren Temperatur als der Dissociationstemperatur befinden.

Um daher das Gas auf constanter Temperatur zu erhalten, ist es nothwendig, eine gewisse Wärmemenge zuzuführen, welche man die Dissociationswärme nennt.

Sollen sich die dissociirten Molekeln wieder zur ursprünglichen Molekel vereinigen, so muss ihnen die Dissociationswärme erst entzogen, d. h. ihre Temperatur muss um eine ganz bestimmte Grösse herabgesetzt werden. So oft also in einem theilweise dissociirten Gase eine undissociirte Molekel die Dissociationstemperatur erreicht, wird sie sich in ihre Theilmolekeln zerlegen, und so oft die Theilmolekeln bei der entsprechend niedrigeren Temperatur zusammentreffen, werden sie sich zu einer Molekel vereinigen. Treffen bei einer bestimmten Mitteltemperatur des Gases beide Fälle während desselben Zeitintervalles gleich oft ein, so haben wir einen stationären Zustand, und es ist damit der Grad der Dissociation bei der bewussten Temperatur definirt.

Wir wollen die Zahl der nicht dissociirten Molekeln, welche in der Masseneinheit des Gases enthalten sind, N_1 nennen, die Zahl der dissociirten sei im nicht dissociirten Zustande N_2. Zerlegt sich also bei der Dissociation jede Molekel in zwei neue, und nur diesen Fall wollen wir untersuchen, so ist die Gesammtzahl der in der Masseneinheit des theilweise zerlegten Gases vorhandenen freien Molekeln N_1+2N_2. Wir setzen nun weiter voraus, dass die Theilmolekeln unter einander gleichartig seien, wie es etwa bei der Untersalpetersäure, dem Joddampfe und vielen anderen Gasen der Fall ist.

Hat das Maxwell'sche Vertheilungsgesetz der Geschwindigkeiten für ideale Gase seine Giltigkeit, so muss es angenähert auch für gewöhnliche Gase gelten. Desshalb wollen wir es auch ohneweiters als giltig in unsere Rechnung einführen. Nach demselben ist die Zahl derjenigen Molekeln, welche sich mit einer zwischen ω und $\omega+d\omega$ liegenden Geschwindigkeit bewegen,

$$\nu = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N(km)^{3/2}\omega^2 e^{-km\omega^2} d\omega, \quad [1]$$

wobei N die Gesammtzahl der vorhandenen Molekeln, m die Masse einer Molekel bedeutet. Die Constante k ergibt sich aus

[1] S. O. E. Meyer, Theorie d. Gase, S. 271.

der Gleichung $W = \frac{1}{\sqrt{km}}$, wenn W die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Molekeln ist. Ist die Geschwindigkeit, welche der Dissociationstemperatur entspricht, ω_1, so werden alle Molekeln, für welche $\omega > \omega_1$ ist, sich zerlegen. Diese Zerlegung wird umso rascher stattfinden, je grösser die Geschwindigkeit der Molekel ist. Wir wollen dem in der Rechnung dadurch gerecht werden, dass wir die Geschwindigkeit der Zerlegung der Geschwindigkeit der Molekel proportional setzen. Demnach ist die Zahl der in der Zeiteinheit sich zerlegenden Molekeln, deren Geschwindigkeit zwischen ω und $\omega + d\omega$ liegt, dem Ausdrucke

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} N(km)^{3/2} \omega^3 e^{-km\omega^2} d\omega$$

proportional. Führen wir in dieser Formel die neue Veränderliche $x^2 = km\omega^2$ ein, d. h. setzen wir die wahrscheinlichste Geschwindigkeit gleich Eins, so erhalten wir

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{N}{\sqrt{km}} x^3 e^{-x^2} dx.$$

Entspricht der Dissociationstemperatur die Geschwindigkeit x_1, so ergibt sich für die Zahl sämmtlicher Molekeln, welche sich in der Zeiteinheit zerlegen

$$\frac{4a}{\sqrt{\pi}} \frac{N_1}{\sqrt{km}} \int_{x_1}^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \frac{N_1}{\sqrt{km}} (x_1^2 + 1) e^{-x_1^2}. \qquad (1)$$

Wir haben hier nach den obigen Annahmen $N = N_1$ gesetzt, a ist der entsprechende Proportionalitätsfactor. Ferner ist $\frac{1}{\sqrt{km}} = \omega_0 \sqrt{1 + \alpha t}$, wenn wir unter ω_0 die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Molekeln bei der Temperatur 0° verstehen. In gleicher Weise erhalten wir nach Obigem

$$x_1 = \sqrt{km}\,\omega_1 = \sqrt{km}\,\omega_0 \sqrt{1 + \alpha t} = \sqrt{\frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t}},$$

wobei jetzt unter t_1 die Dissociationstemperatur einer Molekel zu verstehen ist.

Es handelt sich jetzt darum, einen Ausdruck für die Zahl der in der Zeiteinheit von Neuem sich bildenden Molekeln zu

finden. Nach den bereits gemachten Auseinandersetzungen ist eine solche Neubildung nur möglich, wenn zwei zusammentreffende Theilmolekeln eine gewisse Geschwindigkeit, wir wollen sie ξ nennen, nicht überschreiten. Ist die Zahl der Zusammenstösse einer Theilmolekel mit den übrigen gleichartigen Molekeln C, so ist wiederum nach dem Maxwell'schen Gesetze die Zahl jener Stösse, durch welche die Molekel eine Geschwindigkeit erlangt, welche zwischen 0 und ξ liegt, gleich

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} C \int_0^{\xi} x^2 e^{-x^2} dx,$$

die Wahrscheinlichkeit aber, dass die zweite Molekel die Geschwindigkeit ξ nicht übersteigt, ist

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} x^2 e^{-x^2} dx.$$

Das Product beider Wahrscheinlichkeiten gibt somit an, wie oft in der Zeiteinheit eine Theilmolekel mit einer anderen zu einer ursprünglichen Molekel sich zu vereinigen in die Lage kommt. Multipliciren wir dieses Product noch mit der halben Anzahl der überhaupt vorhandenen Theilmolekeln, so erhalten wir die Zahl der in der Zeiteinheit sich neubildenden Molekeln. Die Zahl der vorhandenen Theilmolekeln bezeichneten wir oben mit $2N_2$, demnach ist die Zahl der in der Zeiteinheit sich bildenden Molekeln

$$\frac{16}{\pi} N_2 C \left[\int_0^{\xi} x^2 e^{-x^2} dx \right]^2.$$

$$C = 2 \sqrt{\frac{2\pi}{km}} N \varsigma^2,$$[1]

wenn ς der Durchmesser einer Molekel N die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit ist. Wenden wir diese Formeln auf unseren Fall an, so haben wir zu beachten, dass die Masse der Theilmolekel nur die Hälfte der Masse m der ursprünglichen Molekel ist. Ferner ist $N = \frac{2N_2}{v}$, da v das Volumen der Massen-

[1] S. O. E. Meyer, Theorie der Gase, S. 296.

einheit des Gases sein soll. Mit Berücksichtigung alles dessen ergibt sich für die Zahl der sich neu bildenden Molekeln

$$\frac{128}{\sqrt{\pi km}} \frac{N_2^2}{v} \varsigma^2 \left[\int_0^{\xi} x^2 e^{-x^2} dx\right]^2. \tag{2}$$

Für den Fall eines stationären Zustandes müssen nun die Ausdrücke (1) und (2) einander gleich sein, also

$$aN_1(x_1^2+1)\, e^{-x_1^2} = 64\, \varsigma^2 \frac{N_2^2}{v} \left[\int_0^{\xi} x^2 e^{-x^2} dx\right]^2, \tag{3}$$

wenn wir gleich die leicht ersichtlichen Kürzungen durchführen. Diese Gleichung hat die Form

$$N_1 = \frac{N_2^2}{v} f(t),$$

wobei $f(t)$ die entsprechende Function der Temperatur ist. Dieselbe Gleichung ergeben die verschiedenen Theorien der Dissociation, und es lässt sich aus derselben, wie Natanson gezeigt hat,[1] sehr einfach die Abhängigkeit der Dissociation vom Drucke herleiten. Es bleibt uns daher nur noch übrig, die Function $f(t)$ zu entwickeln und zu zeigen, dass Theorie und Beobachtung gleiche Resultate ergeben.

Zur Integration der Gleichung (3) benützen wir die Formel

$$\int_0^x x^2 e^{-x^2} dx = \frac{x e^{-x^2}}{2} \left[\frac{2x^2}{1.3} + \frac{(2x^2)^2}{1.3.5} + \frac{(2x^2)^3}{1.3.5.7} + \ldots\right].$$

Da voraussichtlich unser ξ eine kleine Grösse ist, so wollen wir uns bei der Integration auf das erste Glied der Reihe beschränken. Es ist demnach

$$\left[\int_0^{\xi} x^2 e^{-x^2} dx\right]^2 = \frac{\xi^6 e^{-2\xi^2}}{9}.$$

Wenn ϑ die der Geschwindigkeit ξ entsprechende Temperatur bedeutet, so ist wie oben $\xi^2 = \frac{1+\vartheta}{1+t}$. Schliesslich können

[1] Wied. Ann., XXXVIII, S. 288.

wir noch mit Zuhilfenahme des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes das Volumen v durch die entsprechende Function des Druckes p ersetzen, indem

$$pv = \beta(N_1 + 2N_2)(1+\alpha t)$$

ist. β ist dabei eine bekannte Constante. Ohne Schwierigkeit lässt sich nun Gleichung (3) in die Form bringen

$$\frac{N_1(N_1+2N_2)}{N_2^2} = \frac{64\varsigma^2 p\xi^6 e^{x_1^2-2\xi^2}}{9\beta a(1+\alpha t)(x_1^2+1)} = \\ = a' \frac{\left(\frac{1+\alpha\vartheta}{1+\alpha t}\right)^3 e^{\frac{1+\alpha t_1-2(1+\alpha\vartheta)}{1+\alpha t}}}{(1+\alpha t)\left(\frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t}+1\right)},$$

wobei wir unter a' alles Constante einschliesslich des Druckes p zusammenfassen, da wir nur die Abhängigkeit von der Temperatur kennen lernen wollen. ϑ und t_1 sind ebenfalls constante Grössen. Wir wollen daher $1+\alpha t_1 - 2(1+\alpha\vartheta) = \gamma$, ferner $\frac{N_1}{N_2} = y$ setzen. Sodann wird unsere Gleichung

$$y^2+2y = a'' \frac{e^{\frac{\gamma}{1+\alpha t}}}{(1+\alpha t)^3\left(\frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t}+1\right)},$$

a'' ist die neue entsprechende Constante. Wie sich schon aus einem oberflächlichen Vergleiche dieser Gleichung mit den Beobachtungen ergibt, ist $\frac{1+\alpha t_1}{1+\alpha t}$ bedeutend grösser als Eins, wesshalb wir Eins gegen diesen Ausdruck vernachlässigen können, wodurch unsere Gleichung wird

$$y^2+2y = a_1 \frac{e^{\frac{\gamma}{1+\alpha t}}}{(1+\alpha t)^3}. \qquad (4)$$

Die Bedeutung der beiden Constanten a_1 und γ ist durch die vorhergehenden Entwicklungen gegeben, und wir können deren Werth aus zwei Beobachtungen bestimmen. Da $y = \frac{N_1}{N_2}$,

so können wir die Grössen der N in beliebigen Einheiten ausdrücken. Wir wählen die Angabe in Procenten. Dann ist

$$N_1 + N_2 = 100. \tag{5}$$

Setzen wir in Gleichung (4) allgemein

$$a_1 \frac{e^{\frac{\gamma}{1+\alpha t}}}{(1+\alpha t)^3} = c,$$

so

$$\frac{N_1}{N_2} = -1 + \sqrt{1+c}.$$

Aus dieser und der Gleichung (5) folgt

$$N_2 = \frac{100}{\sqrt{1+c}}.$$

Aus der bereits angeführten Gleichung

$$pv = \beta(N_1 + 2N_2)(1+\alpha t) = \beta(100+N_2)(1+\alpha t)$$

folgt für die Dichte des Gases d, auf den Druck einer Atmosphäre ($p = 1$) und die Temperatur 0° ($t = 0$) bezogen,

$$d = \frac{1}{\beta(100+N_2)} = \frac{1}{100\beta\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+c}}\right)}.$$

Die grösstmögliche Dichte das Gases sei d_0, d. i. jene Dichte, bei welcher gar keine dissociirte Molekel im Gase vorhanden ist, mithin

$$d_0 = \frac{1}{100\beta},$$

woraus folgt

$$d = \frac{d_0}{1+\frac{1}{\sqrt{1+c}}}.$$

Diese Grösse wird nun direct durch das Experiment gefunden.

Zur Verification der letzten Gleichung wählte ich die Untersalpetersäure und benützte die Angaben, welche sich in A. Naumann's „Thermochemie", S. 117, vorfinden. Die Constanten a.

und γ der Gleichung (4) erhielt ich aus den Temperaturen 49·6° und 90·0° mit den zugehörigen Graden der Zersetzung von 40·04% und 84·83%. Der Druck beträgt eine Atmosphäre, $d_0 = 3 \cdot 18$. Die Rechnung ergibt

$$a_1 = 1501 . 10^{-11}, \quad \gamma = 23 \cdot 83.$$

Inwieweit nun Rechnung und Beobachtung übereinstimmen, zeigt folgende Tabelle:

t	d (beobachtet)	d (berechnet)
26·7°	2·65	2·70
35·4	2·53	2·55
39·8	2·46	2·46
49·6	2·27	2·27
60·2	2·08	2·07
70·0	1·92	1·92
80·6	1·80	1·79
90·0	1·72	1·72
100·1	1·68	1·67
111·3	1·65	1·64
121·5	1·62	1·62
135·0	1·60	1·60

Wir haben hier eine Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung, die nichts zu wünschen übrig lässt. Die einzige grössere Abweichung, welche bei der niedrigsten Temperatur vorkommt, erklärt sich vollständig aus den gemachten Vernachlässigungen. Auch wurden die beiden Temperaturen zur Bestimmung der Constanten ganz beliebig herausgegriffen. Es ist sehr wohl möglich, dass durch geringe Änderungen der Zahlenwerthe von a_1 und γ die Übereinstimmung für alle Fälle herzustellen ist. Unsere Theorie gibt mithin vollständig die Thatsachen wieder.

Was mir nun wesentlich bei der Untersuchung war, das ist der Begriff der Dissociationstemperatur. Zur gewöhnlichen Ansicht darüber gelangen wir nach L. Meyer[1] folgendermassen: „Es lehrt die gegenwärtig geltende Theorie des Gaszustandes, die Theorie der molecularen Stösse, dass in einem Gase oder

[1] Moderne Theorien der Chemie, 1884, S. 416 ff.

Dampfe nicht alle Theilchen gleichzeitig dieselbe Temperatur haben können, vielmehr die beobachtete Temperatur eines Gases oder Dampfes nur der Mittelwerth aus den verschiedenen Temperaturen seiner Theilchen ist. Von dieser Mitteltemperatur können die Temperaturen der einzelnen Theilchen erheblich weit abweichen; doch lehrt die Theorie, dass geringe Abweichungen häufiger, grosse seltener vorkommen müssen, so dass eine bestimmte Temperatur bei um so weniger Theilchen vorkommt, je weiter sie von der Mitteltemperatur, sei es nach oben oder nach unten, abweicht. Hieraus folgt, dass in dem Dampfe einer Verbindung, welche bei einer bestimmten Temperatur zerfällt, schon eine gewisse Anzahl von Theilchen diese Zersetzungstemperatur erreichen und folglich zerfallen werden, bevor die Mitteltemperatur des Dampfes, welche das Thermometer angibt, jener Zersetzungstemperatur gleichkommt. Die Anzahl der zersetzten Theilchen wird umso rascher zunehmen, je mehr sich die Mitteltemperatur der Zersetzungstemperatur nähert. Hat sie diese erreicht, so wird immer noch ein erheblicher Theil der Molekeln niedrigere Temperaturen besitzen und daher nicht zerfallen sein. Bei noch weiter gesteigerter Temperatur muss aber dieser nicht zersetzte Theil abnehmen, und zwar erst rasch, dann langsamer und langsamer, bis er endlich ganz verschwindet, nachdem auch das niedrigst temperirte Theilchen die Zersetzungstemperatur erreicht hat. Aus dieser Überlegung folgt, dass die Zersetzungstemperatur mit derjenigen Mitteltemperatur des Gases identisch ist, bei welcher die Zunahme der Dissociation ihr Maximum erreicht, und dies ist dieselbe, bei welcher die Curve der Dichte den Wendepunkt durchläuft. Da gleich grosse Abweichungen von der Mitteltemperatur nach oben wie nach unten gleich häufig, also ebensoviel Theilchen heisser als kälter wie diese sind, so folgt, dass, wenn die Mitteltemperatur der Zersetzungstemperatur gleich wird, gerade die Hälfte der Theilchen dissociirt ist. In der That zeigt die Beobachtung, dass der Wendepunkt der Dichtigkeitscurve, welchem die extremste Zunahme der Dissociation entspricht, mit einer Zersetzung von 50% der Verbindung nahe zusammenfällt."

Zu welchem Resultate gelangen nun wir? Wir verstehen unter der Dissociationstemperatur die Temperatur t_1, welche in

der Gleichung $1+\alpha t_1-2(1+\alpha\vartheta)=\gamma$ enthalten ist. Da unter allen Umständen $1+\alpha\vartheta>0$ ist, so muss $1+\alpha t_1>\gamma$, für unseren speciellen Fall $1+\alpha t_1>23\cdot 83$ sein. Daraus folgt weiter

$$t_1>6000°.$$

Wir erhalten also eine ganz unerwartet hohe Zersetzungstemperatur und stehen damit in vollständigem Widerspruche mit der gewöhnlichen Ansicht. Es ist jedoch dieses Resultat in der Natur der Sache vollständig begründet. Würden wir nämlich eine niedrigere Dissociationstemperatur voraussetzen, so geschähe es verhältnissmässig selten, dass sich zwei getrennte Molekeln von solchen Eigenschaften treffen, welche zur Vereinigung beider nothwendig sind, während in derselben Zeit bei der grossen Geschwindigkeit, mit welcher sich der Maxwell'sche Vertheilungszustand herstellt, sehr viele undissociirte Molekeln zerlegt würden. Ein Gleichgewichtszustand, wie ihn die thatsächlichen Verhältnisse zeigen, ist mithin nur dann denkbar, wenn wir eine sehr hohe Zersetzungstemperatur annehmen.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. Band. X. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

XXV. SITZUNG VOM 3. DECEMBER 1891.

Der Secretär legt das erschienene Heft IX (November 1891) des XII. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach in Prag übersendet eine Mittheilung von Dr. G. Jaumann: „Über eine Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit".

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer übersendet einen Aufsatz des Prof. Alex. Lainer in Wien, betitelt: „Quantitative Bestimmung des Silbers und Goldes mittelst salzsaurem Hydroxylamin".

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über die fossile Flora der rhätischen Schichten Persiens", von Dr. Fridolin Krasser, Assistent am pflanzenphysiologischen Institut der k. k. Universität in Wien.
2. „Über die conforme Abbildung einer Halbebene auf ein unendlich benachbartes Kreisbogenpolygon", von Prof. Dr. G. Pick an der k. k. deutschen Universität in Prag.

Das w. M. Herr Prof. C. Toldt überreicht eine Arbeit aus dem anatomischen Institute der k. k. Universität in Wien, betitelt: „Beitrag zur Kenntniss der Muskelspindel", von den stud. med. A. Christomanos und E. Strössner.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus seinem Laboratorium, betitelt: „Notiz über Crotonaldoxim und Allylcyanid", von Titus Schindler.

Der Vorsitzende, Herr Hofrath Prof. J. Stefan, überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. O. Tumlirz an der k. k. Universität in Czernowitz: „Über die Unterkühlung von Flüssigkeiten".

Ferner überreicht der Vorsitzende eine Abhandlung von Dr. Gustav Jäger, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, betitelt: „Eine neue Methode, die Grösse der Molekeln zu finden".

Herr Dr. J. Schaffer, Privatdocent und Assistent am histologischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Beiträge zur Histologie menschlicher Organe. I. Duodenum. II. Dünndarm. III. Mastdarm".

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Cermenati M. und Tellini A., Rassegna delle Scienze Geologiche in Italia. Anno I, 1° Semester 1891, Fasc. 1° e 2°. Roma, 1891; 8°.

Über die Unterkühlung von Flüssigkeiten

von

O. Tumlirz.

(Mit 2 Textfiguren.)

Vor ungefähr einem Jahre habe ich im physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien eine Reihe von Versuchen über die Unterkühlung von Flüssigkeiten begonnen, um die Natur dieser Erscheinung näher kennen zu lernen. Die Untersuchung ist noch nicht zu Ende, doch ist es mir theils auf Grund der von anderen Physikern gemachten Beobachtungen, theils auf Grund meiner eigenen Erfahrungen gelungen, eine Theorie zu finden, welche nicht nur alle bekannten Thatsachen, insofern Substanzen ohne Krystallwasser in Betracht kommen, sehr einfach erklärt, sondern auch für fernere Untersuchungen viele Fragen offen lässt. Diese Theorie will ich hier mittheilen.

Ich erfülle gleich hier eine angenehme Pflicht, indem ich Herrn Hofrath Stefan für die überaus liebenswürdige Aufnahme in seinem Institute und für die freundliche Unterstützung, welche er meinen Arbeiten in jeder Beziehung zutheil werden liess, meinen wärmsten Dank ausspreche.

§. 1. Die Methoden der Unterkühlung.

Fahrenheit gelang es im Jahre 1714 zum erstenmale, reines Wasser bis zu —5° C., ja manchmal bis —10° C. abzukühlen, ohne dass es gefror, und er fand, dass die Bedingungen für das Eintreten dieser Erscheinung die sind, dass das Wasser langsam erkaltet und dabei vor jeder Erschütterung

bewahrt wird. Die Versuche wurden seitdem von vielen anderen Physikern wiederholt, und dieselben fanden, dass die Unterkühlung desto leichter gelingt, wenn das Gefäss geschlossen ist oder wenn die Oberfläche mit einer 2 bis 4 *mm* dicken Ölschichte bedeckt ist. Ferner machte Dufour die Beobachtung, dass wenn geschmolzene Substanzen nicht in Berührung mit festen Körpern stehen, sondern in Flüssigkeiten von gleichem specifischen Gewicht kugelförmig schweben, dieselben weit unter dem Schmelzpunkt flüssig erhalten werden können. So blieb z. B. eine Kugel von geschmolzenem Schwefel von 6 *mm* Durchmesser, welche in einer Lösung von Chlorzink schwebte, noch bei einer Temperatur von 50° C. flüssig, obwohl der Schmelzpunkt 111° C. ist. Ein Tropfen kann desto leichter unterkühlt werden, je kleiner er ist. Während ein einige Centimeter grosser Schwefeltropfen nur unter günstigen Umständen 10—20° C. unter seinem Schmelzpunkt flüssig bleibt, ist nach Frankenheim's Beobachtungen nichts leichter als ihn in einer offenen Glasschale in zahlreichen mikroskopischen Tröpfchen bei gewöhnlicher Temperatur zu erhalten. Ebenso beobachtete Person Schwefeltropfen, die auf einem bis zu 12° oder 15° C. herabgesunkenen Thermometer zurückblieben und noch nach mehreren Stunden flüssig und durchsichtig waren. Ähnlich verhält sich der Phosphor.

Bei Salzen, welche wie z. B. unterschwefligsaures Natron ($Na_2S_2O_3+5H_2O$) Krystallwasser enthalten, kommt es wesentlich darauf an, wie man dieselben behandelt. Ich habe zwei Methoden angewandt. Nach der einen brachte ich das krystallisirte chemisch reine Salz in einem Glaskolben in einen Trockenkasten, stellte den Kolben auf eine Korkplatte, und zwar so, dass er keiner Wand allzu nahe stand, und erwärmte den Trockenkasten langsam auf eine Temperatur von 80—90° C., die ich dann solange constant erhielt, bis das Salz (unterschwefligsaures Natron) vollständig geschmolzen war. Hierauf wurde die Flüssigkeit mit einer 2—4 *mm* dicken Schichte von Olivenöl bedeckt, der Glaskolben mit einem Stopfen, der ein Thermometer trug, geschlossen und das Ganze an einem von Erschütterungen möglichst freien Orte, und zwar auf einer die Wärme sehr schlecht leitenden Unterlage langsam und gleichmässig abgekühlt.

Ich habe auf diese Weise beim unterschwefligsauren Natron Unterkühlungen bis auf 5·3° C., also 42·8° C. unter dem Schmelzpunkt, gesehen, ohne dass die Flüssigkeit erstarrte.

Noch besser ist die folgende Einrichtung (Fig. 1).

Die innere Proberöhre hat eine Länge von ungefähr 70 *mm* und einen Durchmesser von 18 *mm*, die äussere Proberöhre eine Länge von ungefähr 80 *mm* und einen Durchmesser von 22 *mm*. Beide Röhren werden durch Gummibänder (Schlauchstücke) von 4 *mm* Breite äquidistant erhalten. Die weitere Proberöhre sitzt in der kreisförmigen Öffnung einer Platte, welche ein Becherglas

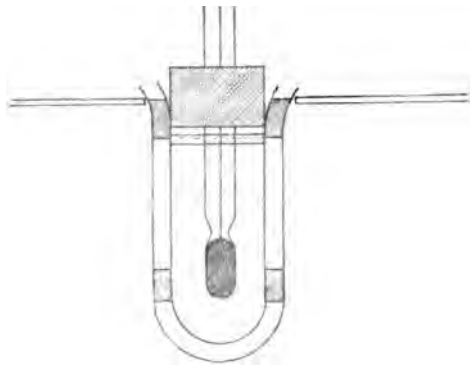


Fig. 1.

bedeckt, die innere Proberöhre trägt das Thermometer. In die innere Proberöhre kommt die nach der ersten Methode gewonnene Flüssigkeit, wenn die Temperatur derselben noch sehr hoch über dem Schmelzpunkt liegt. Die Bedingung des langsamen und gleichmässigen Abkühlens ist hier besonders gut erfüllt.

Als ich nach der ersten Methode das flüssige unterschwefligsaure Natron in einem etwas grösseren Glaskolben, also in einer etwas grösseren Menge unterkühlte, da sah ich zu wiederholtemmale, wie die Flüssigkeit in der Nähe von 10° C. von selbst erstarrte, wobei das Thermometer immer auf 48·1° C. stieg. Die Temperatur, bei der die Erstarrung von selbst erfolgte, war nicht immer die gleiche; sie war einmal 11·2° C., dann 9·5° C., 9·3° C., 8·8° C. und 8·4° C., der Verlauf war aber immer der nämliche. Es bildete sich nämlich an der Glaswand ein kleiner Stern

dessen Strahlen allmälig immer grösser wurden und schliesslich die ganze Masse durchzogen. Bei dem verwendeten Glaskolben (ungefähr 10 *cm* Durchmesser) dauerte das Wachsen der Strahlen etwa 30 Secunden. Was das Thermometer betrifft, so zeigte dasselbe, als der Stern entstand, noch keine Änderung der Temperatur an; erst als die Strahlen nach ungefähr 10 Secunden das Thermometer (das Gefäss desselben befand sich im Mittelpunkt) erreichten, stieg die Temperatur auf den Schmelzpunkt 48·1° C., ein Beweis, dass die festen Theile allein es sind, welche in dem Moment der Erstarrung die Schmelztemperatur annehmen. Die Strahlen haben ganz das Aussehen von magnetischen Linien, welche von dem zuerst entstandenen Sternchen auslaufen (Fig. 2).

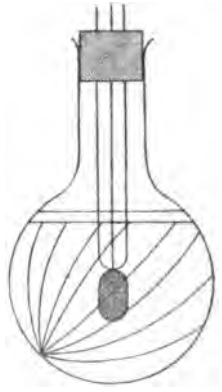


Fig. 2.

Wesentlich anders ist die Erscheinung, wenn man das unterschwefligsaure Natron nicht im Trockenkasten, sondern direct über einer kleinen Bunsenflamme etwas über 100° C. erhitzt und dabei eine kleine Menge Krystallwasser austreibt. Man erkennt das letztere an dem Aufsteigen von Blasen. Wird die so präparirte Flüssigkeit in einem Glaskolben in der oben beschriebenen Weise langsam und gleichmässig unterkühlt, dann entstehen darin bei ungefähr 8° C. schöne Krystalle, ohne dass die übrige Flüssigkeit erstarrt. Ja, diese Krystalle können sich wochenlang in der Flüssigkeit befinden, ohne dass die Flüssigkeit erstarrt. Man sieht dabei aber noch eine andere schöne Erscheinung, welche ich in einer nächsten Mittheilung ausführlich besprechen werde. Wenn nämlich die erwähnten Krystalle entstehen (sie entstehen zumeist auf der Bodenfläche), dann steigen von ihnen Schlieren in die Höhe, welche entweder von der Erstarrungswärme oder möglicherweise auch davon herrühren, dass die gefällten Krystalle als Gebilde von geringerem Krystallwassergehalt bei ihrer Bildung Krystallwasser abgeben. Diese Schlieren sind einige Tage lang zu sehen, dann verschwinden sie.

Die Bedingung zum Ausfallen der erwähnten Krystalle ist auch folgendermassen zu erhalten. Man schmilzt das unterschwefligsaure Natron so wie früher im Trockenkasten und bringt die Flüssigkeit bei einer Temperatur von 70—80° C. unter den Recipienten einer Luftpumpe. Wird die Luft bis zu einem Druck von ungefähr 20 *mm* herausgepumpt, dann steigt eine Menge von Blasen auf, welche Luft und Krystallwasser enthalten. Dass dabei Krystallwasser entweicht, sieht man daran, dass der Recipient ganz anläuft. Die Flüssigkeit wird dabei etwas trüb und die Trübung nimmt, wenn die Flüssigkeit bei einer Temperatur höher als 8° C. längere Zeit steht, immer mehr zu. Eine Erwärmung, selbst wenn sie bis 100° C. gesteigert wird, bringt die Trübung nicht mehr zum Verschwinden. Dieser letztere Umstand hängt mit einer Erscheinung zusammen, welche ich ebenfalls erst in der nächsten Mittheilung besprechen werde.

Das flüssige unterschwefligsaure Natron, aus dem eine gewisse Menge Krystallwasser ausgetrieben ist, zeigt noch eine andere Eigenthümlichkeit; die Flüssigkeit lässt sich nämlich sehr stark unterkühlen, ohne dass sie erstarrt. Die tiefste Unterkühlung, welche ich beobachtet habe, betrug —3° C. Freilich werden dabei bei einer Temperatur von ungefähr 8° C. die erwähnten Krystalle ausgefällt.

Ferner ist dabei noch hervorzuheben, dass die Flüssigkeit bei tiefen Temperaturen sehr zähe wird.

Ein Analogon zu dem Verhalten des flüssigen unterschwefligsauren Natrons, aus dem etwas Krystallwasser ausgetrieben worden ist, liefert eine Beobachtung des Herrn Pfaundler. Derselbe fand, dass eine Lösung von Glaubersalz $Na_2SO_4+10H_2O$ beim Abkühlen oft Krystalle von $Na_2SO_4+7H_2O$ gibt und dabei dennoch für das erste Salz übersättigt bleibt.[1]

---

[1] In Wüllner's Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 3, findet sich die Angabe, dass Despretz durch eine sehr lebhafte Bewegung einer Flüssigkeit ebenfalls bewirken konnte, dass sie weit unter der Erstarrungstemperatur noch flüssig blieb. Ich habe in Despretz' Schriften nachgesehen und nichts davon gefunden; die Angabe scheint auf einem Irrthum zu beruhen.

§. 2. Die Auslösung der Unterkühlung.

Die Unterkühlung wird aufgehoben entweder durch eine Erschütterung oder durch das Einführen eines noch so kleinen Splitters der festen Substanz, wodurch die Temperatur immer auf den Erstarrungspunkt steigt.

Das erstere wirkt nicht immer. Ist die Zähigkeit der Flüssigkeit gering, dann löst schon eine geringe Erschütterung, d. i. eine geringe relative Bewegung der Flüssigkeitstheilchen die Unterkühlung aus. So kann man unterkühltes Wasser durch Einführung eines Glasstabes oder durch aufsteigende Luftblasen zum Erstarren bringen. Ist aber die Flüssigkeit zäher, wie z. B. unterschwefligsaures Natron bei tiefen Temperaturen, dann muss die relative Bewegung der Flüssigkeitstheile schon eine sehr intensive sein, wenn es zum Erstarren kommen soll. Man kann, wie ich beobachtet habe, an dem Glaskolben klopfen, man kann ihn hin- und herschwenken, ja, man kann einen Glasstab einführen und wieder herausziehen, ohne dass die Flüssigkeit erstarrt. Erst wenn man den Glasstab transversal heftig hin und her bewegt, erstarrt die Flüssigkeit. Diese Bewegung muss desto intensiver sein, je tiefer die Unterkühlung vorgeschritten ist.

Man hat beobachtet, dass wenn man das Gefäss, in welchem eine unterkühlte Flüssigkeit sich befindet, öffnet, die Flüssigkeit kurze Zeit darauf erstarrt, und hat diese Erscheinung durch den Zutritt von Staub erklären wollen, in welchem Salzkryställchen schweben sollen. Ich halte diese Erklärung für unrichtig. Vielmehr bin ich der folgenden Ansicht: Die Flüssigkeit verdunstet. Wird das Gefäss, solange die Flüssigkeit sich über dem Schmelzpunkt befindet, geschlossen, dann kommt der Verdunstungsprocess allmälig zum Verschwinden, und es kann von dieser Seite der Unterkühlung kein Hinderniss entgegenstehen. Wird nun nach der Unterkühlung das Gefäss geöffnet, dann beginnt allmälig wieder die Verdunstung. Und die Verdunstung bewirkt nun zweierlei: erstens wird der Obenflächenschichte eine grosse Wärmemenge entzogen, welche bei dem schlechten Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeit durch die Leitung aus dem Inneren nicht ersetzt wird; dadurch entsteht in den Oberflächenschichten eine grosse Temperaturungleichheit. Zweitens ist die Verdunstung

als ein Übergang aus einem Aggregatzustand in den anderen mit starken molecularen Bewegungen verbunden. Und diese letzteren Bewegungen halte ich für die Hauptursache der Auslösung.

Die Unterkühlung kann ferner aufgehoben werden durch die Einführung eines Krystalles der unterkühlten Flüssigkeit. Von der Grösse dieses Krystalles hängt das gar nicht ab. Die Erstarrung erfolgt ganz sicher. Hier zeigt sich aber beim unterschwefligsauren Natron wieder eine merkwürdige Thatsache. Lässt man in dieser Flüssigkeit in der oben beschriebenen Weise Krystalle langsam ausfällen, so bleibt die Flüssigkeit, nachdem eine gewisse Zahl von Krystallen ausgeschieden ist, wochenlang ungeändert. Wenn man nun die Flüssigkeit, sei es durch eine heftige Erschütterung, sei es durch das Einführen eines frischen Krystalles, zum Erstarren bringt und dann aus der erstarrten Masse jene gefällten Krystalle loslöst, so kann man mit diesen Krystallen unterkühltes Natriumhyposulfid ganz ebenso sicher zum Erstarren bringen wie mit einem frischen Krystall.

Ich will noch eine Beobachtung anführen, die ich angestellt habe. Nachdem in einem Becherglas von 5 *cm* Weite, welches auf einer die Wärme schlecht leitenden Unterlage stand, flüssiges unterschwefligsaures Natron bis zum Erstarrungspunkt 48·1° C. erkaltet war, wurde in die Mitte der Flüssigkeit ein Krystall dieser Substanz gebracht. Während nun die Umgebung des Krystalles zunächst gar keine Änderung zeigte, traten an der äusseren Grenzfläche der Flüssigkeit, wo die Abkühlung am stärksten war, sofort kleine Krystalle auf, die sich mit der Zeit immer vergrösserten. Befände sich der Krystall nicht in der Flüssigkeit, dann würden an der Grenzfläche keine Krystalle auftreten, die Flüssigkeit würde sich unterkühlen lassen.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass magnetische Kräfte, auch wenn sie sehr gross sind, die Unterkühlung nicht aufheben.

§. 3. Die bisherigen Erklärungsversuche.

Eine Erklärung dafür, warum sich eine Flüssigkeit unterkühlen lasse, hat man noch nicht gefunden, man hat sich bloss für den Fall, als die Unterkühlung durch spontane Bildung eines Krystalles aufgehoben wird, diesen Vorgang an der Hand jener moleculartheoretischen Principien zurechtgelegt, welche Clausius

eingeführt hat. Indem bei der Unterkühlung, sagt man, die lebendige Kraft der Moleküle abnehme, nähern sich dieselben einander immer mehr, und nun kann es einmal eintreten, dass die Moleküle beim Zusammentreffen zufällig in die regelmässige und besonders stabile Lage gerathen, welche die krystallinische Beschaffenheit bedingt. Dadurch seien die Bedingungen für das Entstehen eines Kryställchens gegeben. Dadurch, dass nun von demselben diejenigen Moleküle festgehalten werden, welche in passender Weise auffallen, wächst der Krystall, und die Temperatur steigt bis zum Schmelzpunkt.

Dass die Vorstellung der Bewegung allein als Erklärungsgrund ganz unzureichend ist, ergibt sich aus folgender Betrachtung. Stellen wir uns eine Wasserkugel vor. Sinkt die Temperatur derselben gleichmässig und langsam unter 0° C., dann bleibt die Kugel flüssig. Sie kann in dem unterkühlten Zustand tagelang gehalten werden. Ja, wenn ich bedenke, dass ich flüssiges unterschwefligsaures Natron bei einer mittleren Temperatur von 10° C. wochenlang flüssig gesehen habe, bis ich dann die Flüssigkeit behufs eines Versuches absichtlich zum Erstarren gebracht habe, so kann ich mich der Anschauung nicht verschliessen, dass eine unterkühlte Flüssigkeit, wenn sie vor jeder Erschütterung und jeder stärkeren Temperaturänderung, durch welche in den Temperaturverhältnissen der einzelnen Flüssigkeitstheile Ungleichheiten entstehen könnten, bewahrt wird, für immer flüssig bleibt. Jedenfalls haben aber die Versuche verschiedener Beobachter gezeigt, dass sich unterkühlte Flüssigkeiten tagelang halten können. Angenommen, dass bei jeder Temperatur unterhalb des Erstarrungspunktes eine Krystallbildung wirklich in der Art möglich sei, dass die Moleküle beim Zusammentreffen zufällig in diejenige regelmässige und stabile Lage gerathen, welche die krystallinische Beschaffenheit bedingt, so muss mit Rücksicht auf die erwähnten Beobachtungen zugegeben werden, dass die Wahrscheinlichkeit der Krystallbildung für ein Zusammentreffen zweier Moleküle ausserordentlich klein ist. Nun halten wir damit die folgende Betrachtung zusammen.

Die Wasserkugel lassen wir einmal in der erwähnten Weise unterkühlen. Alsdann wollen wir ein zweitesmal, wenn die ganze Kugel eine Temperatur hat, die um einen äusserst kleinen Betrag

höher als 0° C. ist, in den Mittelpunkt einen Eiskrystall bringen und die Kugel wieder langsam erkalten lassen. Da werden wir nun sehen, dass das Wasser, wenn die ganze Kugel 0° C. erreicht hat und die Abkühlung noch weiter fortdauert, an der Oberfläche zu erstarren beginnt, während sich um den Krystall herum absolut nichts ändert. Ganz natürlich; denn wenn die Oberflächenschichten erstarren, dann hat die Grenzschichte der festen und flüssigen Theile immer die Temperatur von 0° C.; es muss sich also, solange die Erstarrung dauert, die ganze eingeschlossene Flüssigkeit auf der constanten Temperatur von 0° C. befinden. Da nun diese Erscheinung immer stattfindet, mag die Kugel wie gross auch immer sein, und da wir uns doch in beiden Fällen die Bewegung der Moleküle der Flüssigkeit in der Oberfläche ganz gleich vorstellen müssen, so entsteht die Frage: Warum ist in dem zweiten Falle, wenn die Geschwindigkeit der Moleküle in der Oberfläche unter den kritischen Werth sinkt, die Eisbildung nicht mehr Sache des zufälligen Zusammentreffens zweier Moleküle, sondern Sache der Naturnothwendigkeit?

Die obige Moleculartheorie kann diesen wesentlichen Punkt nicht erklären, sie kann demnach nicht der wahre Ausdruck der Thatsachen sein.

Auch die Thatsache, dass flüssige Kügelchen, welche in Flüssigkeiten von gleicher Dichte schweben, sich desto tiefer unterkühlen lassen, je kleiner sie sind, hat man (Frankenheim, Pogg. Ann., 111) ähnlich erklären wollen. Die Unterkühlung werde, meinte man, aufgehoben, indem sich an irgend einer Stelle ein Krystall spontan bilde. Je kleiner nun der Tropfen ist, desto kleiner sei die Wahrscheinlichkeit der Krystallbildung. Ich bin der Meinung, dass wenn Tropfen von 1—2 *cm* Durchmesser und mikroskopisch kleine Tröpfchen sich bezüglich der Unterkühlung wesentlich verschieden verhalten, der Grund einzig und allein in der Wirkung der Capillarkräfte zu suchen ist. Ich werde später noch einmal darauf zurückkommen.

§. 4. Der Grundgedanke der vorliegenden Theorie.

Bei Abfassung dieser Theorie stützte ich mich zunächst auf die erste jener Regeln, welche Newton zur Erforschung der

Natur aufgestellt hat, nämlich auf die Regel, „an Ursachen zur Erklärung natürlicher Dinge nicht mehr zuzulassen, als wahr sind und zur Erklärung jener Erscheinungen ausreichen."

Der Erstarrungsprocess ist der Übergang aus dem flüssigen in den festen Zustand, und dieser Übergang findet bei einer bestimmten Temperatur, dem Erstarrungspunkt, statt. Wird die Flüssigkeit unterkühlt, dann kann der kleinste Krystall die sofortige Erstarrung einleiten, wobei die Temperatur auf den Erstarrungspunkt steigt. Was ist also der einfachste Ausdruck dieser Thatsache? Der Zustand der unterkühlten Flüssigkeit ist ein potentieller Erstarrungszustand, d. h. die unterkühlte Flüssigkeit hat bereits in ihren kleinsten Theilen jene Eigenschaften, welche den festen Körpern wesentlich zukommen. Demnach wollen wir den Zustand einer unterkühlten Flüssigkeit als einen solchen Zustand betrachten, bei dem die wesentlichen Eigenschaften der Flüssigkeiten mit den wesentlichen Eigenschaften der festen Körper, insoweit sie sich nicht widersprechen, vereinigt sind. Jede andere Voraussetzung ist ausgeschlossen.

Um unsere Aufgabe durchzuführen, gehen wir von dem Princip der Energie aus. Dasselbe lehrt uns die inneren Kräfte der unterkühlten Flüssigkeit als von wesentlich derselben Natur wie die inneren Kräfte eines festen Körpers kennen. Ein Unterschied ist nur der: Während in einem homogenen festen Körper die Druckcomponenten sich stetig mit dem Orte ändern, können dieselben in einer unterkühlten Flüssigkeit nicht stetig sein; denn die Stetigkeit der Druckcomponenten in einem homogenen festen Körper bringt es mit sich, dass gegebenen äusseren Umständen, also einem gegebenen äusseren Druck und gegebenen von aussen wirkenden Massenkräften eine eindeutige Lösung, d. i. ein eindeutiger Zustand entspricht. Bringen den Körper neue Kräfte aus diesem Zustand, dann kehrt er nach Wegfall derselben in ihn immer wieder zurück; der Zustand ist also ein stabiler Gleichgewichtszustand. Wenn nun aber der Körper bei denselben äusseren Umständen im unterkühlten Zustand einen zweiten Gleichgewichtszustand haben kann und die Druckcomponenten dennoch die einem festen Körper entsprechenden Eigenschaften besitzen, so ist das nur möglich,

wenn die Druckcomponenten unstetig sind. Wären sie stetig, dann wäre der feste Zustand der einzige Zustand, den der Körper bei den gegebenen äusseren Umständen haben kann. Die Auslösung der Unterkühlung oder der Übergang in den stabilen festen Zustand ist gleichbedeutend mit dem Stetigwerden der Druckcomponenten oder mit dem Auftreten eines Potentials, welches selbstverständlich dieselbe Form haben muss wie das Potential des festen Körpers, der durch die Erstarrung zu Stande kommt. Und die Form dieses Potentials ist gerade das Entscheidende für das Verhalten einer unterkühlten Flüssigkeit gegenüber auslösenden Tendenzen.

Es entsteht nun die Frage: Wie haben wir uns den Zustand vorzustellen, damit die Druckcomponenten unstetig sind? Durch Schlüsse verschiedener Art werden wir zu der Vorstellung geführt, dass wenn bei der Abkühlung der Erstarrungspunkt erreicht wird, die kleinsten Theilchen der Flüssigkeit eine krystallinische Structur annehmen, dass aber in Folge der freien Beweglichkeit dieser Theilchen oberhalb des Erstarrungspunktes die Symmetrieebenen der Elementarkrystalle alle möglichen Richtungen haben, so dass die Symmetrieebenen zweier benachbarter Elementarkrystalle um endliche Winkel gegen einander gedreht sind. Andere Betrachtungen führen uns ferner zu dem Schlusse, dass die Druckkräfte, welche zwischen zwei benachbarten Elementarkrystallen zur Geltung kommen, zur Fläche senkrecht stehen, also von derselben Natur wie in einer Flüssigkeit sind. Wird nun der letztere Umstand mit der erwähnten Lage der Symmetrieebenen verbunden, so gelangen wir sofort zur Unstetigkeit der Druckcomponenten.

Wird ein Elementarkrystall gedreht, so dass seine Symmetrieebene mit denen eines benachbarten Elementarkrystalles zusammenfallen, dann werden die Druckcomponenten stetig, und es kommt zu einer Erstarrung.

Das sind die Grundzüge der folgenden Theorie. Indem wir dann noch zum Schlusse einige Folgerungen ziehen, gelangen wir zur theoretischen Grenze der Unterkühlung und damit zu einer höchst einfachen Anschauung über den amorphen und weichen Zustand.

§. 5. Das Princip der Energie.

Die Erfahrung lehrt, wie wir gesehen haben, zweierlei:

1. Hat die Flüssigkeit den Erstarrungspunkt erreicht und ist sie ganz homogen, dann lässt sie sich bei vollständiger Ruhe und langsamer, gleichmässiger Wärmeabfuhr unterkühlen.

2. Ist sie beim Erstarrungspunkt inhomogen, d. h. befinden sich in ihr erstarrte Theile, dann ist selbst bei vollständiger Ruhe und langsamer, ganz gleichmässiger Wärmeabfuhr eine Unterkühlung unmöglich, die Flüssigkeit erstarrt vielmehr an der Grenzschichte, d. i. dort, wo die Temperatur, wenn die Flüssigkeit nicht erstarren würde, zuerst unter den Erstarrungspunkt sinken würde. Liegt der erstarrte Theil in der Mitte, so wie wir es uns bei der Wasserkugel vorgestellt haben, dann ändert er sich solange nicht, bis die Erstarrung von der Grenzfläche bis zu ihm vorgeschritten ist.

Eine befriedigende Erklärung dieses so verschiedenen Verhaltens ist bisher noch nicht gegeben worden.

Die Flüssigkeit sei homogen, habe die Masse M und, wenn sie den Erstarrungspunkt erreicht hat, die Energie ME_1. Soll sie beim Erstarrungspunkt ganz erstarren, dann ist ihr die Erstarrungswärme $M\lambda$ zu entziehen, und zwar jedem Element dM die Wärmemenge λdM. Sehen wir von der der Volumänderung entsprechenden Arbeit der äusseren Druckkräfte ab, und bezeichnen wir die Energie der festen Substanz beim Erstarrungspunkt mit ME_2, so besteht die Gleichung:

$$M(E_1 - E_2) = \mathfrak{A} M\lambda \quad \text{oder} \quad E_1 - E_2 = \mathfrak{A}\lambda, \qquad \ldots 1)$$

wo $\mathfrak{A}$ das Arbeitsäquivalent einer Wärmeeinheit bedeutet. Wird nun anderseits der homogenen Flüssigkeit bei dem Vorgang der Unterkühlung eine Wärmemenge $m\lambda$, welche kleiner als $M\lambda$ ist, gleichmässig entzogen, so wird die Energie der Substanz einen solchen Werth E annehmen, dass

$$M(E_1 - E) = \mathfrak{A} m\lambda \quad \text{oder} \quad E_1 - E = \mathfrak{A} \cdot \frac{m}{M} \lambda \qquad \ldots 2)$$

ist, oder wenn wir 1) und 2) zusammenfassen

$$E_1 - E = \frac{m}{M} (E_1 - E_2). \qquad \ldots 3)$$

Wir sehen zunächst daraus, dass

$$E_1 > E > E_2.$$

Zugleich sinkt aber bei der Unterkühlung die Temperatur von τ auf t, so dass

$$CM(\tau - t) = m\lambda, \qquad \tau - t = \frac{m\lambda}{CM} \qquad \ldots 4)$$

wird, wo C die mittlere specifische Wärme bedeutet. Fassen wir wieder 4) und 2) zusammen, so erhalten wir

$$E_1 - E = \mathfrak{A}C(\tau - t), \qquad \ldots 5)$$

d. h. die Energie nimmt proportional der Unterkühlung ab.

Würde bei der Wärmeabfuhr von $m\lambda$ eine Erstarrung bei der Schmelztemperatur τ stattgefunden haben, dann würden genau dieselben Gleichungen 2) und 3) gelten. Natürlich würde ME die Energie der ganzen Substanz bedeuten, und wir sehen aus 3), dass

$$ME = (M - m)E_1 + mE_2$$

ist, wo m die Masse des erstarrten und $M - m$ die des flüssigen Theiles ist. Ein Element dM des flüssigen Theiles hat die Energie $E_1 dM$ und ein Element dM des festen Theiles die Energie $E_2 dM$, kein einziges Element hat aber die Energie EdM. Ist die Flüssigkeit unterkühlt, dann hat jedes Element dM die Energie EdM.

Wird die unterkühlte Flüssigkeit erschüttert, dann erstarrt sie zum Theil, und es wachsen die Energien der einen Elemente von EdM auf $E_1 dM$, während die Energien der anderen Elemente von EdM auf $E_2 dM$ sinken. Beim Beginn dieses Processes haben alle Elemente dieselbe Temperatur t, am Ende alle dieselbe Temperatur τ.

Was sagt nun das Princip der Energie aus? Jene vom augenblicklichen Zustande des Körpers abhängende Function E, welche Energie heisst, hat die Eigenschaft, in jedem Zeitraum um ebensoviel anzuwachsen, als die dem Körper während dieses Zeitraumes von aussen zugeführte Arbeit und Wärme beträgt. Wenn also bei dem Erstarrungsprocess die Energie eines Massenelementes von dem Werthe EdM auf den Betrag $E_2 dM$ sinkt, so muss von ihm eine dem gleiche Summe von Arbeit und Wärme

nach aussen abgegeben worden sein. Der Wärmeaustausch allein kann unmöglich diesen Process einleiten, denn zu einem Wärmeaustausch gehört eine Temperaturdifferenz, und diese ist, wie wir gesehen haben, zu Beginn des Processes nirgends vorhanden, also müssen wir schliessen, dass der Erstarrungsprocess durch mechanische Kräfte eingeleitet wird, und zwar durch jene Kräfte, welche zwischen dem Massenelement dM und den umliegenden Elementen thätig sind. Mit anderen Worten, wollen wir die Unterkühlung und den Erstarrungsprocess einer Flüssigkeit verstehen, so müssen wir uns zunächst von der Wirkungsweise der inneren Kräfte Rechenschaft geben.

§. 6. Die inneren Kräfte.

Welcher Natur sind nun diese Kräfte? Liegt die Temperatur über dem Schmelzpunkt, dann sind diese Kräfte nicht vorhanden; denn ich kann dann die Flüssigkeit so heftig erschüttern als ich will, eine Erstarrung tritt niemals ein. Und bringe ich einen Krystall dieser Substanz hinein, so wird im Gegentheil der Krystall schmelzen.

Anders ist die Sache bei einer unterkühlten Flüssigkeit. Mag die Temperatur derselben dem Schmelzpunkt noch so nahe liegen, eine heftige Erschütterung oder ein eingeführter Krystall leitet sofort die Erstarrung ein. Wir müssen also sagen: Jene inneren Kräfte sind nur unterhalb des Schmelzpunktes vorhanden und beginnen mit diesem.

Bei der Untersuchung der Bewegung der natürlichen Körper hat man bekanntlich auf die relativen Verschiebungen der einzelnen Theile zu achten und zur Vereinfachung der Beschreibung ausser den Massenkräften noch sogenannte Oberflächenkräfte oder Druckkräfte in Betracht zu ziehen. Wenn man sich die Druckkraft, welche auf ein Oberflächenelement eines unendlich kleinen Massentheilchens mit der Normale n wirkt, nach drei aufeinander senkrechten Coordinatenrichtungen x, y, z zerlegt denkt — dieselben heissen X_n, Y_n, Z_n — so lassen sich bekanntlich die Componenten aller Druckkräfte, welche in der Oberfläche des unendlich kleinen Massentheilchens in Betracht kommen, durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) \\ Y_n &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz) \\ Z_n &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz) \end{aligned}\right\} \quad \ldots 1)$$

auf die 9 Componenten X_x, X_y..., welche rechts stehen, zurückführen. Und von diesen gilt die Annahme, dass sie für jeden unendlich kleinen Theil eines Körpers nur abhängig sind von dem Zustand und der Zustandsänderung dieses Theiles.

Sind die 9 Componenten X_x, X_y... einwerthig und stetig und bezeichnen $\mu X d\omega$, $\mu Y d\omega$, $\mu Z d\omega$ die Componenten der auf das Massenelement $\mu d\omega$ wirkenden Kraft, so gelten für den Zustand des Gleichgewichtes die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mu X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ \mu Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} \\ \mu Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots 2)$$

Ferner gelten unter derselben Voraussetzung die Gleichungen

$$X_y = Y_x, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \qquad \ldots 3)$$

so dass die erwähnten 9 Componenten für den Fall, dass sie einwerthig und stetig sind, sich auf die 6 Componenten

$$X_x,\ Y_y,\ Z_z,\ Y_z,\ Z_x,\ X_y$$

reduciren.

Diese Componenten haben für die verschiedenen Classen von Körpern verschiedene Ausdrücke. Für einen festen Körper sind sie im Allgemeinen von einander und von Null verschieden. Für Flüssigkeiten, welche eine Reibung haben, gilt dasselbe, aber allerdings nur so lange, als die Geschwindigkeit der Bewegung der Massentheilchen mit dem Orte veränderlich ist. Ist die relative Geschwindigkeit aller Theilchen gleich Null, dann erhalten die obigen 6 Componenten ganz dieselben Ausdrücke wie für Flüssigkeiten ohne Reibung, nämlich

$$\begin{aligned} Y_z = Z_x = X_y &= 0 \\ X_x = Y_y = Z_z &= p \end{aligned} \qquad \ldots 4)$$

Der Druck p steht dann immer zur Oberfläche senkrecht.

Liegt die Temperatur einer Flüssigkeit über dem Schmelzpunkt τ, dann gelten für den Zustand der Ruhe die Gleichungen 4). Bei einer heftigen Erschütterung werden die 6 Componenten, weil in der Natur eine jede Flüssigkeit eine gewisse Zähigkeit besitzt, sämmtlich von Null verschieden, es werden aber mit dem Zustand der Ruhe die Gleichungen 4) wieder hergestellt. Anders ist die Sache, wenn wir die Flüssigkeit langsam, gleichmässig und ohne jede Erschütterung unterkühlen. Sinkt die Temperatur unter τ und bringen wir mit der Flüssigkeit einen Krystall einer fremden Substanz ganz langsam und ohne jede Erschütterung in Berührung, so ändert sich, mag der Krystall wie lange immer mit der Flüssigkeit in Berührung stehen, der Zustand nicht, ein Beweis, dass die Berührung an und für sich ohne Einfluss ist, bringen wir aber einen Krystall von derselben Substanz zur Berührung, dann erfolgt sofort eine theilweise Erstarrung. Da wir nun, wie wir gesehen haben, den Übergang des betreffenden Theiles in den festen Aggregatzustand als durch die Wirkung der inneren Kräfte oder Spannungen eingeleitet ansehen müssen und da ferner die Kräfte, unter deren Wirkung die Körpertheilchen aus der einen Anordnung in die andere übergehen, für den ganzen Verlauf dieses Überganges nur von derselben Natur sein können, so folgt daraus, dass die inneren Kräfte schon zu Beginn der Erstarrung, also schon beim Zustand der Unterkühlung dieselben charakteristischen Eigenschaften haben wie die inneren Druckkräfte eines festen Körpers.

Wir wollen jetzt einen Begriff heranziehen, welchen Kirchhoff in der Theorie der Elasticität mit grossem Erfolge angewendet hat. Kirchhoff hat in der 11. Vorlesung seiner Mechanik gezeigt, dass wenn man das d'Alembert'sche Princip, das Princip der virtuellen Verrückungen oder das Hamilton'sche Princip auf Körper anwenden will, deren Theile relative Verschiebungen erfahren, man zu der Arbeit jener Kräfte, welche auf die Massentheile wirken, und der Druckkräfte, welche auf die Oberfläche wirken, noch eine Grösse hinzufügen muss, welche durch die Gleichung:

$$F = \int d\omega \left\{ X_x \frac{\partial \delta x}{dx} + Y_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + Z_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + Y_z \left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) + Z_x \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) + X_y \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta x}{\partial x} \right) \right\}$$

definirt ist. In derselben bedeuten $d\omega$ ein Raumelement und δx, δy, δz die Componenten einer unendlich kleinen, virtuellen Verrückung eines Punktes, von denen aber vorausgesetzt wird, dass sie sich überall stetig mit dem Orte ändern. Auch von den Componenten X_x, Y_y... ist die Stetigkeit vorausgesetzt. Da man die Grösse F als die Arbeit gewisser Kräfte für die gedachte Verrückung ansehen kann, so nennt man dementsprechend diese Kräfte innere Kräfte zum Unterschied der oben erwähnten äusseren Kräfte.

Kirchhoff hat ferner noch Folgendes gezeigt. Wir denken uns einen Körper, dessen Punkte in eine solche Lage gebracht werden können, dass die sämmtlichen Druckcomponenten in ihm gleich Null sind; diesen Zustand nennt man seinen natürlichen Zustand. Sind x, y, z die Coordinaten eines Punktes des Körpers, wenn dieser sich in seinem natürlichen Zustand befindet, und $x+u$, $y+v$, $z+w$ die Coordinaten desselben Punktes nach einer unendlich kleinen Verrückung zur Zeit t, dann setzt Kirchhoff:

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y_z = z_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$
$$y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z_x = x_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad x_y = y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Es gibt nun immer, mag der Körper isotrop oder krystallinisch sein, eine homogene Function zweiten Grades der sechs Argumente x_x, y_y... mit constanten Coëfficienten von der Eigenschaft, dass — die Function heisse f —

$$X_x = \frac{\partial f}{\partial x_x}, \quad Y_z = Z_y = \frac{\partial f}{\partial y_z}$$
$$Y_y = \frac{\partial f}{\partial y_y}, \quad Z_x = X_z = \frac{\partial f}{\partial z_x}$$
$$Z_z = \frac{\partial f}{\partial z_z}, \quad X_y = Y_x = \frac{\partial f}{\partial x_y}$$

ist. Bedenken wir nun, dass die δu, δv, δw jetzt dasselbe sind wie oben die δx, δy, δz, so wird

$$F = \delta \int f d\omega$$

oder die inneren Kräfte haben ein Potential, und zwar $\int f d\omega$.

Für den natürlichen Zustand des Körpers, welcher ein Zustand stabilen Gleichgewichtes ist, ist $\int f d\omega$ ein Maximum; also ist f ein Maximum für $x_x = 0, y_y = 0 \ldots$, wenn $x_x, y_y \ldots$ als unabhängige Variable angesehen werden. Und da f eine homogene Function zweiten Grades der genannten Argumente ist, so hat f die Eigenschaft, dass es nie positiv ist und nur verschwindet, wenn jedes seiner Argumente verschwindet.

Aus dieser letzten Eigenschaft hat Kirchhoff bewiesen, dass u, v, w eindeutig bestimmt sind durch die Gleichungen 2), die Bedingung, dass an der Oberfläche X_n, Y_n, Z_n gegebene Werthe erhalten und die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} u = 0, & v = 0, & w = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0, & \frac{\partial v}{\partial z} = 0, & \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \text{ für } x = 0, y = 0, z = 0.$$

Lässt man die letzten Gleichungen fallen, so bestimmen die Gleichungen 2) und die Werthe von X_n, Y_n, Z_n den Zustand des Körpers, nämlich die relativen Verschiebungen seiner Theile, während die Lage des Körpers unbekannt bleibt.

Besitzt eine Substanz den Zustand einer unterkühlten Flüssigkeit, dann entspricht den gegebenen äusseren Umständen, nämlich den gegebenen äusseren Druckkräften und Massenkräften, nicht mehr eine eindeutige Lösung, denn die Substanz hat in diesem Falle zwei Gleichgewichtszustände. Folglich können für die Druckcomponenten einer unterkühlten Flüssigkeit nicht mehr jene Voraussetzungen gelten, welche dem Kirchhoff'schen Beweise zu Grunde liegen, die Druckcomponenten einer unterkühlten Flüssigkeit können nicht stetig sein.

Die Druckcomponenten $X_x, Y_y \ldots$ haben demnach in einer unterkühlten Flüssigkeit dieselben Eigenschaften wie an der Berührungsfläche zweier fester Körper, denn da können sie ebenfalls Sprünge erleiden, während X_n, Y_n, Z_n stetig sind.

Wie haben wir uns nun diese Eigenschaften zurechtzulegen? Bringen wir mit der unterkühlten Flüssigkeit einen Krystall von derselben Substanz in Berührung, so erfolgt eine theilweise Erstarrung. Die Erstarrung beruht auf einer solchen Aneinanderlagerung von Elementarkrystallen, bei welcher die Symmetrieebenen derselben zusammenfallen. Diese Anordnung geht von dem Krystall aus. Eine Erschütterung kann die theilweise Erstarrung ebenfalls herbeiführen, und von der Erschütterung wissen wir, dass sie zunächst eine relative Verrückung der Theilchen herbeiführt. Wenn wir nun von der zweiten Regel, welche Newton gegeben hat, nämlich von der Regel, „gleichartigen Wirkungen dieselben Ursachen zuzuschreiben", ausgehen, so gelangen wir zu der Vorstellung, dass die unterkühlte Flüssigkeit aus unendlich vielen Elementarkrystallen besteht.

Diese Elementarkrystalle entstehen in dem Moment, als bei der Abkühlung der Erstarrungspunkt erreicht wird, und die freie Beweglichkeit der Theilchen oberhalb des Erstarrungspunktes bringt es mit sich, dass wenn die Elementarkrystalle entstehen, die Symmetrieebenen derselben alle möglichen Lagen haben, so dass die Symmetrieebenen benachbarter Elemente gegen einander um endliche Winkel gedreht sind.

Aus diesem letzteren Grunde müssen die Druckcomponenten $X_x, X_y \ldots$, welche innerhalb eines jeden Elementarkrystalles stetig sind, an der Berührungsfläche zweier benachbarter Elementarkrystalle Sprünge erleiden. Nur die Componenten X_n, Y_n, Z_n sind auch an dieser Fläche stetig.

Was diese letzteren Componenten anbelangt, so gelangen wir zu einer sehr einfachen Folgerung durch die folgende Betrachtung. Wir betrachten in dem Körper einen unendlich kleinen Cylinder, in dem die Grundflächen gegen die Mantelfläche verschwinden mögen. Projiciren wir die Druckkraft, welche auf ein Element der Mantelfläche wirkt, auf eine Richtung, welche zum Radius und zur Axe senkrecht steht — die Componente heisse S_n — dann ist für den Fall des Gleichgewichtes $\int S_n ds = 0$.

Nun denken wir uns ein äusseres Kräftepaar zur Anwendung gebracht, welches den Cylinder in einem bestimmten Sinn zu drehen sucht. Haben wir es mit einem homogenen festen Körper, in dem Alles stetig ist, zu thun, dann wird das Moment der

inneren Kräfte nicht mehr gleich Null sein, sondern es wird, wenn Gleichgewicht eintritt, gleich und entgegengesetzt sein dem Moment des äusseren Kräftepaares. In einer Flüssigkeit dagegen bleibt, wenn das angewandte Kräftepaar die Drehung unendlich langsam vornimmt, so dass der Einfluss der Reibung wegfällt, das Moment der inneren Kräfte stets gleich Null, mag die Drehung wie gross auch immer sein. Der gedrehte Cylinder hat nicht das Bestreben, in seine frühere Lage zurückzukehren. Hier sind also die Componenten S_n von den relativen Verschiebungen ganz unabhängig; waren sie einmal gleich Null, dann sind sie es für immer. Für eine Flüssigkeit können wir also im Ruhezustande oder bei unendlich langsamen Verschiebungen alle S_n gleich Null setzen, d. h. es sind bloss X_x, Y_y, Z_z von Null verschieden und, wie die Betrachtung des Tetraëders lehrt, einander gleich.

Nun denken wir uns, dass in eine unterkühlte Flüssigkeit ein dünner Glasstab hänge. Einer kleinen und sehr langsam vorgenommenen Drehung setzt die Flüssigkeit keinen Widerstand entgegen, ein Beweis, dass die unterkühlte Flüssigkeit mit einer gewöhnlichen Flüssigkeit eine wesentliche Eigenschaft gemein hat. Der Unterschied tritt erst dann ein, wenn eine rasche Drehung eine beträchtliche Reibung und damit eine relative Verschiebung der Theilchen hervorruft, denn dann erfolgt die theilweise Erstarrung. Dieser Umstand führt uns also zu dem Schlusse, dass in einer unterkühlten Flüssigkeit beim Ruhezustande oder bei einer sehr langsamen Bewegung die Druckkräfte an der Grenzfläche eines Elementarkrystalles dieselben Eigenschaften wie die Druckkräfte in einer gewöhnlichen Flüssigkeit haben, nämlich die Eigenschaft, zur Fläche senkrecht zu stehen.

In diesem Schlusse steckt noch eine Consequenz. Sind die Kräfte, mit welchen zwei benachbarte Elementarkrystalle einander drücken, zur Berührungsfläche senkrecht, dann folgt daraus, dass sie aufeinander keine richtenden Kräfte ausüben. Bringen wir diesen Umstand damit in Zusammenhang, dass die Symmetrieebenen in den beiden Elementarkrystallen gegen einander um endliche Winkel gedreht sind, so können wir sagen: Für die richtenden Kräfte ist durch diese Lage der Symmetrieebenen

sozusagen die Elasticitätsgrenze überschritten. Da bei allen Flüssigkeiten die Cohäsion in dem Masse zunimmt, als die Temperatur abnimmt, so wird der Zustand der Elementarkrystalle sich mit abnehmender Temperatur dem Zustand der festen Krystalle immer mehr nähern. Ob dabei die Krystalle jemals die Eigenschaft erlangen können, aufeinander richtend einzuwirken, lässt sich natürlich nicht angeben.

§. 7. Folgerungen.

Wir haben gesehen, dass wenn in einem homogenen Körper die Druckcomponenten stetig sind, die inneren Kräfte ein Potential $\int f d\omega$ haben, in dem f eine homogene Function zweiten Grades der sechs Argumente $x_x, y_y \ldots$ mit constanten Coëfficienten ist. Die constanten Coëfficienten heissen die Constanten der Elasticität. Für eine Flüssigkeit, deren Temperatur oberhalb des Schmelzpunktes τ liegt, wird f besonders einfach, es wird nämlich

$$f = a(x_x + y_y + z_z)^2,$$

wo a eine Constante bedeutet. Wird die Flüssigkeit unterkühlt, dann entstehen darin in dem Moment, als der Schmelzpunkt erreicht wird, Elementarkrystalle, für welche nach dem Vorhergehenden die Function f dieselbe Form haben muss wie für den festen Körper, welcher aus der Flüssigkeit durch Erstarrung entsteht, nur mit dem Unterschied, dass die Grösse der Constanten im Allgemeinen eine andere ist.

Da die Function f für die verschiedenen Krystallsysteme eine verschiedene Form hat, so wird sie natürlich auch dann, wenn diese Substanzen sich im Zustande unterkühlter Flüssigkeiten befinden, für die Elementarkrystalle verschiedene Formen haben.

In einer unterkühlten Flüssigkeit ist die Temperatur an allen Stellen gleich; wir werden also sagen können, die Constanten der Function f haben für alle Elementarkrystalle dieselbe Grösse.

Wir betrachten jetzt die Wirkung fester Körper bei ihrer Berührung mit einer unterkühlten Flüssigkeit. Bei dieser Berührung treten sogenannte Capillarkräfte auf. Um die Capillarerscheinungen zu erklären, hat bekanntlich Laplace die Annahme gemacht, dass die Capillarkräfte Kräfte sind, mit welchen die Theilchen der Körper aufeinander einwirken und welche nur

in einer äusserst kleinen Entfernung wirken, eine Annahme, welche mit jener Grundannahme übereinstimmt, welche Navier, Poisson und Cauchy, die Urheber der Theorie der elastischen Kräfte, sich gebildet haben, um die elastischen Spannungen zu erklären. Nach den letzteren ergibt sich der Druck auf eine im Innern eines festen elastischen Körpers gelegene Fläche aus der Kraftwirkung, welche die zu beiden Seiten dieser Fläche gelegenen Massentheilchen aufeinander ausüben. Beide Grundanschauungen nähern sich einander noch mehr, wenn die Temperatur der Flüssigkeit unter dem Erstarrungspunkt liegt und die Flüssigkeit aus Elementarkrystallen besteht, welche die wesentlichen Eigenschaften von festen elastischen Körpern haben. Wenn wir also sehen, dass ein fester Körper bei seiner Berührung mit einer unterkühlten Flüssigkeit elastische Veränderungen hervorbringt, so kann uns nach dem Gesagten eine derartige Erscheinung nicht mehr befremden, denn ihr Grund liegt in der gleichen Natur der erwähnten Kräfte. Ferner sehen wir auf den ersten Blick ein, dass es für die elastische Wechselwirkung der beiden Substanzen ein grosser Unterschied ist, ob die Function f, welche im Potential der inneren Kräfte auftritt, für beide Substanzen dieselbe Form hat oder nicht. Denn ist der feste Körper ein Krystall der Flüssigkeit, dann werden, wenn ein Elementarkrystall der unterkühlten Flüssigkeit sich an den festen Krystall so anlegt, dass die Symmetrieebenen zusammenfallen, die Druckcomponenten X_x, X_y... an der Berührungsfläche stetig. Ist aber der feste Körper von einer ganz anderen Krystallform, dann gibt es für die Elementarkrystalle keine einzige Lage, für welche jene Druckcomponenten an der Berührungsfläche jemals stetig werden könnten.

Betrachten wir jetzt die Wirkung der die unterkühlte Flüssigkeit berührenden festen Körper etwas näher, und zwar zunächst die Wirkung eines festen Krystalles von derselben Substanz. Da die Elementarkrystalle gegen den festen Krystall unendlich klein sind, so kommt derselbe mit einer unendlich grossen Zahl in Berührung und wird demnach die Zahl jener Elementarkrystalle, für welche die Symmetrieebenen mit den Symmetrieebenen des festen Krystalles entweder keinen oder einen kleinen Winkel einschliessen, ungemein gross sein. Alle diese Elementarkrystalle

werden von dem festen Krystall mit diesem gleichgerichtet, und zwar mit einer Kraft, welche, wie wir aus dem Verhältniss der Adhäsion zur Cohäsion schliessen, sehr beträchtlich ist.

Die Lagenänderung der gerichteten Elementarkrystalle ändert den Druck, den diese gegen die benachbarten Elementarkrystalle ausgeübt haben, und stört in Folge dessen das Gleichgewicht der letzteren. Auf diese Weise kommen die benachbarten Elementarkrystalle in Bewegung und nehmen, da für sie nur jene Lage eine Lage stabilen Gleichgewichtes ist, bei welcher sie mit dem festen Krystall gleichgerichtet sind, grösstentheils diese Lage an. Indem so die Störung des Gleichgewichtes von Schichte zu Schichte fortschreitet, ordnen sich alle Elementarkrystalle so, dass sie sämmtlich gleichgerichtet werden.

Die Erscheinung hat eine grosse Analogie zu den magnetischen Erscheinungen, und ich verweise in dieser Beziehung auf die Fig. 2. Nähern wir einer Glasplatte, auf welcher sich Eisenpulver befindet, einen Magnetstab, so richten sich die Theilchen zu den bekannten Kraftlinien, und diese Linien bleiben bestehen, wenn man den Magnetismus verschwinden lässt. Ein Unterschied liegt nur darin, dass man mit sehr schwachen magnetischen Kräften fast nichts erhält, während man eine Unterkühlung durch den kleinsten Krystall auslösen kann. Freilich ist gegen die Elementarkrystalle selbst der kleinste Krystall, mit dem wir experimentiren, ungemein gross.

Wenn wir auf den auf S. 1205 angeführten Fall der Wasserkugel zurückgreifen, so erscheint uns jetzt nach dem Gesagten die Erstarrung an der Oberfläche bei Anwesenheit des Eiskrystalles in dem Mittelpunkt als vollkommen verständlich. Denn die scheinbare Fernwirkung des Krystalles beruht darauf, dass alle Elementarkrystalle des Wassers durch ihn dieselbe Richtung erhalten haben.

Die Gleichgewichtsstörung, welche von dem festen Krystall ausgeht, braucht zu ihrer Ausbreitung Zeit. Ich habe schon oben einen Versuch erwähnt, bei welchem unterschwefligsaures Natron in einem Glaskolben von ungefähr 10 *cm* Durchmesser bei einer Temperatur von 9° C. durch einen kleinen, an der Glaswand sich bildenden Krystall erstarrte. Die Zeit, in welcher die Erstarrung sich von dem Krystall bis zu dem in der Mitte befind-

lichen Thermometergefäss ausbreitete, betrug ungefähr 10 Secunden. Das Thermometer zeigte während dieser Zeit nicht die geringste Veränderung, erst beim Eintreffen der Erstarrung stieg das Quecksilber.[1]

Wenn zwei benachbarte Elementarkrystalle, sei es durch die vermittelnde Wirkung eines Krystalles, sei es durch die relative Bewegung der Theilchen bei einer Erschütterung, gleichgerichtet werden, so sind sie noch nicht in demselben Zustand wie der feste Krystall, denn die Function f hat in ihnen wohl dieselbe Form wie in dem festen Krystall, aber die Coëfficienten der Elasticität sind noch von anderer Grösse. Diese Coëfficienten ändern sich nun mit der Zeit. Wird nämlich bei der gegenseitigen Lagerung der Elementarkrystalle die Elasticitätsgrenze der richtenden Kraft überschritten, dann kommt es zu einer Arbeitsleistung der elastischen Kräfte, welche bis zum Eintreten der stabilen Lage dauert und welche sich in Wärme umsetzt. Die entwickelte Wärme hebt, wie wir später noch ausführlich untersuchen werden, die Temperatur auf den Erstarrungspunkt, erzeugt dadurch eine Temperaturdifferenz und damit eine Wärmeableitung. Der Wärmeverlust ändert wiederum die Energie und damit die Coëfficienten der Elasticität, bis der Zustand des festen Krystalles erreicht ist.

Wir betrachten jetzt die Wechselwirkung zwischen der unterkühlten Flüssigkeit und einem Körper von anderer Krystallform. Da die Function f für die beiden Substanzen eine verschiedene Form hat, so gibt es, wie gesagt, für die Elementarkrystalle der unterkühlten Flüssigkeit keine einzige Lage, in welcher sie den festen Körper so berühren könnten, dass an der Berührungsfläche die Druckcomponenten X_x, X_y... stetig werden. Es können also

---

[1] Aus der verhältnissmässig geringen Geschwindigkeit, mit der sich im unterschwefligsauren Natron die Umlagerung der Theilchen ausbreitet, erklärt sich auch eine Beobachtung des Herrn Ostwald.

Als derselbe in geschmolzenes und auf Zimmertemperatur erkaltetes unterschwefligsaures Natron einen mit demselben Salze überzogenen Glasstab tauchte und die Krystalldruse, welche sich alsbald um denselben entwickelte, aus der Flüssigkeit heraushob, so dass kein Krystalltheilchen in derselben zurückblieb, so erstarrte diese nicht weiter, sondern behielt ihren flüssigen Zustand bei.

die von dem festen Körper ausgehenden Kräfte die Unterkühlung nicht auslösen.

Steht aber damit nicht eine Beobachtung von Despretz in Widerspruch? Despretz hat nämlich beobachtet, dass unterkühltes Wasser durch Berührung mit einem Glasstab sofort zum Erstarren gebracht wird. Wäre diese Beobachtung ein Widerspruch, dann könnte man ja Wasser in einem Glasgefäss überhaupt nicht unterkühlen. Da das aber der Fall ist, so muss die erwähnte Auslösung der Unterkühlung einen anderen Grund haben, und dieser Grund liegt darin, dass das Glas die adhärirenden Wasserschichten verdichtet. Wird Wasser in einem Glaskolben unterkühlt, dann ist diese Verdichtung schon vor der Unterkühlung da und kann die Erscheinung nicht hindern. Wird aber unterkühltes Wasser mit dem Glasstab berührt, dann tritt diese Verdichtung plötzlich auf, und diese plötzliche Verdichtung, diese plötzliche Lagenänderung ist der Grund der Auslösung.

Wir haben früher in einer Flüssigkeit einen unendlich kleinen, unendlich dünnen Cylinder betrachtet und gesagt, dass wenn ein äusseres Kräftepaar diesen Cylinder ungemein langsam dreht, es gar keinen Widerstand findet. Das gilt natürlich nur so lange, als der Cylinder sich ganz innerhalb der Flüssigkeit befindet, berührt aber die Mantelfläche die Grenzfläche eines festen Körpers, welchen die Flüssigkeit benetzt, dann findet das Kräftepaar einen sehr grossen Widerstand. Die Theilchen werden an der Wand festgehalten. Mit Hilfe dieser Überlegung kann man die folgenden Beobachtungen[1] sehr leicht verstehen: Eine horizontale Röhre, mit einer längeren frei endenden Wassersäule versehen und beiderseits verschlossen, gefriert bei —7 bis —10° nicht, wenn ihr Durchmesser 0·3 bis 0·4 *mm* nicht übersteigt. Bei 0·1 bis 0·2 *mm* gefriert sie selbst dann nicht, wenn das eine Ende in gefrierende Flüssigkeit taucht. Ähnliches beobachtet man mit Glasplatten, deren mit Wasser gefüllter Zwischenraum durch Festschrauben hinlänglich verkleinert wird. Die Wirkung des äusseren, von der gefrierenden Flüssigkeit ausgehenden Kräftepaares kann hier proportional dem Querschnitt der Flüssigkeit, das Moment der widerstrebenden Wandkräfte dagegen als

[1] Mousson, Physik, Art. 561.

proportional der Wand angesehen werden. Wird der Querschnitt immer kleiner, dann ändern sich die Verhältnisse zu Gunsten der Wand und es kann von einem bestimmten Querschnitt an das äussere Kräftepaar keine Wirkung mehr hervorbringen.

In ganz ähnlicher Weise ist das schon oben näher gekennzeichnete Verhalten der in einer Flüssigkeit von gleicher Dichte schwebenden Kügelchen zu erklären. Wir haben hier vor Allem die Capillarkräfte ins Auge zu fassen. Werden bei der Unterkühlung die kleinsten Theilchen Elementarkrystalle, so haben sie noch immer dieselbe Anordnung wie früher oberhalb des Schmelzpunktes, also die Anordnung von Flüssigkeitstheilchen, und es werden die Theilchen, welche in jener Oberflächenschichte liegen, deren Dicke gleich ist dem Radius der Wirkungssphäre, durch die starken Capillarkräfte in ihrer ursprünglichen Anordnung festgehalten. Je kleiner das Kügelchen ist, desto grösser ist das Verhältniss dieser Oberflächenschichte zum Volumen, desto günstiger sind die Bedingungen der Unterkühlung.

§. 8. Die Erwärmung bei der Auslösung der Unterkühlung.

Wird eine Unterkühlung ausgelöst, dann steigt die Temperatur stets auf den Erstarrungspunkt. Wir wollen nun diese Thatsache erklären, indem wir

1. von der Erfahrungsthatsache ausgehen, dass die Temperatur während des normalen Erstarrungsprocesses constant bleibt, und

2. die Annahme machen, dass die Reibung oder die Thatsache, dass in einer Flüssigkeit relative Bewegungen verschiedener Flüssigkeitsschichten mit der Zeit verschwinden und dadurch eine der Bewegungsenergie äquivalente Wärme erzeugen, eine wesentliche Eigenschaft der Substanz ist, so lange sie nicht fest ist.

Die Temperatur der Flüssigkeit habe eben den Erstarrungspunkt erreicht, und nun denken wir uns in dieselbe einen Krystall von derselben Substanz gebracht. Indem dieser Krystall sämmtliche Elementarkrystalle gleichrichtet, wird eine fernere Wärmeabfuhr keine Unterkühlung, sondern eine von der Oberfläche gegen das Innere fortschreitende Erstarrung herbeiführen, wobei

die Temperatur sich gleich bleibt. Die Temperatur bleibt constant, heisst soviel, als dass ein kleines eingeschlossenes Luftbläschen während des Erstarrungsprocesses sein Volumen nicht ändert. Wir betrachten ein Massenelement dM. Dasselbe hat zu Beginn die Energie $E_1 dM$ und zum Schluss die Energie $E_2 dM$, so dass

$$(E_1 - E_2) dM = \mathfrak{A} \lambda dM$$

ist. Wird zu Beginn dem Massenelement dM eine Wärmemenge dq entzogen, welche im Vergleich zu λdM unendlich klein ist, dann ändert sich E_1 um dE.

Gleichzeitig ändert sich auch das Potential der elastischen Kräfte für dieses Element, und zwar müssen wir nach dem Princip der Continuität schliessen, dass wenn dem Massenelement dM Wärme entzogen wird, wohl die Form der Function f dieselbe bleibt, die Grösse der Constanten aber geändert wird. Eine Änderung des Potentials der inneren Kräfte bedeutet aber eine Änderung der elastischen Kräfte und somit, wenn der äussere Druck derselbe bleibt, eine Störung des Gleichgewichtes, welche in dem Massenelemente dM zu einer anderen Anordnung der Theilchen führt. Die Arbeit dieser Umlagerung wird erhalten, wenn wir in dem Ausdruck $\int f d\omega$, welcher sich für dM auf $f d\omega$ reducirt, die neue Function f sowohl für die alte, als auch für die neue Anordnung bilden und den ersten Werth von dem zweiten abziehen.

Die Änderung des Potentials der elastischen Kräfte ist ferner stets verbunden mit dem Auftreten einer gleichwerthigen lebendigen Kraft. Da die Substanz noch nicht fest ist, so müssen wir nach unserer Annahme schliessen, dass die lebendige Kraft durch die Reibung an der Grenzfläche als solche verloren geht und sich in Wärme verwandelt.

Wir haben also, wenn die Energie des Massenelementes dM von $E_1 dM$ in $(E_1 + dE) dM$ übergeht, zu beachten *a)* die entzogene Wärme dq, deren Arbeitswerth $\mathfrak{A} dq$ ist, *b)* die an der Oberfläche zugeführte negative Reibungsarbeit, welche wir $-dS$ nennen wollen, und *c)* die Reibungswärme, deren Arbeitswerth $+dS$ ist, also zu setzen

$$dE . dM = -\mathfrak{A} dq - dS + dS = -\mathfrak{A} dq. \qquad \ldots 1)$$

Bei diesem Processe bleibt die Temperatur ungeändert.

Dauert die Wärmeabfuhr fort, dann wird für die einzelnen Phasen des Processes ganz dasselbe gelten, so dass wenn einmal die entzogene Wärme $= \varepsilon\lambda dM$ wird, wo ε endlich und kleiner als 1 ist, die Gleichung bestehen wird

$$E - E_1 = -\mathfrak{A}\varepsilon\lambda. \qquad \ldots.2)$$

Schliesslich geht ε in 1 und E gleichzeitig in E_2 über.

Nun betrachten wir die Unterkühlung. Wird der Masse M die Wärme $\varepsilon\lambda M$ gleichmässig entzogen, dann hat jedes Massenelement dM die durch die Gleichung 2) gegebene Energie E und die Temperatur den Werth t, so dass

$$E_1 - E = \mathfrak{A}C(\tau - t),$$

wo C die mittlere specifische Wärme der unterkühlten Flüssigkeit bedeutet. Entsprechend der Wärmeabfuhr müssen sich in allen Elementarkrystallen die Constanten der Elasticität geändert haben, und zwar genau so, wie wenn bei der Erstarrungstemperatur τ die Energie von E_1 in E übergegangen wäre. Werden nun sämmtliche Elementarkrystalle gleichgerichtet, dann ist die Arbeit der elastischen Kräfte, welche zwischen ihnen zur Geltung kommen, für jedes dM genau so gross wie früher die Arbeit der inneren Kräfte während des Überganges der Energie von E_1 in E. Es entspricht demnach auch dieser Arbeit eine ebenso grosse lebendige Kraft wie früher und in Folge der Reibung eine ebenso grosse Wärmeentwicklung. Und da früher diese Reibungswärme die Temperatur τ constant erhalten hat, so muss sie jetzt die Temperatur t auf die Temperatur τ zurückführen, denn die beiden Fälle unterscheiden sich ja bloss dadurch, dass im ersten Falle Wärmeabfuhr und Reibungswärme gleichzeitig, im zweiten nach einander auftreten. Der resultirende Effect muss derselbe sein.

§. 9. Die Grenze der Unterkühlung.

Wir wollen jetzt eine ebenso einfache als wichtige Consequenz ziehen. Wir denken uns die Masseneinheit der Flüssigkeit von dem Erstarrungspunkt τ bis zur Temperatur t unterkühlt. Die entzogene Wärmemenge beträgt alsdann $C(\tau - t)$. Wird nun die Erstarrung eingeleitet, dann erstarrt die Masse m,

während die Masse $1-m$ flüssig bleibt und die Temperatur des Ganzen auf τ steigt. Um jetzt noch die ganze Flüssigkeit bei der Temperatur τ zum Erstarren zu bringen, ist eine Wärmeabfuhr von $(1-m)\lambda$ nöthig, und wollen wir dann Alles noch bis zur Temperatur t abkühlen, so haben wir weiters die Wärmemenge $c(\tau-t)$ zu entziehen, wo c die mittlere specifische Wärme der festen Substanz bedeutet.

Wir wollen die Wärmemenge, welche der Substanz im Ganzen zu entziehen ist, damit sie aus dem flüssigen Zustand bei der Temperatur t in den festen Zustand bei der Temperatur t übergeht, λ' nennen. Alsdann ist

$$\lambda' = (1-m)\lambda + c(\tau-t)$$

oder auch

$$\lambda' = -C(\tau-t) + \lambda + c(\tau-t),$$

also

$$1) \quad \lambda - \lambda' = (C-c)(\tau-t)$$

$$2) \quad (1-m)\lambda = -C(\tau-t) + \lambda$$

$$m = \frac{C}{\lambda}(\tau-t).$$

Aus der letzten Gleichung ersehen wir, dass die erstarrte Menge m bei der Auslösung der Unterkühlung der Unterkühlung proportional ist.

Ist die Unterkühlung so weit vorgeschritten, dass

$$\tau - t = \frac{\lambda}{C}$$

wird, dann wird bei Auslösung derselben die ganze Masse erstarren. Das ist zugleich die Grenze der Unterkühlung.

Dass wir es hier wirklich mit einer Grenze zu thun haben, ist leicht zu zeigen. Nach dem Vorhergehenden müssen bei dieser Unterkühlung sämmtliche Elementarkrystalle bereits ganz fest sein. Wollten wir es jetzt versuchen, die Unterkühlung durch Berührung mit einem gleichartigen Krystall auszulösen, so würde es nicht gelingen, denn es muss die Wechselwirkung zwischen den festen Elementarkrystallen ebenso gross sein wie zwischen den Elementarkrystallen und dem erwähnten Krystall. Die Erreichung dieses Grenzzustandes ist nur so denkbar, dass die

Symmetrieebenen der Elementarkrystalle alle möglichen Lagen haben und somit die Drehungsmomente, welche ein Elementarkrystall von allen seinen Nachbarn erhält, sich gegenseitig aufheben.

§. 10. Der amorphe und der weiche Zustand.

Wird die Substanz, nachdem sie den Grenzzustand der Unterkühlung erreicht hat, noch weiter abgekühlt, so erhalten wir daraus einen festen amorphen Körper. Derselbe ist im Grossen und Ganzen nach jeder Richtung hin isotrop, besitzt aber, wie das Verhalten von Gusseisen zeigt, noch immer die wesentliche Eigenschaft der unterkühlten Flüssigkeit, durch heftige Erschütterungen krystallinisch zu werden.

Ich habe schon früher erwähnt, dass ich unterschwefligsaures Natron, nachdem ich aus demselben eine gewisse Menge Krystallwasser ausgetrieben hatte, bis —3·0° C. unterkühlt habe, ohne dass es erstarrte. Nun bemerkte ich aber dabei, dass die Flüssigkeit bei so tiefen Temperaturen ungemein zähe wird, und ich war, als ich einen Glasstab einführte und denselben in der heftigsten Weise transversal hin- und her bewegte, nicht im Stande, die Unterkühlung auszulösen. Erst ein hineingeworfener Krystall brachte dies zuwege. Da die Cohäsion in dem Masse wächst, als die Temperatur abnimmt, so muss die Zähigkeit bei einer noch grösseren Unterkühlung noch mehr zunehmen, und nähern wir uns dem Grenzzustande, dann wird selbst ein hineingeworfener Krystall keine Änderung mehr hervorbringen. Das unterschwefligsaure Natron hat dann alle Eigenschaften eines weichen Körpers. Vom weichen Zustand sagt man, dass er zwischen dem festen und flüssigen Zustand sozusagen in der Mitte liegt. Auch die unterkühlten Flüssigkeiten verhalten sich so, da sie, wie wir gesehen haben, wesentliche Eigenschaften des festen und flüssigen Zustandes in sich vereinigen. Nichts liegt im Wege, in beiden dasselbe zu sehen und den weichen Zustand als den Zustand einer unterkühlten zähen Flüssigkeit zu betrachten. Hat diese Flüssigkeit bis zu ihrem (uns unbekannten Schmelzpunkt) eine solche Zähigkeit, dass sie auf mechanischem Wege nicht zum Erstarren gebracht werden kann, dann gibt es überhaupt kein Mittel, die Erstarrung herbeizuführen,

d. h. den weichen Zustand aufzuheben, denn da auf der Erde Alles einmal flüssig war, so konnte es in Folge der erwähnten Eigenschaft nie zur Bildung eines Krystalles dieser Substanz kommen.

§. 11. Die Grenze der Unterkühlung bei einigen Substanzen.

Wir haben die Formel

$$\tau - t = \frac{\lambda}{C}$$

erhalten und wollen in der folgenden Tabelle die zusammengehörigen Werthe von einigen Substanzen zusammenstellen.

	τ	λ	C	$\tau - t$	t
Wasser	0 °	79·15	1·00	79·15°	—79·15°
Phosphor	44·2	5·034	0·2045	24·6	19·6
Schwefel	115	9·368	0·234	40·0	75·0
Natriumphosphat	36·4	66·8	0·758	88·1	—51·7

Es muss hier hervorgehoben werden, dass in der Formel C die mittlere specifische Wärme unterhalb τ bedeutet, während die angegebenen Zahlen die specifischen Wärmen oberhalb τ sind.

Man hat die Unterkühlung beim Wasser bis auf —20° C. gebracht, und man kann es gewiss noch weiter unterkühlen, wenn man die Bedingung einhält, dass das Wasser langsam und gleichmässig abgekühlt wird. Freilich ist das mit einer Kältemischung fast gar nicht zu erreichen. Bringt man ein Gefäss mit unterkühltem Wasser in eine Kältemischung von sehr tiefer Temperatur, so erstarrt es augenblicklich. Auch das unterschwefligsaure Natron verhält sich so. Der Grund liegt natürlich in den grossen Temperaturdifferenzen, welche in der Flüssigkeit entstehen. Die unmittelbar an der Gefässwand liegenden Elementarkrystalle werden, während noch der Zustand im Innern nahezu ungeändert ist, fest und führen die Erstarrung herbei.

Salze, welche Krystallwasser enthalten, wie z. B. unterschwefligsaures Natron, müssen sich bei der Unterkühlung anders verhalten als Wasser, Phosphor und Schwefel. Ich habe schon oben erwähnt, dass wenn man unterschwefligsaures Natron, welches beim Schmelzen kein Krystallwasser verloren hat, lang-

sam und gleichmässig unterkühlt, bei 8° oder 9° C. an der Gefässwand ein kleiner Stern entsteht, von dem aus die Flüssigkeit so erstarrt, dass von dem Stern Strahlen ähnlich magnetischen Curven ausgehen. Der Grund liegt offenbar in der Rolle, welche das Krystallwasser spielt. Das Verhältniss zwischen dem Krystallwasser und dem Salze ändert sich mit der Temperatur, und zwar im Innern des Gefässes anders als unmittelbar an der Glaswand, wo die Flüssigkeit unter dem Einfluss der Capillarkräfte festhaftet. Es muss sich demnach dort, wo die adhärirende Schichte beginnt, beim Sinken der Temperatur ein solcher Unterschied herausstellen, dass die Unterkühlung sich nicht mehr halten kann.

Da das unterschwefligsaure Natron eine Substanz ist, mit der man die Erscheinung der Unterkühlung so einfach studiren kann, so habe ich es nicht für überflüssig gehalten, drei Constanten näher zu bestimmen, und zwar die specifischen Wärmen der festen und flüssigen Substanz und die Erstarrungswärme.

§. 12. Die calorischen Constanten des unterschwefligsauren Natrons.

Zur Bestimmung der specifischen Wärmen wählte ich die Erkaltungsmethode. Ich nahm dazu eine Proberöhre von 65 *mm* Länge und 18·7 *mm* Weite und brachte dieselbe in eine zweite Proberöhre, welche um 1 *cm* länger und 22·7 *mm* weit war. Die Zusammenstellung war dieselbe wie in Fig. 1, S. 3. Das Röhrenpaar sass in einem Deckel, welcher eine ungefähr 16 *cm* weite Glasschale, die ganz mit Wasser gefüllt war, bedeckte. Der Deckel trug ausserdem noch ein zweites Thermometer zur Bestimmung der Temperatur des Wassers.

Die engere Röhre wurde mit dem geschmolzenen unterschwefligsauren Natron so weit angefüllt, dass der Rand der Flüssigkeit bis zum unteren Rande des oberen Gummibandes reichte. Dann kam auf die Oberfläche noch eine 2—3 *mm* dicke Schichte Olivenöl. Das Gefäss des Thermometers befand sich in der Mitte der Röhrenaxe.

Hat das unterschwefligsaure Natron zu Beginn des Versuches z. B. die Temperatur 70° C., dann stellt sich nach einiger Zeit ein Zustand ein, bei dem sich die Temperatur der Ober-

fläche mit der Zeit nahezu in demselben Verhältniss ändert wie in der Axe. Sinkt also während der Zeit dz die Temperatur in der Axe um $d\vartheta$, dann sinkt auch die Temperatur der Oberfläche um $d\vartheta$, denn die Abkühlung erfolgt so langsam, dass man immer annehmen kann, dass die Temperaturabnahme $d\vartheta$ in allen Flüssigkeitsschichten dieselbe ist. Es beträgt demnach die Wärmeabgabe während der Zeit dz

$$(Mc+\Pi)d\vartheta,$$

wenn M die Masse des Salzes, c seine specifische Wärme und Π den Wasserwerth der inneren Proberöhre + Thermometer + Ölschichte bedeutet. Da nun anderseits diese Wärmeabgabe proportional der Fläche S der inneren Proberöhre unterhalb des oberen Gummibandes nach Abzug der Fläche des unteren Gummibandes ist, ferner proportional der Temperaturdifferenz $\vartheta-\alpha$ des Salzes und des Wassers und proportional der Zeit dz, so ist

$$(Mc+\Pi)d\vartheta = -ES(\vartheta-\alpha)dz$$

oder

$$\log \text{nat}\,(\vartheta-\alpha) = -\frac{ESz}{Mc+\Pi} + \text{const}$$

oder wenn wir $\log \text{nat}\,(\vartheta-\alpha) = y$ setzen,

$$y = -\frac{ES}{Mc+\Pi}\cdot z + \text{const}.$$

E bedeutet hierin eine Constante.

Ich beobachtete nun ϑ und α, d. i. y für die Zeiten

$$z = 1, 2 \ldots n \text{ Minuten}.$$

Nennen wir die entsprechenden Werthe von y

$$y_1, y_2 \cdots y_n,$$

so müssten die Differenzen

$$y_2-y_1 = y_3-y_2 = y_4-y_3 = \cdots = y_n-y_{n-1}$$

einander gleich sein. Die gleichmässige Benützung aller Beobachtungen führt zu

$$\frac{ES}{Mc+\Pi} = -6\frac{(n-1)(y_n-y_1)+(n-3)(y_{n-1}-y_2)+\cdots}{n(n^2-1)}.$$

Zunächst wurde die Constante E bestimmt, und zwar in der Weise, dass die Röhre mit Wasser gefüllt wurde. Es ergab sich:

$$E = 0{\cdot}0404, 0{\cdot}0401, 0{\cdot}0408, 0{\cdot}0403, 0{\cdot}0416, 0{\cdot}0403, 0{\cdot}0413, 0{\cdot}0412;$$

im Mittel

$$E = 0{\cdot}04075 \pm 0{\cdot}000135. \quad \ldots \text{I}$$

Hierauf kam in die innere Röhre flüssiges unterschwefligsaures Natron. Ich erhielt für die mittlere specifische Wärme C zwischen 25° und 60° C. die Zahlen

$$C = 0{\cdot}622, 0{\cdot}612, 0{\cdot}613, 0{\cdot}609, 0{\cdot}626, 0{\cdot}609, 0{\cdot}611, 0{\cdot}630;$$

im Mittel

$$C = 0{\cdot}6165 \pm 0{\cdot}0019. \quad \ldots \text{II}$$

Nun wurde die Flüssigkeit zum Erstarren gebracht. Es ergab sich zwischen den Temperaturgrenzen 20° und 38° C.

$$c = 0{\cdot}409, 0{\cdot}408, 0{\cdot}403, 0{\cdot}407, 0{\cdot}413, 0{\cdot}412, 0{\cdot}410, 0{\cdot}410;$$

im Mittel

$$c = 0{\cdot}409 \pm 0{\cdot}0007 \quad \ldots \text{III}$$

Nach der Person'schen Regel wäre demnach die Erstarrungswärme bei dem normalen Erstarrungspunkt 48·1° C. gleich

43·18 Cal.

Ich unternahm es nun, die Erstarrungswärme direct zu bestimmen. Zu dem Ende wurde das geschmolzene Salz in einen leichten Glaskolben von 6 *cm* Durchmesser gebracht, und zwar in einer solchen Menge, dass die Flüssigkeit bis in den Hals reichte. Ein im Pfropfen sitzendes Thermometer zeigte die Temperatur an. Der Glaskolben kam dann in eine weite und hohe Glasschale, welche mit destillirtem Wasser gefüllt war und auf einer Korkplatte stand.[1] War das Salz unterkühlt, dann wurde es

[1] Person (Ann. de chim. et de physique, N. S. III, T. XXI, p. 295 und Pogg. Ann., 74, S. 409 ff.) ist der Ansicht, dass ein Calorimeter mit

bei der am Thermometer abgelesenen Temperatur T durch einen hineingeworfenen sehr kleinen Krystall zum Erstarren gebracht. Auf diese Weise erhielt ich für die Erstarrungswärme λ bei der Temperatur T die folgenden Werthe:

$T = 13{\cdot}0°$ C.	$\lambda = 39{\cdot}39$ Cal.
$13{\cdot}9$	$40{\cdot}36$
$13{\cdot}7$	$38{\cdot}91$
$13{\cdot}95$	$41{\cdot}70$.

λ ist diejenige Wärme, welche der Substanz entzogen werden muss, wenn sie aus dem flüssigen Zustand bei der Temperatur T in den festen Zustand bei derselben Temperatur übergeht. Wollen wir aus diesen Werthen jene Werthe ableiten, welche für die normale Erstarrungstemperatur $48{\cdot}1°$ C. gelten, dann haben wir zu setzen:

$$\lambda_{48{\cdot}1} = \lambda_T + (C-c)(48{\cdot}1-T)$$
$$= \lambda_T + 0{\cdot}2075(48{\cdot}1-T).$$

Auf diese Weise ergibt sich

$\lambda_{48{\cdot}1} = 46{\cdot}67$ Cal.
$47{\cdot}43$
$46{\cdot}04$
$48{\cdot}78$
Mittel: $47{\cdot}23$

Wie wir sehen, weicht der direct bestimmte Werth von λ von dem berechneten um $47{\cdot}23-43{\cdot}18 = 4{\cdot}05$ ab. Ich bin der Überzeugung, dass die Person'sche Gleichung im Allgemeinen

doppelter Hülle wohl den Wärmeverlust verringert, aber dafür die Messung unsicherer macht. Bei einem nackten Calorimeter hängt der Verlust fast ausschliesslich von dem Unterschied zwischen der Temperatur des Calorimeters und der Umgebung ab. Wendet man aber eine Hülle an, so kann diese, je nach dem Gang der verschiedenen Versuche, sich auf irgend einer intermediären Temperatur befinden und dadurch sehr ungleiche Verluste herbeiführen. Auch Regnault war der Ansicht, dass sobald die Versuche eine gewisse Dauer haben müssten, ein nacktes Calorimeter vorzuziehen ist.

wohl nicht genau, aber im Grossen und Ganzen immerhin mit grober Annäherung gilt.

Wenn wir jetzt für das unterschwefligsaure Natron die theoretische Grenze der Unterkühlung berechnen, so erhalten wir

$$\tau - t = \frac{47 \cdot 23}{0 \cdot 6165} = 76 \cdot 61, \quad t = 48 \cdot 1 - 76 \cdot 61 = -28 \cdot 51^\circ \text{ C.}$$

Es ist das, wie gesagt, die theoretische Grenze, denn in Wirklichkeit erstarrt das Salz, wie wir gesehen haben, schon bei 8 oder 9° C. von selbst.

Eine neue Methode, die Grösse der Molekeln zu finden

von

Dr. **Gustav Jäger.**

Thomson's Methode, aus der Verdampfungswärme und der Capillaritätsconstanten einer Flüssigkeit auf die Grösse der Molekeln zu schliessen, bedingt eine Voraussetzung, die wir näher zu erläutern haben, soll unsere neue Methode zur Berechnung des Molekeldurchmessers gerechtfertigt erscheinen. Thomson erlaubt sich nämlich, die Eigenschaften, welche einer Flüssigkeit zukommen, auch auf die kleinsten Theilchen derselben zu übertragen. Er versteht unter der Verdampfungswärme nichts anderes als die Arbeit, welche nothwendig ist, um die Flüssigkeit in eine gewisse Anzahl von Theilchen zu zerlegen. Diese Theilchen lässt man nun allgemein als Molekeln gelten, was jedoch aus der obigen Beobachtungsweise durchaus nicht hervorgeht; es wäre im Gegentheile ganz leicht möglich, durch irgend eine Energie, welche man auf die Molecularbewegung des Dampfes zu übertragen im Stande ist, eine weitere Zerlegung der Dampftheilchen herbeizuführen. Insofern wir nun unter der Grösse der Molekeln eines Gases oder Dampfes nichts anderes verstehen als den Mittelwerth der Grössen jener Flüssigkeitströpfchen, welche den dampfförmigen Zustand bilden, ist es ein Leichtes, mit Zuhilfenahme der kinetischen Gastheorie auf einem neuen Wege diese Grösse zu finden.

Bekanntlich ist der Druck eines Gases durch die Gleichung gegeben

$$p = \frac{N m u^2}{3},$$

und man interpretirt diese Formel derart, dass man N als die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit, m als Masse und u^2 als

das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit einer Molekel auffasst. Da weder N noch m unmittelbar gegeben ist, sondern nur das Product beider Grössen als Dichte des Gases auftritt, so ist ohneweiters klar, dass, welche Grösse auch immer wir der Masse m geben, d. h. wie gross wir auch immer unsere Flüssigkeitströpfchen wählen, die mittlere Geschwindigkeit u derselben nicht geändert werden kann. Der Einfachheit halber wollen wir künftig annehmen, alle Theilchen haben dieselbe Grösse und dieselbe Geschwindigkeit u.

Wird ein Tropfen in seiner Geschwindigkeit plötzlich gehemmt, etwa dadurch, dass er auf einen festen Körper aufschlägt, so bemerkt man im Allgemeinen, dass er zerstiebt. Nur für den Fall, als seine Geschwindigkeit verhältnissmässig klein ist, zerfällt er in wenige kleinere Tropfen, oder er bleibt unversehrt. Bei einem Anstosse vertheilt sich nämlich die lebendige Kraft des Tropfens nach den verschiedensten Richtungen und führt dadurch eine Zertheilung desselben herbei, wenn sie grösser ist als die Arbeit, welche die durch die Theilung hervorgebrachte Vergrösserung der Flüssigkeitsoberfläche erfordert. So können wir uns auch vorstellen, dass durch die beständigen Stösse, welche die Gastheilchen auf die Gefässwände und gegen einander ausüben, eine derartige Zertheilung der Materie hervorgebracht wird, dass wir schliesslich einen stationären Zustand erhalten, der dann eintritt, wenn die Arbeit, welche zur weiteren Zerlegung der Molekeln nothwendig ist, der lebendigen Kraft der Molekeln gleich wird.

Nach unseren vereinfachenden Annahmen ist es nun leicht, einen Schluss auf die Bedingung dieses Gleichheitszustandes zu machen. Da wir alle Theilchen als gleich gross voraussetzen, so müssen jene Theilchen, durch deren Zerlegung sie entstanden sind, dem Volumen und der Masse nach mindestens doppelt so gross sein. Der Gang unserer Rechnung wird sich daher derartig gestalten, dass wir den Oberflächenzuwachs bestimmen, wenn sich eine Kugel in zwei gleich grosse Theile theilt, die abermals kugelförmige Gestalt haben. Ist der Radius der Theilkugeln r, so ist die Oberfläche einer Kugel $4\pi r^2$, ihr Volumen $\frac{4\pi}{3} r^3$. Das Volumen der ursprünglichen Kugel ist nun das Doppelte einer

Theilkugel, also gleich $\frac{8\pi}{3}r^3$, woraus für die Oberfläche dieser Kugel $4\pi\sqrt[3]{4}\,r^2$ folgt. Mithin beträgt die Oberflächenvergrösserung $4\pi(2-\sqrt[3]{4})r^2$. Die Arbeit, welche daher bei der Theilung der Kugel zu leisten ist, ist gleich

$$4\pi(2-\sqrt[3]{4})r^2\alpha,$$

wenn wir unter α die Capillaritätsconstante der entsprechenden Flüssigkeit verstehen. Diese Arbeit muss nun gleich sein der lebendigen Kraft, welche von der fortschreitenden Bewegung der Kugel herrührt, also gleich

$$2\frac{mu^2}{2} = mu^2.$$

Wir erhalten mithin die Gleichung

$$4\pi(2-\sqrt[3]{4})r^2\alpha = mu^2.$$

Setzen wir die Dichte der Flüssigkeit gleich ρ, so ist

$$m = \frac{4\pi}{3}r^3\rho,$$

daher

$$4\pi(2-\sqrt[3]{4})r^2\alpha = \frac{4\pi}{3}r^3\rho u^2,$$

oder

$$r = \frac{3(2-\sqrt[3]{4})\alpha}{\rho u^2} = \frac{1\cdot 24\,\alpha}{\rho u^2}.$$

In folgender Tabelle sind für eine Reihe von Flüssigkeiten die einzelnen Constanten nebst den daraus berechneten Radien r und Durchmessern δ der Molekeln zusammengestellt. Die α entnahm ich meinen eigenen Messungen, welche in der Abhandlung „Über die Abhängigkeit der Capillaritätsconstanten von der Temperatur und deren Bedeutung für die Theorie der Flüssigkeiten“ [1] ver-

[1] Wiener Ber., C, S. 258.

öffentlicht sind. Die u^2 wurden nach der bekannten Druckformel $p = \frac{\rho u^2}{3}$ berechnet. Sämmtliche Grössen beziehen sich auf die Temperatur 0° und auf absolutes Mass (c.-g.-s.).

	$\varkappa$	ρ	u^2	r	δ
Wasser	77·09	1·000	377.10⁷	25.10⁻⁹	51.10⁻⁹
Äther	20·65	0·736	92	38	76
Äthylalkohol	24·79	0·810	146	26	52
Methylalkohol	25·39	0·814	210	18	37
Schwefelkohlenstoff	33·84	1·293	89	36	73
Chloroform	27·58	1·525	56	40	80
Aceton	27·33	0·814	118	35	71

Ein Vergleich unserer Resultate mit den Ergebnissen anderer Methoden zeigt eine vortreffliche Übereinstimmung. So fand man für Wasser aus der inneren Reibung des Dampfes und den „Condensationscoëfficienten“ $\delta = 44.10^{-9}\,cm$.[1] Aus dem osmotischen Drucke und den Capillaritätsconstanten von wässerigen Lösungen fand ich $\delta = 50.10^{-9}\,cm$,[2] aus der Verdampfungswärme $\delta = 44.10^{-9}\,cm$.[3] In seiner Abhandlung: „Versuche über die Verdampfung“[4] gibt Stefan für die aus Diffusionsvorgängen gefundenen Werthe des Molekeldurchmessers des Äthers $89.10^{-9}\,cm$. des Schwefelkohlenstoffes $73.10^{-9}\,cm$ an. Letzterer Werth deckt sich mit dem unserigen vollständig.

Eine derartige Übereinstimmung der verschiedenen Methoden erlaubt es wohl kaum mehr, hier von blossem Zufalle zu reden, sondern ich erblicke vielmehr darin eine kräftige Stütze der Eingangs erläuterten Anschauungsweise. Immerhin würde ich es für sehr gewagt halten, die Dampftheilchen einfach als Tröpfchen zu behandeln, wenn wir nicht noch eine viel wichtigere Bestätigung der Consequenzen unserer Theorie in dem Verhalten der inneren Reibung, Diffusion und Wärmeleitung der Gase bei verschiedenen Temperaturen hätten. Bekanntlich entsprechen die Theorien dieser Vorgänge nicht den Beobachtungen, man müsste

---

[1] Siehe O. E. Meyer, Theorie der Gase, S. 226.

[2] Wien. Ber., C, S. 510.

[3] Ebenda, CI.

[4] Ebenda, LXVIII.

denn, um Theorie und Beobachtung in Übereinstimmung zu bringen, eine Zunahme der mittleren Weglänge, bezüglich eine Abnahme des Molekeldurchmessers annehmen.[1] Aus unserer Formel $r = \frac{1 \cdot 24\,\alpha}{\rho u^2}$ geht nun aufs Deutlichste hervor, dass r im Allgemeinen mit der Temperatur sich ändern muss, da sowohl die Capillaritätsconstante α, als auch die Dichte ρ und die Geschwindigkeit der Molekel u von der Temperatur abhängig sind. Allerdings haben wir keine Anhaltspunkte für die Grössen α und ρ bei jenen Gasen, für welche speciell die Constanten der inneren Reibung, Diffusion und Wärmeleitung bestimmt sind, doch lässt sich erwarten, dass in ähnlicher Weise wie für die untersuchten Flüssigkeiten auch für die bewussten Gase eine Abnahme des Molekeldurchmessers mit der Temperatur erfolgen müsse. Hier haben wir nämlich den schon Eingangs erwähnten Fall der Möglichkeit, durch fortgesetzte Zufuhr von Energie, welche hier in Form von Wärme auftritt, die einzelnen Dampftheilchen immer weiter zu zerlegen.

Zu bemerken ist noch, dass unsere Gleichung nur für Dämpfe einen Sinn hat, deren Temperaturen weit unter den kritischen Temperaturen der entsprechenden Flüssigkeiten liegen, indem wir nur für diesen Fall annehmen können, dass sich die Molekeln wirklich wie Flüssigkeitströpfchen von ähnlichen Eigenschaften, wie sie der condensirten Flüssigkeit zukommen, verhalten. Rückt jedoch die Temperatur der Flüssigkeit dem kritischen Punkte näher, so nimmt die Dichte der Flüssigkeit immer rascher ab, was natürlich nicht ohne entsprechenden Einfluss auf die Capillaritätsconstante ist. Wir müssen dann annehmen, dass die leeren Räume zwischen den einzelnen Flüssigkeitstheilchen immer grösser werden, so dass eine Analogie zwischen der Flüssigkeit und den Molekeln des Dampfes, was die Dichte und die Capillaritätsconstante anbelangt, nicht mehr angenommen werden kann. Es bietet sich daher nicht die Möglichkeit dar, etwa aus dem Verhalten der inneren Reibung, Diffusion und Wärmeleitung der

---

[1] Vergl. O. E. Meyer, Theorie der Gase, S. 160, 175. 200. — J. Stefan, Über die dynamische Theorie der Diffusion der Gase, Wien. Ber., LXV, S. 338 ff.

Gase umgekehrt einen Schluss auf die entsprechenden Constanten α und ρ für den flüssigen Zustand zu machen. Sondern wir dürfen unsere Gleichung lediglich nur auf das geringe Temperaturintervall anwenden, für welches wir die Dichte der Flüssigkeit als wenig verschieden vom grösstmöglichen Werthe der Dichte annehmen können, d. i. für den Fall vollständiger Raumausfüllung seitens der Molekeln.

Obwohl ich überzeugt bin, dass obige Auseinandersetzungen nicht die allgemeine Zustimmung finden werden, so halte ich es doch nicht für werthlos, wenigstens gezeigt zu haben, dass die dargelegte Anschauungsweise, so weit man die Dinge verfolgen kann, nirgends mit den Thatsachen im Widerspruche steht.

Notiz über eine Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit

von

G. Jaumann.

(Mit 4 Textfiguren.)

Die Foucault'sche Methode ermöglicht Messungen der Lichtgeschwindigkeit auf kurzen Lichtwegen, dafür aber ist sie für grössere Distanzen unbrauchbar.

Es bedeute in Fig. 1 I das rotirende Spiegelchen, II den feststehenden Sammelspiegel, i den einfallenden Strahl. Die Intensität des Lichtes, welches nach der Reflexion in das Fernrohr zurückkommt, verhält sich zur einfallenden Lichtstärke, wie der Öffnungswinkel α des Hohlspiegels zum vollen Kreis; sie ist weniger als $^1/_{100}$ der einfallenden Lichtstärke, wenn der Lichtweg grösser als der sechzehnfache Spiegeldurchmesser ist und sie kann nicht höher als $^1/_{20000}$ erhalten werden, wenn der Lichtweg 1 *km* erreicht.

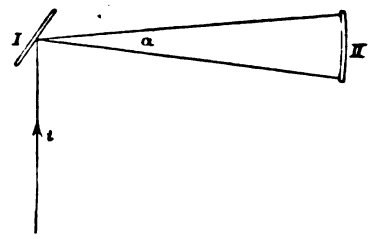


Fig. 1.

Für grössere Distanzen, zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit in Luft, musste man bei der Fizeau'schen Methode bleiben.

Die Vortheile beider Methoden finden sich in der im Folgenden beschriebenen Aufstellung vereinigt. Der Nachtheil der Foucault'schen Methode liegt in der Ablenkung der Richtung

des Lichtes durch den rotirenden Apparat. Ich spiegle und drehe nicht die Richtung, sondern die Polarisationsebene des einfallenden Strahls.

Es gelingt dies in folgender Weise: Ein linear polarisirter Strahl, welcher ein Halbundulationsblättchen passirt, ist nach dem Durchtritt wieder linear, aber in anderer Ebene polarisirt. Die alte und die neue Polarisationsebene liegen zu den Hauptschnitten des Halbundulationsblättchen symmetrisch. Man kann also sagen: die Polarisationsebene des einfallenden Strahles spiegelt sich an den Hauptschnitten, und man kann daran denken, das rotirende Foucault'sche Spiegelchen durch ein rotirendes Halbundulationsblättchen zu ersetzen.

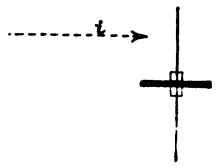


Fig. 2.

Rotirt das Blättchen in seiner Ebene, so wird die Polarisationsebene des austretenden Strahles im selben Sinne mit doppelter Geschwindigkeit rotiren.

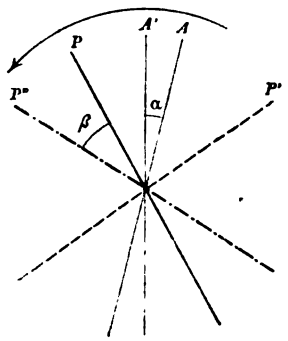


Fig. 3.

Es ist hiemit das seit Langem gewünschte[1] Mittel gefunden, eine solche und genügend rasche Rotation zu erhalten. Ein dünnes Blättchen nach Fig. 2 mit einer Achse versehen und in seiner Ebene rotirt, erlaubt höhere Umlaufsgeschwindigkeiten als das Foucault'sche Spiegelchen, welches viel grösseren Luftwiderstand findet. Ein Nicol aber nur annähernd so rasch zu rotiren ist ganz unmöglich.

2. Zur Messung der Lichtgeschwindigkeit lässt sich das rotirende Halbundulationsblättchen in folgender Weise verwenden. Man sendet einen linear-polarisirten Strahl hindurch, welcher den gemessenen Lichtweg durchläuft, dann in sich selbst reflectirt wird, das Blättchen in entgegengesetzter Richtung passirt und dann in den Ocularapparat gelangt.

[1] Vergl. z. B. Sam. Sheldon, Am. Journ. of Sc., VI., Wied. Beibl. 1890, 1161.

Bedeute in Fig. 3: P die Polarisationsebene des einfallenden Strahls, A den Hauptschnitt des Halbundulationsblättchens in einem gegebenen Augenblicke, so wird P' die Polarisationsebene des Strahls nach seinem Austritte sein und während seines ganzen Weges hin und zurück bleiben. Während dieser Zeit dreht sich der Hauptschnitt des Blättchens um den Winkel α aus der Stellung A in die Stellung A'. In dieser Stellung wird er von dem zurückkommenden Strahle getroffen. Die Polarisationsebene desselben spiegelt sich nun an A' und es wird die Polarisationsebene P'' des durchtretenden Strahls, welcher zum Beobachter gelangt, gegen die des einfallenden Strahls P um den Winkel $\beta = 2\alpha$ im Sinne der Rotation des Blättchens gedreht sein.

Aus dieser Drehung schliesst man auf die Lichtgeschwindigkeit v

$$v = \frac{8\pi}{\beta} Dn,$$

worin D den gemessenen Lichtweg, n die Umdrehungszahl des Blättchens andeuten.

Die Polarimeter erlauben nahezu dieselbe Genauigkeit der Winkelmessung,[1] wie die Scalenfernrohrablesungen, welche Foucault verwendet.

Für grosse Distanzen dürfte die neue Methode weitaus genauere Werthe geben als die Fizeau'sche.

---

[1] Ich habe mich hierüber orientiren können durch die Freundlichkeit von Prof. F. Lippich, welcher mir sein Halbschattenpolarimeter (Diese Sitzungsber., Bd. XCI, S. 1059) zur Verfügung stellte. Das Instrument liefert eine grössere Genauigkeit als 0.0001 Bogenmaass (20″).

Zwei Viertelundulationsblättchen aus Glimmer wurden in möglichst richtiger Orientirung übereinander gelegt. Dieselben gaben auch bei grossen Spiegelungswinkeln noch sehr gut linear polarisirtes Licht. Ein Halbundulationsblättchen aus Glimmer dürfte sich ganz vortrefflich eignen.

Ein $\frac{2n+1}{2}$ Undulationsblättchen hingegen, welches den Anforderungen dieser Messungen gewachsen wäre, zu schleifen, dürfte sehr schwer sein. Ein solches Blättchen, welches aus einem Laurent'schen Polarimeter entnommen wurde und dort bei sehr kleinen Spiegelungswinkeln zu fungiren hat und auch gut fungirt, hat sich bei grossen Spiegelungswinkeln als ganz unbrauchbar erwiesen.

3. Es ist jedoch noch hervorzuheben, dass die beschriebene Aufstellung eine Multiplication der Wirkung erlaubt.

Es ist wieder die mit der Foucault'schen Anordnung verbundene starke Lichtschwächung, welche es unmöglich macht, den Strahl ein zweites Mal auf das rotirende Spiegelchen zurückzusenden, ehe er das Ocularfernrohr erreicht. Die Lichtstärke ist nach der ersten Reflexion $^1/_{100}$, nach der zweiten $^1/_{10000}$ der einfallenden Lichtstärke. Bei meiner Methode wäre es leicht, den Strahl mehrmals in den Lichtweg zurückzureflectiren.

Wichtiger ist jedoch die Multiplication durch Vermehrung der Halbundulationsblättchen. Bilden die Hauptschnitte $A_1 A_2 \ldots A_n$ mehrerer hinter einander angeordneter solcher Blättchen die Winkel $A_1 A_2 \ldots A_n$ mit der Polarisationsebene des einfallenden Strahles, so wird dieselbe beim Durchtritt durch alle Blättchen um den Winkel B

$$B = 2A_n - 2A_{n-1} + \ldots \pm 2A_2 \mp 2A_1$$

abgelenkt. Rotiren nun alle ungeradzahligen Blättchen im positiven, alle geradzahligen Blättchen im negativen Sinne, alle mit sonst beliebigen Geschwindigkeiten $\frac{dA_1}{dt}, \frac{dA_2}{dt} \ldots$ so rotirt die Polarisationsebene des austretenden Strahles mit der doppelten Summe der numerischen Werthe der Rotationsgeschwindigkeiten im Sinne der Rotation des letzten Blättchens:

$$\frac{dB}{dt} = 2\frac{dA_n}{dt} - 2\frac{dA_{n-1}}{dt} + \cdots$$

In Fig. 4 ist ein Satz von 6 solchen Blättchen, welche an zwei in gleiche entgegengesetzte Rotation zu versetzenden Axen angebracht sind, dargestellt.[1]

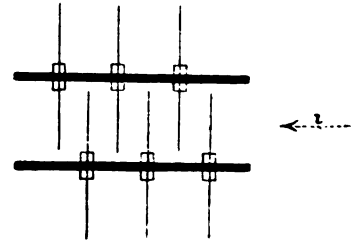


Fig. 4.

Man wird zunächst rationeller Weise die Vermehrung der Blättchen mehr zur Verlangsamung ihres Umlaufs also zur Ver-

[1] Ein System von zwei Halbundulationsblättchen hat die Besonderheit, jeden Strahl unabhängig von seiner Orientirung und Beschaffenheit

feinerung und Erleichterung der Methode, als zur Erhöhung ihrer Empfindlichkeit benützen. Der in Fig 4. dargestellte Satz liefert bei 100 Touren pro Secunde dieselbe Empfindlichkeit als der Foucault'sche Spiegel bei 500 Touren.

Das actuelle theoretische Interesse, welches heute Messungen der Lichtgeschwindigkeit besitzen, reicht an die Wichtigkeit, welche die Experimente von Fizeau und Foucault ihrerzeit gehabt haben, lange nicht heran.

Ich beschränke mich daher darauf, die beschriebene Methode für den Fall, dass wieder genauere Messungen der Lichtgeschwindigkeit nothwendig werden, zur weiteren Ausbildung und Verwendung anzuempfehlen.[1] Sie stellt immerhin eine interessante Fortführung der Aufstellungen von Fizeau und Foucault dar, und das rotirende Halbundulationsblättchen ist an sich ein experimentelles Mittel von solcher Brauchbarkeit, dass ich mir erlauben durfte, es hier zu beschreiben, obwohl ich, durch andere Untersuchungen überhäuft, niemals dazu gelangen werde, es anzuwenden.

---

um denselben Winkel $B = 2(A_2 - A_1)$ zu drehen. Es verhält sich sonach ganz wie eine senkrecht zur Axe geschnittene Quarzplatte, deren Dicke dem Winkel $(A_2 - A_1)$ proportional, also gleichförmig mit der Zeit veränderlich ist, wenn die zwei Blättchen verschiedene, z. B. gleiche und entgegengesetzte Rotationsgeschwindigkeit haben.

Der Lichtstrahl findet, nach Durchmessung seines Weges zurückkehrend, die Blättchen um $+\alpha$ resp. $-\alpha$ gedreht, also den Winkel $(A_2 - A_1)$ um 2α verändert, und er wird im Ocularapparat um $\beta = 4\alpha$ im Rotationssinn der ersten Platte gedreht ankommen.

Sind mehrere solche Blättchenpaare hintereinander angeordnet, so summirt sich ihre Wirkung. Fügt man dem Satz gegen den Lichtweg hin noch ein ungeradzahliges Blättchen zu, so wirkt es, als wenn es allein vorhanden wäre, und vergrössert die Ablenkung um den Betrag 2α.

Es bestimmt sich sonach allgemein die Lichtgeschwindigkeit v durch die Gleichung

$$v = \frac{8\pi}{\beta} Dn.m$$

worin m die Anzahl der Blättchen ist.

[1] Vielleicht, dass die Methode bereits geeignet ist, bei geodätischen Arbeiten zahlreiche Distanzmessungen mit Hilfe der Lichtgeschwindigkeit an die Stelle oder an die Seite der vereinzelten Basismessungen zu setzen.

XXVI. SITZUNG VOM 10. DECEMBER 1891.

Der Secretär legt das erschienene Heft VI—VII (Juni—Juli 1891), Abth. III des 100. Bandes der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr Prof. L. Pfaundler übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Institute der k. k. Universität in Graz, betitelt: „Das Verhalten des Wasserstoffes zu Blei und anderen Metallen", von G. Neumann und F. Streintz.

Herr Prof. Dr. E. Lippmann in Wien übersendet eine in Gemeinschaft mit Herrn F. Fleissner ausgeführte Arbeit: „Über die Einwirkung von Jodwasserstoff auf Cinchonin".

Der Secretär legt behufs Wahrung der Priorität vor:

1. Ein versiegeltes Schreiben von Herrn Joseph Grossmann, Oberingenieur der österr. Nordwestbahn in Wien, mit der Aufschrift: „Wellenkamm und Wellenstreckung".
2. Eine offene Mittheilung von Herrn Jakob Burgaritzki, Maler in Wien, unter dem Titel: „Atmosphärischer Luftdruckmotor, auch Vacuummotor, Princip".

Ferner theilt der Secretär mit, dass zu dem in der Sitzung vom 12. November l. J. behufs Wahrung der Priorität vorgelegten versiegelten Schreiben des Dr. Th. v. Truszkowski in Cairo die nachträgliche Inhaltsangabe eingelangt ist, welche lautet: „Beschreibung eines bei tropischem Leberabscesse gefundenen Bacillus".

Das w. M. Herr Intendant Hofrath Fr. Ritter v. Hauer überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung, unter dem Titel: „Beiträge zur Kenntniss der Cephalopoden aus

der Trias von Bosnien. I. Neue Funde aus dem Muschelkalk von Han Bulog bei Sarajevo".

Das w. M. Herr Hofrath Director J. Hann überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Einige Resultate stündlicher meteorologischer Beobachtungen auf dem Gipfel des Fuji (3700 *m*) in Japan".

Herr Dr. J. Holetschek, Adjunct der k. k. Universitäts-Sternwarte in Wien, überreicht eine Abhandlung: „Über den Kometen des Jahres 1689".

Herr J. Liznar, Adjunct der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, überreicht seinen dritten vorläufigen Bericht über „Eine neue magnetische Aufnahme Österreichs".

XXVII. SITZUNG VOM 17. DECEMBER 1891.

Der Vorsitzende, Herr Vice-Präsident Hofrath Dr. J. Stefan, gibt Nachricht von dem am 10. December l. J. erfolgten Ableben des ältesten wirklichen Mitgliedes der kaiserlichen Akademie, emerit. Professor Dr. Albert Jäger in Innsbruck.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär legt den eben erschienenen 58. Band, Jahrgang 1891, der Denkschriften vor.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach in Prag übersendet eine Mittheilung über eine von Herrn med. stud. W. Pascheles auf der Klinik des Herrn Prof. A. Přibram ausgeführte Untersuchung, betreffend den „Einfluss des Hautwiderstandes auf den Stromverlauf im menschlichen Körper".

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer übersendet eine Abhandlung von Herrn J. A. Gmeiner in Innsbruck, betitelt: „Die Ergänzungssätze zum bicubischen Reciprocitätsgesetze".

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Zur Kenntniss der Milchbezahnung der Gattung *Entelodon* Aym.", von Prof. Dr. Rud. Hoernes an der k. k. Universität in Graz.
2. „Beitrag zur constructiven Theorie der windschiefen Regelflächen mit zwei Leitgeraden und einem Leitkegelschnitt", von Prof. Heinrich Drasch an der k. k. Realschule in Linz.

Das w. M. Herr Hofrath Director F. Steindachner überreicht einen kurzen Bericht über die während der diesjährigen Tiefsee-Expedition angestellten Tiefsee-Operationen und pelagischen Fischereien im östlichen Mittelmeere.

Das w.M. Herr Prof. V. v. Ebner überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. Wilhelm Roux in Innsbruck, betitelt: „Über die morphologische Polarisation von Eiern und Embryonen durch den elektrischen Strom, sowie über die Wirkung des elektrischen Stromes auf die Richtung der ersten Theilung des Eies. (Ein Beitrag zur Entwicklungsmechanik des Embryo.)“

Das w. M. Herr Oberbergrath Dr. E. v. Mojsisovics überreicht eine Abhandlung von Dr. Fritz v. Kerner in Wien, betitelt: „Die Verschiebungen der Wasserscheide im Wippthale während der Eiszeit“.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine im chemischen Institute der k. k. Universität Graz von A. Schubert und Zd. H. Skraup ausgeführte Untersuchung, betitelt: „Das Verhalten von Chinin und Chinidin gegen Jodwasserstoff“.

Das w. M. Herr Hofrath Director J. Hann überreicht eine Abhandlung von Ed. Mazelle in Triest, betitelt: „Untersuchungen über den täglichen und jährlichen Gang der Windgeschwindigkeit zu Triest“.

Herr Anton Handlirsch in Wien überreicht den VI. Theil seiner „Monographie der mit *Nysson* und *Bembex* verwandten Grabwespen“.

Einige Resultate stündlicher meteorologischer Beobachtungen auf dem Gipfel des Fuji in Japan

von

J. Hann,
w. M. k. Akad.

Im August 1889 sind auf dem höchsten Berge Japans, dem Fujijama, wie wir gewohnt sind ihn zu nennen, eine Reihe stündlicher (bei Nacht zweistündlicher) Beobachtungen aller meteorologischen Elemente ausgeführt worden. Gleichzeitig wurden zu denselben Stunden am Fusse des Berges correspondirende meteorologische Beobachtungen angestellt. Dieselben sind in extenso publicirt worden in dem mir kürzlich zugekommenen Annual Meteorological Report for the year 1889 of the Met. Central Observatory Tokio Japan Part II. Eine analoge Reihe von einen vollen Monat umfassenden zweistündlichen meteorologischen Beobachtungen auf dem Gipfel des Gozaishogatake (allerdings nur 1201 *m* hoch) und an dessen Fusse im Meeresniveau findet sich gleicherweise in extenso publicirt in dem Annual Report for the year 1888, Part II. In beiden Publicationen finden sich auch schon die Stundenmittel berechnet vor, mit Ausnahme der mittleren Windgeschwindigkeit auf dem Gipfel des Fuji, die erst berechnet werden musste. Auch ein Résumé der Beobachtungen der Windrichtungen fehlt. Eine Bearbeitung der Ergebnisse dieser interessanten Beobachtungsreihen hat nicht stattgefunden.[1] Es

[1] Über die Beobachtungen auf dem Gozaishogatake und an dessen Fuss hat allerdings schon Hr. Knipping eine dankenswerthe Arbeit geliefert. Meteorolog. Zeitschr., Bd. XXV, S. 188 etc.

schien mir daher von erheblichem Interesse, eine eingehendere Berechnung dieser Beobachtungen zu unternehmen und einige Schlussfolgerungen an dieselben anzuknüpfen.

Die Beobachtungen auf dem Gipfel des Fuji wurden unter der Leitung des Herrn Nakamura (jetzt Vorstand des meteorologischen Dienstes in Japan) angestellt, und zwar während 38 Tagen, vom 1. August bis 7. September 1889; vom 1. bis 7. September sind die Beobachtungen aber nur in vierstündigen Intervallen gemacht. Der Fuji ist ein isolirter Bergkegel, ein erloschener Vulkan, der sich ganz frei an der Küste des pacifischen Oceans zu 3770 *m* (höchster Kraterrand) erhebt und ganz unvergleichlich geeignet ist zur Untersuchung der meteorologischen Verhältnisse der hohen Luftregionen. Als Beobachtungsstation diente eine der steinernen Schutzhütten für die Pilger, die den heiligen Berg Japans zahlreich besuchen und die sich am nordöstlichen Rande des Kraters befinden. Dieselbe befand sich 61 *m* unter dem höchsten Punkte.

Als correspondirende Station wurde Yamanaka gewählt, das auf der ENE-Seite des Berges in 990 *m* Höhe am gleichnamigen See in 12 *km* Entfernung vom Gipfel liegt.

Der Gozaishogatake ist ein Gipfel des Gebirgszuges, der die Kii-Halbinsel (Nippon) durchzieht. Der Hafenort Yokkaichi liegt etwa 20 *km* östlich davon. Die obere Station befand sich dicht unterhalb des Gipfels. Die Beobachtungen an derselben sollen hier nur zu Vergleichen benützt werden, da schon Herr Knipping einige Resultate aus denselben abgeleitet hat (Met. Zeitschrift, 1890, S. 188). Die Lage der Stationen, deren Beobachtungsergebnisse hier discutirt werden, ist folgende:

	Höhe	N-Breite	E-Länge
Fuji	3733 *m*	35° 22′	138° 44′
Yamanaka	990	35 26	138 51
Tokio	21	35 41	139 45
Numazu[1]	1	35 6	138 51
Gozaishogatake	1201	35 1	136 25
Yokkaichi	4	34 57	136 39

[1] Basisstation für den Fuji, am Meeresniveau. Die Beobachtungsergebnisse finden sich im Part I des oben citirten Annual Report.

Die Beobachtungen sollen insgesammt in mittlerer Japan Zeit, d. i. Zeit des 135ten Meridians angestellt sein.

Es bedarf also die Zeit von Tokio einer Correction von $+4° 45' = +19^m$, jene von Fuji von $+3° 44' = +15^m$ und vom Gozaishogatake von $+1° 25' = +5^m$ in Zeit.

Alle Beobachtungen und Berechnungen wurden nach demselben System gemacht wie die am Central-Observatorium zu Tokio. Das Anemometer auf dem Gipfel des Fuji wurde zweimal, während des Sturmes vom 18.—20. August und jenes am 26. August beschädigt; die Windgeschwindigkeiten wurden während dieser Unterbrechungen geschätzt. Ich habe zur Ableitung des mittleren täglichen Ganges diese geschätzten Windstärken näherungsweise auf Meter pro Secunde reducirt.

An der Station Yamanaka fehlen die Beobachtungen um 4^h a. m. ganz. Die fehlenden Mitternachtbeobachtungen der ersten 8 Tage des August wurden von mir in der Weise ergänzt, dass die Differenz der Mittel vom 9.—31. von 12^h und 10^h an das vollständige Mittel für 10^h p. m. angebracht wurde. Beim Dampfdruck und der Bewölkung habe ich auf die hier mitgetheilten Mittel der geraden Stunden auch die Mittel der anliegenden ungeraden Stunden Einfluss nehmen lassen, weil dadurch der tägliche Gang dieser Elemente regelmässiger wurde.

Ich will hier zunächst die correspondirenden Monatsmittel der wichtigeren meteorologischen Elemente zusammenstellen.

	N-Br.	Höhe	Luftdruck	Temp.	Dampfdruck	Bewölkung	Regen
			August 1889.				
Tokio	35°7	21	756·54	25°8	20·2	6·4	96
Numazu	35·1	1	757·60	25·8	20·5	7·4	187
Yamanaka	35·4	990	677·48	20·7	16·1	6·2	580
Fuji	35·4	3733	490·68	(7·7)	5·5	4·8	880
			September 1888.				
Gozaishogatake	35·0	1201	660·71	13·2	10·3	6·7	470
Yokkaichi	34·9	4	760·10	20·7	14·8	5·8	122

Temperatur. Die Temperatur auf dem Gipfel des Fuji ist jedenfalls am Tage zu hoch, wohl in Folge von Strahlungseinflüssen. Dafür sprechen nicht allein die ungemein grosse

tägliche Amplitude und die ganz unwahrscheinlich geringe Wärmeabnahme mit der Höhe bei Tag (kleiner als in der Nacht), sondern auch in ganz entschiedener Weise die geringe einmalige tägliche Oscillation des Barometers, die auf eine sehr geringe tägliche Variation der Temperatur der Luftsäule zwischen dem Meeresniveau und dem Gipfel des Fuji hinweist.

Die Beobachtungen an den Extremthermometern gaben folgende Resultate:

	Mittl. tägliche Extreme		Differenz	Mittel	Absolutes Max.	Absolutes Min.
Fuji (3750)	14·7	3·2	11·5	8·9	21·4	—0·5
Yamanaka (990)	26·2	16·6	9·6	21·4	31·1	11·8
Tokio (21)	30·0	22·3	7·7	26·1	33·3	16·3
Numazu (1)	29·6	22·4	7·1	26·0	32·4	18·3

Yamanaka hat als Inlandstation zwischen Bergen eine etwas grössere tägliche Amplitude als Tokio in der Nähe des Meeres, die Zunahme der Amplitude auf dem Fuji-Gipfel ist dagegen höchst unwahrscheinlich, auch das Temperaturmaximum auf denselben ist ganz auffallend hoch.

Zum Vergleiche mögen folgende Daten hier stehen.

	Mittel der Extreme		Differenz	Mittel	Absolutes Max.	Absolutes Min.
Gozaishogatake (1201)	17·5	10·2	7·3	13·8	21·7	3·3
Yokkaichi (4)	25·8	16·8	9·0	21·3	32·7	8·3

Hier sind sowohl die Änderungen der Temperaturamplituden als die der Mittel und Extreme die normalen.

Die Temperaturabnahme mit der Höhe zwischen Yamanaka und Fuji-Gipfel ergibt sich für die Zeit von 6^h Abends bis 6^h Morgens zu 0·50, bei Tag dagegen nur zu 0·455, pro 100 *m*, ein ganz unwahrscheinlich kleiner Werth! Nimmt man nur jene Tage, an welchen auf dem Gipfel des Fuji eine Bewölkung von 9—10 herrschte, so erhält man als mittlere Wärmeabnahme pro 100 *m* 0·52. Daraus darf man wohl schliessen, dass die wahre mittlere Wärmeabnahme (Tag und Nacht) sich wenig von 0°6 entfernt haben wird. Dann wäre die Temperatur auf dem Fuji nicht zu 7°7, sondern nur zu 4°3 anzunehmen.

Die Beobachtungen auf dem Gozaishogatake geben für 6^h a. m. die kleinste Wärmeabnahme mit 0°48 pro 100 *m*, für 2^h p. m. die grösste mit 0°75, im Mittel 0°63. Die Nachtbeobachtungen auf dem Fuji-Gipfel stimmen auch damit überein.

Luftdruck. Von grossem Interesse sind die stündlichen Beobachtungen des Barometers auf den beiden Berggipfeln im Vergleich mit den correspondirenden Beobachtungen in den unteren Lagen. Ich habe sie desshalb einer eingehenderen Berechnung unterzogen und die Amplituden und Phasenzeiten der einmaligen und der doppelten täglichen Luftdruckschwankung abgeleitet. Da zu Numazu und zu Yokkaichi nur in vierstündigen Intervallen das Barometer abgelesen wurde, sind natürlich die Amplituden und Phasenzeiten, namentlich jene der doppelten täglichen Oscillation, nicht so genau zu bestimmen, wie jene der übrigen Stationen. Ich bemerke noch, dass im Originale die Stundenmittel des Luftdruckes auf dem Gozaishogatake und zu Yokkaichi nur auf eine Decimale berechnet worden sind, was zu ungenau war für den vorliegenden Zweck, daher diese Mittel erst auf zwei Decimalen neuerdings berechnet werden mussten.

Die Constanten der täglichen Barometeroscillation.

Zeit von Mitternacht an gezählt.

	a_0	a_1	a_2	A_1	A_2
Tokio	756·54	·448	·450	20° 41°	156° 27'
Numazu	757·60	·453	·498	20 5	162 48
Yamanaka	677·48	·193	·298	6 40	158 19
Fuji	490·68	·147	·204	261 33	152 6
Gozaishogatake	660·71	·089	·358	250 45	156 32
Yokkaichi	760·10	·356	·559	52 26	168 5
Tokio	758·25	·215	·470	4 45	158 5

Betrachten wir zunächst die doppelte tägliche Oscillation des Barometers in den verschiedenen Höhen. Wir finden da erstlich, dass die Phasenzeiten vom Meeresniveau bis hinauf zu 3700 *m* unverändert bleiben, denn wir haben[1] (abgesehen von Numazu und Yokkaichi, wo nur in vierstündigen Inter-

[1] An die Constante A_2 ist bereits überall die Correction auf die mittlere Ortszeit angebracht worden.

vallen beobachtet worden ist, die Phasenzeiten der doppelten täglichen Oscillation daher nicht genau bestimmt werden können):

Meeresniveau Tokio 156°3; 990 *m* Yamanaka 158°3 und 3700 *m* Fuji 152°1 (August).

Meeresniveau Tokio 158°1; 1200 *m* Gozaishogatake 156°5 (September).

Die Übereinstimmung ist eine vollständige, denn die grössten Unterschiede der Phasenzeiten gehen nicht über 12 Minuten hinaus (6° im Winkel), welcher Unterschied völlig innerhalb der unvermeidlichen Fehlergrenzen der Bestimmung derselben aus 30tägigen Beobachtungen zu liegen kommt. Im Mittel ist die Winkelconstante $A_1 = 156°3$ mit Reduction auf wahre Zeit etwa 156°. Ich habe früher als allgemeines Mittel für diese Constante den Werth 155° gefunden. Man sieht, mit welcher bei meteorologischen Erscheinungen sonst ganz unerhörten Genauigkeit die Erscheinung der doppelten täglichen Oscillation des Barometers in allen Höhen auftritt und schon aus einmonatlichen Beobachtungen in ihren Haupterscheinungen sicher abgeleitet werden kann.

Die Epoche der ersten Fluth der doppelten täglichen Oscillation tritt an allen unseren Stationen bis auf Abweichungen von wenigen Minuten um $9^h\ 50^m$ Vormittags ein.

Die Amplituden der doppelten täglichen Oscillation nehmen ziemlich genau im selben Verhältniss wie der Luftdruck selbst mit der Höhe ab. Für Fuji-Yamanaka ist das Verhältniss der Amplituden $a_2 = 0·68$, das der entsprechenden Barometerstände 0·63; für Gozaishogatake-Yokkaichi ist das Verhältniss der Amplituden $a_2 = 0·64$, das der Barometerstände 0·86; nimmt man aber Tokio als Basisstation, weil zu Yokkaichi nur vierstündig beobachtet worden ist, die Amplitude daher etwas ungenau ist, so erhält man als Verhältniss der Amplituden 0·76, als das der Barometerstände aber 0·80. Man kann demnach mit Rücksicht auf die schon ziemlich kleine Amplitude der doppelten täglichen Oscillation des Barometers in diesen Breiten (circa 0·5 *mm* im Meeresniveau) wohl sagen, dass die Beobachtungen auf den Bergen Japans weitere Belege für den Satz geliefert haben, welcher sagt, dass die Amplitude der doppelten täglichen Oscillation des Barometers mit der Höhe im selben Verhältniss abnimmt wie der Barometerstand.

Diese weiteren Belege sind erwünscht, denn ich konnte in meiner grösseren Abhandlung „Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers“ (Denkschriften der Wiener Akademie, Bd. LV, Wien 1889) darauf hinweisen, wie wenige geeignete Beobachtungsreihen zum Nachweise dieses zuerst von John A. Brown bestimmt ausgesprochenen Satzes wir damals erst besessen haben (S. 21 oder [69]).

Gehen wir nun weiter zur Untersuchung der Verhältnisse der einmaligen täglichen Barometerschwankung in grösseren Höhen. Die Amplituden derselben sind sowohl auf dem Fuji-Gipfel als auf dem Gozaishogatake ganz auffallend klein.

Dass die Amplitude der einmaligen täglichen Oscillation auf Berggipfeln mit der Höhe rasch abnimmt, konnte ich schon in meiner vorhin citirten Abhandlung an mehreren Beispielen zeigen:

	a_1
Madras (Meeresniveau)	0·621
Dodabetta-Gipfel (2630 *m*)	0·217
Numazu (Meeresniveau)	0·453
Fuji-Gipfel (3730 *m*)	0·147

Da aber die Amplitude der einmaligen täglichen Oscillation des Barometers an der Erdoberfläche ausserordentlich stark von den localen Verhältnissen bedingt wird, so kann von einer regelmässigen Abnahme derselben mit der Höhe keine Rede sein.

Die Phasenzeit der einmaligen täglichen Oscillation des Barometers zeigt deutlich ihre Abhängigkeit von dem täglichen Gange der mittleren Temperatur der Luftsäule unterhalb der Station, wie dies ja erwartet werden muss. Ich gebe hier einige Beispiele:

	Höhe	A_1
Fuji	3730	261°6
Dodabetta	2630	276·6
Gozaishogatake	1200	250·8
Pic von Teneriffa	2990	217·9

Der Winkel A_1 liegt im III. Quadranten, eine bestimmte regelmässige Änderung mit der Höhe lässt sich vorläufig nicht

constatiren, ist auch kaum zu erwarten. Die Epoche der einmaligen täglichen Fluth fällt etwa auf etwa 1ʰ p. m., also nahe zusammen mit dem täglichen Maximum der Lufttemperatur (an der Erdoberfläche), das Maximum der wahren mittleren Temperatur der ganzen Luftsäule tritt aber höchst wahrscheinlich viel später ein, vielleicht erst um 5ʰ oder 6ʰ p. m., so dass der Winkel A_1 nahe auf 180° zurückgehen müsste, wenn er dem wahrscheinlichen Gange der wahren mittleren Lufttemperatur völlig entsprechen sollte.

Wollte man als mittlere Temperatur der Luftsäule zwischen Yamanaka und dem Fuji-Gipfel das Mittel der oben und unten beobachteten Temperaturen ansehen, so würde man folgenden Vergleich zwischen der einmaligen täglichen Schwankung des Barometers und jener der Temperatur erhalten:

Barometer (Millimeter) . . . . . $0{\cdot}15 \sin (265°3 + x)$
Temperatur (Celsiusgrade) . . . . . $3{\cdot}67 \sin (253{\cdot}4 + x)$

Man sieht, die Phasenzeiten stimmen ziemlich gut; die Amplitude der täglichen Temperaturschwankung ist aber sicherlich viel zu gross. Sie würde, wenn sie in der That so gross wäre, eine viel grössere einmalige tägliche Barometerschwankung auf dem Fuji-Gipfel erzeugen müssen. Eine beiläufige Schätzung, wie gross sie in Wirklichkeit etwa sein dürfte, wird sich aus den folgenden allgemeinen Betrachtungen ergeben.

Überlegen wir vorerst, wie sich die einmalige tägliche Oscillation des Barometers an einem Punkte der freien Atmosphäre in Folge der täglichen Temperaturschwankung der Luftsäule unterhalb desselben gestalten müsste, wenn der Barometerstand an der Erdoberfläche selbst zunächst constant bliebe. Befindet sich der Punkt in der Höhe h, wo der Barometerstand b ist, und bezeichnen wir mit Δt die ganze tägliche Wärmeschwankung der Luftsäule, so würde die davon abhängige tägliche Barometerschwankung an unserem Punkte gegeben sein durch den Ausdruck:[1]

$$b_1 = b + \frac{1}{2}\frac{bh}{RT^2}\Delta t \sin (A_1 + x).$$

[1] Die Grössen R und T haben hier die aus der Wärmetheorie bekannte Bedeutung.

Über die Winkelconstante A_1 lässt sich unter der Voraussetzung der einfachsten Verhältnisse auch eine bestimmte Annahme machen. Wie schon bemerkt, scheinen manche Erscheinungen darauf hinzuweisen, dass die mittlere tägliche Variation der wahren Lufttemperatur ihre Extreme etwa um 5^h Morgens und um 5^h Nachmittags erreicht. Diese Epochen erhält man zum Beispiel beiläufig durch Berechnung der mittleren wahren Lufttemperatur aus stündlichen Barometerbeobachtungen in verschiedenen Höhen. Je höher die Luftsäule ist, desto mehr verspäten sich die Eintrittszeiten der täglichen Extreme. Wir können der Einfachheit halber dieselben um 6^h Morgens und 6^h Abends ansetzen. Dann würde die Winkelconstante A_1 den Werth 180° annehmen, wenn die Zeit, wie überall hier, von Mitternacht an gezählt wird. Für einen Punkt von der Höhe des Fuji-Gipfels zum Beispiel wäre dann die tägliche einmalige „Wärmeoscillation" des Barometers gegeben durch den Ausdruck ($b = 491$, $h = 3700$)

$$0{\cdot}431\ \Delta t \sin (180° + x).$$

Für 1° Schwankung der mittleren Luftwärme würde das Barometer also um 0·862 *mm* schwanken (wenn unten der Luftdruck constant bleibt). Nimmt man h nur zu 2740 *m* (Höhendifferenz Fuji-Yamanaka), so erhält man eine Schwankung von 0·634 *mm* pro 1° Temperaturschwankung. Ich habe dabei $T_0 = 250°$ gesetzt, um auch dem Feuchtigkeitsgehalt der Luft in einfacher Weise Rechnung zu tragen. Eine Amplitude von kaum 0·3 *mm*, wie sie die Beobachtungen auf dem Fuji ergeben haben, würde also bloss einer Änderung der mittleren Luftwärme von kaum $^1/_2$° zwischen Yamanaka und dem Fuji-Gipfel entsprechen.

Nun treffen aber in der That die Voraussetzungen, die wir bisher gemacht haben, durchaus nicht ganz zu. Vor Allem ist zu berücksichtigen, dass wahrscheinlich noch eine andere und zwar eine allgemeine einmalige tägliche Schwankung des Luftdruckes besteht, welche allerdings an der Erdoberfläche sehr stark local beeinflusst wird, namentlich durch den periodischen täglichen Luftaustausch zwischen Berg und Thal, sowie auch zwischen Land und Wasser. In einer gewissen Höhe über der Erdoberfläche dürften wir aber diese allgemeine einmalige tägliche Schwankung

rein antreffen; desgleichen dürfte sie über den weiten Oceanen ziemlich rein zur Erscheinung kommen. Diese allgemeine einmalige tägliche Barometerschwankung hat nun gegenüber jener, die wir oben betrachtet haben, ziemlich genau die entgegengesetzten Phasenzeiten, so dass sich in der Höhe diese beiden Oscillationen theilweise schwächen, ja unter unserer Voraussetzung in einer bestimmten Höhe auch ganz aufheben müssten.

Die allgemeine einmalige tägliche Barometerschwankung wird auf den offenen Oceanen nach den in meiner früher citirten Abhandlung angeführten Beobachtungen und Rechnungen dargestellt durch folgenden Ausdruck:

$$0{\cdot}372 \sin (4^{\circ}3 + x).$$

Derselbe beruht auf Beobachtungen während 270 Tagen und gilt für eine mittlere Breite von 7° (Nord oder Süd).

Die Constante A_1 kann also für die allgemeine einmalige tägliche Schwankung rund gleich 360° oder 0° gesetzt werden. Diese einmalige Oscillation hat demnach ein Maximum um 6^h Morgens und ein Minimum um 6^h Nachmittag; die Phasenzeiten derselben sind also genau entgegengesetzt jener einmaligen täglichen Barometeroscillation in den höheren Luftschichten, welche eine Folge der täglichen Schwankung der mittleren Temperatur der Luftschichten unterhalb ist. Für den einfachsten Fall dieser letzteren Oscillation wird die resultirende einmalige tägliche Barometerschwankung in der Höhe ausgedrückt werden können durch die Gleichung:

$$b_r = \frac{1}{2} \frac{bh}{RT^2} \Delta t (\sin 180^{\circ} + x) + a (\sin 0^{\circ} + x)$$

oder

$$b_r = \left(\frac{1}{2} \frac{bh}{RT^2} \Delta t - a \right) (\sin 180^{\circ} + x).$$

In den unteren Luftschichten wird die allgemeine tägliche Oscillation überwiegen, in den höheren diejenige, welche durch die tägliche Hebung und Senkung der Flächen gleichen Druckes in Folge der täglichen Erwärmung und Wiedererkaltung der Luftschichten bedingt wird; in einer bestimmten Höhe würden

sich unter unseren einfachen Voraussetzungen beide das Gleichgewicht halten, es würde gar keine Oscillation erfolgen.

In Wirklichkeit sind aber die Phasenzeiten dieser beiden Oscillationen nicht genau die entgegengesetzten. Die Constante A_1 der allgemeinen einmaligen täglichen Oscillation dürfte zwar in der That recht nahe bei 0° liegen (die Zeit, wie dies hier stets geschieht, von Mitternacht an gezählt), diejenige der „Höhenfluth" oder „reinen Wärmeoscillation" der höheren Luftschichten aber liegt wahrscheinlich näher bei 240° als bei 180°, d. h. die Epoche des Temperaturmaximums der wahren mittleren Temperatur der Luftschichten liegt wohl näher bei 4^h Nachmittag als bei 6^h Uhr Abends. In diesem Falle entsteht eine Interferenzfluth mit verminderter Amplitude und einer Phasenzeit, die zwischen jenen der beiden constituirenden Schwankungen liegt. In der That liegt auf Berggipfeln die Constante A_1 fast stets im dritten Quadranten zwischen 180° und 270°, in geringen Höhen auch noch im vierten Quadranten.

Nehmen wir schätzungsweise an, dass die Amplitude der allgemeinen einmaligen täglichen Oscillation des Barometers in der geographischen Breite des Fuji noch etwa 0·3 *mm* sei und mit der Höhe, wie es bei der Amplitude der doppelten täglichen Oscillation in der That constatirt werden kann, im Verhältniss des Barometerstandes abnimmt, so würde sie auf dem Gipfel des Fuji nur mehr $0{\cdot}3 \times 0{\cdot}65 = 0{\cdot}2$ *mm* sein. Unter der einfachsten Voraussetzung genau entgegengesetzter Phasenzeiten würde demnach die Amplitude der „reinen Wärmeoscillation" des Barometers in der Höhe des Fuji nach den Beobachtungsergebnissen etwa gleich sein $0{\cdot}15 + 0{\cdot}20 = 0{\cdot}35$ und die ganze Schwankung würde 0·7 *mm* sein. Da nun einer Änderung der wahren mittleren Temperaturen der ganzen Luftsäule von circa 3700 *m* Höhe von Einem Grad eine Druckänderung 0·86 *mm* entsprechen müsste, so würde aus den Luftdruckbeobachtungen auf dem Gipfel des Fuji gefolgert werden können, dass die Änderung der wahren mittleren Temperatur der ganzen Luftsäule Einen Grad im Laufe des Tages nicht erreicht.

Wenn wir bedenken, dass die vorliegenden Luftdruckbeobachtungen auf dem Gipfel des Fuji in die Zeit des Süd-Monsuns fallen, der zuweilen mit der Intensität eines Sturmes geherrscht

hat, und dass dieser Luftstrom von den ausgedehnten Wasserflächen des grossen Oceans herkommt, wo die tägliche Temperaturschwankung an der Oberfläche kaum 2° erreicht, so enthält dieses Resultat eigentlich nichts Befremdendes. Es ist in der That zu erwarten, dass auf höheren Berggipfeln von oceanischen Inseln die Amplitude der einmaligen täglichen Barometerschwankung sehr klein gefunden wird.

Die vorstehenden Erörterungen dürften dazu dienen, verschiedene zuweilen nicht ganz zutreffende Ansichten über die Art des Auftretens der einmaligen täglichen Barometeroscillation auf Berggipfeln zu berichtigen. Dies scheint mir um so wünschenswerther, da gegenwärtig die Discussion der Beobachtungsergebnisse von Gipfelstationen so zu sagen auf der Tagesordnung steht.

Ich darf allerdings nicht darüber hinweggehen, dass ich in der obigen Erörterung einer dritten Erscheinung noch gar nicht Rechnung getragen habe, die, allerdings weniger auf isolirten Berggipfeln als auf Bergabhängen, ebenfalls auf die einmalige tägliche Oscillation des Barometers Einfluss nimmt, im letzteren Falle wohl in beachtenswerther Weise.

Es ist dies die periodische tägliche Umlagerung von Luftmassen vom Thal gegen die Bergabhänge und umgekehrt; jene Erscheinung, die den Tag- und Nachtwinden der Gebirgsthäler zu Grunde liegt und die ich zuerst in meiner Abhandlung „Zur Meteorologie der Alpengipfel“ genauer untersucht und physikalisch begründet habe.[1] Sie vergrössert an der Erdoberfläche die Amplitude der allgemeinen einmaligen täglichen Barometeroscillation örtlich in ganz gewaltigem Maasse, lässt aber die Phasenzeiten derselben ziemlich ungeändert. Der Mittelwerth der Constanten A_1 in Gebirgsthälern ist 13°, also nur wenig verschieden von jenem, der für die offenen Oceane gilt.[2] Auf den Bergabhängen dagegen ist sie nur eine Modification der früher betrachteten hier kurz als „reine Wärmefluth“ bezeichneten Schwankung.

---

[1] Sitzungs-Ber. October 1878, Bd. LXXVIII, S. 25—33 des Separatabdruckes.

[2] Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers, S. 15 [63].

Auf isolirten Berggipfeln aber, von denen hier nur die Rede ist, namentlich wenn sie stark unter oceanischen Einflüssen stehen, wird diese zuletzt erwähnte einmalige tägliche Schwankung wohl keine erhebliche Rolle spielen; je steiler und isolirter der Berggipfel ist, desto weniger. Es genügt, darauf hinzuweisen, dass wir auf den Einfluss derselben nicht ganz vergessen haben. Derselbe soll bei einer anderen Gelegenheit noch näher untersucht werden.

Dampfdruck und relative Feuchtigkeit. Der tägliche Gang derselben bietet nichts Bemerkenswerthes. Wie weit die Werthe dieser Grössen durch die zu hoch gefundene Luftwärme bei Tag auf dem Gipfel des Fuji beeinflusst worden sein mögen, lässt sich nicht abschätzen.

Berechnet man den mittleren Dampfdruck auf dem Gipfel des Fuji aus den Beobachtungen im unteren Niveau nach der von mir aufgestellten Formel

$$e_h = e_0 10^{-\frac{h}{6500}},$$

so findet man:

Numazu, Tokio geben im Mittel $e_0 = 20{\cdot}3$. Daraus findet man $e_h = 20{\cdot}3 \times 0{\cdot}27 = 5{\cdot}5$ *mm*, genau mit dem auf dem Fuji-Gipfel beobachteten Dampfdruck übereinstimmend. Yamanaka gibt etwas mehr, $16{\cdot}1 \times 0{\cdot}377 = 6{\cdot}1$ *mm*.

Berechnet man gleicherweise den mittleren Dampfdruck auf dem Gozaishogatake aus jenem, der am Meeresniveau beobachtet worden ist, so erhält man $20{\cdot}7 \times 0{\cdot}65 = 13{\cdot}4$ *mm*, beobachtet wurde 13·2. Meine Formel stimmt also auch hier vollkommen mit den Beobachtungen überein.

Die relative Feuchtigkeit zeigte auf dem Gipfel des Fuji grosse Schwankungen, wie dies auch von anderen Gipfelstationen bekannt ist. Grosse Feuchtigkeit wechselt rasch mit sehr grosser Trockenheit. Am 7. August wurden 16% beobachtet, am 15. August 14%, Tagesmittel 41%, am 31. war das Minimum 10%, das Tagesmittel 32%, dagegen am 29. das Tagesmittel 100%. Da die grossen Trockenheiten auch in den Nachtstunden beobachtet worden sind (am 7. Nachts 30—25%, am 31. Nachts von 10^h p. m. bis 6^h a. m. 22%), so ist nicht etwa die vorhin

gedeutete zu grosse Tagestemperatur die Ursache der zuweilen eintretenden so geringen relativen Feuchtigkeit.

Bewölkung und Niederschlag. Die Beobachtungsreihen sind zu kurz, um über den täglichen Gang dieser, grossen Variationen unterliegenden meteorologischen Elemente schon Verlässlicheres aussagen zu können. Im Allgemeinen sieht man, dass die Bewölkung in den Morgenstunden ein Minimum, in den Abendstunden ein Maximum erreicht, und zwar unten wie oben.

Der Regenfall war auf dem Fuji-Gipfel und an dessen Fusse Tag und Nacht nahezu gleich. Fuji: Tag 443, Nacht 444. Yamanaka: Tag 303, Nacht 277. Auf dem Gozaishogatake fiel (im September 1888) bei Nacht bedeutend mehr Regen als bei Tag, und zwar im Verhältniss von 343 zu 127. Natürlich sind zweimonatliche Beobachtungen nicht zureichend, den mittleren täglichen Gang des Regenfalles abzuleiten. Die Regenmenge war auf den Berggipfeln bedeutend grösser als an deren Fuss, auf dem Fuji um mehr als die Hälfte (Verhältniss 1·53 zu 1), auf dem Gozaishogatake sogar fast viermal grösser (3·85 zu 1).

Die Beobachtungen auf dem Fuji-Gipfel fielen in jene Zeit, in welcher der verheerende Wolkenbruch stattfand, den Hr. Knipping genauer beschrieben hat.[1] Die grossen Regenmengen des 19. und 20. August 1889 erstreckten sich auch noch bis in die Gegend des Fuji. Am 20. August wurde auf dem Fuji eine Tagesmenge von 319 *mm* gemessen, zu Yamanaka von 166 *mm*. Dagegen fielen am letzteren Orte schon am 18. August 204 *mm*, von 2^h p. m. des 18. bis 2^h p. m. des 19. sogar 252 *mm*. Auf dem Fuji-Gipfel fielen von 10^h a. m. des 19. bis 10^h a. m. des 20. August 378 *mm*. Am 18. fielen in zwei Stunden 69 *mm* auf dem Fuji-Gipfel und 80 *mm* zu Yamanaka. Diese Regengüsse waren auf dem Fuji-Gipfel von einem schweren Sturme begleitet, dessen Richtung von SSE nach SSW und endlich nach SW sich drehte. Auch am 26. herrschte ein schwerer SW-Sturm.

Windrichtung und Windstärke. Eine Übersicht über die auf dem Fuji-Gipfel zweistündlich beobachteten Windrichtungen und Windwege (letztere als momentane Geschwindigkeiten zu nehmen) gibt folgende kleine Tabelle:

[1] Meteorologische Zeitschrift, XXV. Bd., 1890, S. 281.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calmen
				Nacht (6h p. m. bis 6h a. m).					
Windweg	20	6	0	59	264	1008	416	60	0
Häufigkeit	7	4	0	5	17	70	58	15	10
				Tag (6h a. m. bis 6h p. m.).					
Windweg	16	23	16	79	193	732	227	110	0
Häufigkeit	7	9	5	6	18	58	45	25	13

Die S-, SW- und W-Winde herrschten Tag und Nacht vor, stärker aber bei Nacht als bei Tag. Bei Tag werden die Ostwinde etwas häufiger; bei Nacht fehlte der reine Ostwind ganz. Die mittlere Stärke der einzelnen Windrichtungen wird durch folgende Zahlen (Meter pro Secunde) gegeben.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	
Mittlere Stärke	2·6	2·2	3·2	12·5	13·1	13·6	6·2	4·2	m. p. s.

Der SW hat bei Nacht 14·4, bei Tag bloss 12·6 *m* Geschwindigkeit.

Die Windbeobachtungen auf dem Gipfel des Gozaishogatake hat schon Hr. Knipping einer Discussion unterzogen, daher hier nicht mehr darauf eingegangen zu werden braucht.[1]

Es erübrigt noch, den täglichen Gang der absoluten Windstärke zu betrachten. Auf beiden Gipfelstationen zeigt sich die Erscheinung eines nächtlichen Maximums und eines Minimums in den Nachmittagsstunden in der ausgesprochensten Weise. Ich habe den täglichen Gang der Windgeschwindigkeiten an diesen beiden Stationen durch Sinusreihen ausgedrückt, damit die Erscheinung schärfer zum Ausdrucke komme. Die entsprechenden Gleichungen sind:

Fuji-Gipfel . . $8 \cdot 79 + 2 \cdot 04 \sin (65°1 + x) + 0 \cdot 54 \sin (44°3 + 2x$

Gozaishogatake

$7 \cdot 76 + 1 \cdot 50 \sin (84°6 + x) + 0 \cdot 59 \sin (281°3 + 2x)$

Im Mittel . . . $8 \cdot 28 + 1 \cdot 74 \sin (73°3 + x) + 0 \cdot 27 \sin (327° + 2x)$.

Zum Vergleich möge noch der von mir für Pikes Peak (4308 *m*) berechnete tägliche Gang der absoluten Windstärke hier Platz finden:

Pikes Peak $9 \cdot 26 + 1 \cdot 01 \sin (76°7 + x) + 0 \cdot 30 \sin (316°0 + 2x)$.

[1] Meteorologische Zeitschrift, Bd. XXV, S. 190 etc.

Dieses letztere Resultat ist aus vieljährigen Aufzeichnungen abgeleitet, also viel sicherer als das obige, bloss aus zweimonatlichen Beobachtungen abgeleitete. Die Übereinstimmung der Resultate ist aber so gross, dass, wie man sieht, schon ganz kurze Beobachtungsreihen genügen, den interessanten täglichen Gang der Windgeschwindigkeit auf Berggipfel recht genau zu erhalten.

Der für Yokkaichi berechnete tägliche Gang der Windstärke kann keine Bedeutung beanspruchen. Die Beobachtungen müssten in kürzeren Zeitintervallen gemacht worden sein, um den wahren täglichen Gang kennen zu lernen. Vielleicht entspricht die grosse Windgeschwindigkeit um 10^h Abends einem zweiten nächtlichen Maximum.

A. Resultate der correspondirenden Beobachtungen auf dem Gipfel des Fuji und an dessen Fuss zu Yamanaka im August 1889.

	Luftdruck	Temperatur	Dampfdruck	Relat. Feuchtigkeit	Bewölkung	Regenmenge	Windgeschwindigkeit
I. Fuji Gipfel 35° 22′ N-Breite, 138° 44′ E-Länge, 3733 *m*.							
Mitternacht	490·57	4°8	5·25	81	4·3	111	10·6
2ʰ	·41	4·7	5·03	78	4·3	79	11·5
4	·48	4·4	4·95	78	4·0	81	10·5
6	·52	5·4	5·03	75	4·4	48	9·3
8	·91	8·3	5·59	70	4·3	41	8·1
10	·98	10·7	5·71	61	4·5	98	7·6
Mittag	·94	12·2	5·76	55	4·5	78	7·2
2ʰ	·66	12·6	6·17	60	5·2	64	7·0
4	·56	10·6	6·30	68	6·2	65	7·8
6	·63	7·4	5·54	72	6·4	97	7·5
8	·76	5·8	5·30	77	5·1	58	7·8
10	·78	5·1	5·23	79	4·6	67	10·6
Mittel	490·68	7·7	5·49	71	4·8	887	8·79
II. Yamanaka 35° 26′ N-Breite, 138° 51′ E-Länge, 990 *m*.							
Mitternacht	677·52	18°4	15·34	95	6·0	61	0·9
2ʰ	·29	18·0	15·04	96	5·9	27	0·8
4	·42	18·0	14·96	96	5·8	36	0·7
6	·55	18·1	14·89	96	5·8	36	0·5
8	·71	21·4	16·34	86	5·2	23	0·9
10	·86	23·5	16·91	79	5·7	32	2·6
Mittag	·53	24·9	17·37	74	6·0	58	3·7
2ʰ	·19	24·2	17·09	76	6·4	54	3·6
4	·10	22·6	16·88	83	7·2	47	3·0
6	·19	20·8	16·52	90	7·1	62	1·7
8	·64	19·6	16·17	94	6·7	50	0·8
10	·79	19·1	15·78	95	6·6	94	0·8
Mittel	677·48	20·7	16·11	88	6·2	580	1·67

B. Resultate correspondirender meteorologischer Beobachtungen auf dem Gipfel des Gozaishogatake und zu Yokkaichi vom 4. September bis 3. October (inclusive) 1888.

	Luftdruck	Temperatur	Dampfdruck	Relat. Feuchtigkeit	Bewölkung	Regenmenge	Windgeschwindigkeit Meter pro Secunde	
							beob.	ber.
I. Zweistündige Beobachtungen auf dem Gozaishogatake 35° 1′ N-Breite, 136° 25′ E-Länge, 1201·0 *m*.								
Mitternacht	660·70	12°2	10·0	92	6·6	63	9·0	8·66
2ʰ	60·46	12·1	9·7	89	7·0	124	8·6	8·93
4	60·31	11·9	9·5	89	6·3	48	9·1	9·02
6	60·54	11·8	9·5	89	6·4	40	8·6	8·48
8	60·89	13·1	10·1	87	6·8	49	7·4	7·32
10	61·21	14·8	10·7	84	6·6	23	5·8	6·15
Mittag	60·95	15·8	11·2	83	6·8	17	5·9	5·68
2ʰ	60·48	15·5	11·3	85	7·1	15	6·4	6·21
4	60·47	14·4	10·9	87	7·1	18	7·0	7·29
6	60·63	12·7	10·4	83	7·4	5	8·2	8·20
8	60·92	12·2	10·0	92	6·6	30	8·8	8·57
10	61·01	12·0	9·8	91	5·7	38	8·3	8·59
Mittel	660·71	13·2	10·3	89	6·7	470	7·76	7·76
II. Correspondirende vierstündige Beobachtungen zu Yokkaichi, 34° 57′ N-Breite, 136° 39′ E-Länge, 4·0 *m*.								
2ʰ a. m.	760·00	18°4	14·5	88	4·9	19	3·1	3·1
6	60·29	17·6	14·1	91	6·1	34	1·9	2·4
10	60·71	22·9	15·5	73	5·8	43	3·0	2·5
2ʰ p. m.	59·34	24·5	15·2	67	6·0	13	4·2	3·3
6	59·73	21·6	15·0	77	6·7	7	3·6	4·0
10	60·54	19·1	14·5	86	5·0	6	3·4	3·9
Mittel	760·10	20·7	14·8	80	5·8	122	3·2	3·2

Über den Kometen des Jahres 1689

von

Dr. J. Holetschek.

Dieser durch einen langen, gekrümmten Schweif ausgezeichnete Komet ist anfangs December 1689 am Morgenhimmel aus den Sonnenstrahlen herausgetreten und nach einer durch das Mondlicht verursachten einwöchentlichen Unterbrechung noch anfangs Jänner 1690 gesehen worden. Der Kopf des Kometen wurde in Pondicherry und Malaka vom 10. bis zum 23. December beobachtet, als er durch das Sternbild des Wolfes in südlicher Richtung bis zum Stern α Centauri ging, doch beschränken sich die Ortsbestimmungen, abgesehen von einem Alignement, auf diejenigen Tage, an welchen der Kopf in der Nähe eines mit blossen Augen sichtbaren Fixsternes gestanden ist. Aus diesen, mehr auf Beschreibungen als auf Messungen beruhenden Beobachtungen haben Pingré (Cométographie, II, p. 33 und 102), B. Peirce (Astr. Nachr., Bd. 20, S. 396) und E. Vogel (Monthly Notices, vol. 12, p. 206 und Astr. Nachr., Bd. 34, S. 387) Bahnen berechnet, auch hat man, veranlasst durch die Ähnlichkeit der äusseren Erscheinung, die Beobachtungen durch die Elemente des Kometen 1843 I darzustellen gesucht. Alle diese Bahnen geben dem Kometen eine sehr kleine Periheldistanz, weichen aber in der Richtung der Bahnaxe bedeutend von einander ab, indem nach der Bahn von Pingré die heliocentrische Breite des Perihelpunktes $b_0 = +54°$, nach der Bahn des Kometen 1843 I, wofür wir jetzt die Gruppe 1843 I, 1880 I, 1882 II setzen können, $b_0 = +35°$, nach der Bahn von Peirce $b_0 = +29°$ und nach der Bahn von Vogel $b_0 = -1°$ ist.

Ich habe den Lauf des Kometen neuerdings untersucht, und zwar nicht so sehr wegen der grossen Differenzen zwischen den genannten Bahnen, die ja in Anbetracht der unsicheren Ortsangaben nicht überraschen dürfen, sondern hauptsächlich darum, weil die Doppelbemerkung der Beobachter in Malaka, die vom Kometen durchlaufene Strecke sei vom 14. zum 15. December am grössten, nämlich etwas mehr als 3° gewesen, und vom 15. an mit jedem Tage kleiner geworden, durch keine dieser Bahnen dargestellt wird. Die Bahn von Pingré entfernt sich von dieser Bemerkung noch am wenigsten, indem sie dem Kometen eine fast gleichmässige Bewegung, und zwar für jeden Tag nahe 2° gibt; nach den Elementen der Kometengruppe 1843 I, 1880 I, 1882 II, ebenso nach der Bahn von Peirce nimmt die tägliche Bewegung nicht nur nicht ab, sondern sogar allmälig zu, und zwar von 2° bis auf 3°, eine Zunahme, die nach der Bahn von Vogel noch viel stärker ist, indem die tägliche Bewegung in der Zeit vom 19. bis zum 23. December bis auf 4° und 5° ansteigt; es ist dabei, weil die geocentrische Bewegung des Kometen fast ausschliesslich in der Breite, in der Länge dagegen nur in einem so geringen Grade vor sich gegangen ist, dass sie während des ganzen Beobachtungszeitraumes nach einem Bericht nur 2°, nach einem anderen sogar nahezu Null gewesen ist, nur die Änderung der Breite ins Auge gefasst und die Länge ausser acht gelassen.

Aus dieser Unzulänglichkeit der bisher gerechneten Bahnen geht hervor, dass zwischen den Angaben über die Positionen des Kometenkopfes und den zwei Bemerkungen über das Maximum und über die Abnahme der Geschwindigkeit ein Widerspruch besteht, der offenbar durch die Unrichtigkeit einer oder mehrerer dieser Angaben verursacht wird. Ich habe nun aus verschiedenen Combinationen der von den Beobachtern gemachten Angaben, sowie anderer, durch erweiterte Deutung des Textes gewonnener Rechnungsgrundlagen Parabeln abgeleitet, um die Angabe über das Maximum und die Abnahme der Geschwindigkeit darzustellen. Das Resultat war, dass sich wohl eine Abnahme der Geschwindigkeit erzielen lässt, dass aber das Maximum der Geschwindigkeit in der Mitte des December keineswegs 3°, sondern nur etwas über 2° gewesen sein kann.

Um Alles beisammen zu haben, was den Kometen charakterisirt, habe ich auch die Schweifbeobachtungen untersucht und insbesondere die Positionswinkel des Schweifes sowohl untereinander, als auch mit der Richtung zur Sonne verglichen.

Es sollen nun die Berichte über den Kometen vorgeführt werden, und zwar in derselben Reihenfolge wie bei Pingré, nämlich zuerst die minder ergiebigen und erst später die beiden Hauptberichte, damit sich die Bahnbestimmung, die sich ja nur auf diese letzteren Berichte gründen lässt, an dieselben unmittelbar anschliessen kann.

Zu Peking, dem nördlichsten Punkt, von welchem wir eine Nachricht über den Kometen haben, war nur der Schweif zu sehen; es kann daher das Wenige, was aus Duhalde's Beschreibung von China in Struyck's „Inleiding tot de allgemeene Geographie", Amsterdam 1740 und in Pingré's Cométographie hinübergenommen ist, nur zur Vervollständigung der Schweifbeobachtungen dienen. Zur Beurtheilung der Geschwindigkeit des Kometen wäre wohl die Bemerkung, man habe am 14. December die tägliche Bewegung des Kometen zu $1^1/_2{}^\circ$ erkannt, von Wichtigkeit, doch ist diese Supposition, wie Pingré bemerkt, nicht begründet, weil man den Kopf des Kometen nicht gesehen hat.

In Struyck's „Vervolg van de Beschryving der Staartsterren", Amsterdam 1753 sind aus den Journalen mehrerer holländischer Schiffe, die sich während der Sichtbarkeit des Kometen südlich vom Äquator befanden, Auszüge mitgetheilt, die zwar keine brauchbaren Ortsbestimmungen enthalten, aber doch einiges Interesse bieten, weil sie zeigen, dass der Kopf des Kometen unter südlicheren geographischen Breiten schon früher als unter nördlicheren gesehen worden ist. Einer dieser Berichte nennt das neue Gestirn direct einen Kometen, alle übrigen aber sagen, man habe einen Stern mit einem Schweif gesehen; so ein unter 21° südlicher geogr. Breite segelndes Schiff am 4. December, ein unter 5° südlicher Breite befindliches Schiff am 7. und 8. December, auf der Rhede von Malaka am 7. und in Batavia am 8. December.

Auf der Rhede von Ternate (8^h20^m östl. von Paris, $\varphi = +0°47'$) hat man den Kometen während der ganzen Zeit seiner Sichtbar-

keit verfolgt und mit einem Compass das Azimut seines Kopfes bestimmt. Struyck theilt darüber aus dem Journal des Schiffes Bromstee, welches damals auf der Rhede von Ternate vor Anker lag, Folgendes mit.

Im Jahre 1689, den 9. December (nicht den 11., wie bei Pingré zu lesen ist), zeigte sich zu Ternate ein Stern mit einem Schweif, der $35^1/_2°$ lang war. Mit einem Peilcompass fand man ihn 10° östlicher als Südost. Der Kern (Stern) ging ein wenig nach dem Morgenstern auf. Der Schweif glich einem krummen Säbel. Die Biegung (de bogt) des Schweifes, und zwar die untere stand nach Südwest, die obere nach Nordost. Den 14. war die Länge des Schweifes 45° und die Krümmung nach Nordost. Den 15. Morgens war der Schweif 47° lang und 6° südlicher als zuvor. Den Kern fanden wir 4° östlicher als Südost; 3 Tage früher (wofür nach Struyck's Bemerkung 6 Tage zu lesen ist) stand derselbe 10° östlicher als Südost, und damals war die Länge des Schweifes $35^1/_2°$. (Dieser Zusatz ist also nur eine Wiederholung der Beobachtung vom 9. December.) Den 18. stand der Kopf des Kometen 5° südlicher als Südost. Das obere Ende des Schweifes war in Südost. Er glich wie zuvor einem krummen Hauer, war aber an Licht viel trüber (droeviger) als in den vorhergehenden Tagen und hatte eine Länge von 47° 30′. Den 22. December fand man den Schweif 60° lang; er kam um etwa $^1{}_2 3$ Uhr Morgens über den Horizont. Dem Peilcompass zufolge war er in Südsüdost. Der Kern war ziemlich hell und blinkte (de Ster stondt vry helder en blonk); der Schweif aber war viel lichtschwächer (duisterer) als vorher. Den 24. December wurde der Schweif zum letztenmal gesehen.

Da Ternate in der Nähe des Äquators liegt und die Einstellungen auf den Kopf vermuthlich bald nach seinem Aufgang gemacht sind, kann man die Peilungen direct mit der südlichen Declination des Kometen δ identificiren und hat demnach

1689	δ (Ternate)	tägliche Bewegung	δ (Malaka)	Diff.
9. Dec. Mgs.	$-35°$		$-33^1/_2°$	$+1^1/_2°$
		$-1°$		
15.	-41		$-43^1/_2$	$-2^1/_2$
		-3		
18.	-50		-49	$+1$
		$-1·56$		
22.	$-56^1/_4$		$-57^1/_2$	$-1^1/_4$

Die aus diesen Peilungen sich ergebende tägliche Bewegung stimmt merkwürdigerweise mit der Bemerkung der Beobachter in Malaka, die Geschwindigkeit des Kometen sei vom 14. zum 15. December am grössten, nämlich etwas über 3° gewesen und habe von da an mit jedem Tage abgenommen, so gut überein, dass man sich unwillkürlich in der Meinung bestärkt fühlt, diese Angabe über das Maximum der Geschwindigkeit sei verlässlich; da aber ein solches Maximum, wie die spätere Rechnung zeigt, unter sonst annehmbaren Verhältnissen durch keine Bahn zu erreichen ist, muss die Übereinstimmung als eine zufällige erklärt werden.

Die magnetische Abweichung scheint bei diesen Compassbeobachtungen in Rechnung gebracht zu sein. Nimmt man nämlich für den 10., 14. und 23. December die von den Beobachtern in Malaka angegebenen Kometenpositionen und für die zwischenliegende Zeit in Declination eine tägliche Bewegung von 2° an, so erhält man die Declinationen δ (Malaka) und mit diesen die Differenzen Diff., welche bei stetigem Zeichenwechsel so klein sind, dass man sie als zufällig ansehen kann. Diesen Differenzen zufolge dürfte die magnetische Abweichung bis auf 2° oder 3° berücksichtigt sein; eine genaue Vergleichung lassen aber weder die einen, noch die anderen Beobachtungen zu.

Die ausführlichsten Berichte über den Kometen stammen aus Pondicherry ($5^h\,10^m$ östl. von Paris, $\varphi = +11°\,56'$) und Malaka ($6^h\,39^m$ östl. von Paris, $\varphi = +2°\,11'$) und sind in den Pariser Mémoires de l'Académie des sciences, tome 7, 2. partie, p. 202—205 (Ausgabe Paris 1729) veröffentlicht. Pingré hat Alles, was diese beiden Berichte über Position und Bewegung des Kometen enthalten, in seine Cométographie aufgenommen und nur wenige Bemerkungen, z. B. die, dass der Kopf des Kometen für das blosse Auge wie ein Stern der vierten oder höchstens der dritten Grösse erschienen ist, weggelassen, wie denn überhaupt in seinem Kometenwerk die Grössen- und Helligkeitsschätzungen in der Regel nicht angeführt sind. Es soll daher zunächst auf dieses Werk verwiesen werden. Da aber in der vorliegenden Abhandlung viele Stellen des Textes, manche sogar mehrmals hinsichtlich ihrer Bedeutung oder Verlässlichkeit unter-

sucht sind, erschien es mir zweckdienlich, die beiden Hauptberichte vollständig nach dem Original mitzutheilen.

Observations faites à Pondichéri par le Père Richaud, sur une Comète qui a paru en 1689.

„On ne s'apperçut ici de cette Comète qu'au commencement de Décembre. Elle ne pouvoit en effet être vue plutôt ni ici ni ailleurs, étant avant ce temps-là trop près du Soleil, comme il sera aisé de juger par son cours.

Le 8 de Décembre que je commençai à observer, je n'en pus voir la tête à cause des brouillards qui étoient à l'horison; j'en vis seulement de grand matin la queue qui passoit par les bras du Centaure.

Le 10 la Comète fut vue vers le fond de la gueule du Loup entre sa langue et sa mâchoire. Le ciel fut couvert jusqu'au 14.

Le 14 elle parut tout proche de la petite étoile qui est entre l'épaule et le ventre du Loup: depuis ce jour-là jusqu'au dix-huitième, je n'en pus voir que quelquefois la queue.

Le 18 sur les 5 heures du matin, la queue passoit par l'étoile qui est à la cuisse occidentale du Centaure, et par celle qui est à son ventre: deux jours auparavant elle passoit entre les deux étoiles des deux cuisses.

Le 19 environ à 4 heures du matin, je vis la tête de la Comète près de la cuisse du Loup, elle faisoit avec l'étoile du premier pied du Centaure une ligne parallèle à une droite tirée de l'étoile du ventre par le premier bras de la Croisade; la queue alloit parallèlement aux deux pieds du Centaure.

Le 20 à 5 heures du matin, la tête étoit plus près du pied du Centaure, et la queue touchoit la Croisade.

Le 21 la Comète étoit éloignée du pied du Centaure d'environ un degré. La queue passoit par le second pied et par le bras oriental de la Croisade.

Les jours suivans elle ne parut plus à cause du clair de Lune. J'en vis néanmoins encore la queue au commencement de Janvier pendant deux ou trois jours, sans pouvoir distinguer la tête qui s'étoit dissipée entièrement à notre égard.

Il paroît que cette Comète alloit du Nord au Sud, en gagnant un peu à l'Ouest: de sorte qu'elle faisoit un angle d'environ

20 degrez avec le méridien, suivant à peu près le cercle de longitude qui passe par le dernier degré du Scorpion.

J'ai rapporté l'observation de cette Comète d'autant plus volontiers, que je crois qu'on n'en aura rien vu à Paris, puisqu'au commencement elle étoit trop près du Soleil, et qu'après l'éloignement du Soleil elle étoit trop près du Pole austral, n'en étant éloignée, lors que nous la voyions en ce pays, que d'environ 48 degrez. (Mit dieser Zahl ist wohl die am 14. December beobachtete Südpolardistanz gemeint.) Or il est clair que la latitude de Paris étant de $48^d\ 50'$ tout ce qui est éloigné du Pole austral moins que de cette quantité de degrez, n'y sauroit être vu sur l'horison.

J'oubliois de marquer que la queue avoit la figure d'un grand sabre, dont la pointe étoit recourbée vers le Nord, la refraction plus grande des parties proches de l'horison (car elle s'élevoit, quoi qu'un peu obliquement, de l'horison en haut) pouvoit causer cette courbure. Cette queue occupoit quelquefois près de 60 degrez d'un grand cercle."

Observation de la même Comète, par les PP. de Bèze et Comille, à Malaque, au mois de Décembre 1689.

„Le 8 de Décembre les Sentinelles qui faisoient la garde pendant la nuit sur le bastion où étoit notre prison, nous avertirent qu'on avoit commencé à voir ce jour-là de grand matin une Comète du côté de l'Orient.

Le 9 entre 4 et 5 heures, nous vîmes sa queue, la tête étant dans les nuages près de l'horison.

Le 10 elle parut à découvert; la tête fut observée dans la gueule du Loup presqu'à la racine de sa langue, où pour éviter la confusion que cause la diversité des figures, la tête de la Comète étoit alors dans le concours de deux lignes droites, dont l'une se tiroit de cette étoile de la quatrième grandeur que M. Halley nomme *Borealis duarum quae sequuntur scutum Centauri*, marquée π par Bayer, et par la première de celles qui sont selon les Tables de M. Halley devant le col du Loup, que la figure met sur la jambe gauche de devant, et que Bayer n'a point marquée, car les deux qu'il met au bout du même pied sont toutes différentes. La seconde ligne se tiroit par l'étoile de la troisième grandeur,

qui s'appelle chez M. Halley la première du Loup à l'extrémité du pied, et que Bayer marque *σ in extrema manu sinistra Centauri*, et par la première de l'épaule du Loup marquée ζ.

La queue réprésentoit assez bien la figure d'un grand sabre, dont la pointe recourbée alloit donner jusqu'à l'étoile de la cinquième grandeur qui est au-dessus de la main droite du Centaure.

La Lune qui étoit alors dans son déclin et assez proche, la diminuoit de beaucoup; de sorte qu'elle n'avoit qu'environ 35 degrez d'un grand cercle.

Le 11, 12, 13 on ne put l'observer, cette partie du ciel étant selon l'ordinaire de Malaque couverte de nuages.

Le 14 elle étoit presque sur l'étoile de la cinquième grandeur qui est la plus orientale des trois de l'épaule du Loup, marquée *v* par Bayer: la queue plus éclairée et plus longue que devant, alloit en passant par le milieu du Centaure jusqu'au pied de la Coupe qui est sur la grande Hydre. Elle fut observée dans la suite avoir jusqu'à 68 degrez de longueur.

Le 15, 16, 17, 18 et 19 elle continua à suivre la ligne droite sur le dos du Loup vers l'étoile de la première grandeur qui est au pied du Centaure, en diminuant tous les jours depuis le 15 l'espace qu'elle parcouroit. Le 21 et 22 elle ne put pas être bien observée. Le 23 elle parut pour la dernière fois touchant presqu'à la partie boréale et occidentale du pied du Centaure.

On voit par là que sa route la portoit du Nord au Sud, sur une ligne qui ne déclinoit que d'environ 21 degré à l'Ouest, ce qui est presque la déclinaison de l'écliptique: de sorte que la Comète suivoit à deux degrez près un cercle de longitude, et alloit aboutir vers le Pole de l'Ecliptique.

La tête paroissoit à la vue comme une étoile de la quatrième grandeur, ou tout au plus de la troisième, d'une lumière fort sombre et nébuleuse: on la voyoit plus petite par une Lunette assez bonne, qu'elle ne paroissoit à la vue simple.

La plus grande vitesse de son mouvement fut du 14 de Décembre au quinzième, d'un peu plus de 3 degrez."

Auf der ersten Seite nach Schluss dieser Kometenberichte, p. 206, findet sich eine Notiz über die Duplicität von α Centauri, welche zwar mit den Kometenbeobachtungen nichts zu thun hat,

hier aber doch mitgetheilt werden soll, weil sie zum Verständniss des Textes Einiges beiträgt. (Über die vermuthliche Leistungsfähigkeit des von Richaud benützten Fernrohrs vergleiche man die Besprechung von Copeland's Dissertation „Über die Bahnbewegung von α Centauri" in der Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 5. Jahrgang, 1870.)

Observation sur un pied du Centaure, par le P. Richaud.

„Regardant à l'occasion de la Comète plusieurs fois les pieds du Centaure, avec une Lunette d'environ douze pieds, je remarquai que le pied le plus oriental et le plus brillant étoit une double étoile aussi bien que le pied de la Croisade; avec cette différence que dans la Croisade, une étoile paroît avec la Lunette notablement éloignée de l'autre; au lieu qu'au pied du Centaure, les deux étoiles paroissent même avec la Lunette presque se toucher; quoique cependant on les distingue aisément."

Zunächst folgt hier das Verzeichniss der Positionen aller Fixsterne, welche den Beobachtern zu Positionsbestimmungen des Kometen oder seines Schweifes gedient haben, und in den beiden Hauptberichten entweder direct genannt sind oder möglicherweise gemeint sein könnten. Die Positionen der Sterne mit Ausnahme von α Centauri wurden dem Cape Catalogue für 1880 entnommen und mit Berücksichtigung der dort angegebenen Eigenbewegung auf das mittlere Äquinoctium 1690·0 reducirt. Übrigens ist es bei Übertragung eines Fixsternortes auf ein entferntes Jahrhundert weniger von Bedeutung, aus welchem der neueren Kataloge die Ausgangsposition genommen wird, sondern vielmehr, ob und mit welchem Betrage eine Eigenbewegung angebracht wird. Die Sternpositionen sind sowohl auf den Äquator, als auf die Ekliptik bezogen, wobei die Transformation mit $\varepsilon = 23° 28' 48''$ gemacht ist.

Fixsternpositionen für 1690·0.

	Æ α	Decl. δ	Länge λ	Breite β
β Crateris	$10^h 56^m 27^s 5$	$-21° 8' 31''$	$174° 14' 34''$	$-25° 37' 42''$
β, δ Centauri	11 52 29·0	−48 59 41	203 11 27	−44 29 10
ε Centauri / γ Crucis	12 14 16·3	−55 22 14	212 25 30	−47 47 4

	Æ α	Decl. δ	Länge λ	Breite β
μ, η Centauri.....	12ʰ 24ᵐ 34ˢ·9	—47° 15' 3"	208° 1' 31"	—40° 8' 2"
ξ Centauri / β Crucis	12 29 58·0	—57 59 5	217 21 22	—48 36 15
p Centauri.....	12 33 59·7	—32 18 4	201 23 33	—26 7 35
δ, ε Centauri.....	13 20 33·0	—51 52 13	221 14 59	—39 33 10
γ, β Centauri.....	13 42 24·9	—58 50 57	229 29 26	—44 5 50
α Centauri (Mitte)..	14 18 55·0	—59 31 36	235 35 8	—42 29 4
π, c „	14 26 8·2	—33 50 52	225 20 39	—18 17 36
o, β Lupi	14 38 27·0	—41 51 1	230 42 48	—25 0 22
σ, ζ „	14 50 16·3	—50 52 58	236 26 46	—32 47 26
ξ, μ „	14 57 13·0	—46 41 29	236 3 29	—28 27 33
ζ, δ „	15 1 12·1	—39 29 15	234 20 17	—21 23 18
γ_1 „	15 2 16·0	—35 6 12	233 10 33	—17 8 18
d „	15 14 44·4	—43 52 43	238 22 25	—24 50 12
v, ω „	15 17 22·2	—41 30 36	238 8 29	—22 25 43
g „	15 20 4·7	—43 35 23	239 17 57	—24 17 5
λ, χ „	15 31 23·0	—32 38 34	238 31 2	—13 8 26

Was die Nomenclatur der Sterne betrifft, so bezieht sich die erste Bezeichnung auf Bayer, die zweite auf Lacaille und Gould (Uranometria Argentina); ist hier oder später nur ein einziger Buchstabe angeführt, so ist derselbe die jetzt übliche Bezeichnung nach Lacaille und Gould, und nur bei dem nördlichsten Stern, β Crateris, nach Bayer.

Da die Identification mancher südlicher Sterne, welche Bayer nach dem Almagest des Ptolemäus in seine Karten eingezeichnet hat, eine schwierige ist und bei diesem Kometen ein grosser Theil der helleren Sterne des Wolfes eine Rolle spielt, schien mir die Mittheilung der folgenden vergleichenden Zusammenstellung, welche alle bei Ptolemäus und Bayer vorkommenden Sterne enthält, das Studium des Textes zu erleichtern; ich hielt mich sowohl bei dieser, als auch bei jeder anderen zweifelhaften Identification ganz an das verdienstliche Werk von Fr. Baily: „The Catalogues of Ptolemy, Ulugh Beigh, Tycho Brahe, Halley, Hevelius, deduced from the best authorities", welches den 13. Band der Memoirs of the Royal Astronomical Society bildet. Bayer hat zu den 19 im Almagest enthaltenen Sternen des Wolfes noch einen, und zwar gerade den für diesen Kometen sehr wichtigen Stern 5. Grösse v, bei Gould ω, hinzugefügt, in dessen Nähe übrigens noch zwei

andere von nahezu derselben Grösse stehen, welche in dem obigen Verzeichniss nach Gould mit *d* und *g* bezeichnet sind. Die Sterne sind nach ihrer Nummer im Almagest geordnet, wozu noch bemerkt werden soll, dass Bayer den Sternen 5, 6, 8 der Reihe nach die Nummern 8, 5, 6 gegeben hat.

Sternbild Lupus.

Nr.	Bayer	Lacaille u. Gould	Nr.	Bayer	Lacaille u. Gould
1	ο	β	11	τ	} ι
2	α	α	12	ι	
3	ζ	δ	13	κ	τ
4	η	γ	14	ν	η
5	θ	ε	15	μ	θ
6	π	λ	16	γ	ψ_1
7	β	π	17	λ	χ
8	ξ	μ	18	ε	*i*
9	ρ	κ	19	δ	*f*
10	σ	ζ			

Wo Ptolemäus und nach ihm auch Bayer die drei Sterne 11, 12, 13 hat, stehen nur zwei Sterne, und schon im Katalog von Ulugh Beigh ist bemerkt, dass an der Stelle des südlicheren dieser drei Sterne am Himmel kein Stern zu sehen ist. Die zwei südöstlich davon befindlichen Sterne des Wolfes, welche bei Halley unter Nr. 3 und 4 vorkommen und von Lacaille mit ρ und σ bezeichnet sind, können wohl nicht gemeint sein. Diese Differenz hat aber, weil keiner dieser Sterne von den Beobachtern des Kometen 1689 genannt ist, hier keine Bedeutung

Zur raschen Orientirung über Position und Grösse sämmtlicher in den Beschreibungen des Kometen genannten Sterne habe ich meistens die 6. Karte in C. Behrmann's „Atlas des südlichen gestirnten Himmels" benützt.

Es sollen nun die zur Bahnberechnung erforderlichen Kometenpositionen und vor Allem das Alignement vom 10. December besprochen werden.

Zu diesem Alignement hat Pingré die anscheinend zutreffende Bemerkung gemacht, dass die durch ζ, δ Lupi gezogene Gerade nur dann auf die Wurzel der Zunge des Wolfes führt, wenn sie nicht durch den Stern 4. Grösse σ, κ Centauri, sondern

durch den in seiner Nähe stehenden Stern 3. Grösse o, β Lupi geht, und dass die Beobachter vermuthlich irregeführt worden sind, weil Bayer diesen letzteren Stern in die 5. Grössenclasse eingereiht hat. Von den zwei grössten Kreisen, in deren Durchschnitt der Komet stand, geht also der eine durch das Sternpaar π, e Centauri und φ_1 Lupi, der andere durch o, β Lupi und ζ, δ Lupi. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes A und D habe ich nach den Formeln berechnet, welche Herr Director E. Weiss in Schlömilch's „Zeitschrift für Mathematik und Physik", 26. Jahrgang (1881), S. 201 veröffentlicht hat.

$$\sin(\Omega_1 - \alpha_1)\,\text{tang}\,J_1 = \text{tang}\,\delta_1$$

$$\cos(\Omega_1 - \alpha_1)\,\text{tang}\,J_1 = \frac{\text{tang}\,\delta_2 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\,\text{tang}\,\delta_1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$\sin(\Omega_2 - \alpha_3)\,\text{tang}\,J_2 = \text{tang}\,\delta_3$$

$$\cos(\Omega_2 - \alpha_3)\,\text{tang}\,J_2 = \frac{\text{tang}\,\delta_4 - \cos(\alpha_3 - \alpha_4)\,\text{tang}\,\delta_3}{\sin(\alpha_3 - \alpha_4)}$$

$$\sin(\Omega_1 - A)\,\text{cotg}\,D = \text{cotg}\,J_1$$

$$\cos(\Omega_1 - A)\,\text{cotg}\,D = \frac{\text{cotg}\,J_2 - \cos(\Omega_2 - \Omega_1)\,\text{cotg}\,J_1}{\sin(\Omega_2 - \Omega_1)}.$$

Befindet sich das Gestirn, wie in dem vorliegenden Beispiel, auf der Südhemisphäre, so ist der Quadrant von $(\Omega_1 - A)$ so zu wählen, dass cotg D negativ wird.

Da ich für die erste Rechnung nicht die oben mitgetheilten, sondern die aus Lacaille's Katalog genommenen Sternpositionen benützt habe und eine auf verbesserte Sternpositionen gegründete Rechnung an dem Wesen der vorliegenden Untersuchung nichts ändern würde, habe ich die Lacaille'schen Positionen auch für die weitere Rechnung beibehalten; sie sind:

α	δ
$14^h\,26^m\,8^s$	$-33°\,50'7$
$15\;\;2\;\;18$	$-35\;\;5\cdot6$

und

α	δ
$14^h\,38^m\,26^s$	$-41°\,50'9$
$15\;\;1\;\;12$	$-39\;\;29\cdot2$

Aus diesen vier Positionen ergibt sich:

$$A = \begin{cases} 232^\circ\ 53'5 \\ 15^h\ 31^m 34^s, \end{cases} \quad D = -35^\circ\ 35'8$$

und auf die Ekliptik übertragen:

$$\lambda = 239^\circ\ 18'\ 50'', \quad \beta = -15^\circ\ 59'\ 32''.$$

Die in dem obigen Sternverzeichniss enthaltenen genaueren Positionen führen auf

$$\lambda = 239^\circ\ 17'\ 29'', \quad \beta = -16^\circ\ 0'\ 49''.$$

In der Rechnung von E. Vogel ist λ um $12'$ grösser, eine Differenz, die an sich gross, bei diesem Kometen aber nur von geringer Bedeutung ist. Drückt man die Beobachtungsstunde in der Ortszeit eines durch Europa, z. B. durch Paris gehenden Meridians aus, so kann man sowohl für diesen, als für jeden der späteren Beobachtungstage etwa die 10. Abendstunde des Vortages, also in Theilen des Tages 0·4 wählen; die hier abgeleitete Kometenposition gehört demnach zu Dec. 9·4 m. Z. Paris.

Übrigens ist von dieser Alignementposition wegen der ungünstigen Lage der beiden Sternpaare keine grosse Genauigkeit zu erwarten. Der Komet befindet sich nämlich, wie man schon aus den obigen Zahlen ersieht, nicht innerhalb, sondern weit ausserhalb des durch die vier Sterne gebildeten Viereckes und, was noch mehr ins Gewicht fällt, die beiden Kreise durchschneiden sich nicht, wie es zur Erreichung einer grösseren Sicherheit nothwendig wäre, nahe rechtwinklig, sondern unter einem ziemlich spitzen Winkel, der, wie die Rechnung zeigt, nur 38° beträgt. Die Schuld an dieser unzweckmässigen Wahl der Sternpaare ist aber weniger den Beobachtern, als vielmehr dem Umstand beizumessen, dass einerseits der Komet tief am Horizont stand und anderseits die kurze Zeit vom Aufgang des Kometen bis zum Tagesanbruch vermuthlich keine Gelegenheit bot, geeignetere Sternpaare zu finden. Da man eine allfällige Verschiebung der Kometenposition eher längs der beiden Linien als senkrecht auf dieselben annehmen kann, dürfte die Ungenauigkeit, wenn sie schon vorhanden ist, mehr in der Rectascension oder Länge als in der Declination oder Breite liegen.

Trotz dieser Ungenauigkeit scheint die Alignementposition vom 10. December vor den zwei anderen Kometenpositionen, welche der Bahnberechnung zu Grunde gelegt werden müssen, wenigstens den einen Vorzug zu haben, dass sie nicht mehrdeutig ist. Die zweite Beobachtung, nämlich die Angabe, dass der Komet am Morgen des 14. December bei einem Stern 5. Grösse gestanden ist, der nach dem Bericht aus Malaka v, ω Lupi ist und so auch von E. Vogel zur Bahnbestimmung angenommen worden ist, scheint allerdings jede Mehrdeutigkeit auszuschliessen, kann aber, wie sich später noch zeigen wird, auch auf einen der Sterne d oder g Lupi bezogen werden, und in der That geht die Bahn von Pingré, wie man durch Nachrechnung findet, näher an d als an v, ω Lupi vorbei. Für die erste Rechnung habe ich aber noch den von den Beobachtern direct genannten Stern als Kometenort beibehalten und seine Position nach Lacaille angenommen:

1689 Dec. 13·4 m. Z. Paris $\lambda = 238° 7' 58''$, $\beta = -22° 25' 33''$.

Ganz besonders ist es aber die dritte Position, welche, je nach dem Bericht aus Malaka oder aus Pondicherry aufgefasst, sehr verschieden ausfällt, und diese Verschiedenheit ist die zweite Ursache der grossen Differenz zwischen den Bahnen von Pingré und E. Vogel. Die Bahn von Pingré geht, wie die Nachrechnung zeigt, für den Morgen des 23. December nahe an α Centauri vorbei, ist somit auf die Bemerkung der Beobachter in Malaka gegründet, dass der Komet am 23. December den Fuss des Centaurus, wofür Pingré direct den Stern α Centauri setzt, fast berührt hat. Diesen Stern habe auch ich in der vorliegenden Bahnberechnung fast durchgehends als Kometenposition für den Morgen des 23. December angenommen, somit:

1689 Dec. 22·4 m. Z. Paris $\lambda = 235° 35' 8''$, $\beta = -42° 29' 4''$.

Dagegen hat E. Vogel die Bemerkung von Richaud, dass der Komet am 21. December, also zwei Tage früher, vom Fuss des Centaurus ungefähr 1° entfernt war, in der Weise zur Rechnung benützt, dass er für diesen Tag den Kometen 1° nördlich von α Centauri angenommen hat.

Wären nun beide Angaben über die Stellung des Kometen gegen α Centauri strenge richtig, so hätte der Komet vom 21. bis zum 23. December, also in zwei Tagen nur 1° zurückgelegt. Anderseits folgt aber aus der Angabe von Richaud, er habe am 19. December den Kometen beim Schenkel des Wolfes, also um viele Grade nördlicher gesehen, für den Zeitraum Dec. 19 bis 21 eine unverhältnissmässig grössere Bewegung als für den gleich langen Zeitraum Dec. 21 bis 23. Da ein so grelles Missverhältniss ganz unwahrscheinlich ist, soll versucht werden, durch eine erweiterte Deutung der von Richaud gebrauchten Ausdrücke, insbesondere von „cuisse du Loup", „pied du Centaure" und „environ un degré" seine Ortsangaben sowohl untereinander, als mit denen der Beobachter in Malaka in Übereinstimmung zu bringen. Der Komet kann am 19. December nicht mehr so nördlich und am 21. December noch nicht so südlich gewesen sein, wie aus dem Wortlaut des Berichtes von Richaud hervorgeht.

Betrachten wir zunächst den Ort des Kometen am 19. December. Wollte man mit Pingré für den Schenkel des Wolfes ohneweiters den Stern β, π Lupi ($\beta = -28°3$) substituiren, so müsste der Komet vom 19. bis zum 21. December 13°, also an einem Tag mehr als 6° zurückgelegt haben. Von dieser Identification darf aber schon darum abgesehen werden, weil es gewiss nicht nöthig ist, unter einem Körpertheil jedesmal einen Stern zu vermuthen; war kein Stern in der Nähe des Kometen, so nannte der Beobachter nach einer Karte einfach den Körpertheil. Da nach dem Bericht der Beobachter in Malaka der Komet vom 15. bis zum 19. December in einer geraden Linie am Rücken des Wolfes dahingegangen ist, so herrscht zwischen dieser und der Angabe von Richaud eine Übereinstimmung wenigstens soweit, dass der Komet am 19. December jedenfalls noch im Wolf gewesen ist. Wählt man nun den Ort des Kometen möglichst südlich, aber noch im Wolf, versteht man also unter „cuisse" nicht gerade den Schenkel, sondern überhaupt den hinteren, fleischigen Theil des Wolfes, so darf man mit dem Kometen bis etwa $\beta = -35°$, aber nicht weiter, nach Süden gehen. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich aber, solange der Komet am 21. December nur 1° nördlich von α Centauri, also bei $\beta = -41°5$

stehend angenommen wird, für den Zeitraum Dec. 19 bis 21 noch immer eine zu grosse Bewegung, nämlich 6°5, also für einen Tag mehr als 3°, eine Strecke, welche dem einen Grad, der zwischen Dec. 21 und 23 zurückgelegt worden sein soll, ganz unvermittelt gegenüber steht und der Bemerkung der Beobachter in Malaka, die vom Kometen Tag für Tag zurückgelegte Strecke sei nach dem 15. December immer kleiner und jedenfalls kleiner als 3° gewesen, vollständig widerspricht.

Soll dieser Widerspruch verschwinden, so muss der Komet für den 21. December mehr als 1° nördlich von α Centauri stehend angenommen werden. Man kann zu diesem Zweck die allerdings gewagte Annahme machen, dass die Bemerkung von Richaud, der Komet sei am 21. December vom Fuss des Centaurus ungefähr 1° entfernt gewesen, sich nicht auf den Stern α Centauri bezieht, sondern überhaupt auf die Figur des Fusses, wie sie sich auf irgend einer Sternkarte vorfindet. Um diese Annahme in Rechnung ziehen zu können, sollte man nun wissen, welche Sternkarten den Beobachtern zur Verfügung gestanden sind. Die Beobachter in Malaka haben nebst dem ausdrücklich genannten Atlas von Bayer und dem südlichen Sternverzeichniss von Halley offenbar noch eine andere Karte gehabt, auf welcher der Rachen des Wolfes südlicher als im Atlas von Bayer steht, und diese Karte oder eine mit ihr nahezu identische dürfte auch Richaud gehabt haben. Auf Bayer spielt Richaud nicht an, denn sonst würde er bei der Beobachtung vom 10. December, als der Komet im Rachen des Wolfes stand, gewiss den bei Bayer an dieser Stelle stehenden Stern λ, χ Lupi genannt haben, und auch die Beobachter in Malaka hätten, wenn der Komet bei diesem Stern gestanden wäre, die Position gewiss auf diesen Stern bezogen und nicht zu einem Alignement, also zu weit entlegenen Sternen ihre Zuflucht genommen. So grosse Unterschiede wie hier, wo die Beobachter dem Atlas von Bayer auszuweichen suchten, kommen aber auf der Strecke zwischen dem Hintertheil des Wolfes und dem Stern α Centauri nicht vor, und daher ist ein Zweifel über die Karte hier von geringer Bedeutung. Auf den Bayer'schen Karten 41 und 45 ist jener Fuss des Centaurus, in welchem sich der Stern α befindet, bald unterhalb des Wolfes sichtbar und daher kann der Komet am 21. December ganz gut

schon in der Nähe des Fusses gewesen sein, ohne desshalb bei dem Stern α stehen zu müssen.

Diese Deutung des Textes scheint mir aber, weil sie mit der oben mitgetheilten Note, in welcher Richaud über die Duplicität von α Centauri berichtet und daher mit den beiden Füssen des Centaurus offenbar die Sterne meint, nicht im Einklang steht, weniger gerechtfertigt als der folgende Erklärungsversuch. Dieser liegt in der Annahme, Richaud habe vielleicht durch Vorsetzung des Wortes „environ" die zu 1° geschätzte Distanz des Kometen von α Centauri als eine so unverlässliche kennzeichnen wollen, dass sie bei einem etwaigen Widerspruch gegen andere Angaben in den Hintergrund treten soll. Freilich müsste, da unter Berücksichtigung des Berichtes aus Malaka der Komet am 21. December von α Centauri noch mehr als 3° entfernt war, der in dieses „environ" hineingelegte Spielraum ein ungewöhnlich grosser sein, doch könnte dafür der Fuss des Centaurus direct auf den Stern α Centauri bezogen werden.

Welche dieser Erklärungen man auch zulassen mag, in jedem Fall ist man zu einer freieren Auffassung des Textes gezwungen, wenn man dem sonst unabweisbaren Sprung der Geschwindigkeit entgehen will.

Wenn der Lauf des Kometen vom Rücken des Wolfes gegen α Centauri gerichtet war, muss der Komet an dem in den Lenden des Wolfes stehenden Stern 4. Grösse σ, ζ Lupi ($\beta = -32°8$) in verhältnissmässig geringer Entfernung vorbeigegangen sein, und die Angabe, ob er östlich oder westlich vorbeigezogen ist, oder an welchem Tage Komet und Stern dieselbe Breite oder Declination gehabt haben, würde eine sehr wichtige Positionsbestimmung liefern. Es ist daher auffallend und auch bedauerlich, dass dieser Stern gar nicht erwähnt ist. Der obigen Betrachtung zufolge kann diese Annäherung auf den 18. December verlegt werden. Sieht man nun die Berichte an, und zwar zunächst den von Richaud, der vom 14. bis zum 18. December nur einigemale den Schweif und erst am 19. wieder den Kopf, und zwar bei der „cuisse" des Wolfes gesehen hat, so findet man, dass gerade mit dieser Angabe, wenn man sie nach Pingré's Vorgang schon durchaus auf einen Stern beziehen will, der Stern σ, ζ Lupi gemeint sein könnte. Dass die Beobachter in Malaka,

die doch den Kometen vom 15. bis zum 19. December täglich gesehen haben, von der Stellung des Kometen gegen den genannten Stern nichts erwähnen, könnte wohl durch die Annahme erklärt werden, dass die Beobachter vielleicht doch nicht jeden Tag den Kopf, sondern das eine oder anderemal nur den Schweif gesehen haben, dürfte sich aber noch eher auf den Erfahrungssatz zurückführen lassen, dass man einem Gegenstand, solange derselbe neu und ungewohnt ist, grössere Aufmerksamkeit zu schenken pflegt, als wenn er den Reiz der Neuheit verloren und den Charakter einer alltäglichen Erscheinung angenommen hat. So auch die Beobachter in Malaka: Als der Komet noch neu war, speciell am 10. und 14. December, beobachteten sie ihn recht sorgfältig, später aber und namentlich vom 15. bis zum 19. December deuteten sie seinen Lauf nur allgemein in der grössten Kürze an. Richaud macht von dieser Regel wenigstens so weit eine Ausnahme, dass von seinen Beobachtungen, wenn sie auch alle mangelhaft sind, die späteren gegen die früheren doch nicht zurückstehen.

Dass der Komet am 19. December mit α Centauri eine gerade Linie, parallel zu einer durch ε Centauri und β Crucis gezogenen Geraden gebildet hat, ist leider keine vollständige Positionsbestimmung des Kometen, weil nur eine der genannten Linien durch den Kometen geht. Allerdings wäre, da die Bewegung des Kometen grösstentheils in der Breite erfolgt ist, auch ein halbes Alignement von Wichtigkeit, wenn dasselbe die Breite des Kometen bestimmen würde; das geschieht aber hier nicht, denn der Parallelismus der genannten Linien lässt die Breite unbestimmt und sagt überhaupt nicht mehr, als dass der Komet irgendwo auf der schon anderswoher bekannten Bahnlinie gestanden ist. Übrigens muss, wenn der Komet am 19. December nicht weit vom Stern ζ Lupi gewesen ist, der angenäherte Parallelismus der beiden Linien auch dann bestehen, wenn statt des Kometen geradezu der Stern ζ Lupi gesetzt wird; und da in der That die durch ζ Lupi und α Centauri gehende Gerade mit der durch ε Centauri und β Crucis gehenden Geraden nahezu parallel ist, kann das halbe Alignement vom 19. December auch aus diesem Grunde über die Position des Kometen keine hinreichende Auskunft geben.

Die Beobachter deuten auch an, wie sich der Lauf des Kometen in der Rectascension, beziehungsweise in der Länge gestaltet hat, ohne jedoch die Zahlen so weit zu begründen, dass man sie mit Vertrauen zur Rechnung benützen könnte. Nach Richaud machte der geocentrische Weg des Kometen mit dem Meridian einen Winkel von ungefähr 20°, nach den Beobachtern in Malaka einen Winkel von ungefähr 21°. Versteht man unter diesen Zahlen den Positionswinkel der ersten gegen die letzte Kometenposition und rechnet man dementsprechend den Positionswinkel der Alignementposition gegen α Centauri, beide auf den Äquator bezogen, so ergibt sich bei einem scheinbaren Abstand von 26° 41′ als Positionswinkel $p = 34° 22'$, somit gegen die obigen Zahlen viel zu gross; wählt man, um einen kleineren Winkel zu erzielen, einen mehr westlichen Stern, in dessen Nähe der Komet möglicherweise gestanden sein könnte, z. B. ξ, μ Lupi, so ergibt sich bei einem scheinbaren Abstand von 14° 2′ als Positionswinkel dieses Sternes gegen α Centauri $p = 28° 4'$, also noch immer viel grösser als der von den Beobachtern angegebene Winkel. Auf diesem Wege lässt sich also den obigen Zahlen nicht wesentlich näher kommen. Dass unter dem Winkel von 20° der Winkel mit dem Meridian zu verstehen ist, sagt übrigens nur Richaud; die Beobachter in Malaka scheinen mit dem Winkel von 21° ganz einfach die Differenz zwischen der Rectascension des ersten und des letzten Kometenortes gemeint zu haben, also jenen Betrag, um welchen der Komet in Rectascension zurückgeblieben ist, und da die Differenz zwischen der Rectascension der Alignementposition und von α Centauri, nämlich 18°, den angegebenen zwei Zahlen ziemlich nahe kommt, dürfte diese Deutung richtig sein.

Betrachtet man in derselben Weise die Bewegung in der Länge, so ergibt sich als Differenz zwischen der Alignementposition und α Centauri 3° 44′, während der Komet nach der Angabe der Beobachter in Malaka nur um 2°, nach Richaud aber so gut wie gar nicht zurückgeblieben, sondern ungefähr auf dem durch den letzten Grad des Scorpion, also durch den 239. Grad der Länge gehenden Kreis gelaufen ist. Dass hier die Angaben der beiderseitigen Beobachter um 2° differiren, gibt einen Fingerzeig, welchen Genauigkeitsgrad man von

anderen Schätzungen der Beobachter dieses Kometen erwarten darf.

Nachdem nun die wichtigsten Textesstellen, welche sich auf die Position des Kometenkopfes beziehen, erledigt erscheinen, soll untersucht werden, wie die Bahnen, welche für diesen Kometen bisher berechnet worden sind, den Lauf des Kometen darstellen. Bevor wir aber die Bahnelemente selbst vorführen, sollen noch zwei, aus der äusseren Erscheinung des Kometen abgeleitete Folgerungen vorausgeschickt werden, welche für die Ausschliessung, beziehungsweise Auswahl gewisser Werthe der Bahnelemente Ω und q beachtenswerth sind.

Aus der beobachteten Krümmung des Schweifes folgt nämlich, dass die Erde nicht in der Ebene der Kometenbahn gestanden sein kann, dass also weder Ω, noch Υ in der Nähe von L liegen darf. Wenn sich daher eine Bahn ergibt, deren Ω in der Nähe von L oder $L \pm 180°$ liegt, so muss dieselbe auch dann, wenn sie den geocentrischen Lauf des Kometen anscheinend befriedigend darstellt, als unwahrscheinlich bezeichnet werden.

Dass der Kopf des Kometen früher als der Schweif unsichtbar geworden ist, indem die Beobachter in Malaka zwischen dem 10. und 23. December 1689 den Kopf des Kometen 3. bis 4. Grösse schätzten, während Richaud in den ersten Tagen des Jänner 1690 zwar noch den Schweif, aber nicht mehr den Kopf erkennen konnte, deutet wohl an, dass der Komet seine ansehnliche Schweiflänge weniger seiner eigenen wahren Grösse, als vielmehr einer bedeutenden Annäherung an die Sonne verdankt, dass also für ihn Bahnen mit kleiner Periheldistanz die wahrscheinlichsten sind.

Da bei diesem Kometen jene Elemente, welche die Lage der Bahnebene bestimmen, so unsicher zu ermitteln sind, dass z. B. nicht angegeben werden kann, in welchem der vier Quadranten der Knoten liegt, da aber anderseits Verschiedenheiten in der Darstellung des geocentrischen Laufes eines Kometen mit kleiner Periheldistanz aus der Verschiedenheit der Richtung der Bahnaxe deutlicher zu erkennen sind als aus der Verschiedenheit der Elemente π, Ω, i, so habe ich den Bahnen mit kleiner Periheldistanz auch noch die heliocentrische Länge und Breite des Perihels, l_0 und b_0, beigefügt.

Der den berechneten Kometenpositionen beigesetzte Winkel K ist der zur genäherten Berechnung der wahren Schweiflänge dienende Winkel am Kometen in dem ebenen Dreieck zwischen Erde, Sonne und Komet.

Die mit $\Delta\beta$ überschriebenen Columnen enthalten die tägliche Bewegung in Breite.

E. Vogel hat aus

	λ	β
Dec. 10	239°30′	−16° 0′
14	238 7·6	−22 26·9
21	235 5	−42 0

$$T = \text{Nov. } 29{\cdot}200 \text{ Greenwich}$$
$$\pi - \Omega = 180^\circ\ 44'3 \qquad l_0 = 270^\circ\ 3'$$
$$\Omega = 90\ 25{\cdot}4 \qquad b_0 = -0\ 38$$
$$i = 120\ 55{\cdot}5$$
$$\log q = 8{\cdot}27720$$

mit welcher man durch eine vierstellig geführte Rechnung die nachstehenden Positionen des Kometen erhält.

1689—1690	λ	β	$\log r$	$\log \varrho$	K
Dec. 7·5	240°27′	−12°54′	9·6367	9·8206	126·9
9·5	239 43	15 24	9·7012	9·7775	126·4
11·5	239 4	18 16	9·7543	9·7320	125·4
13·5	238 27	21 39	9·7992	9·6834	123·8
15·5	237 53	25 44	9·8381	9·6319	121·6
17·5	237 14	30 54	9·8727	9·5761	118·6
19·5	236 33	37 22	9·9032	9·5184	114·4
20·5	236 4	41 23	9·9174	9·4885	111·6
21·5	235 30	45 50	9·9311	9·4596	108·5
22·5	234 47	50 54	9·9440	9·4319	104·8
23·5	233 38	56 41	9·9564	9·4057	100·4
27·5	201 29	84 27	0·0013	9·3513	78·5
31·5	66 32	65 36	0·0403	9·4087	57·4
Jan. 4·5	62 54	−46 42	0·0746	9·5226	45·5

Untersucht man mit Hilfe dieser Ephemeride, auf welche Tageszeit E. Vogel die drei zu Grunde gelegten Positionen bezogen hat, so findet man, dass die zwei ersten Positionen nahe zum Mittag des nebenstehenden Tages, also zu December 10·0 und 14·0 gehören, die letzte aber in Länge nahe auf Dec. 22·0,

in Breite auf etwa December 20·65 fällt. Eigentlich gelten die Beobachtungen, da sie zu Malaka und Pondicherry zwischen 4^h und 5^h Morgens gemacht sind, auf Paris oder Greenwich bezogen, für die 10. oder 11. Abendstunde des Vortages, könnten also, wenn man sie auf die nächste obere oder untere Culmination der Sonne verlegen will, auf Mitternacht bezogen werden. In anderen Fällen würde diese Differenz zu einer genaueren Untersuchung Veranlassung geben, hier aber kann man sie auf sich beruhen lassen, um das viel wichtigere Resultat hervorzuheben, dass die tägliche Bewegung des Kometen nach dieser Bahn keine abnehmende, sondern im Gegentheil eine während des Beobachtungszeitraumes immer mehr zunehmende ist.

Ausserdem muss darauf hingewiesen werden, dass diese Bahn den Kometen für December 22·4, zu welcher Zeit er nach den Beobachtern in Malaka gewiss nicht südlich, sondern sogar etwas nördlich (und westlich) vom Fuss des Centaurus, den man hier wohl mit dem Stern α identificiren darf, gestanden ist, weit südlicher, und zwar 7° 50′ südlich von α Centauri gibt, eine Differenz, die hauptsächlich eine Folge des früher hervorgehobenen Umstandes ist, dass bei der Berechnung dieser Bahn der Komet nicht am 23., sondern schon am 21. December Morgens in der Nähe von α Centauri stehend angenommen ist.

Aus der folgenden schärfer geführten Rechnung lassen sich die Differenzen gegen die von mir angenommenen Positionen genauer entnehmen.

	λ	β	$\log r$	$\log \rho$
Dec. 9·4	239°46′25″	−15°15′ 8″	9·69810	9·77983
13·4	238 31 30	21 27 1	9·79697	9·68607
18·4	237 0 34	33 34 21	9·88660	9·55065
22·4	234 57 8	−50 18 58	9·94262	9·43449

Um die Änderung der Geschwindigkeit besser ersichtlich zu machen, habe ich hier, wie bei allen späteren Rechnungen, die Positionen auch für einen zwischen December 13·4 und 22·4 liegenden Zeitpunkt gerechnet, und zwar für December 17·4 oder 18·4, obwohl für keinen dieser Tage eine brauchbare Ortsbestimmung vorliegt.

Sehen wir nach, wie weit sich die Positionen und besonders die Geschwindigkeiten durch die Bahnelemente von Peirce (Astr. Nachr., Bd. 20, S. 396) darstellen lassen.

$T = 1689$ Dec. $2{\cdot}1403$ Greenwich $=$ Dec. $2{\cdot}1468$ Paris.

$\pi - \Omega = 73^\circ\ 2'$ $\quad l_0 = 273^\circ\ 47'$

$\Omega = 344\ 18$ $\quad b_0 = +28\ 58$

$i = 149\ 35$

$\log q = 8{\cdot}0128$

Da diese Elemente nach einer Bemerkung von E. Vogel für das mittlere Äquinoctium 1843·0 gelten sollen, habe ich sie auf 1690·0 übertragen und gefunden:

$\pi - \Omega = 73^\circ\ 3'$ $\quad l_0 = 271^\circ\ 39'$

$\Omega = 342\ 10$ $\quad b_0 = +28\ 59$

$i = 149\ 34$

	λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \varrho$
Dec. 9·4	242°12'	−13°15'			
			−2° 4'	9·6044	9·8604
13·4	240 56	21 32			
			−2 30	9·7343	9·7989
17·4	240 11	31 31			
			−3 6	9·8238	9·7421
22·4	239 41	−47 1		9·9070	9·6853

Diese Positionen weichen von denen, welche E. Vogel gibt (Monthly Notices, vol. 12, p. 207 und Astr. Nachr., Bd. 34, S. 387) namentlich in λ so bedeutend ab, dass es mir zweifelhaft schien, ob die Rückübertragung der Elemente gerechtfertigt war; ich habe darum die Positionen nochmals, und zwar so berechnet, dass die Bahnelemente von Peirce in ihrer ursprünglichen Form für 1690·0 geltend angenommen sind:

	λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \varrho$
Dec. 9·4	241°30'	−13° 3'			
			−2° 0'	9·6044	9·8666
13·4	239 47	21 3			
			−2 23	9·7343	9·8077
17·4	238 25	30 36			
			−2 56	9·8238	9·7535
22·4	236 40	−45 17		9·9070	9·6976

Die Positionen sind zwar jetzt den von E. Vogel angegebenen näher gerückt, bleiben aber in λ noch immer um etwa 2° zu gross. Mag nun die eine oder die andere Annahme über

das Äquinoctium richtiger sein, in keinem Falle genügen die von Peirce gerechneten Elemente der Forderung, dass die Geschwindigkeit des Kometen eine abnehmende sein soll; sie nimmt vielmehr nach der einen, wie nach der anderen Rechnung zu. Auch sei hervorgehoben, dass die Bahn den Kometen für December 22·4 um mehrere Grade südlicher als α Centauri setzt.

Untersuchen wir jetzt, wie der Lauf des Kometen durch die Elemente eines der Gruppe 1843 I, 1880 I, 1882 II angehörenden Kometen dargestellt wird. Welcher von diesen Kometen gewählt wird, macht im Allgemeinen wenig Unterschied, weil bei der Darstellung des geocentrischen Laufes eines Kometen mit sehr kleiner Periheldistanz Differenzen zwischen den Elementen π, Ω, i sich nur in einem untergeordneten Grade bemerkbar machen, so lange die durch diese drei Elemente bestimmte Richtung der Bahnaxe, also die heliocentrische Länge und Breite des Perihels ungeändert bleibt, und in der That stimmen l_0 und b_0 der genannten drei Kometen innerhalb eines Grades überein. Zur Rechnung selbst wird man natürlich denjenigen Kometen wählen, dessen Bahn am sichersten bestimmt werden konnte, also 1882 II. Die von H. Kreutz berechneten Elemente, auf 1690·0 übertragen, sind:

$$\pi - \Omega = 69^\circ\ 35'7 \qquad l_0 = 278^\circ\ 37'$$
$$\Omega = 343\ \ 20\cdot3 \qquad b_0 = +35\ \ 16$$
$$i = 141\ \ 58\cdot2$$
$$\log q = 7\cdot88937$$

Für die Perihelzeit habe ich zwei Annahmen, $T =$ Dec. 1·5 und $T =$ Dec. 2·5 gemacht.

$T = 1689$ December 1·5.

	λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \varrho$	K
Dec. 7·5	241°34′	−12°38′		9·5511	9·9008	111°7
			−2° 3′			
11·5	239 35	20 51		9·7016	9·8550	106·3
			−2 15			
15·5	238 6	29 52		9·8003	9·8158	99·8
			−2 30			
19·5	236 46	39 51		9·8739	9·7848	92·3
			−2 43			
23·5	235 12	50 44		9·9326	9·7650	83·9
			−2 50			
27·5	232 50	62 6		9·9813	9·7590	75·2
			−2 48			
31·5	227 50	73 18		0·0231	9·7680	66·7
			−2 29			
Jan. 4·5	208 5	−83 15		0·0596	9·7906	58·9

$T = 1689$ December $2{\cdot}5$.

	λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \rho$	K
Dec. $7{\cdot}5$	243°25′	−10°42′		9·4972	9·9113	113°7
			−2° 3′			
$11{\cdot}5$	241 22	18 54		9·6706	9·8624	108·6
			−2 14			
$15{\cdot}5$	239 58	27 49		9·7786	9·8207	102·3
			−2 29			
$19{\cdot}5$	238 52	37 46		9·8572	9·7867	94·9
			−2 44			
$23{\cdot}5$	237 42	48 42		9·9190	9·7637	86·5
			−2 54			
$27{\cdot}5$	236 11	60 17		9·9699	9·7546	77·6
			−2 53			
$31{\cdot}5$	233 2	71 48		0·0132	9·7612	68·9
			−2 40			
Jan. $4{\cdot}5$	221 26	−82 28		0·0509	9·7822	60·3

Nach dieser Bahn hätte also die Geschwindigkeit in Breite allmälig bis auf fast 3° zugenommen und erst dann, als der Komet nicht mehr beobachtet wurde, wieder abgenommen. Fügt man noch hinzu, dass die Bahn des Kometen dem Stern α Centauri durch verschiedene Annahmen über T nur bis etwa $3\frac{1}{2}°$ genähert werden kann, so scheint durch diese beiden Umstände das Haupthinderniss dargelegt, welches sich der Identification des Kometen 1689 mit einem zur Gruppe 1843 I, 1880 I, 1882 II gehörenden Kometen entgegengestellt.

Trotz dieser Verschiedenheit des geocentrischen Laufes besteht aber doch noch immer eine so grosse Ähnlichkeit, dass man zu der Vermuthung geführt wird, der Komet 1689 könnte, wenn er schon der genannten Kometengruppe nicht angehört, möglicherweise mit anderen Kometen, namentlich mit 1668, vielleicht auch mit 1695 und 1702 I eine selbständige, der genannten einigermassen ähnliche Gruppe bilden.

Es folgt nun die Darstellung der Bewegung des Kometen nach der Bahn von Pingré.

$$T = 1689 \text{ Dec. } 1{\cdot}6285 \text{ m. Z. Paris}$$
$$\pi - \Omega = 60° \ 0' \ 35'' \qquad l_0 = 292° \ 15'$$
$$\Omega = 323 \ 45 \ 20 \qquad b_0 = +54 \ \ 6$$
$$i = 110 \ 43 \ 0$$
$$\log q = 8{\cdot}227604$$

		λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \rho$	K
Dec.	7·5	240°38'	—12° 3'	—2° 4'	9·5338	9·9864	100·4
	11·5	238 30	20 21	—2 2	9·6902	9·9151	93·7
	15·5	237 5	28 28	—2 1	9·7915	9·9012	87·1
	19·5	236 0	36 31	—1 59	9·8666	9·8933	80·7
	23·5	234 59	44 29	—1 57	9·9263	9·8914	74·5
	27·5	233 55	52 19	—1 53	9·9758	9·8952	68·5
	31·5	232 29	59 52	—1 47	0·0182	9·9047	62·8
Jan.	4·5	230 18	—66 59		0·0550	9·9190	57·6

Diese Bahn liefert also, wenn auch keine auffallende Abnahme, so doch wenigstens keine Zunahme der Geschwindigkeit. Untersucht man, durch welche Orte die Bahn gelegt ist, so findet man, dass sie für Dec. 9·4 nahe durch die Alignementposition, für Dec. 22·4 nahe durch α Centauri, für Dec. 13·4 aber durch einen Punkt geht, der südlicher als v, ω Lupi und jedenfalls schon näher an d Lupi liegt; eine schärfere Rechnung gibt folgende Positionen:

		λ	β	$\log r$	$\log \rho$	K
Dec.	9·4	239°30' 1"	—16° 1'44"	9·61850	9·92527	97°11'
	13·4	237 46 36	24 12 38	9·74267	9·90773	90 33
	18·4	236 16 35	34 18 38	9·84779	9·89487	82 28
	22·4	235 16 38	—42 18 51	9·91104	9·89132	76 10

			$d\lambda$	$d\beta$
Dec.	9·4	Differenz gegen das Alignement	—11'11"	+ 2'12"
Dec.	13·4	„ „ v, ω Lupi	+21 22	+1°47 5
		„ „ d Lupi	+35 49	—37 34
Dec.	22·4	„ „ α Centauri	+18 30	—10 13

Nachdem nun die bisher berechneten Bahnen hinsichtlich ihrer Darstellung der Geschwindigkeit des Kometen untersucht sind, sollen diejenigen mitgetheilt werden, die ich selbst gerechnet habe. Zunächst habe ich, den Stern v, ω Lupi als mittleren Ort annehmend, die drei aus den Angaben der Beobachter in Malaka folgenden Positionen zu Grunde gelegt.

1689	m. Z. Paris	λ	β	L	$\log R$
10. Dec. Morgens	Dec. 9·4	239°18'50"	—15°59'32"	258°37'17"	9·99312
14. „ „	13·4	238 7 58	—22 25 33	262 41 28	9·99295
23. „ „	22·4	235 35 8	—42 29 4	271 51 27	9·99269

Die genäherten Sonnencoordinaten sind aus den Tafeln von Hansen genommen; in Übereinstimmung mit diesen Tafeln ist der Meridian von Paris auch in der Rechnung beibehalten und daher die Perihelzeit T jedesmal in mittlerer Pariser Zeit ausgedrückt.

Welche tägliche Bewegung lässt sich aus diesen drei Kometenpositionen ableiten? Da es zu diesem Zwecke, wie schon bemerkt, hinreichend ist, nur die Breite zu berücksichtigen, ergibt sich als durchschnittliche tägliche Bewegung vom 10. bis zum 14. December $-1°\,36'{\cdot}5$, vom 14. bis zum 23. December $-2°\,13'{\cdot}7$, also zunehmend. Soll nun auf Grund dieser drei Positionen der Bemerkung aus Malaka über die Geschwindigkeit des Kometen entsprochen werden, so müsste, da die Änderung jedenfalls eine allmälige, nicht eine sprungweise gewesen ist, die Geschwindigkeit etwa so verlaufen, dass sie vom 10. bis 12. December numerisch kleiner als $1°\,36'$, vom 12. bis 14. December zwischen $1°\,36'$ und $3°$, vom 14. bis zum 15. December etwas mehr als $3°$, nämlich im Maximum ist, und von jetzt an Tag für Tag kleiner wird. Man sollte nun erwarten, dass sich durch Benützung der drei obigen Positionen von selbst eine Bahn ergibt, welche die hier genähert angedeutete Änderung der Geschwindigkeit darstellt; ein solches Resultat ist aber, wie die weitere Rechnung zeigt, nicht zu erhalten. Aus den obigen Zahlen ergaben sich zunächst mit $\log M = 9{\cdot}83232$ die folgenden Elemente:

$T = 1689$ Nov. $30{\cdot}0590$ $\quad l_0 = 256°\,38'$

$\pi - \Omega = 163°\,8'\,7''$ $\quad b_0 = +10\;\;0$

$\Omega = 62\;58\;46$ $\quad$ Darstellung des mittleren Ortes $(B-R)$:

$i = 143\;14\;57$ $\quad d\lambda = +19'\;2''$

$\log q = 8{\cdot}96636$ $\quad d\beta = +15\;44$

Nach einer ersten Verbesserung des Distanzverhältnisses ergab sich mit $\log M = 9{\cdot}83055$:

$T =$ Nov. $30{\cdot}0513$ $\quad l_0 = 256°\,34'$

$\pi - \Omega = 163°\,47'\,34''$ $\quad b_0 = +9\;37$

$\Omega = 63\;27\;43$ $\quad$ Darstellung des mittleren Ortes:

$i = 143\;11\;54$ $\quad d\lambda = +19'\;4''$

$\log q = 8{\cdot}96759$ $\quad d\beta = +14\;40$

Die nächste Aufgabe wäre jetzt wohl, die im mittleren Ort übrig bleibende Differenz, welche sich bei strenger Darstellung der beiden äusseren Orte nicht mehr vermindern lässt, auf alle drei Orte nahe gleichmässig zu vertheilen. Für die vorliegende Untersuchung schien es aber wichtiger, nachzusehen, wie weit die von den Berichterstattern angegebene tägliche Bewegung durch diese letzte Bahn dargestellt wird, zu welchem Zweck die folgende abgekürzte Ephemeride gerechnet wurde.

	λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \rho$	K
Dec. 7·5	240°17'	−13° 1'		9·5443	9·9597	91°26'
11 5	238 27	19 24	−1°36'	9·6840	9·9079	95 55
15·5	237 13	26 34	−1 47	9·7806	9·8548	96 3
19·5	236 15	35 8	−2 8	9·8540	9·8020	93 28
23·5	235 19	45 34	−2 36	9·9131	9·7532	88 30
27·5	234 2	58 5	−3 8	9·9626	9·7152	81 16
31·5	230 57	−72 16	−3 33	0·0050	9·6970	72 24

Die Geschwindigkeit nimmt also auch nach dieser, ausschliesslich nach dem Bericht der Beobachter in Malaka gerechneten Bahn nicht ab, sondern zu.

Ich habe nun Versuche gemacht, eine Abnahme der Geschwindigkeit durch eine andere Combination der Rechnungsgrundlagen zu erreichen. Zu diesem Zweck bieten sich in der unmittelbarsten Weise die Kometenpositionen für Dec. 13·4 und 22·4 dar, indem dieselben mit den Positionen bekannter Fixsterne zusammenfallend angenommen werden können.

Die Bahn geht also Dec. 13·4 durch ω Lupi, nämlich durch die Position $\lambda = 238° 7' 58''$, $\beta = -22° 25' 33''$, Dec. 22·4 durch α Centauri, und wird versuchsweise abgeändert, bis die tägliche Bewegung eine entschieden abnehmende wird, während sich die Bahn für Dec. 9·4 nicht allzuweit von der durch das Alignement bestimmten Position entfernen soll. Gerechnet sind vier verschiedene Bahnen, und zwar mit $\log M. = 9·96$, 9·98, 0·00 und 0·02.

$\log M$	9·96	9·98	0·00	0·02
T	Dec. 1·9835	Dec. 1·6512	Nov. 30·3945	Nov. 28·3314
$\pi - \Omega$	66° 0'22"	59°44'21"	72°55'32"	91°11'40"
Ω	331 24 30	303 42 2	287 27 38	277 55 20
i	124 58 57	93 50 46	73 9 49	62 59 33
$\log q$	8·36329	8·49502	8·84760	9·16531
l_0	279°14'	297° 8'	330°47'	10°33'
b_0	+48 28	+59 31	+66 12	+62 58

Nach diesen Bahnen wäre der Lauf des Kometen der folgende gewesen:

$\log M = 9{\cdot}96$

	λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \varrho$	K
Dec. 9·4	239°54'40"	—14° 3'51"	—2° 5'4	9·59839	9·91641	101°33'
13·4	238 7 58	22 25 33	—2 10·5	9·72893	9·88669	96 4
17·4	236 52 35	31 7 30	—2 14·0	9·81901	9·86422	89 52
18·4	236 36 19	33 21 30	—2 16·9	9·83779	9·85973	88 14
22·4	235 35 8	—42 29 4		9·90277	9·84679	81 30

$\log M = 9{\cdot}98$

Dec. 9·4	239°58'51"	—13°34' 2"	—2°12'9	9·60414	9·89509	107°33'
13·4	238 7 58	22 25 33	—2 13·9	9·73166	9·87183	98 50
17·4	236 50 50	31 21 20	—2 14·2	9·82048	9·85772	90 38
18·4	236 34 33	33 35 29	—2 13·4	9·83906	9·85552	88 39
22·4	235 35 8	—42 29 4		9·90345	9·85183	80 55

$\log M = 0{\cdot}00$

Dec. 9·4	240° 2'56"	—13° 2'55"	—2°20'8	9·62036	9·86426	115°10'
13·4	238 7 58	22 25 33	—2 17·5	9·73782	9·84749	103 2
17·4	236 48 51	31 35 26	—2 14·2	9·82241	9·84202	92 40
18·4	236 32 31	33 49 36	—2 9·9	9·84032	9·84211	90 17
22·4	235 35 8	—42 29 4		9·90286	9·84749	81 25

$\log M = 0{\cdot}02$

Dec. 9·4	240° 6' 7"	—12°29'24"	—2°29'0	9·64898	9·82351	123°23'
13·4	238 7 58	22 25 33	—2 21 0	9·74906	9·81350	108 19
17·4	236 46 41	31 49 44	—2 14 1	9·82571	9·81683	95 50
18·4	236 30 19	34 3 49	—2 6·3	9·84232	9·81923	93 2
22·4	235 35 8	—42 29 4		9·90121	9·83350	83 1

Wenn man also eine nur einigermassen auffallende Abnahme der täglichen Bewegung erreichen will, so muss man sich von der für Dec. 9·4 durch das Alignement bestimmten Position um einen gewiss ganz unzulässigen Betrag, und zwar nach Norden entfernen. Zugleich sieht man, dass die tägliche Bewegung für die letzte Periode des Beobachtungszeitraumes eine kleinere wird, wenn man die Position des Kometen für Dec. 13·4 südlicher als v, ω Lupi annimmt. Da nun östlich von der Schulter des Wolfes nebst dem Stern ω noch zwei andere Sterne 5. Grösse, d und g Lupi, stehen, welche im Atlas von Bayer fehlen, so

habe ich den Stern ω verlassen und von den zwei anderen den südlichsten, nämlich d, gewählt.

Diese Änderung widerspricht zwar dem Buchstaben des Textes, kann aber dadurch gerechtfertigt werden, dass Bayer von den drei Sternen 5. Grösse nur einen einzigen hat, und dass daher die Beobachter, falls der Stern bei d oder g Lupi gestanden ist, den Stern v vermuthlich darum genannt haben, weil nur dieser allein auf den Karten von Bayer eingezeichnet ist. Die Position des Sternes d entspricht übrigens der Angabe von Richaud, dass der kleine Stern, welchem der Komet am 14. December sehr nahe war, zwischen der Schulter und dem Bauch des Wolfes steht, besser als der Stern v, ω Lupi.

Die nächste Rechnung ist demgemäss in folgender Weise angelegt. Die Bahn geht Dec. 13·4 durch d Lupi, nämlich durch die Position $\lambda = 238° 22' 25''$, $\beta = -24° 50' 12''$, Dec. 22·4 durch α Centauri, und wird so variirt, dass die tägliche Bewegung in Breite eine abnehmende und der Kometenort für Dec. 9·4 der Alignementposition nahe bleibt. Der letzten Forderung wird durch die mit $\log M = 0·0145$ gerechnete Bahn am besten, in λ allerdings nur bis auf 1° genügt.

$\log M$	0·06	0·04	0·02	0·0145
T	Nov. 25·2692	Nov. 26·9992	Nov. 29·5369	Nov. 30·1654
$\pi - \Omega$	125°49' 3"	106°21' 9"	84°31'18"	78°10'39"
Ω	265 6 48	269 0 4	276 15 27	279 24 28
i	51 22 53	54 52 35	60 36 4	63 11 30
$\log q$	9·51802	9·29110	8·93824	8·80909
l_0	44°16'	26° 1'	355°12'	344°31'
b_0	+39 19	+51 42	+60 8	+60 53

Diesen Bahnen zufolge hätte der Komet folgenden Lauf gehabt:

$$\log M = 0·06$$

	λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \rho$	K
Dec. 9·4	240°30' 8"	−14°43'30"	−2°31'7	9·71653	9·74599	131°53'
13·4	238 22 25	24 50 12	−2 8·0	9·78100	9·75683	113 40
18·4	236 33 23	35 30 16	−1 44·7	9·85111	9·78708	95 50
22·4	235 35 8	−42 29 4		9·89973	9·81683	84 51

$$\log M = 0{\cdot}04$$

	λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \rho$	K
Dec. 9·4	240°26'47"	—15°17'36"	—2°23'1	9·67307	9·80863	123°16'
13·4	238 22 25	24 50 12	—2 5·5	9·76150	9·81159	106 40
18·4	236 36 9	35 17 36	—1 47·9	9·84762	9·83039	90 49
22·4	235 35 8	—42 29 4		9·90341	9·85159	80 57

$$\log M = 0{\cdot}02$$

Dec. 9·4	240°21'47"	—15°50'41"	—2°14'9	9·63924	9·86155	113°17'
13·4	238 22 25	24 50 12	—2 2·9	9·74901	9·85726	99 37
18·4	236 39 6	35 4 42	—1 51·1	9·84710	9·86479	86 27
22·4	235 35 8	—42 29 4		9·90770	9·87726	77 55

$$\log M = 0{\cdot}0145$$

Hier ist eine grössere Zahl von Positionen berechnet, weil dieselben auch zur Bestimmung der Lage des Schweifes gegen die Sonne dienen sollen.

	λ	β	$\log r$	$\log \rho$	K	Positionswinkel p, ($\mathfrak{P}-\odot$)
Dec. 9·4	240°20' 6"	—15°59'41"	9·63260	9·87420	110°26'	227°35'
13·4	238 22 25	24 50 12	9·74689	9·86799	97 48	221 40
15·4	237 37 11	29 1 30	9·79113	9·86845	92 30	219 24
17·4	236 57 56	33 3 31	9·82969	9·87072	87 42	217 22
18·4	236 40 0	35 1 5	9·84726	9·87244	85 27	216 25
19·4	236 22 55	36 56 24	9·86386	9·87450	83 17	215 29
20·4	236 6 32	38 49 29	9·87958	9·87688	81 12	214 36
22·4	235 35 8	—42 29 4	9·90875	9·88249	77 17	212 52

Ersetzt man also ω Lupi durch d Lupi, so wird wohl die Abnahme der Geschwindigkeit des Kometen bedeutender, aber doch nicht so gross, dass sie einem Beobachter, der weder mit einem Messinstrument, noch mit einer guten Sternkarte versehen ist, Tag für Tag auffallen müsste. Je grösser man $\log M$ wählt, desto grösser wird, ganz wie unter der Annahme von ω Lupi, die Änderung der Geschwindigkeit, desto mehr entfernt man sich aber von der Alignementposition, und überdies erscheint es in Anbetracht der ausserordentlichen Schweiflänge bedenklich, dass gleichzeitig auch die Periheldistanz immer grösser wird.

Trotz der geringen Geschwindigkeitsabnahme habe ich mich, um wenigstens eine von den vielen hier gefundenen Bahnen als

einigermassen wahrscheinliches Resultat anführen zu können, für die letzte, mit $\log M = 0{\cdot}0145$ berechnete Bahn entschieden und werde dieselbe am Schluss der Abhandlung nochmals hervorheben. Sie geht übrigens, wenn auch in einem etwas anderen Genauigkeitsgrade, durch dieselben Positionen, wie die von Pingré, ist somit für den geocentrischen Standpunkt nur eine Modification der Bahn von Pingré. Was ich an der hervorgehobenen Bahn auszusetzen habe, ist ausser der zu klein erscheinenden Abnahme der täglichen Bewegung nur der Umstand, dass die Knotenlänge Ω von der zwischen 258° und 272° liegenden Sonnenlänge L noch immer zu wenig verschieden ist, um der beobachteten Krümmung des Kometenschweifes gerecht zu werden. Man darf daher mit dieser Bahn wohl geocentrische, aber nicht heliocentrische Positionen rechnen, also auch nicht die Zurückbeugung des Schweifes auf die Bahnebene übertragen.

Da die genannte Bahn den zweiten und dritten Kometenort strenge, den ersten aber nur angenähert darstellt, habe ich der Vollständigkeit halber auch noch eine Bahn berechnet, welche in gewohnter Weise durch den ersten und den dritten Ort geht und den zweiten so weit als möglich darstellt, ohne jedoch mit dieser Bahn bezüglich der Knotenlänge ein besseres Resultat zu erhalten; man findet aus:

	λ	β
Dec. 9·4	239°18'50"	−15°59'32"
13·4	238 22 25	24 50 12
22·4	235 35 .8	−42 29 4

mit $\log M = 0{\cdot}06363$ die folgende Bahn:

$$\begin{aligned} T &= \text{Nov. } 25{\cdot}8030 \\ \pi - \Omega &= 116^\circ\ 51'\ 58'' \\ \Omega &= 268\ \ 19\ 32 \\ i &= \ \ 54\ \ 23\ 37 \\ \log q &= 9{\cdot}41092 \end{aligned}$$

Berechnete Coordinaten:

	λ	β	$\log r$	$\log \rho$
Dec. 9·4	239°18'50"	−15°59'32"	9·69688	9·79024
13·4	237 32 14	25 33 29	9·77321	9·80074
18·4	236 11 48	35 42 33	9·85146	9·82766
22·4	235 35 8	−42 29 4	9·90374	9·85387

Im mittleren Ort bleibt die grosse Differenz von $+50'11''$ in Länge und $+43'17''$ in Breite übrig, die nicht wesentlich vermindert werden kann. Sollte also die Wahl des Sternes *d* Lupi als zweite Kometenposition richtig sein, so können die beiden äusseren Positionen nicht ganz der Wirklichkeit entsprechen. Von der ersten, der durch das Alignement bestimmten Position, wurde die Unsicherheit schon aus äusseren Gründen wahrscheinlich gemacht. Die dritte, allen bisherigen Rechnungen zu Grunde gelegte, mit dem Ort von α Centauri identisch angenommene Position, scheint ihre Ungenauigkeit dadurch zu verrathen, dass fast alle Bahnen, welche durch sie gelegt sind, das Bestreben zeigen, die Knotenlänge nicht, wie es die beobachtete Krümmung des Schweifes verlangt, von L wesentlich verschieden, sondern im Gegentheil mit L nahe zusammenfallend zu geben.

Der letzte Kometenort sollte also vermuthlich anders, beispielsweise um 1° verschieden von α Centauri angenommen werden.

Dass in der Breite eine kleine Verschiebung nur nach Norden, nicht aber nach Süden zulässig ist, geht aus dem zweiten Bericht, sowie aus der weiter unten mitgetheilten Rechnung hervor. Was aber die Änderung der Länge betrifft, so lässt sich, soweit uns die Angaben der Beobachter Aufschluss geben, nicht entscheiden, ob eine Verschiebung nach Westen oder nach Osten der Wahrheit näher kommt. Ist die Angabe, dass der Komet am 23. December Morgens fast bis zur nördlichen und westlichen Partie von α Centauri reichte, wörtlich zu nehmen, so war die Länge des Kometen kleiner als die von α Centauri. Will man dagegen dem Umstand, dass der Komet nach dem Bericht aus Malaka in Länge um 2° zurückgeblieben, nach Richaud aber fast ganz auf dem letzten Grad des Scorpion, also auf dem 239. Grad der Länge gegangen ist, einiges Gewicht zuerkennen, so müsste während der Annäherung die Länge des Kometen grösser als die von α Centauri gewesen sein.

Durch die Rechnung habe ich die Variation der Länge nicht eingehend verfolgt, weil das Hauptziel der Untersuchung, die Darstellung der weit überwiegenden Bewegung in der Breite, durch kleine Verschiebungen in der Länge nicht wesentlich geändert wird. Um aber diese Andeutung nicht ganz unberück-

sichtigt zu lassen, habe ich bei der Verlegung des letzten Kometenortes nach Norden von α Centauri unter einem auch die Länge geändert, und zwar um genau 2° kleiner als die Länge der Alignementposition angenommen; die Knotenlänge ist aber, wie die Bahnen *b)* und *c)* zeigen, dadurch von L nicht weggerückt.

Wenn nun eine Maximalgeschwindigkeit von 3° unter der Bedingung, dass für Dec. 13·4 als Kometenort einer der Sterne ω oder d Lupi gewählt wird, nicht zu erreichen ist, so liegt es nahe, ohne Annahme eines bestimmten mittleren Ortes durch den ersten und letzten Ort versuchsweise Bahnen zu legen und nachzusehen, ob und unter welchen Verhältnissen für die Mitte des Beobachtungszeitraumes eine grössere Geschwindigkeit zu erzielen ist.

Ich habe damit begonnen, die Bahn für Dec. 13·4 durch ω Lupi, für Dec. 22·4 durch α Centauri gehen zu lassen und M so zu wählen, dass die Geschwindigkeit während der ersten Hälfte dieses Zeitraumes, also von Dec. 13·4 bis Dec. 17·9 ungefähr das Doppelte der Geschwindigkeit während der zweiten Hälfte, also von Dec. 17·9 bis Dec. 22·4 ist; mit $\log M = 0{\cdot}28569$ ergab sich:

$$T = \text{Dec. } 23{\cdot}3251$$
$$\pi - \Omega = 203°\ 9'\ 41''$$
$$\Omega = 260\ 50\ 8$$
$$i = 32\ 18\ 26$$
$$\log q = 9{\cdot}93377$$

	λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \rho$
Dec. 9·40	241°20'3	+ 2°47'7	−6°18'3	9·95248	8·96679
13·40	238 8·0	−22 25·6	−2 59·6	9·94351	9·11138
17·90	236 18·4	−35 54·0	−1 27·8	9·93673	9·27090
22·40	235 35·1	−42 29·1		9·93385	9·39707

Diese Bahn würde also der Forderung, dass die Geschwindigkeit zwischen Dec. 13·4 und 22·4 von 3° an immer mehr abnehmen soll, allerdings genügen, setzt aber den Kometen für Dec. 9·4 so weit nördlich, dass sie nur als Vorversuch bezeichnet werden kann. Trotz ihrer Unbrauchbarkeit ist aber in dieser Bahn doch schon angedeutet, was auch durch die späteren Rechnungen bestätigt wird, dass sich aus den zu Grunde gelegten Positionen keine Bahn ableiten lässt, welche die Geschwindig-

keit des Kometen sowohl vor dem 14. als nach dem 15. December auffallend kleiner als für das Intervall vom 14. zum 15. December geben würde, sondern dass die tägliche Bewegung, wenn sie schon mit der Zeit abnimmt, für den Anfang des ganzen Beobachtungszeitraumes am grössten und für das Ende am kleinsten ausfällt. Auch sieht man, dass eine sehr rasche Abnahme der Geschwindigkeit nur durch eine bedeutende Erdnähe und ziemlich grosse Periheldistanz des Kometen zu erreichen ist.

In weiterer Verfolgung des hier eingeschlagenen Weges habe ich nunmehr als ersten Kometenort die Alignementposition von Dec. 9·4, als letzten wieder die Position von α Centauri für Dec. 22·4 genommen und mit $\log M = 0{\cdot}12$ und $0{\cdot}20$ die folgenden zwei Bahnen gerechnet:

$\log M$	0·12	0·20
T	Nov. 26·0775	Dec. 5·4107
$\pi - \Omega$	150°49'27"	180°43'21"
Ω	261 49 48	258 43 37
i	47 58 33	41 19 21
$\log q$	9·70663	9·85921

$\log M = 0{\cdot}12$

	λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \rho$
Dec. 9·4	239°18'50"	—15°59'32"	—2°34'9	9·77763	9·66247
13·4	237 29 9	26 19 14	—2 0·7	9·81436	9·69143
18·4	236 6 37	36 22 59	—1 31·5	9·86146	9·74098
22·4	235 35 8	—42 29 4		9·89813	9·78247

$\log M = 0{\cdot}20$

Dec. 9·4	239°18'50"	—15°59'32"	—2°51'7	9·86189	9·46930
13·4	237 24 44	27 26 18	—1 57·5	9·86975	9·52836
18·4	236 1 34	37 13 43	—1 18·8	9·88587	9·60903
22·4	235 35 8	—42 29 4		9·90273	9·66930

Da die zweite dieser Bahnen für Dec. 13·4 dem Sterne 5. Grösse ξ, μ Lupi in Länge bis auf 1° 21′, in Breite bis auf 1° 1′ nahe kommt, habe ich auch die Möglichkeit, dass derselbe der von den Beobachtern gemeinte Stern sein könnte, in Rechnung gezogen, obwohl eine solche Identification nicht berechtigt erscheint, weil dieser Stern weder an der Schulter, noch zwischen Schulter und Bauch, sondern schon nahe am Schenkel des Wolfes

ist; bei Halley heisst er, dem Almagest entsprechend, „in eductione femoris borea", in der lateinischen Ausgabe des Almagest „borealis de duabus juxta vertebrum", bei Bayer, wo er irrthümlich mit Nr. 5 statt mit Nr. 8 bezeichnet ist, „ad coxas duarum australior".

Die Bahn soll also jetzt für Dec. 13·4 durch μ Lupi, nämlich durch die Position $\lambda = 236° 3' 29''$, $\beta = -28° 27' 33''$, für Dec. 22·4 durch α Centauri gehen und für Dec. 9·4 der Alignementposition nahekommen; nimmt man zu diesem Zweck für $\log M$ die Werthe 0·16 und 0·18 an, so findet man:

$\log M$	0·16	0·18
T	Dec. 9·7801	Dec. 13·5917
$\pi - \Omega$	189°28'26"	195° 3'38"
Ω	258 42 33	258 36 11
i	40 14 35	38 12 58
$\log q$	9·88355	9·90034

$\log M = 0·16$

	λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \rho$
Dec. 9·4	237°15'56"	−16°55'13"	−2°53'1	9·88357	9·40870
13·4	236 3 29	28 27 33	−1 51·3	9·88542	9·48342
18·4	235 28 14	37 43 52	−1 11·3	9·89393	9·57677
22·4	235 35 8	−42 29 4		9·90512	9·64342

$\log M = 0·18$

Dec. 9·4	237°17' 7"	−16° 2'16"	−3° 6'3	9·90257	9·32891
13·4	236 3 29	28 27 33	−1 53·0	9·90034	9·41762
18·4	235 28 11	37 52 33	−1 9·1	9·90327	9·52386
22·4	235 35 8	−42 29 4		9·91000	9·59762

Die Berechnung des Kometenortes von Dec. 9·4 mit diesen zwei Bahnen zeigt, dass mit einer durch μ Lupi und α Centauri gehenden Bahn die Länge der Alignementposition nicht viel näher als bis auf 2° dargestellt werden kann, und dass man schon mit der zweiten dieser Bahnen, welche die Breite der Alignementposition innerhalb 3′ darstellt, fast an der Grenze des Erreichbaren angelangt ist. Noch eine andere Bahn zu rechnen, ist daher nicht nöthig, weil auch schon diese letzte darüber Aufschluss gibt, ob die Ersetzung von ω Lupi durch μ Lupi das von den Beobachtern in Malaka angedeutete Geschwindigkeits-

verhältniss liefert. Die drei Grade täglicher Bewegung in der Mitte des December sind, wie man sieht, auch jetzt nicht erreicht, die Abnahme der Geschwindigkeit während des ganzen Zeitraumes ist aber doch so gross, dass sie leicht bemerkt werden kann.

Soweit könnte man sich also mit der gefundenen Bahn zufriedengeben; untersucht man aber den geocentrischen Lauf des Kometen auch vor dem December, so stösst man auf einen Umstand, der gegen die Zulässigkeit dieser Bahn spricht: der Komet hätte nämlich schon im November nördlich vom Äquator sichtbar sein und in dieser Zeit auch schon einen ansehnlichen Schweif besitzen müssen, da ein Komet, welcher sich der Sonne nur bis $q = 0{\cdot}8$ nähert, zur Entwicklung eines langen Schweifes viel mehr Zeit braucht, als ein Komet mit kleiner Periheldistanz; denn nur Kometen, welche der Sonne recht nahe kommen, können nach unseren Erfahrungen vor und nach dem Perihel so verschieden aussehen, dass sie zwar nach dem Perihel glänzende Erscheinungen darbieten, vor dem Perihel dagegen bei ebenso grossen Radien vectoren noch so unansehnlich sind, dass sie minder aufmerksamen Augen entgehen.

Man muss also die zuletzt berechneten Bahnen und überhaupt die Ersetzung von ω Lupi durch μ Lupi ganz bei Seite lassen.

Schon früher wurde, um die tägliche Bewegung des Kometen zwischen dem 19. und 23. December widerspruchfrei zu erhalten, die Annahme gemacht, dass vielleicht bei Richaud unter dem Fuss des Centaurus nicht speciell der Stern α Centauri, sondern der Fuss überhaupt zu verstehen sei. Sollten nun thatsächlich die Beobachter zwischen einem Körpertheil überhaupt und dem an einem Körpertheil befindlichen Stern einen principiellen Unterschied gemacht haben, so wäre auf diesen Unterschied besonders dort zu achten, wo fast unmittelbar nach einander das einemal vom Stern im ersten Fuss des Centaurus, das anderemal vom Fuss des Centaurus gesprochen wird. Die Beobachter in Malaka sagen, dass der Komet in einer geraden Linie über den Rücken des Wolfes gegen den Stern der 1. Grösse im Fuss des Centaurus gegangen ist, sprechen aber am 23. December nicht vom Stern, sondern vom Fuss; Richaud spricht nur am 19. December vom

Stern des ersten Fusses des Centaurus, am 20. und 21. aber allgemein vom Fuss.

Der wahrscheinlichste Grund dieser Verschiedenheit dürfte nun allerdings der sein, dass die Beobachter, weil sie schon früher vom Stern im Fuss des Centaurus gesprochen hatten, zur Zeit der Annäherung des Kometen das Wort Stern als selbstverständlich wegliessen, eine Vermuthung, welche durch die Notiz von Richaud über die Duplicität von α Centauri, wo die beiden Füsse des Centaurus ganz bestimmt nichts Anderes als die Sterne α und β Centauri sind, fast zur Gewissheit wird, aber dennoch habe ich, um auch die neue Vermuthung trotz ihrer geringen Wahrscheinlichkeit nicht unbenützt zu lassen, den Versuch gemacht, durch Änderung des dritten Kometenortes, der in allen früheren Rechnungen mit α Centauri zusammenfallend angenommen ist, dem bisher nicht erreichten Ziele näher zu kommen; der Versuch hatte aber nur einen geringen Erfolg.

Da der erste Fuss des Centaurus fast ganz nördlich vom Stern α Centauri liegt und schon mehrere Grade nördlich von diesem Stern zu sehen ist, habe ich für December 22·4 die Breite des Kometenortes zuerst 5° (Bahn *a* und *b*), dann $2^1/_2$° nördlich von α Centauri (Bahn *c*) gewählt, und die Länge mit Berücksichtigung der Bemerkung, dass der Komet während seiner Sichtbarkeit um 2° in der Länge zurückgeblieben ist, genau um 2° kleiner als die Länge der Alignementposition von Dec. 9·4 angenommen; als mittlerer Ort wurde zuerst ω Lupi (Bahn *a*) und als sich gezeigt hatte, dass diese Wahl eher eine Zunahme als eine Abnahme der täglichen Bewegung ergibt, wieder *d* Lupi (Bahn *b* und *c*) gewählt.

Dass der Komet am 23. December Morgens nicht südlich, sondern, wenn er schon eine andere Declination oder Breite gehabt hat, nur nördlich von α Centauri gestanden sein kann, geht aus dem Wortlaut des Berichtes aus Malaka, der Komet habe fast bis zum nördlichen (und westlichen) Theil des Fusses des Centaurus gereicht, ganz bestimmt hervor, mag nun mit dieser Bezeichnung der Stern α Centauri oder der Fuss überhaupt gemeint sein.

a) Die Bahn geht Dec. 9·4 durch die Alignementposition, Dec. 22·4 durch $\lambda = 237° 18' 50''$, $\beta = -37° 30' 0''$, und soll Dec. 13·4 durch ω Lupi gehen.

$$\log M = 9{\cdot}93283$$
$$T = \text{Nov. } 27{\cdot}9672$$
$$\pi - \Omega = 143^\circ\ 29'\ 15''$$
$$\Omega = 47\ \ 19\ \ 15$$
$$i = 135\ \ 17\ \ 8$$
$$\log q = 9{\cdot}22201$$

	λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \rho$
Dec. 9·4	239°18'50"	−15°59'32"			
			−1°34'7	9·65339	0·02928
13·4	238 19 1	22 18 10			
			−1 38·5	9·74984	0·00751
18·4	237 36 43	30 30 37			
			−1 44·8	9·84116	9·98106
22·4	237 18 50	−37 30 0		9·89933	9·96211

b) Die Bahn geht Dec. 9·4 durch die Alignementposition, Dec. 22·4 durch $\lambda = 237^\circ\ 18'\ 50''$, $\beta = -37^\circ\ 30'\ 0''$, und soll Dec. 13·4 durch *d* Lupi gehen.

$$\log M = 0{\cdot}18219$$
$$T = \text{Dec. } 5{\cdot}7499$$
$$\pi - \Omega = 183^\circ\ 53'\ 14''$$
$$\Omega = 258\ \ 53\ \ 22$$
$$i = 41\ \ 39\ \ 47$$
$$\log q = 9{\cdot}82140$$

	λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \rho$
Dec. 9·4	239°18'50"	−15°59'32"			
			−2°18'5	9·82431	9·56780
13·4	237 55 5	25 13 33			
			−1 35·5	9·83388	9·62361
18·4	237 12 56	33 10 54			
			−1 4·8	9·85372	9·69629
22·4	237 18 50	−37 30 0		9·87426	9·74999

c) Die Bahn geht Dec. 9·4 durch die Alignementposition, Dec. 22·4 durch $\lambda = 237^\circ\ 18'\ 50''$, $\beta = -40^\circ\ 0'\ 0''$, und soll Dec. 13·4 durch *d* Lupi gehen.

$$\log M = 0{\cdot}10005$$
$$T = \text{Nov. } 26{\cdot}1766$$
$$\pi - \Omega = 139^\circ\ \ 1'\ \ 9''$$
$$\Omega = 265\ \ 47\ \ 0$$
$$i = 51\ \ 43\ \ 10$$
$$\log q = 9{\cdot}57042$$

	λ	β	$\Delta\beta$	$\log r$	$\log \rho$
Dec. 9·4	239°18'50"	—15°59'32"		9·71442	9·76453
			—2°18'3		
13·4	237 57 18	25 12 33		9·77302	9·78927
			—1 49·2		
18·4	237 17 10	34 18 24		9·83963	9·83039
			—1 25·4		
22·4	237 18 50	—40 0 0		9·88704	9·86458

Die Bahnen gehen für Dec. 13·4 zwar nicht genau durch ω Lupi, beziehungsweise *d* Lupi, eine Verbesserung in dem angedeuteten Sinne erscheint aber doch nicht nöthig, weil die für Dec. 22·4 angenommenen Positionen ganz willkürlich sind, und weil das eigentliche Resultat dieser Rechnung, die Variation der Geschwindigkeit, durch eine mässige Änderung der Bahnen nicht wesentlich anders werden würde.

Aus den letzten drei Bahnen lässt sich als Resultat entnehmen, dass die drei Grade täglicher Bewegung auch durch Variation des dritten Kometenortes nicht zu erreichen sind, dass aber, wenn die Kometenposition für Dec. 22·4 nicht mit α Centauri zusammenfallend, sondern noch etwas nördlich von diesem Stern angenommen wird, die Abnahme der Geschwindigkeit doch eine so bedeutende wird, dass sie, wenn auch nicht jeden Tag, so doch nach einigen Tagen bemerkt werden könnte. Weit nach Norden von α Centauri darf man aber nicht gehen, oder mit anderen Worten, besonders kurz darf die Strecke zwischen dem mittleren und letzten Kometenort nicht werden, weil man sich sonst bei zunehmender Periheldistanz wieder der Möglichkeit nähert, dass der Komet auch schon vor dem Perihel, und zwar in nördlicheren Gegenden hätte gesehen werden können.

Nachdem nun alle Versuche, innerhalb des durch verschiedene Deutung des Textes erweiterten Spielraumes den Widerspruch zwischen den Orts- und Geschwindigkeitsangaben vollständig zu beseitigen und insbesondere für die Mitte des Beobachtungszeitraumes ein Maximum der Geschwindigkeit von 3° mit darauf folgender Abnahme zu erzielen, misslungen sind, ist die Überzeugung, dass mindestens eine Beobachtungsangabe mit einem wesentlichen Fehler behaftet ist, wohl nicht mehr abzuweisen, und es scheint, dass gerade die Bemerkung über das Maximum der Geschwindigkeit, durch welche hauptsächlich die vorliegende Untersuchung veranlasst worden ist, kein Vertrauen

verdient; dass die Geschwindigkeit überhaupt abgenommen hat, kann dagegen richtig sein.

Hätten die Beobachter angegeben, aus welchen Daten sie das Maximum der Geschwindigkeit gefunden haben, ob durch directe Beobachtung am Himmel oder durch Einzeichnen der Kometenpositionen in eine Sternkarte und was für eine Sternkarte, oder hätten sie die Beobachtungsdaten selbst so weit mitgetheilt, dass man die ganze Rechnungs- oder Constructionsoperation von der directen Beobachtung bis zum Schlussresultat verfolgen oder selbst vornehmen könnte, so müsste man dieser anscheinend von grosser Aufmerksamkeit und Sorgfalt zeugenden Bemerkung einen bedeutenden Werth zuerkennen. Auch die Angabe über die Abnahme der Geschwindigkeit vom 15. December an hätte ausserordentlich an Gewicht gewonnen und zur Sicherung der Resultate wesentlich beigetragen, wenn die Beobachter auch gesagt hätten, ob sie die Abnahme mit jedem Tage oder erst am Schluss des Beobachtungszeitraumes bemerkt haben.

Da aber die Angabe, die Geschwindigkeit des Kometen sei vom 14. bis zum 15. December am grössten, und zwar ein wenig mehr als 3° gewesen, unter sonst annehmbaren Verhältnissen durch keine Bahn, und zwar nicht einmal angenähert darzustellen ist, scheint sie nur dadurch entstanden zu sein, dass in Folge des Bestrebens, über sämmtliche Umstände der Erscheinung des Kometen, also auch über die Grösse seiner täglichen Bewegung zu berichten, zu den beobachteten Thatsachen auch noch oberflächliche Schätzungen und unbegründete Muthmassungen hinzugefügt wurden. Wahrscheinlich hat man diese verhängnissvollen drei Grade durch ungenaues Einzeichnen in eine ungenaue Sternkarte gefunden.

Ich möchte hier einige Umstände anführen, welche mir den Bericht aus Malaka an manchen Stellen bedenklich erscheinen lassen.

Ein solcher Umstand ist der, dass der Zusatz über das Maximum der Geschwindigkeit den Schluss des ganzen Berichtes, also eine Art Postscriptum bildet; eine Nachschrift kann nämlich allerdings das Resultat einer längeren Überlegung, aber ebensogut auch eine eilfertig angehängte, also wenig verlässliche

Schlussbemerkung sein. Überhaupt sieht man aus der Anordnung der ganzen Mittheilung deutlich, dass der eigentliche Beobachtungsbericht mit dem Satze, der Komet habe am 23. December fast bis zur nordwestlichen Partie des Fusses des Centaurus gereicht, endgiltig aufhört. Was noch folgt, ist also nur eine mit Hilfe des Gedächtnisses gehaltene Nachlese, deren Inhalt zwar im Allgemeinen richtig sein mag, deren Zahlenwerthe aber nicht mehr den Vorzug der Unmittelbarkeit besitzen, welcher die gleich bei oder bald nach der Beobachtung niedergeschriebenen Bemerkungen auszeichnet.

Gleich die erste dieser Schlussbemerkungen ist nicht gerechtfertigt. Es mag ja richtig sein, dass der geocentrische Weg des Kometen mit dem Meridian einen Winkel von 21° gebildet hat, und ebenso auch, dass der Komet in der Länge um 2° zurückgeblieben ist, trotzdem lässt sich aber die zweite Angabe aus der ersten nicht, wie der Text durchblicken lässt, einfach durch Subtraction der Schiefe der Ekliptik ableiten, denn das wäre, wie schon Pingré hervorhebt, nur richtig, wenn der Komet durch einen der Äquinoctialpunkte gegangen wäre.

Auch die Bemerkung, dass am Morgen des 10. December der Schweif des Kometen durch das Licht des abnehmenden, in der Nähe stehenden Mondes viel von seiner Länge eingebüsst hat, thut des Guten zu viel. Sieht man nämlich nach, welche Phase der Mond an diesem Tage gehabt hat, so findet man, dass bis zum nächsten Neumond kaum zwei Tage gefehlt haben, dass also der Mond an diesem Morgen nur eine sehr schmale Lichtsichel gezeigt haben kann. Wenn also der Schweif nicht so lang erschienen ist, wie man ihn erwartet hatte, so muss er, falls seine Verkürzung wirklich durch das geringe Mondlicht verursacht worden ist, gegen das Ende ausserordentlich lichtschwach gewesen sein, oder, was viel wahrscheinlicher ist, die scheinbare Verkürzung war durch atmosphärische Verhältnisse verursacht und der Schweif wäre vermuthlich auch bei Abwesenheit des Mondlichtes nicht wesentlich länger erschienen.

Dass die angedeuteten Widersprüche und Ungenauigkeiten gerade in dem Bericht enthalten sind, der von zwei Verfassern herrührt, ist vielleicht nicht zufällig, und da sich von vornherein erwarten lässt, dass an den einzelnen Angaben aus Malaka der

eine Berichterstatter nicht in demselben Grade mitgewirkt hat, wie der andere, darf man auch die Versicherung aussprechen, dass es für die Sache erspriesslicher gewesen wäre, wenn jeder Beobachter seinen Bericht lieber gleich ganz unabhängig von dem andern geliefert hätte, selbst auf die Gefahr hin, dass der eine dem anderen hie und da widerspricht, denn in diesem Falle könnte der Bearbeiter der Beobachtungen das Verlässliche von dem minder Verlässlichen leichter trennen.

Es ist bedauerlich, dass die Peilungen von Ternate ihrer Natur nach nicht jenen Grad von Genauigkeit haben können, den sie haben müssten, wenn sie zu einer massgebenden Bestätigung der von den Beobachtern in Malaka angedeuteten täglichen Bewegung herangezogen werden sollen; man ist daher leider genöthigt, das Beobachtungsresultat, dass auch diese Peilungen für die Mitte des December die grösste Geschwindigkeit, und zwar drei Grade ergeben, einem neckenden Zufall zuzuschreiben.

Übrigens darf, wenn schon die anscheinend als sicher angegebene tägliche Bewegung von 3° durch die Rechnung nicht darstellbar ist, jetzt auch die Notiz, dass man in Peking aus der Beobachtung des Schweifes auf eine tägliche Bewegung des Kometen von $1^1/_2°$ geschlossen hat, nicht ganz verworfen werden, und die beiden Angaben können wenigstens als Grenzen angesehen werden, zwischen denen die nach der Rechnung nahe 2° betragende tägliche Bewegung liegt.

Positionswinkel und Länge des Schweifes.

Besser und öfter als die Position des Kopfes ist die Richtung des Schweifes, besonders von Richaud, beobachtet worden. Es ist daher Gelegenheit geboten, den Positionswinkel des Schweifes mit der Richtung zur Sonne zu vergleichen. Da aber die Positionen des Kopfes in der Regel nicht direct aus den Beobachtungen entnommen, sondern nur durch Rechnung gefunden werden können, muss man sich vorerst eine, wenn auch nur hypothetische Ephemeride verschaffen. Ich habe zu diesem Zweck jene Bahn gewählt, welche bei strenger Darstellung der durch die Sterne *d* Lupi und *α* Centauri gegebenen Positionen

auch der Alignementposition möglichst nahe kommt, ohne damit behaupten zu wollen, dass diese Bahn den geocentrischen Lauf des Kometenkopfes wesentlich besser gibt, als irgend eine der übrigen. Die Kometenpositionen, welche sich aus dieser Bahn ergeben, sind bereits auf S. 1296 mitgetheilt.

Nach den Beobachtungen von Richaud ging der Schweif des Kometen am 18. December Morgens durch den Stern am westlichen Schenkel des Centaurus und durch den Stern am Bauch; zwei Tage vorher, also am 16. December Morgens, ging er zwischen den zwei Sternen der beiden Schenkel hindurch. Der Stern am Bauch ist δ, ε Centauri, und mit dem Stern am westlichen Schenkel ist ohne Zweifel der Stern 3. Grösse β, δ Centauri gemeint. Was aber den anderen Schenkelstern betrifft, so könnte man wohl nach der Karte von Bayer den mit η bezeichneten Stern für ihn halten; derselbe kommt aber in dieser Lage am Himmel nicht vor, und Baily hat ihn mit dem beinahe auf der entgegengesetzten Seite von β, δ Centauri befindlichen Stern 5. Grösse, der von Lacaille mit σ bezeichnet ist, identificirt. Dieser Stern dürfte aber seiner geringen Helligkeit wegen von Richaud wohl nicht gemeint sein. Da nämlich von den zwei Sternen der zwei Schenkel ohne nähere Bezeichnung gesprochen wird, also die Identification dieser Sterne gleichsam als selbstverständlich hingestellt wird, muss man wohl annehmen, dass sie unter den für das freie Auge sichtbaren Sternen zu den helleren gehören und überdies von nahezu gleicher Helligkeit sind. Sterne 5. Grösse werden von den Beobachtern jener Zeit gewöhnlich „kleine Sterne“ genannt, eine Bezeichnung, die von Richaud am angeführten Orte nicht gebraucht wird.

Ich habe daher den Stern 3. Grösse μ, γ Centauri, obwohl derselbe schon in den Lenden (in lumbis) des Centaurus liegt, als den anderen Schenkelstern angesehen und das aus den Positionen der Sterne β, δ und μ, γ Centauri gebildete Mittel, welches übrigens in die Nähe des Sternes σ fällt, als die Stelle angenommen, über welche der Kometenschweif am 16. December Morgens gegangen ist, also $\lambda = 205° 36' 29''$, $\beta = -42° 18' 36''$.

Am 19. December Morgens ging der Schweif parallel zu den beiden Füssen des Centaurus; sein Positionswinkel p ist also unter der Voraussetzung, dass mit den beiden Füssen die Sterne

gemeint sind, durch den Positionswinkel von β Centauri gegen α Centauri gegeben.

Am 20. December Morgens berührte der Schweif das Kreuz. Da der Komet von Norden nach Süden gegangen ist, hat er das Kreuz offenbar in der Nähe des nördlichsten Sternes, also bei γ Crucis, zuerst berührt, und der Ort dieses Sternes ist daher zur Bestimmung des Positionswinkels benützt worden.

Am 21. December, als der Komet nach Richaud's Angabe vom Fuss des Centaurus ungefähr 1° entfernt war, ging der Schweif durch den zweiten Fuss, also vermuthlich durch den Stern β Centauri, und durch den östlichen Arm des Kreuzes, also nahe durch β Crucis.

Der Bericht aus Malaka enthält zwei Schweifbeobachtungen.

Am 10. December Morgens, als der Komet im Rachen des Wolfes stand, ging der Schweif bei einer Länge von 35° bis zu dem Stern 5. Grösse, der über der rechten Hand des Centaurus ist. Pingré meint diesen Stern mit *b* oder *d* identificiren zu dürfen; berücksichtigt man aber die zu 35° angegebene Schweiflänge, so wird man unzweifelhaft auf den Stern *p* geführt.

Am 14. December Morgens, als der Komet beim Stern ω Lupi, nach meiner Annahme bei *d* Lupi stand, ging sein Schweif durch die Mitte des Centaurus bis zum Fuss des Bechers. Ich habe β Crateris als Endpunkt des Schweifes und als Position des Kometenkopfes sowohl ω als *d* Lupi angenommen.

Der Vollständigkeit halber sollen auch die schon erwähnten, von Duhalde in Peking mitgetheilten, übrigens recht mangelhaften Schweifbeobachtungen vorgeführt werden.

Zu Peking hat man vom Kometen überhaupt nur den Schweif gesehen; man beobachtete ihn vom 11. bis zum 15. December Morgens und sah ihn hierauf noch 4 oder 5 Tage, aber sehr schwach. Eine bestimmte Angabe liegt vom 11. December vor, wo der sichtbare Theil des Schweifes 10° bis 12° lang war; er endigte fast unmittelbar unter den drei Sternen, welche in der Krümmung des Schweifes der Hydra ein kleines, gleichschenkliges Dreieck bilden, erstreckte sich von da gegen den Centaurus und ging über die zwei Sterne in dessen rechter Schulter. Die Identification dieser Sterne ist wohl von selbst gegeben: die das Triquetrum bildenden Sterne in der Hydra sind ξ, o, β, und von den zwei

Sternen in der rechten Schulter des Centaurus ist der eine bestimmt ι, der andere höchstwahrscheinlich d Centauri. Als Länge des sichtbaren Schweifstückes ergibt sich daraus allerdings mehr als 12°, nämlich etwa 18°, beachtet man aber, dass der Schweif schon unterhalb des Triquetrums, also in grösserer Rectascension oder Länge geendigt hat, so kommt man durch diese Verkürzung der zu nur 12° angegebenen Schweiflänge etwas näher. Nach Struyck's Mittheilung wäre übrigens im Original nicht Grad, sondern Fuss zu lesen, also die Schweiflänge in einem unbestimmten Sinn ausgedrückt; als Breite des Schweifes ist ein Fuss angegeben. Die durch diese Sterne bestimmte Schweifrichtung stimmt mit den Angaben der übrigen Beobachter ganz befriedigend überein, wovon man sich schon nach dem Anblick der Karte leicht überzeugt, besser aber noch, wenn man den Positionswinkel des Schweifes etwa in der Weise berechnet, dass man β Hydrae und die Mitte zwischen ι und d Centauri in der Schweifaxe liegend annimmt.

Die Berechnung sämmtlicher Positionswinkel in der angedeuteten Weise führt zu folgenden Zahlen, denen unter C auch der zugleich mit dem Positionswinkel sich ergebende scheinbare Abstand des Schweifpunktes vom Kometenkopf beigesetzt ist. Die Rubrik „Sterne" gibt an, durch welche Sterne die Richtung des Schweifes bestimmt ist. Alle Positionswinkel beziehen sich auf die Ekliptik.

1689	Sterne	C	p	$p-p_0$
Dec. 9·4	p Centauri	37°34'	247°45'	+20°10'
13·4	ω Lupi und β Crateris	57 52	252 56	+27 44
	d Lupi und β Crateris	57 24	254 21	+32 41
15·4	Mitte zwischen δ Centauri und γ Centauri	28 58	234 3	+14 39
17·4	ε Centauri	14 12	238 20	+20 58
	δ Centauri	28 27	236 22	+19 0
18·4	parallel zu α und β Centauri	—	247 57	+31 32
19·4	γ Crucis	20 38	230 45	+15 16
20·4	β Centauri	7 14	221 6	+ 6 30
	β Crucis	16 38	227 56	+13 20

Die Differenzen $p-p_0$ haben durchgehends dasselbe Vorzeichen und stimmen auch untereinander in einem nicht unbefriedigenden Grade überein.

Dass der für Dec. 18·4 gefundene Positionswinkel von den Nachbarwerthen etwas mehr, als zu erwarten ist, abweicht, kann vielleicht darauf zurückgeführt werden, dass der Parallelismus und überhaupt die Neigung zweier, einigermassen von einander entfernter Bogenstücke an der Sphäre nur schwer geschätzt werden kann, wenn das eine derselben relativ kurz, z. B. im vorliegenden Falle die Distanz zwischen α und β Centauri nur 4°43′ im grössten Kreis ist.

Im Gegensatz hiezu ist der für Dec. 13·4 resultirende, ebenfalls grössere Positionswinkel gewiss reell, und, da der äusserste Punkt des Schweifes in Rechnung gezogen erscheint, offenbar durch die gegen das Ende hin vermuthlich noch stärker werdende Krümmung des Schweifes verursacht.

Die Krümmung des Schweifes ist möglicherweise auch dadurch angedeutet, dass Dec. 20·4 der vom Kometenkopf entferntere Schweifpunkt, β Crucis, den Positionswinkel weiter nach Norden dreht, als der nähere Punkt, β Centauri. Da aber der Schweif die genannten Sterne wahrscheinlich nicht mit seiner Mittellinie gedeckt, sondern vielleicht nur mit seinem Rande berührt hat, verliert diese Folgerung etwas von ihrer Verlässlichkeit, mehr aber noch durch die Unsicherheit der Position des Kometenkopfes; während nämlich Richaud angibt, dass der Komet an diesem Tage vom Fuss des Centaurus ungefähr 1° entfernt war, sind die beiden Positionswinkel mit einer Kometenposition gerechnet, welche sich $3^2/_3$° nördlich von α Centauri befindet. Wollte man die Annahme, dass Richaud mit dem ersten Fuss des Centaurus nicht den Stern, sondern überhaupt die Figur des Fusses gemeint hat, auch auf den zweiten Fuss ausdehnen, so würde der kleine Betrag $p-p_0 = 6^1/_2$° von selbst entfallen.

Der Übelstand, dass die letzten Kometenpositionen möglicherweise um einige Grade unrichtig sind, macht auch die letzten Positionswinkel sämmtlich etwas unsicher. Es ist daher doppelt zu bedauern, dass die Bahn des Kometen nicht sicher bestimmt werden kann, denn die Schweifbeobachtungen würden, da sie nicht nur zu den zahlreicheren, sondern anscheinend auch zu den besseren aus jener Zeit gehören, einen kleinen Beitrag zur Kenntniss der Natur dieses Kometen liefern, wenn die Rückbeugung des Schweifes in der Bahn berechnet werden könnte.

Da aber zu dieser Berechnung die genaue Kenntniss der Lage der Bahnebene, also namentlich von Ω und i erforderlich ist, und gerade diese Elemente einen so grossen Spielraum zulassen, dass sie beinahe als unbestimmt gelten können, so muss man davon absehen, aus $p-p_0$, d. h. aus der Projection der Rückbeugung diese selbst zu bestimmen, und sich mit dem Beobachtungsresultat begnügen, dass die Rückbeugung immerhin eine bedeutende gewesen ist, und daher die Erde zur Zeit der Beobachtungen nicht in der Nähe der Bahnebene des Kometen gestanden sein kann, dass also weder Ω, noch Υ mit L zusammenfallen darf.

Auch die wahre Länge des Schweifes kann aus diesem Grunde nicht genau ermittelt werden. Um aber wenigstens zu einer genäherten Kenntniss der wahren Schweiflänge zu gelangen, habe ich die bei diesem Kometen offenbar nicht zutreffende Annahme gemacht, dass der Schweif die geradlinige Verlängerung des Radiusvectors bildet, dass sich also die wahre Schweiflänge c aus der scheinbaren C ergibt durch

$$c = \frac{\rho \sin C}{\sin (K-C)},$$

worin K der Winkel am Kometen in dem durch Erde, Sonne und Komet gebildeten ebenen Dreieck ist und durch

$$\operatorname{tang} \frac{K}{2} = \sqrt{\frac{(s-r)(s-\rho)}{s(s-R)}}, \quad s = \frac{1}{2}(r+\rho+R)$$

gefunden wird.

Da die aus den verschiedenen Elementensystemen abgeleiteten Winkel K oben im Anschluss an $\log r$ und $\log \rho$ schon mitgetheilt sind, lassen sich die scheinbaren Längen C sofort in die wahren Längen c umsetzen. Will man den Verlauf der Schweiflänge während des ganzen Beobachtungszeitraumes kennen lernen, so muss man Beobachtungen benützen, welche einigermassen zahlreich und von demselben Beobachter oder wenigstens an demselben Orte gemacht sind; als solche bieten sich die Beobachtungen von Ternate dar. Die Beobachtungsstunde von Ternate darf man hier ohne Schädigung des Resultates mit der von Malaka oder Pondicherry zusammenfallen lassen. Ich habe zunächst mit

solchen Bahnen, welche für Dec. 13·4 nahe an ω Lupi vorbeiführen und somit, weil sie dem Kometen eine zunehmende Geschwindigkeit geben, nicht wahrscheinlich sind, die wahren Schweiflängen berechnet, und zwar sowohl mit der von E. Vogel, als mit der von mir gefundenen Bahn; jene sind mit c_1, diese mit c_2 bezeichnet.

1689	C	c_1	c_2
Dec. 8·4	$35^1/_2°$	0·37	0·61
13·4	45	0·35	0·69
14·4	47	0·34	0·71
17·4	$47^1/_2$	0·29	0·68
21·4	60	0·33	1·01

Nach der Bahn von E. Vogel ist die Übereinstimmung der wahren Schweiflängen c_1 fast überraschend, und auch nach meiner ersten Bahn sind die Schweiflängen c_2, abgesehen von der letzten, nicht wesentlich von einander verschieden.

Ganz anders aber gestaltet sich die wahre Schweiflänge, wenn man sie nach einer Bahn berechnet, welche dem Kometen bei kleiner Periheldistanz eine abnehmende Geschwindigkeit gibt, wie es bei der von Pingré oder irgend einer von mir mit einem ähnlichen Erfolg abgeleiteten Bahn der Fall ist. Die wahren Schweiflängen wachsen in diesem Falle fast mit jedem Beobachtungstag, und zwar hauptsächlich darum, weil bei nur geringer Änderung der Distanz ρ der Winkel K, also auch der Nenner $\sin(K-C)$ immer kleiner wird.

Um diese Verhältnisse darzulegen, führe ich hier jene Schweiflängen c_3 an, welche sich ergeben, wenn meine letzte, durch d Lupi und α Centauri gelegte und nahe an der Alignementposition vorbeigehende Bahn benützt wird.

1689	C	c_3
Dec. 8·4	$35^1/_2°$	0·45
13·4	45	0·66
14·4	47	0·72
17·4	$47^1/_2$	0·85
21·4	60	2·00

Was hier überrascht, ist die stetige und rasche Zunahme der wahren Schweiflänge und die aussergewöhnliche Grösse der

letzten Zahl. Bei einiger Überlegung verliert aber dieses scheinbare Missverhältniss etwas von seiner Schroffheit. Vor Allem gibt es analoge Fälle. So ist es eine erwiesene Thatsache, dass die auffallendsten Folgen der Einwirkung der Sonne auf die Kometen nicht im Perihel selbst, sondern erst einige Zeit nach dem Perihel-durchgange zu bemerken sind, auch sind schon einigemale, freilich nur selten, Schweiflängen beobachtet worden, welche der von Dec. 21·4 nicht wesentlich nachstehen; so hat man für ☄ 1843 I $c = 1{\cdot}7$ gefunden. Ferner ist zu erwarten, dass der letzte Werth von c, welcher dem Durchmesser der Erdbahn gleichkommt, kleiner ausfallen würde, wenn die Zurückbeugung des Schweifes einigermassen sicher berechnet werden könnte.

Trotzdem erscheint es bedenklich, dass so aussergewöhnliche Schweiflängen gerade bei einem Kometen auftreten, dessen Bahn sehr unsicher ist. Ich möchte hier an den Kometen von 1668 erinnern, für dessen Schweiflänge ich ähnliche Rechnungen wie für die des Kometen von 1689 gemacht habe. Nimmt man an, dass die auf der bekannten Karte: „Observationes Goae habitae circa Phaenomenum coeleste, quod apparuit mense Martio a. 1668" den einzelnen Tagen beigesetzten geraden Linien die jeweilige Länge des Schweifes darstellen, so ist der Schweif am 10., 11. und 12. März am längsten gewesen, nämlich 37°, ohne jedoch in den folgenden Tagen wesentlich abzunehmen; vom 18. bis zum 21. März ist zwar, wie die theilweise Punktirung der Linien in Verbindung mit dem Text anzeigt, der Schweif wegen des zunehmenden Mondlichtes nicht mehr in seiner ganzen Länge deutlich sichtbar gewesen, trotzdem stehen aber die eingezeichneten Dimensionen den übrigen nicht wesentlich nach. Damit stimmt im Allgemeinen auch der Bericht von Estancel in Brasilien, worin gesagt wird, dass die grosse Helligkeit des Schweifes nur drei Tage, vom 5. März an gerechnet, dauerte und dann beträchtlich abnahm, und worin besonders hervorgehoben wird, dass trotz des Lichtverlustes die Grösse des Schweifes nicht ab-, sondern eher noch zunahm, bis der Komet ganz verschwand.

Auch für den Kometen von 1689 geht aus dem Bericht von Ternate hervor, dass am 18. und 22. December der Schweif lichtschwächer, wenn auch länger war als früher. Durch den Mond kann diese Schwächung nicht verursacht worden sein,

weil derselbe am 18. December nahe im ersten Viertel und somit in den Morgenstunden unter dem Horizont war.

Bestimmt man nun für den Kometen von 1668 nach der Karte die scheinbare Länge des Schweifes für März 9, 13, 17, 21 und nimmt für den letzten Tag, an welchem die punktirte Linie schon den Rahmen berührt und daher vielleicht noch etwas länger sein sollte, die Länge vom 20. März an, so findet man, wenn die so erhaltenen Längen C sowohl mit Henderson's direct gerechneter Bahn, als auch mit der Bahn des Kometen 1843 I in wahre Längen c umgesetzt werden, die folgenden Zahlen:

1668	C	c (direct)	c (1843 I)
März 9	31°	0·39	0·54
13	35	0·39	0·82
17	34	0·35	1·07
21	33	0·33	1·40

An dem Wesen der Sache wird offenbar nichts geändert, wenn man die kleinen Unterschiede zwischen C, wie sie sich aus der Karte ergeben, als zufällig betrachtet und C constant annimmt; unter dieser Annahme zeigt sich der Gang der wahren Schweiflängen c noch etwas deutlicher. Wählt man $C = 35°$, jenen Werth, den der Text etwas abweichend von der Karte für den 9. März angibt, so findet man:

1668	C	c (direct)	c (1843 I)
März 9	35°	0·44	0·63
13	35	0·39	0·82
17	35	0·36	1·12
21	35	0·35	1·59

Nach der direct gerechneten Bahn wäre also die wahre Schweiflänge c in diesem Zeitraum, nämlich 2 bis 3 Wochen nach dem Perihel, wenn auch nicht bestimmt kleiner, so doch wenigstens nicht grösser geworden, nach der Bahn des Kometen 1843 I aber bedeutend gewachsen.

Untersucht man, ob vielleicht auch beim Kometen 1843 I die wahre Schweiflänge nach dem Perihel in ähnlicher Weise

zugenommen hat, so geht aus den vereinzelten Beobachtungen, welche ich benützen konnte, eine solche Zunahme nicht hervor.

Die Ähnlichkeit der hier für den Kometen von 1668 gefundenen Verhältnisse mit denen, welche sich für den Kometen von 1689 ergeben haben, ist so auffallend, dass man wieder an die schon weiter oben angedeutete Möglichkeit erinnert wird, der Komet von 1689 könnte, wenn er schon einer Kometengruppe angehört und von der Gruppe 1843 I, 1880 I, 1882 II ausgeschlossen bleiben muss, wenigstens mit dem Kometen von 1668 und vielleicht auch mit dem von 1695 und 1702 I eine eigene, der genannten ähnliche Gruppe bilden. Auch im Jahre 1618 ist vom 10. bis zum 29. November, und zwar auch in Europa ein Komet oder richtiger ein Kometenschweif gesehen worden, dessen Erscheinung beinahe ein vollständiges Abbild der des Kometen von 1689 ist, nur mit dem wesentlichen Unterschied, dass sie sich um 3 bis 4 Wochen früher gezeigt hat.

Da aber der Hinweis auf diese Ähnlichkeiten nicht durch sichere Zahlen gestützt werden kann, indem weder zu einer directen Bahnberechnung irgend eines dieser Kometen, noch zu einem Anschluss an andere, gut bestimmte Kometen hinreichendes Material vorliegt, sollen diese Vermuthungen nicht weiter verfolgt werden, denn man würde, wie in ähnlichen Fällen so auch hier wieder finden, dass, je mangelhafter und unbestimmter die Beobachtungen sind, desto interessantere, aber auch desto unverbürgtere Resultate aus ihnen herausgerechnet werden können.

Aus der vorliegenden Untersuchung geht also bezüglich der Darstellbarkeit der Orts- und Geschwindigkeitsangaben Folgendes hervor.

Behält man den von den Beobachtern in Malaka angegebenen Stern v, ω Lupi als Ort des Kometen für den Morgen des 14. December bei, so ergibt sich eine mit der Zeit zunehmende Geschwindigkeit, ein Resultat, welches der von denselben Beobachtern ausgehenden Bemerkung über die Abnahme der Geschwindigkeit schnurstracks entgegen ist.

Eine tägliche Bewegung von 3° während des Beobachtungszeitraumes ist überhaupt nicht zu erreichen, ausser durch Bahnen mit ziemlich grosser Periheldistanz, die aus dem Grunde sehr unwahrscheinlich sind, weil man den Kometen in diesem Falle

auch schon früher in fast ebenso grosser Schönheit, und zwar in nördlicheren Gegenden hätte sehen müssen. Der lange Schweif in Verbindung mit den thatsächlichen Sichtbarkeitsverhältnissen des Kometen deutet auf eine kleine Periheldistanz.

Sieht man demgemäss von der Erreichung einer so grossen Geschwindigkeit ab und beschränkt sich darauf, Bahnen zu finden, nach denen die Geschwindigkeit überhaupt, ohne Rücksicht auf ihren numerischen Betrag, immer kleiner wird, so muss als mittlerer Ort statt v, ω Lupi ein mehr südlich stehender Stern gewählt werden, wozu sich am besten d Lupi eignet. Eine solche durch d Lupi und α Centauri gehende und an der Alignementposition möglichst nahe vorbeiführende Bahn ist die folgende:

$$\begin{aligned} T &= 1689 \text{ Nov. } 30{\cdot}1654 \text{ m. Z. Paris} \\ \pi - \Omega &= 78^\circ\ 10'\ 39'' \\ \Omega &= 279\ \ 24\ \ 28 \quad \text{m. Äqu. } 1690{\cdot}0 \\ i &= 63\ \ 11\ \ 30 \\ \log q &= 8{\cdot}80909 \end{aligned}$$

Die Abnahme der Geschwindigkeit ist zwar auch nach dieser Supposition noch keine bedeutende, wird aber auffallender, wenn der zum Morgen des 23. December gehörende Kometenort nicht mit α Centauri zusammenfallend, sondern noch etwas nördlich davon angenommen wird.

Es kann also die eine Angabe, dass die Geschwindigkeit überhaupt abgenommen hat, durch die Rechnung dargestellt werden, die andere, dass sie im Maximum 3° gewesen ist, aber nicht.

Um die beobachtete Krümmung des Schweifes darzustellen, soll der Knoten Ω weder bei 258° bis 272°, noch bei 78° bis 92° liegen, eine Forderung, welcher auch die zuletzt angeführte Bahn nicht hinreichend genügt. Übrigens ist die Bestimmung von Ω, i und $(\pi - \Omega)$ bei diesem Kometen eine sehr unsichere, und nur von der aus diesen drei Elementen sich ergebenden Richtung der Bahnaxe lässt sich mit einiger Sicherheit sagen, dass sie gegen die Ekliptik ziemlich stark geneigt, und zwar die heliocentrische Breite des Perihels b_0 nahe an $+50^\circ$ oder $+60^\circ$ sein muss.

Will man die ganze Erscheinung des Kometen durch eine andere, schon vor mir berechnete Bahn einigermassen befriedi-

gend darstellen, so hat man der von Pingré den Vorzug zu geben.

Sucht man den geocentrischen Lauf des Kometen 1689 durch die Bahnelemente eines zur Gruppe 1843 I, 1880 I, 1882 II gehörenden und speciell durch die Elemente des Kometen 1882 II darzustellen, so ist weder eine abnehmende Bewegung, noch eine hinlängliche Annäherung an α Centauri zu erreichen, und diese beiden Umstände dürften das bedeutendste Hinderniss bilden, welches sich der Zugehörigkeit des Kometen 1689 zu der genannten Gruppe entgegenstellt.

Eine neue magnetische Aufnahme Österreichs

(III. Vorläufiger Bericht)

von

J. Liznar.

Die magnetischen Messungen wurden im Sommer dieses Jahres (1891) an 19 Stationen in Galizien und an 3 Stationen in der Bukowina fortgesetzt. Trotz der auch im verflossenen Sommer verhältnissmässig ungünstigen Witterung hätte ich die Beobachtungen an den 22 Stationen in der programmmässig festgesetzten Zeit ausgeführt, wenn nicht der unliebsame Umstand hinzugetreten wäre, dass an 2 Stationen meine Instrumente viel später anlangten, als es bei Eilgutsendungen zu sein pflegt. Vom 12. Juni bis 15. September habe ich 44 Zeit-, 44 Azimutal-, 108 Declinations-, 220 Intensitäts- und 217 Inclinationsmessungen ausgeführt. Es entfallen somit auf jede Station 2 Zeit- und 2 Azimutalmessungen, während die Declination an fast jeder Station fünfmal, die Horizontalintensität und die Inclination aber zehnmal beobachtet wurde; nur in Sambor musste ich mich mit 7 Inclinationsmessungen begnügen.

Über die zu den Beobachtungen verwendeten Instrumente gilt das in meinen beiden früheren Berichten[1] darüber Gesagte. Die geographischen Coordinaten der Beobachtungspunkte habe ich auch diesmal nach der in meinem zweiten Berichte näher erläuterten Methode ermittelt. Fast an keiner Station konnte ich den von Kreil gewählten Aufstellungspunkt benützen. Dies ist besonders mit Rücksicht auf die Stationen in Ostgalizien sehr

[1] Diese Berichte, Bd. XCVIII und XCIX.

zu bedauern, da hier grössere locale Unregelmässigkeiten angetroffen werden. Erwähnen will ich noch, dass auch diesmal alle magnetischen Beobachtungen in der hölzernen Beobachtungshütte ausgeführt worden sind.

In der Tabelle I sind die Stationen, an welchen die Messungen vorgenommen worden sind, zusammengestellt, und einer jeden derselben die geographischen Coordinaten beigesetzt. Die Tabellen II und III enthalten sowohl die in diesem Sommer beobachteten und auf die Mitte des August 1890 reducirten Werthe der erdmagnetischen Elemente, als auch die auf das Jahr 1890 reducirten Daten Kreil's nebst ihren Differenzen. Die Unregelmässigkeit der Differenzen der Declinationswerthe ist auffallend gross, dürfte jedoch weniger befremden, wenn man berücksichtigt, wie schwierig es Kreil war, seine Messungen auf eine Epoche zu reduciren, und wenn man weiter bedenkt, dass meine Beobachtungspunkte von jenen Kreil's verschieden waren, was bei der früher erwähnten localen Störung nicht ohne Einfluss sein kann. Ich darf aber bei dieser Gelegenheit nicht unerwähnt lassen, dass die Messungen Kreil's noch nicht jene Genauigkeit erreicht haben, welche wir heute bei solchen Messungen beanspruchen, und dass die grosse Unregelmässigkeit der Differenzen zum grossen Theil in diesem Umstande ihre Erklärung findet. Ich berühre diesen Umstand nur desshalb, damit man meinen Resultaten nicht mit einem gewissen Misstrauen entgegen kommen möge.

Bei Kreil dürfte öfter die Declination um einige Minuten unrichtig sein, was manchmal durch die Azimutalmessung, ein anderesmal wieder durch die Declinationsbestimmung verschuldet worden ist. Dass sogar seine Azimutalmessungen nicht jenen Grad von Genauigkeit besitzen, welchen man bei einem geübten Astronomen, den das war ja Kreil gewiss, erwarten muss, liegt hauptsächlich daran, dass Kreil häufig viel zu nahe und hohe Miren wählte. So findet man zum Beispiel im dritten Bande seiner „Magnetischen und geographischen Ortsbestimmungen" auf S. 87 und 88 zwei an der Station Schemnitz ausgeführte Azimutalmessungen, welche folgende Resultate ergeben haben:

$$A_1 = 248^\circ \quad 6'1$$
$$A_2 = 247 \quad 58\cdot4,$$

und doch hat Kreil mit dem Mittelwerthe derselben die Declination gerechnet! Er führt bei dieser Messung ausdrücklich an, dass die Mire hoch war.

Die hier angeführten Azimutalwerthe differiren um 8 Minuten, man findet aber bei neun der von mir heuer besuchten Stationen in Galizien bedeutend grössere Unterschiede zwischen den einzelnen Messungen. Die nachfolgende Zusammenstellung enthält diese Einzelwerthe, wie ich sie dem vierten Bande der „Magnetischen und geographischen Ortsbestimmungen" entnommen habe.

Ort	Datum	Beob. Azimut	Mittel
Krosno	16. Juli 1850	134° 7'50	133° 49'9
	17. „ „	133 32·30	
Sambor	20. „ „	199 20·17	199 29·7
	23. „ „	199 39·20	
Lemberg	27. „ „	51 7·02	51 11·9
	28. „ „	51 16·80	
Rawa ruska	29. „ „	36 4·50	36 8·6
	30. „ „	36 12·68	
Brody	2. August 1850	258 28·75	258 42·4
	3. „ „	258 42·55	
	4. „ „	258 55·80	
Tarnopol ...	6. „ „	151 1·23	151 19·5
	6. „ „	151 34·65	
	7. „ „	151 22·58	
Czortkow ...	8. „ „	332 38·35	332 55·0
	9. „ „	332 33·73	
	10. „ „	333 12·78	
Stanislau	16. „ „	88 54·55	88 33·5
	17. „ „	88 12·55	
Dolina	20. „ „	56 39·12	56 28·8
	21. „ „	56 25·35	
	21. „ „	56 22·05	

Alle diese Messungen hat Kreil mit dem magnetischen Reisetheodoliten ausgeführt, der zu diesem Zwecke mit einem astronomischen Aufsatz versehen war. Kreil sind selbstverständlich die grossen Differenzen zwischen den einzelnen Resultaten einer und derselben Station nicht entgangen, denn er sagt in der Einleitung zum vierten Bande wörtlich: „Die Bestimmungen des Azimuthes der für die magnetischen Declinationsbestimmungen gebrauchten Mire wurden mit dem am Theodolithen Nr. II von Lamont angebrachten Apparate ausgeführt. Es zeigte sich

jedoch im Verlauf der Reise, dass die dadurch erlangten Resultate nicht mehr die frühere Übereinstimmung gewährten, denn während sie früher an demselben Orte nur um eine oder zwei Minuten verschieden waren, betrug jetzt dieser Unterschied in manchen Fällen 20—30 Minuten. Nach wiederholter Untersuchung des Apparates und mehreren fruchtlosen Versuchen, diesen Bestimmungen die frühere Sicherheit zu verschaffen, wurde endlich bemerkt, dass das Gehäuse, in welchem sich das als Objectiv gebrauchte Prisma befindet, locker geworden war, weil die Schrauben nachgelassen hatten. Durch Anziehen dieser Schrauben wurde der Übelstand zwar gemindert, aber nicht ganz behoben, so dass ich später zu dem im Jahre 1847 angewandten Verfahren, das Azimut durch den Sextanten zu bestimmen, meine Zuflucht zu nehmen genöthigt war. Dadurch geschah der Sicherheit der magnetischen Declinationsbestimmungen in einigen Stationen merklicher Eintrag, jedoch kein so grosser, dass sie ganz zu verwerfen wären, indem sich ihre Unsicherheit innerhalb der Grenzen der täglichen Änderungen erhält. Die Bestimmungen mit dem Sextanten stimmten unter sich wohl hinreichend überein, gaben aber fast überall ein grösseres Azimut als jene mit dem Theodoliten.“

Das Mittel der an den fünf Stationen: Verezke, Tokay, Szolnok, Lundenburg und Horn bestimmten Unterschiede beträgt 8·2 Minuten. Ob dieser nicht unbedeutende Unterschied auf Rechnung des einen oder des anderen Instrumentes zu setzen sei, hat Kreil nicht ermittelt. Aus einer in der Einleitung des zweiten Bandes angeführten Azimutalmessung mit dem Sextanten und einem Universalinstrument scheint hervorzugehen, dass der Sextant ziemlich richtige Werthe des Azimutes gegeben hat, vorausgesetzt, dass das zur vergleichenden Messung verwendete Universale selbst fehlerfrei war. Nach dieser Darlegung wird man, glaube ich, die früher erwähnte Unregelmässigkeit in den Differenzen zwischen Kreil's und meinen Resultaten vollkommen begreiflich finden.

Um zu zeigen, dass seine Declinationswerthe auch dann manchmal unrichtig sein dürften, wenn die Azimutalmessungen übereinstimmende Resultate ergeben haben, führe ich die Declinationsbestimmungen von Wieliczka an, die Kreil am 5. und

7. October 1848 daselbst ausgeführt hatte, und welche man in dem citirten Bande auf S. 194 findet.

	Wieliczka	Var. App. Prag
5. October 1848	12° 10'2	15° 0'0
5. „ „	11 51·2	14 58·4
7. „ „	12 5·6	14 57·0

Neben der beobachteten Declination ist die zur selben Zeit am Prager Variationsapparate abgelesene beigesetzt. Während der Variationsapparat eine nur geringe Änderung zeigt, beträgt der Unterschied der zweiten Messung gegen die erste und dritte 19, respective 14 Minuten. Der zweite Declinationswerth wurde mit einem anderen Theodoliten als der erste und dritte ermittelt, und zwar mit einem solchen, bei dem der Einfluss der Torsion des Aufhängefadens nicht bestimmt werden konnte. Kreil hat an vielen Orten die Declinationsbestimmungen mit den beiden Instrumenten ausgeführt, um sich vor grösseren Irrthümern zu schützen, hat aber sehr oft, wenn grössere Unterschiede in den Resultaten beider vorkamen, nur jene benützt, welche wegen der Torsion corrigirt waren. In dem hier angeführten Beispiele wurde jedoch einfach der Mittelwerth als beobachtete Declination eingetragen! Lässt man bei der Mittelbildung den zweiten Werth unberücksichtigt, so erhält man als beobachtete Declination 12° 7'9, während Kreil als Declination von Wieliczka 12° 2'3 anführt, also einen um fast 6 Minuten kleineren Werth.

Auch bei den beiden anderen Elementen ist manchmal die Genauigkeit nicht besonders gross. Ich will dies für die Inclination an einem Beispiele zeigen. Am Vormittag des 10. Juli 1848 hat Fritsch (Begleiter des Kreil) in Leutschau mit einer und derselben Inclinationsnadel folgende Inclinationen gemessen:[1]

$$J_1 = 64° \; 34'7$$
$$J_2 = 64 \; 22·0$$
$$J_3 = 64 \; 43·4$$
$$J_4 = 64 \; 30·1.$$

Die dritte Messung ist nur eine halbe Stunde später als die zweite ausgeführt worden, und doch unterscheiden sich die beiden

[1] Magnetische und geographische Ortsbestimmungen, Bd. 3, S. 99.

Inclinationswerthe um 21 Minuten. Ob bei so differirenden Einzelwerthen das Mittel dem wahren Inclinationswerthe sehr nahe kommt, ist ziemlich fraglich.

Diese wenigen Beispiele mögen genügen, das früher Gesagte zu bekräftigen. Es soll selbstverständlich hiedurch Kreil kein Vorwurf gemacht werden, als ob er bei seinen Messungen zu wenig Sorgfalt verwendet hätte; er hat gewiss unter den damaligen schwierigen Verhältnissen Alles aufgeboten, um möglichst genaue Resultate zu erhalten. Wenn wir uns heute mit der von ihm erreichten Genauigkeit nicht begnügen können, so müssen wir auch bedenken, dass unsere heutigen Hilfsmittel viel vollkommener sind als vor 40 Jahren.

Über das Vorhandensein einer störenden Ursache in Ostgalizien kann kein Zweifel sein, denn sowohl Kreil's als auch meine Messungsresultate weisen darauf hin. Während in Westgalizien einem Längenunterschied von 2° 42′(Przemysl-Wieliczka) eine Abnahme der Declination von 1° 56′ (2° 8′ nach Kreil) entspricht, ergibt sich der Declinationsunterschied zwischen Przemysl und Czernowitz nur zu 0° 18′, obwohl die Längendifferenz 3° 10′ beträgt. Man kann sogar zwischen Czernowitz und der um fast 40′ westlicher gelegenen Station Stanislau eine Zunahme der Declination bemerken, die beinahe ebenso gross ist als die erwähnte kleine Abnahme zwischen Przemysl und Czernowitz. Solange nur Kreil's Beobachtungen vorlagen, konnte vielleicht an der Wirklichkeit der hier berührten Thatsachen gezweifelt werden, nachdem aber meine Messungen dasselbe Resultat ergeben, ist wohl jeder Zweifel ausgeschlossen.

Sowohl die unter *D* (1890) in Tabelle I als auch die unter *H* (1890) in Tabelle II stehenden Daten beziehen sich auf das Augustmittel des Jahres 1890 und sind somit streng vergleichbar mit den unter der gleichen Bezeichnung in meinem zweiten Berichte stehenden Zahlen. Die Tabelle IV enthält die Inclinationswerthe, wie sie die Beobachtung ergab, aber auch diese Zahlen werden sich nur wenig von den auf das Augustmittel 1890 reducirten unterscheiden.[1]

---

[1] Die Werthe der Horizontalintensität sind, wie ich dies bereits in meinen früheren Berichten erwähnt habe, um circa 0·0040 zu klein.

Aus den hier und im zweiten Berichte mitgetheilten Werthen der Intensität und Inclination kann man schon eine Drehung der beiden Liniensysteme, der Isodynamen und Isoklinen, ganz deutlich ersehen. Die Drehung erfolgte in dem Sinne, dass jetzt beide Systeme mit den Parallelkreisen einen kleineren Winkel einschliessen als im Jahre 1850; die säculare Änderung war also im Westen grösser als im Osten. Dass auch eine entsprechende Drehung der Isogonen stattgefunden haben müsse, dürfte wohl nicht zweifelhaft sein, man kann sie aber aus den von mir bisher gemessenen Declinationswerthen nicht ersehen; erst wenn die Beobachtungen südlich der Donau ausgeführt sein werden, werden wir das hiezu geeignete Material besitzen. Es ist nicht meine Absicht, aus dem bisher gesammelten Beobachtungsmaterial allgemeine Resultate abzuleiten, denn dieses kann erst dann mit Erfolg geschehen, wenn Messungen von ganz Österreich vorliegen werden, ich will nur die Aufmerksamkeit auf die wichtige und schon jetzt deutlich erkennbare Thatsache lenken.

Es sei mir zum Schlusse gestattet, den k. k. Behörden, den Gemeindeämtern, sowie jenen Personen, welche mich bei meiner schwierigen Aufgabe in irgend einer Weise unterstützt haben, hier meinen wärmsten Dank zu sagen. Ferner bin ich noch zu grossem Danke verpflichtet der löblichen Generaldirection der k. k. Staatsbahnen, der Generaldirection der priv. Carl Ludwig-Bahn und der Generaldirection der priv. österr.-ungar. Staatseisenbahngesellschaft für die Ermässigungen, welche sie für den Transport meiner Reiseeffecten gewährt haben.

I. Geographische Coordinaten der magnetischen Stationen (der Beobachtungspunkte).

Nr.	Station	φ	λ E v. Gr.
1	Wieliczka	49° 59'1	20° 3'9
2	Tarnow	50 1·2	20 59·1
3	Nisko	50 31·3	22 9·2
4	Rzeszow	50 2·1	22 1·4
5	Przemysl	49 47·3	22 45·7
6	Rawa ruska	50 14·3	23 37·3
7	Lemberg	49 48·8	24 1·2
8	Tarnopol	49 33·2	25 33·9
9	Brody	50 5·2	25 9·4
10	Stanislau	48 55·8	24 43·0
11	Czortkow	49 1·2	25 47·6
12	Kolomea	48 31·2	25 2·1
13	Czernowitz	48 16·9	25 56·4
14	Suczawa	47 38·5	26 16·4
15	Jakobeny	47 26·0	25 18·8
16	Dolina	48 58·0	24 1·1
17	Stry	49 16·2	23 52·6
18	Skole	49 2·1	23 31·2
19	Sambor	49 31·0	23 11·5
20	Sanok	49 33·8	22 12·4
21	Krosno	49 41·5	21 46·5
22	Alt-Sandec	49 36·9	20 38·3

II. Declination (W).

Nr.	Station	D (1890)	D_1 (1850)	$D_1 - D$
1	Wieliczka	7° 26'5	11° 44'7	4° 18'2
2	Tarnow	6 45·7	11 12·2	4 26·5
3	Nisko	5 35·9	10 7·5	4 31·6
4	Rzeszow	6 4·8	10 23·5	4 18·7
5	Przemysl	5 30·6	9 36·6	4 6·0
6	Rawa ruska	5 3·2	9 19·1	4 15·9
7	Lemberg	5 6·9	9 11·0	4 4·1
8	Tarnopol	5 6·9	9 17·2	4 10·3
9	Brody	4 53·3	9 3·0	4 9·7
10	Stanislau	4 58·7	9 4·5	4 5·8
11	Czortkow	4 34·4	8 49·9	4 15·5
12	Kolomea	4 57·8	9 2·6	4 4·8

Nr.	Station	D (1890)	D_1 (1850)	$D_1 - D$
13	Czernowitz	5° 12'2	9° 25'5	4° 13'3
14	Suczawa	4 44·3	8 50·4	4 6·1
15	Jakobeny	4 55·3	8 49·6	3 54·3 [1]
16	Dolina	5 10·1	9 5·5	3 55·4 [1]
17	Stry	5 12·5	9 24·1	4 11·6
18	Skole	5 18·2	9 31·3	4 13·1
19	Sambor	5 21·5	9 28·2	4 6 7
20	Sanok	5 59·3	10 16·8	4 17·5
21	Krosno	6 16·8	11 1·4	4 44·6 [2]
22	Alt-Sandec	7 10·9	11 33·2	4 22·3

III. Horizontale Intensität.

Nr.	Station	H (1890)	H_1 (1850)	$H - H_1$
1	Wieliczka	2·0143	1·9578	0·0565
2	Tarnow	2·0172	1·9570	0·0602
3	Nisko	2·0093	1·9490	0·0603
4	Rzeszow	2·0269	1·9705	0·0564
5	Przemysl	2·0455	1·9888	0·0567
6	Rawa ruska	2·0221	1·9552	0·0669
7	Lemberg	2·0549	1·9874	0·0675
8	Tarnopol	2·0717	2·0097	0·0620
9	Brody	2·0656	1·9943	0·0713
10	Stanislau	2·0976	2·0333	0·0643
11	Czortkow	2·1170	2·0534	0·0636
12	Kolomea	2·1165	2·0522	0·0643
13	Czernowitz	2·1277	2·0766	0·0511
14	Suczawa	2·1546	2·1032	0·0514
15	Jakobeny	2·1647	2·1118	0·0529
16	Dolina	2·0904	2·0267	0·0637
17	Stry	2·0773	2·0235	0·0538
18	Skole	2·0881	2·0242	0·0639
19	Sambor	2·0592	1·9923	0·0669
20	Sanok	2·0493	1·9818	0·0675
21	Krosno	2·0403	1·9693	0·0710
22	Alt-Sandec	2·0388	1·9697	0·0691

[1] Kreil's Werthe sind zu klein, was man auch aus seinen Isogonenkarten entnehmen kann.

[2] Bei Kreil entschieden zu gross, passt auch gar nicht in seine Isogonen hinein!

IV. Inclination.

Nr.	Station	J	J_1 (1850)	$J_1 - J$
1	Wieliczka	64° 17'	65° 13'	0° 56'
2	Tarnow	64 19	65 24	1 5
3	Nisko	64 30	65 16	0 46
4	Rzeszow	64 11	65 3	0 52
5	Przemysl	63 56	64 49	0 53
6	Rawa ruska	64 26	65 8	0 42
7	Lemberg	63 57	64 40	0 43
8	Tarnopol	63 37	64 23	0 46
9	Brody	63 59	64 44	0 45
10	Stanislau	63 9	63 55	0 46
11	Czortkow	62 51	63 33	0 42
12	Kolomea	62 53	63 29	0 36
13	Czernowitz	62 40	63 21	0 41
14	Suczawa	61 58	62 44	0 46
15	Jakobeny	61 49	62 35	0 46
16	Dolina	63 11	64 2	0 51
17	Stry	63 28	64 12	0 44
18	Skole	63 12	64 5	0 53
19	Sambor	63 48	64 32	0 44
20	Sanok	63 49	64 42	0 53
21	Krosno	63 56	64 46	0 50
22	Alt-Sandec	63 56	64 46	0 50

Die Ergänzungssätze zum bicubischen Reciprocitätsgesetze

von

Joseph Anton Gmeiner in Innsbruck.

1. Bezeichnen wir mit j die primitive sechste Einheitswurzel

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2},$$

und sind a und b zwei reelle ganze Zahlen, so stellt

$$a+bj$$

allgemein eine complexe ganze Zahl im Rationalitätsgebiete der sechsten Einheitswurzeln dar. a nennen wir die reelle und b die imaginäre Coordinate der Zahl $a+bj$.

$$a-bj^2 = a+b-bj$$

ist die Conjugirte zu $a+bj$ und das Product

$$(a+bj)(a-bj^2) = a^2+b^2+ab$$

deren Norm. Die Zahlen

$$(a+bj)j^\varkappa \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

heissen einander associirt.

In diesem Zahlensysteme ist die reelle Primzahl 3 in die einander conjugirten und associirten Primfactoren

$$1+j \text{ und } 1-j^2$$

zerlegbar. Ebenso lässt sich jede reelle Primzahl von der Form $6n+1$ in zwei einander conjugirte Primfactoren

$$a+bj \text{ und } a-bj^2$$

zerlegen, während die Zahl 2 und die reellen Primzahlen von der Form $6n+5$ auch in diesem Zahlensysteme Primzahlen bleiben.

Jede Zahl $a+bj$, welche weder durch $1+j$ noch durch 2 theilbar ist, nennen wir regulär, während wir die durch $1+j$ oder durch 2 theilbaren Zahlen als singuläre bezeichnen.

Ferner heisse eine Zahl $a+bj$ unseres Systems primär, wenn dieselbe modulo 3 congruent 1 ist. Zufolge dieser Definition kann eine durch $1+j$ theilbare Zahl nicht primär sein; dagegen gibt es unter den Associirten einer jeden nicht durch $1+j$ theilbaren Zahl immer eine und nur eine, welche primär ist. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass eine Zahl $a+bj$ primär sei, besteht darin, dass

$$a \equiv 1 \pmod 3 \text{ und } b \equiv 0 \pmod 3$$

ist. Es haben also die Coordinaten a und b einer primären Zahl $a+bj$ die Formen

$$a = 6\alpha+3\rho+1 \text{ und } b = 6\beta+3\sigma,$$

wobei α und β beliebige reelle ganze Zahlen sein können, während ρ und σ unabhängig von einander den Werth 0 oder den Werth 1 haben. Je nach den Werthen, welche ρ und σ haben, lassen sich nun folgende vier Haupttypen von primären Zahlen unterscheiden:

Erster Haupttypus: Es ist

$$\rho = \sigma = 0;\ a = 6\alpha+1 \text{ und } b = 6\beta.$$

Zu diesem Typus gehören unter anderen die primären Associirten aller reellen regulären Zahlen, also alle reellen Zahlen von der Form $6n+1$ und das Negative aller reellen Zahlen von der Form $6n+5$.

Zweiter Haupttypus: Es ist

$$\rho = 0 \text{ und } \sigma = 1;\ a = 6\alpha+1 \text{ und } b = 6\beta+3.$$

Dritter Haupttypus: Es ist

$$\rho = \sigma = 1;\ a = 6\alpha+4 \text{ und } b = 6\beta+3.$$

Vierter Haupttypus: Es ist

$$\rho = 1 \text{ und } \sigma = 0;\ a = 6\alpha+4 \text{ und } b = 6\beta.$$

Zu diesem Typus gehören die primären Associirten aller jener geraden Zahlen, welche nicht durch $1+j$ theilbar sind. Die Zahlen dieses Typus sind daher keine regulären Zahlen. Dagegen enthalten die drei anderen Haupttypen nur reguläre Zahlen, und es gehört jede primäre reguläre Zahl einem der drei ersten Haupttypen an. Für das Folgende sind nur die drei Haupttypen der primären regulären Zahlen von Wichtigkeit.

Bezüglich des Haupttypus, welchem die Conjugirte einer primären regulären Zahl angehört, bestehen folgende, leicht zu verificirende Sätze:

1. Die Conjugirte einer Zahl des ersten Haupttypus ist wieder eine Zahl dieses Haupttypus.

2. Die Conjugirte einer Zahl des zweiten Haupttypus ist eine Zahl des dritten Haupttypus.

3. Die Conjugirte einer Zahl des dritten Haupttypus ist eine Zahl des zweiten Haupttypus.

2. Ist $m = a+bj$ eine reguläre Primzahl, p deren Norm und $r = c+dj$ eine beliebige zu m theilerfremde Zahl unseres Systems, so besteht die Congruenz

$$r^{\frac{p-1}{6}} \equiv j^{\varkappa} \pmod{m},$$

worin $\varkappa$ einen der Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5 hat. $j^{\varkappa}$ ist der bicubische Charakter der Zahl r bezüglich der Primzahl m. Um diese Beziehung zwischen r, m und $j^{\varkappa}$ kurz auszudrücken, bedienen wir uns desselben Zeichens $\left(\frac{r}{m}\right)$, welches in der Theorie der quadratischen Reste als das Legendre'sche Zeichen bekannt ist, indem wir

$$j^{\varkappa} = \left(\frac{r}{m}\right)$$

setzen, und es ist dann

$$r^{\frac{p-1}{6}} \equiv \left(\frac{r}{m}\right) \pmod{m}.$$

Das Symbol $\left(\frac{r}{m}\right)$ nennen wir kurz das charakteristische Zeichen von r bezüglich m, und wir legen demselben auch

für den Fall, dass m keine Primzahl, sondern das Product der regulären Primzahlen $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ vorstellt, eine Bedeutung bei, indem wir festsetzen, dass in diesem Falle

$$\left(\frac{r}{m}\right) = \left(\frac{r}{m_1}\right)\left(\frac{r}{m_2}\right)\ldots\left(\frac{r}{m_\nu}\right)$$

sein solle. Dann bestehen bezüglich des Zeichens $\left(\frac{r}{m}\right)$ folgende Sätze:

1. Ist $M = a+bj$ eine beliebige reguläre Zahl und P ihre Norm, so ist

$$\left(\frac{j}{M}\right) = j^{\frac{P-1}{6}}. \qquad \text{(I)}$$

2. Sind Q und P zwei reelle, zu einander theilerfremde Zahlen, von denen die erstere regulär ist, so ist

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = 1. \qquad \text{(II)}$$

3. Sind M und Q zwei zu einander theilerfremde, primäre reguläre Zahlen, von denen die erstere zweigliedrig und die letztere reell ist, und ezeichnen wir die Norm von M mit P, so besteht die Reciproc tätsgleichung

$$\left(\frac{Q}{M}\right) = (-1)^{\frac{Q-1}{6}\frac{P-1}{6}}\left(\frac{M}{Q}\right).^1 \qquad \text{(III)}$$

4. Ist m eine reguläre Zahl und n eine beliebige zu m theilerfremde Zahl unseres Systems; sind ferner m' und n' die Conjugirten zu m und n, so ist

$$\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n'}{m'}\right) = 1. \qquad \text{(IV)}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen I—IV kann man nun die Ergänzungssätze zum bicubischen Reciprocitätsgesetze ableiten, d. h. den Werth der Zeichen

---

[1] Eine Ableitung dieser Reciprocitätsgleichung werde ich anderweitig veröffentlichen.

$$\left(\frac{1+j}{m}\right) \text{ und } \left(\frac{2}{m}\right),$$

worin m eine beliebige primäre reguläre Zahl unseres Systems bedeutet, allgemein bestimmen.

I. Der bicubische Charakter der Zahl $1+j$.

3. Ist q eine reelle Primzahl von der Form $6n+5$, so ist

$$(1+j)^q \equiv 1+j^q = 1+j^5 = j^5(1+j) \pmod{q},$$

und daraus folgt

$$(1+j)^{q-1} \equiv j^5 \pmod{q}.$$

Demnach ist

$$(1+j)^{\frac{q^2-1}{6}} \equiv j^{5\frac{q+1}{6}} = j^{-\frac{q+1}{6}} \pmod{q}.$$

Bezeichnen wir nun das Negative einer reellen Primzahl von der Form $6n+5$ mit q, d. h. nehmen wir q primär, so erhalten wir aus dieser Congruenz die Gleichung

$$\left(\frac{1+j}{q}\right) = j^{\frac{q-1}{6}}.$$

Ist p eine reelle Primzahl von der Form $6n+1$ und sind m_1 und m_2 ihre zweigliedrigen Primfactoren, so ist

$$\left(\frac{1+j}{p}\right) = \left(\frac{1+j}{m_1}\right)\left(\frac{1+j}{m_2}\right).$$

Nun ist zufolge der Gleichung (IV)

$$\left(\frac{1+j}{m_1}\right)\left(\frac{1-j^2}{m_2}\right) = 1,$$

und da

$$1-j^2 = j^{-1}(1+j)$$

ist, so folgt daraus unter Berücksichtigung der Gleichung (I)

$$\left(\frac{1+j}{p}\right) = j^{\frac{p-1}{6}}.$$

Bedeutet P eine primäre reelle reguläre Zahl und sind

$$p_1 = 6n_1+1,\ p_2 = 6n_2+1, \ldots p_\nu = 6n_\nu+1$$

ihre reellen primären Primfactoren, so ist

$$\left(\frac{1+j}{P}\right) = \left(\frac{1+j}{p_1}\right)\left(\frac{1+j}{p_2}\right)\ldots\left(\frac{1+j}{p_\nu}\right) = j^{n_1+n_2+\cdots+n_\nu} = j^{\frac{P-1}{6}}.$$

Es ist also für jede primäre reelle reguläre Zahl P

$$\left(\frac{1+j}{P}\right) = j^{\frac{P-1}{6}}. \qquad \text{(V)}$$

4. Es sei $a+bj$ eine Zahl des ersten Haupttypus, deren Coordinaten zu einander theilerfremd sein sollen, und p bedeute die Norm von $a+bj$; dann können wir

$$a = 6\alpha+1 \text{ und } b = 6\beta$$

setzen, worin α und β ganze reelle Zahlen bezeichnen. Daraus erkennen wir, dass $a+b$ eine primäre reelle reguläre Zahl ist, welche zufolge der Congruenz

$$a+b \equiv aj \pmod{a+bj}$$

zu $a+bj$ relativ prim ist. Daher ist nach Gleichung (III)

$$\left(\frac{a+b}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\cdot\frac{a+b-1}{6}}\left(\frac{a+bj}{a+b}\right). \qquad (1)$$

Ein Fall ist hier noch ausgeschlossen, nämlich der, dass $a+b=1$ ist, weil wir das Zeichen

$$\left(\frac{a+bj}{1}\right)$$

nicht definirt haben. Setzen wir jedoch fest, dass für jede beliebige Zahl $a+bj$

$$\left(\frac{a+bj}{1}\right) = 1$$

sein soll, so besteht die obige Gleichung auch für $a+b=1$. Diese Bemerkung bleibt auch für alle folgenden Gleichungen, worin in einem speciellen Falle das Zeichen

$$\left(\frac{a+bj}{1}\right)$$

zum Vorschein kommen könnte, in Kraft, so dass wir der Arbeit enthoben sind, solche Eventualitäten eigens zu behandeln.

Da nun

$$\left(\frac{a+bj}{a+b}\right)=\left(\frac{b(j-1)}{a+b}\right)=\left(\frac{j^2}{a+b}\right)=j^{2\frac{(a+b)^2-1}{6}},$$

$$\frac{p-1}{6}\equiv\beta \pmod 2,\quad \frac{a+b-1}{6}=\alpha+\beta \text{ und}$$

$$\frac{(a+b)^2-1}{6}\equiv 2(\alpha+\beta) \pmod 6$$

ist, so folgt aus (1)

$$\left(\frac{a+b}{a+bj}\right)=(-1)^{\alpha\beta+\alpha}j^{\alpha+\beta}. \tag{2}$$

Dieses Resultat verwenden wir zur Bestimmung von $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$.

Es ist

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a+b}{a+bj}\right)=\left(\frac{a+b+(a+b)j}{a+bj}\right)$$

und, weil

$$(a+b)j\equiv b \pmod{a+bj}$$

ist,

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a+b}{a+bj}\right)=\left(\frac{a+2b}{a+bj}\right). \tag{3}$$

$a+2b$ ist wieder eine primäre reelle reguläre und zu $a+bj$ theilerfremde Zahl, so dass die Reciprocitätsgleichung besteht

$$\left(\frac{a+2b}{a+bj}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{6}\cdot\frac{a+2b-1}{6}}\left(\frac{a+bj}{a+2bj}\right)=(-1)^{\alpha\beta}\left(\frac{a+bj}{a+2bj}\right). \tag{4}$$

Nun ist

$$\left(\frac{a+bj}{a+2bj}\right)=\left(\frac{b(j-2)}{a+2b}\right)=\left(\frac{j-2}{a+2bj}\right)=\left(\frac{1+j}{a+2bj}\right)\left(\frac{j^2}{a+2bj}\right)=$$

$$=j^{\frac{a+2b-1}{6}+2\frac{(a+2b)^2-1}{6}},$$

$$\frac{a+2b-1}{6}=\alpha+2\beta \text{ und } \frac{(a+2b)^2-1}{6}\equiv 2\alpha+4\beta \pmod 6,$$

also

$$\left(\frac{a+bj}{a+2b}\right) = (-1)^{\alpha+\beta} j^{2\alpha+\beta}.$$

Somit ergibt die Gleichung (4)

$$\left(\frac{a+2b}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha\beta+\alpha+\beta} j^{2\alpha+3}.$$

Aus dieser Gleichung und den Gleichungen (2) und (3) erhält man für das charakteristische Zeichen $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$ den Werth

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right) = (-1)^{\beta} j^{\alpha}. \qquad \text{(VI)}$$

5. Ist $a+bj$ eine Zahl des zweiten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten und p deren Norm, so ist a regulär und primär und zu $a+bj$ relativ prim. Durch Benützung der Reciprocitätsgleichung (III) erhalten wir somit

$$\left(\frac{a}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\cdot\frac{a-1}{6}} \left(\frac{a+bj}{a}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\cdot\frac{a-1}{6}} j^{\frac{a^2-1}{6}},$$

woraus sich weiter

$$\left(\frac{a}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\cdot\frac{a-1}{6}} j^{2\frac{a-1}{6}}, \qquad (1)$$

ergibt. Setzen wir

$$a = 6\alpha+1 \text{ und } b = 6\beta+3,$$

so geht diese Gleichung über in

$$\left(\frac{a}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha\beta+\alpha} j^{2\alpha}. \qquad (2)$$

Dieses Resultat benützen wir zur Bestimmung von $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$. Es ist

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a}{a+bj}\right) = \left(\frac{a+aj}{a+bj}\right)$$

und, weil

$$aj \equiv a+b \pmod{a+bj}$$

ist,

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a}{a+bj}\right)=\left(\frac{2a+b}{a+bj}\right). \tag{3}$$

Hier ist $-(2a+b)$ regulär und primär; folglich ist

$$\left(\frac{2a+b}{a+bj}\right)=\left(\frac{-1}{a+bj}\right)\left(\frac{-2a-b}{a+bj}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{6}\left(1+\frac{-2a-b-1}{6}\right)}\left(\frac{a+bj}{2a+b}\right),$$

also

$$\left(\frac{2a+b}{a+bj}\right)=(-1)^{\alpha\beta+\beta}\left(\frac{a+bj}{2a+b}\right). \tag{4}$$

Nun ist

$$\left(\frac{a+bj}{2a+b}\right)=\left(\frac{a(1-2j)}{2a+b}\right)=\left(\frac{(1+j)j^{a}}{2a+b}\right)=j^{\frac{-2a-b-1}{6}+a\frac{(2a+b)^2-1}{6}},$$

und da

$$\frac{(2a+b)^2-1}{6}\equiv 2\alpha+4\beta+4 \pmod 6$$

ist, so findet man daraus

$$\left(\frac{a+bj}{2a+b}\right)=(-1)^{\beta+1},$$

wonach sich aus der Gleichung (4)

$$\left(\frac{2a+b}{a+bj}\right)=(-1)^{\alpha\beta+1}$$

ergibt. Diese Gleichung und die Gleichungen (2) und (3) liefern zusammen das Resultat

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)=-j^{a}. \tag{VII}$$

6. Bedeutet $a+bj$ eine Zahl des dritten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten, so können wir

$$a=6\alpha+4 \text{ und } b=6\beta+3$$

setzen. Daraus erkennen wir, dass $a+b$ regulär und primär und zu $a+bj$ relativ prim ist, und wir könnten auch hier das Zeichen $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$ auf ähnliche Weise wie bei den Zahlen des ersten und zweiten Haupttypus bestimmen. Es ist nämlich

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a+b}{a+bj}\right)=\left(\frac{a+b+(a+b)j}{a+b\,j}\right)=\left(\frac{j\,(2\,a+b)}{a+bj}\right)=$$

$$=\left(\frac{j}{a+bj}\right)\left(\frac{-1}{a+bj}\right)\left(\frac{-2\,a-b}{a+bj}\right).$$

In dieser Gleichung ist

$$\left(\frac{j}{a+bj}\right) \text{ und } \left(\frac{-1}{a+bj}\right)$$

bekannt, und die Zeichen

$$\left(\frac{a+b}{a+bj}\right) \text{ und } \left(\frac{-2\,a-b}{a+bj}\right)$$

lassen sich mit Hilfe der Reciprocitätsgleichung (III) leicht berechnen, da

$$a+b \text{ und } -(2\,a+b)$$

regulär und primär und zu $a+bj$ theilerfremd sind. Wir wollen jedoch diesen Weg nicht weiter verfolgen, weil uns hier, nachdem wir das charakteristische Zeichen von $1+j$ bezüglich einer Zahl des zweiten Haupttypus, deren Coordinaten zu einander theilerfremd sind, schon kennen gelernt haben, die Gleichung (IV) auf eine viel einfachere und kürzere Weise zum Ziele führt.

Weil die Conjugirte einer Zahl des dritten Haupttypus eine Zahl des zweiten Haupttypus ist, so folgt aus der Gleichung (VII)

$$\left(\frac{1+j}{a+bj^2}\right)=-j^{\alpha+\beta+1};$$

denn es ist

$$a-bj^2=a+b-bj=6(\alpha+\beta+1)+1+\{-6(\beta+1)-3\}j.$$

Daraus ergibt sich

$$\left(\frac{1-j^2}{a-bj^2}\right)=\left(\frac{1+j}{a-bj^2}\right)\left(\frac{j^5}{a-bj^2}\right)=-j^{\alpha+\beta+1}\cdot j^{5\frac{p-1}{6}},$$

worin p die Norm von $a+bj$ bedeutet, und da

$$\frac{p-1}{6}\equiv 5\alpha+4\beta \pmod 6$$

ist,

$$\left(\frac{1-j^2}{a-bj^2}\right) = (-1)^{\beta+1} j^{2\alpha}$$

Weil nun zufolge der Gleichung (IV)

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{1-j^2}{a-bj^2}\right) = 1$$

ist, so gelangen wir zu dem Resultate

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha+\beta} j^{\alpha+\beta}. \qquad \text{(VIII)}$$

7. Wir stellen uns nun die Aufgabe, eine Gleichung aufzufinden, welche die drei für das charakteristische Zeichen der Zahl $1+j$ aufgestellten Gleichungen (VI), (VII) und (VIII) ersetzt.

Ist $a+bj$ eine primäre reguläre Zahl mit zu einander theilerfremden Coordinaten, und setzen wir

$$a = 6\alpha+3\rho+1 \text{ und } b = 6\beta+3\sigma,$$

so ist $\rho = \sigma = 0$, oder $\rho = 0$ und $\sigma = 1$, oder $\rho = \sigma = 1$, je nachdem $a+bj$ dem ersten, zweiten oder dritten Haupttypus angehört. Vergleichen wir nun die Gleichungen (VI), (VII) und (VIII) unter einander und mit den entsprechenden Formen der Coordinaten a und b, d. h. mit den Ausdrücken

$$6\alpha+3\rho+1 \text{ und } 6\beta+3\sigma,$$

so finden wir, dass die Gleichung

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right) = (-1)^{\beta\alpha+(\rho+\sigma+1)\beta+\rho+\sigma} j^{\alpha+\beta+\rho} \qquad \text{(IX)}$$

den Werth des charakteristischen Zeichens von $1+j$ bezüglich einer jeden primären regulären Zahl $a+bj$, deren Coordinaten zu einander theilerfremd sind, darstellt. Denn ist $\rho = \sigma = 0$, so erhalten wir aus dieser Gleichung die Gleichung (VI); ist $\rho = 0$ und $\sigma = 1$, so erhalten wir die Gleichung (VII), und endlich ergibt sich daraus für $\rho = \sigma = 1$ die Gleichung (VIII).

Die Gleichung (IX) gilt übrigens nicht nur für primäre reguläre zweigliedrige Zahlen $a+bj$, deren Coordinaten zu ein-

ander theilerfremd sind, sondern auch für alle primären regulären reellen Zahlen P; denn es ist in diesem Falle

$$\beta = \rho = \sigma = 0 \text{ und } \alpha = \frac{P-1}{6},$$

woraus wir ersehen, dass unsere Gleichung unter dieser Voraussetzung in die Gleichung (V) übergeht. Ja die Gleichung (IX) bleibt, wie wir jetzt zeigen werden, für alle primären regulären Zahlen bestehen.

8. Bezüglich des Zeichens $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$ bleibt uns noch der Fall zur Untersuchung übrig, wo $a+bj$ eine zweigliedrige primäre reguläre Zahl vorstellt, deren Coordinaten nicht zu einander theilerfremd sind. Ist P der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und b, so können wir

$$a+bj = P(a_1+b_1j)$$

setzen, und es sind dann a_1 und b_1 zwei reelle ganze und zu einander theilerfremde Zahlen. Da $a+bj$ primär ist, so können wir stets auch P und a_1+b_1j als primär annehmen und

$$P = 6n+1,\ a_1 = 6\alpha_1+3\rho_1+1 \text{ und } b_1 = 6\beta_1+3\sigma_1$$

setzen, wobei n, α_1 und β_1 beliebige reelle ganze Zahlen bedeuten, während ρ_1 und σ_1 nur die Werthe 0 und 1 annehmen und nicht gleichzeitig $\rho_1 = 1$ und $\sigma_1 = 0$ ist. Unter diesen Voraussetzungen ist nun zufolge der Gleichungen (V) und (IX)

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right) = (-1)^{\varkappa_1} j^{\lambda_1}, \tag{1}$$

worin

$$\rho_1\alpha_1+(\rho_1+\sigma_1+1)\beta_1+\rho_1+\sigma_1 = \varkappa_1 \text{ und } \alpha_1+2\rho_1+n = \lambda_1$$

gesetzt ist. Die Coordinaten von $a+bj$ haben die Gestalt

$$a = 6\alpha+3\rho+1 \text{ und } b = 6\beta+3\sigma,$$

wo α, β, ρ und σ dieselbe Bedeutung wie die entsprechenden Grössen α_1, β_1, ρ_1 und σ_1 haben, und es ist

$$\rho = \rho_1,\ \sigma = \sigma_1,$$

$$\alpha \equiv \alpha_1+n+3n\rho_1 \pmod 6 \text{ und } \beta \equiv \beta_1+3n\sigma_1 \pmod 6.$$

Setzt man ferner noch

$$\varrho\alpha+(\varrho+\sigma+1)\beta+\varrho+\sigma=\varkappa \text{ und } \alpha+2\varrho=\lambda,$$

so findet man

$$\varkappa\equiv\varkappa_1+n\varrho_1 \pmod 2 \text{ und } \lambda\equiv\lambda_1+3n\varrho_1 \pmod 6,$$

also

$$3\varkappa+\lambda\equiv 3\varkappa_1+\lambda_1 \pmod 6,$$

d. h. es folgt aus der Gleichung (1) die Gleichung

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)=(-1)^{\varkappa}j^{\lambda}$$

und das ist die Gleichung (IX). Die Gleichung (IX) gilt also für jede primäre reguläre Zahl $a+bj$.

9. Nachdem wir das charakteristische Zeichen der Zahl $1+j$ bezüglich aller primären regulären Zahlen $a+bj$ bestimmt haben, ist es nun leicht, auch das charakteristische Zeichen der Zahl 3 bezüglich dieser Zahlen $a+bj$ allgemein zu berechnen. Es ist nämlich

$$3=(1+j)(1-j^2)=(1+j)^2j^5$$

und daher zufolge der Gleichungen (I) und (IX)

$$\left(\frac{3}{a+bj}\right)=j^{2\alpha+4\varrho+5\frac{p-1}{6}}, \tag{1}$$

worin p die Norm von $a+bj$ bezeichnet und die Grössen α und ϱ dieselbe Bedeutung wie in der Gleichung (IX) haben. Haben auch β und σ wieder ihre frühere Bedeutung, d. h. setzen wir auch hier

$$a=6\alpha+3\varrho+1 \text{ und } b=6\beta+3\sigma,$$

so ist

$$\frac{p-1}{6}\equiv 2\alpha+\beta+3(\alpha\sigma+\beta\varrho)+4\varrho+2\sigma \pmod 6,$$

und wir erhalten somit aus (1) für das charakteristische Zeichen der Zahl 3 bezüglich einer primären regulären Zahl $a+bj$ die Gleichung

$$\left(\frac{3}{a+bj}\right)=(-1)^{3\alpha+(\varrho+1)\beta+\sigma}j^{2\beta+\sigma}. \tag{X}$$

II. Der bicubische Charakter der Zahl 2.

10. Es sei $a+bj$ eine zweigliedrige Zahl des ersten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten, deren Norm wir mit p bezeichnen wollen; dann können wir in der üblichen Weise

$$a = 6\alpha+1 \text{ und } b + 6\beta$$

setzen. Zur Bestimmung des charakteristischen Zeichens der Zahl 2 genügt jedoch die Eintheilung der regulären primären Zahlen $a+bj$ in Haupttypen noch nicht, sondern wir sind schon bei den Zahlen des ersten Haupttypus genöthigt, zwei Nebentypen zu unterscheiden, je nachdem β gerade oder ungerade ist.

1. Es sei β gerade, also

$$a = 6\alpha+1 \text{ und } b = 2b' = 6\beta = 12\beta'.$$

Der Weg, den wir hier zur Bestimmung von $\left(\frac{2}{a+bj}\right)$ einschlagen, ist ähnlich dem Verfahren, welches wir zur Bestimmung von $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$ angewendet haben. Wir gehen von der Gleichung

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a}{a+bj}\right) = \left(\frac{a+aj}{a+bj}\right)$$

aus. Aus derselben ergibt sich unter Berücksichtigung der Congruenz

$$aj \equiv a+b \pmod{a+bj}$$

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a}{a+bj}\right) = \left(\frac{2a+b}{a+bj}\right) = \left(\frac{2(a+b')}{a+bj}\right),$$

also

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{a}{a+bj}\right) = \left(\frac{2}{a+bj}\right)\left(\frac{a+b'}{a+bj}\right). \tag{1}$$

b' ist durch 6 theilbar und daher $a+b'$ eine primäre reguläre Zahl. Ferner ist

$$(1+j)a = 2(a+b') \pmod{a+bj},$$

woraus man unmittelbar erkennt, dass neben $1+j$, a und 2 auch $a+b'$ zu $a+bj$ theilerfremd sein muss. Es ist daher

$$\left(\frac{a+b'}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\frac{a+b'-1}{6}}\left(\frac{a+bj}{a+b'}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\frac{a+b'-1}{6}}\left(\frac{a(1-2j)}{a+b'}\right).$$

Nun ist

$$\left(\frac{a(1-2j)}{a+b'}\right) = \left(\frac{1-2j}{a+b'}\right) = \left(\frac{j^4}{a+b'}\right)\left(\frac{1+j}{a+b'}\right) = j^{4\frac{(a+b')^2-1}{6}+\frac{a+b'-1}{6}}$$

also

$$\left(\frac{a+b'}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\frac{a+b'-1}{6}} j^{4\frac{(a+b')^2-1}{6}+\frac{a+b'-1}{6}}. \qquad (2)$$

In unserem Falle ist

$$\frac{p-1}{6} \equiv 0 \pmod 2, \quad \frac{a+b'-1}{6} = \alpha+\beta' \text{ und}$$

$$\frac{(a+b')^2-1}{6} \equiv 2(\alpha+\beta') \pmod 6.$$

Somit folgt aus (2)

$$\left(\frac{a+b'}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha+\beta'}. \qquad (3)$$

Für das Zeichen $\left(\frac{a}{a+bj}\right)$ besteht die Gleichung (1) in der Nummer 5, welche hier die Gestalt

$$\left(\frac{a}{a+bj}\right) = j^{2\alpha} \qquad (4)$$

annimmt, und für das Zeichen $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$ haben wir die Gleichung (VI) gefunden, die hier in die Gleichung

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right) = j^{\alpha} \qquad (5)$$

übergeht. Die Gleichungen (1), (3), (4) und (5) ergeben zusammen das Resultat

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\beta'}. \qquad (6)$$

2. Es sei β ungerade, also

$$a = 6\alpha+1 \text{ und } b = 2b' = 6\beta = 12\beta'+6.$$

In diesem Falle gehen wir von der Gleichung

$$\left(\frac{2a+bj}{a+bj}\right) = \left(\frac{2}{a+bj}\right)\left(\frac{a+b'j}{a+bj}\right) \tag{7}$$

aus. Hierin ist

$$\left(\frac{2a+bj}{a+bj}\right) = \left(\frac{a}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}\cdot\frac{a-1}{6}} j^{2\frac{a-1}{6}}.$$

Da nun

$$\frac{p-1}{6} \equiv 1 \pmod 2 \text{ und } \frac{a-1}{6} = \alpha$$

ist, so bekommen wir daraus

$$\left(\frac{2a+bj}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha} j^{2\alpha}. \tag{8}$$

Ferner ist

$$\left(\frac{a+b'j}{a+bj}\right) = \left(\frac{-b'j}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}} j^{\frac{p-1}{6}} \left(\frac{b'}{a+bj}\right)$$

und, da

$$\frac{p-1}{6} \equiv 2\alpha+2\beta'+1 \pmod 6$$

ist,

$$\left(\frac{a+b'j}{a+bj}\right) = -j^{2\alpha+2\beta'+1}\left(\frac{b'}{a+bj}\right). \tag{9}$$

Nun sei 3^{ν} die höchste in b' enthaltene Potenz von 3; dann ist $\nu \geqq 1$ und b' hat die Form

$$b' = 3^{\nu}(6\beta_2+\varepsilon), \tag{10}$$

wobei β_2 eine beliebige reelle ganze Zahl sein kann, während ε nur den Werth 1 oder den Werth 5 haben kann. Zufolge (10) ist

$$\left(\frac{b'}{a+bj}\right) = \left(\frac{3^{\nu}}{a+bj}\right)\left(\frac{6\beta_2+\varepsilon}{a+bj}\right) \tag{11}$$

und gemäss der Gleichung (X)

$$\left(\frac{3^\nu}{a+bj}\right) = (-1)^{\nu\beta} j^{2\nu\beta}. \tag{12}$$

Ferner ergibt sich sowohl für $\varepsilon = 1$ als auch für $\varepsilon = 5$ unter Beachtung der Gleichung (10) und Anwendung von (III)

$$\left(\frac{6\beta_2+\varepsilon}{a+bj}\right) = (-1)^{\beta_2}.$$

Demnach erhalten wir aus (11)

$$\left(\frac{b'}{a+bj}\right) = (-1)^{\nu\beta+\beta_2} j^{2\nu\beta}. \tag{13}$$

Nach (9) und (13) ist

$$\left(\frac{a+b'j}{a+bj}\right) = (-1)^{\nu\beta+\beta_2+1} j^{2\alpha+2\beta'+2\nu\beta+1} \tag{14}$$

und aus (7), (8) und (14) ergibt sich

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha+\beta'+\beta_2} j^{\beta'+\nu\beta+2}. \tag{15}$$

Da diese Formel ziemlich complicirt ist, indem man von der Zahl $a+bj$ die Grössen α, β, β', β_2 und ν zu bestimmen hat, so wollen wir versuchen, dieselbe zu vereinfachen und einige dieser Grössen hinwegzuschaffen. Am vortheilhaftesten wäre es, wenn man die Grössen β_2 und ν aus der Gleichung (15) entfernen könnte, weil diese Grössen erst durch eine verhältnissmässig weit gehende Zerlegung der Zahl b gefunden werden. Es ist in der That auch möglich, diese Grössen wegzuschaffen. Es ist nämlich

$$b' = 6\beta' + 3 = 3^\nu(6\beta_2+\varepsilon)$$

und daraus folgt

$$\beta' = 3^\nu\beta_2 + \frac{(3^{\nu-1}-1)\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon-1}{2}. \tag{16}$$

Ist $\nu = 1$, so erhält man aus dieser Gleichung die Congruenz

$$\beta' \equiv \beta_2 \pmod 2,$$

und wenn man noch beachtet, dass

$$\beta = 2\beta' + 1$$

ist, so gewinnt man in diesem Falle aus (15) die Gleichung

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha+\beta'+1}. \tag{17}$$

Ist $\nu > 1$, so hat man zufolge (16)

$$\beta' = 3^{\nu}\beta_2 + \varepsilon(1+3+3^2+\ldots+3^{\nu-2}) + \frac{\varepsilon-1}{2},$$

also

$$\beta' \equiv 3\beta_2 + \varepsilon\{1+3(\nu-2)\} + \frac{\varepsilon-1}{2} \pmod 6$$

und daraus ergibt sich sowohl für $\varepsilon = 1$ als auch für $\varepsilon = 5$

$$\beta' \equiv 3\beta_2 + 3\nu + 1 \pmod 6. \tag{18}$$

Ferner ist zufolge dieser Congruenz

$$\beta' + \nu\beta + 2 = \beta' + \nu(2\beta'+1) + 2 =$$
$$= (2\nu+1)(3\beta_2 + 3\nu + 1) + \nu + 2 \equiv 3\beta_2 + 3 \pmod 6$$

Somit erhalten wir aus der Gleichung (15) auch in diesem Falle die Gleichung (17).

Wir haben also für das charakteristische Zeichen der Zahl 2 bezüglich einer Zahl $a+bj$ des ersten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten zwei Gleichungen (6) und (17) erhalten. Die erstere gilt für den Fall, dass β gerade, und die letztere für den Fall, dass β ungerade ist. Diese zwei Gleichungen lassen sich jedoch leicht zu einer einzigen Formel vereinigen.

Setzen wir allgemein

$$a = 6\alpha + 1 \text{ und } b = 12\beta' + 6\sigma',$$

worin σ' nur die Werthe 0 oder 1 annimmt, so ist für jede Zahl $a+bj$ des ersten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\sigma'\alpha+\beta'+\sigma'}. \tag{XI}$$

Denn diese Gleichung geht für $\sigma'=0$ in die Gleichung (6) und für $\sigma'=1$ in die Gleichung (17) über. Die Gleichung (XI) gilt übrigens auch für den Fall, dass $a+bj$ eine primäre reelle reguläre Zahl darstellt; denn in diesem Falle ist

$$b=\beta'=\sigma'=0,$$

so dass wir für das charakteristische Zeichen von 2 bezüglich dieser Zahl $a+bj$ aus der Gleichung (XI) den Werth 1 erhalten, was gemäss der Gleichung (II) richtig ist.

11. Bedeutet $a+bj$ eine Zahl des dritten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten und p deren Norm, so haben a und b die Gestalt

$$a=6\alpha+4 \text{ und } b=6\beta+3.$$

Zur Ermittlung des Zeichens $\left(\frac{2}{a+bj}\right)$ sind wir auch hier wieder genöthigt, die Zahlen $a+bj$ in zwei Gruppen abzutheilen, die sich durch die Form der Grösse α von einander unterscheiden. Die erste Gruppe enthält die Zahlen $a+bj$ mit geradem α und die zweite jene mit ungeradem α.

1. Es sei α gerade, also

$$a=2a'=6\alpha+4=12\alpha'+4 \text{ und } b=6\beta+3.$$

Hier führt uns die Gleichung

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{b}{a+bj}\right)=\left(\frac{b+bj}{a+bj}\right)$$

zum erwünschten Ziele. Weil

$$b\equiv(a+b)j \pmod{a+bj}$$

ist, so bekommen wir zunächst

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{b}{a+bj}\right)=\left(\frac{(a+2b)j}{a+bj}\right)=j^{\frac{p-1}{6}}\left(\frac{a+2b}{a+bj}\right)$$

und, da

$$\frac{p-1}{6}\equiv 5\alpha+4\beta\equiv 4(\alpha'+\beta) \pmod 6$$

ist,

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{b}{a+bj}\right)=(-1)^{\alpha'+\beta}j^{\alpha'+\beta}\left(\frac{2}{a+bj}\right)\left(\frac{a'+b}{a+bj}\right). \quad (1)$$

Nun ist

$$a'+b=6(\alpha'+\beta)+5, \quad (2)$$

also $-(a'+b)$ eine primäre reguläre Zahl und, wie die Congruenz

$$b(1+j)\equiv 2(a'+b) \pmod{a+bj}$$

sagt, zu $a+bj$ relativ prim. Wir haben daher

$$\left(\frac{a'+b}{a+bj}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{6}}\left(\frac{-a'-b}{a+bj}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{6}\left(1+\frac{-a'-b-1}{6}\right)}\left(\frac{a+bj}{a'+b}\right),$$

und weil

$$\frac{p-1}{6}\equiv 0 \pmod 2$$

ist, so ergibt sich daraus

$$\left(\frac{a'+b}{a+bj}\right)=\left(\frac{a+bj}{a'+b}\right)=\left(\frac{b(j-2)}{a'+b}\right)=\left(\frac{j^2(1+j)}{a'+b}\right)=$$

$$=j^{2\frac{(a'+b)^2-1}{6}+\frac{-a'-b-1}{6}},$$

also mit Berücksichtigung der Congruenz

$$\frac{(a'+b)^2-1}{6}\equiv 4(\alpha'+\beta+1) \pmod 6$$

und der Gleichung (2)

$$\left(\frac{a'+b}{a+bj}\right)=j^{\alpha'+\beta+1}.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (1) ein, so erhält man

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)\left(\frac{b}{a+bj}\right)=(-1)^{\alpha'+\beta}j^{2\alpha'+2\beta+1}\left(\frac{2}{a+bj}\right). \quad (3)$$

Jetzt handelt es sich noch darum, das Zeichen $\left(\frac{b}{a+bj}\right)$ zu bestimmen. b ist eine ungerade Zahl, welche aber noch den

Factor 3 wenigstens einmal enthält. Es sei nun 3^ν die höchste Potenz von 3, welche in b noch enthalten ist; dann ist

$$b = 3^\nu(6\beta_2+\varepsilon),$$

worin ε entweder den Werth 1 oder den Werth 5 hat, während β_2 eine beliebige reelle ganze Zahl sein kann und $\nu \geqq 1$ ist. Wir haben somit

$$\left(\frac{b}{a+bj}\right) = \left(\frac{3^\nu}{a+bj}\right)\left(\frac{6\beta_2+\varepsilon}{a+bj}\right).$$

Im vorliegenden Falle ist nach Gleichung (X)

$$\left(\frac{3^\nu}{a+bj}\right) = (-1)^\nu j^{\nu(2\beta+1)},$$

also

$$\left(\frac{b}{a+bj}\right) = (-1)^\nu j^{\nu(2\beta+1)}\left(\frac{6\beta_2+\varepsilon}{a+bj}\right).$$

Ferner findet man sowohl für $\varepsilon = 1$ als auch für $\varepsilon = 5$

$$\left(\frac{6\beta_2+\varepsilon}{a+bj}\right) = 1,$$

wonach wir

$$\left(\frac{b}{a+bj}\right) = (-1)^\nu j^{\nu(2\beta+1)}$$

erhalten. Für das Zeichen $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$ liefert uns die Gleichung (VIII) noch den Werth

$$\left(\frac{1+j}{a+bj}\right) = (-1)^\beta j^{2\alpha'+2},$$

und die Gleichung (3) geht demnach über in

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\nu} j^{\nu(2\beta+1)-2\beta+1}. \tag{4}$$

Hier können wir wieder die Grösse ν wegschaffen.
Für $\nu = 1$ erhalten wir unmittelbar

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+1} j^2. \tag{5}$$

Ist dagegen $\nu > 1$, so gilt hier wieder die Congruenz (18) der vorigen Nummer, wenn man darin β statt β' schreibt, d. h. es ist

$$\beta \equiv 3\beta_2 + 3\nu + 1 \pmod 6. \tag{6}$$

Somit ist

$$2\beta \equiv 2 \pmod 6 \text{ und } \nu(2\beta+1) - 2\beta + 1 \equiv 3\nu - 1 \pmod 6$$

und wir erhalten daher auch in diesem Falle aus der Gleichung (4) die Gleichung (5).

2. Es sei α ungerade, also

$$a = 2a' = 6\alpha + 4 = 12\alpha' + 10 \text{ und } b = 6\beta + 3.$$

In diesem Falle gehen wir von der Gleichung

$$\left(\frac{a+2bj}{a+bj}\right) = \left(\frac{2}{a+bj}\right)\left(\frac{a'+bj}{a+bj}\right) \tag{7}$$

aus und haben zunächst

$$\left(\frac{a+2bj}{a+bj}\right) = \left(\frac{bj}{a+bj}\right) = j^{\frac{p-1}{6}}\left(\frac{b}{a+bj}\right).$$

Hier ist

$$\frac{p-1}{6} \equiv 4\alpha' + 4\beta + 5 \pmod 6,$$

mithin

$$\left(\frac{a+2bj}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\beta+1} j^{\alpha'+\beta+2}\left(\frac{b}{a+bj}\right). \tag{8}$$

Wir setzen wieder

$$b = 3^{\nu}(6\beta_2 + \varepsilon),$$

wobei 3^{ν} die höchste in b enthaltene Potenz von 3 ist und ε entweder den Werth 1 oder den Werth 5 hat. Dann ist β_2 eine reelle ganze Zahl und $\nu \geqq 1$, und wir erhalten aus der Gleichung (X) unter den gegenwärtigen Voraussetzungen

$$\left(\frac{3^{\nu}}{a+bj}\right) = j^{\nu(2\beta+1)},$$

also

$$\left(\frac{b}{a+bj}\right) = j^{\nu(2\beta+1)}\left(\frac{6\beta_2+\varepsilon}{a+bj}\right)$$

und, da hier sowohl für $\varepsilon = 1$ als auch für $\varepsilon = 5$

$$\left(\frac{6\beta_2+\varepsilon}{a+bj}\right) = (-1)^{\beta_2}$$

ist,

$$\left(\frac{b}{a+bj}\right) = (-1)^{\beta_2} j^{\nu(2\beta+1)},$$

wonach die Gleichung (8) übergeht in

$$\left(\frac{a+2bj}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\beta+\beta_2+1} j^{\alpha'+\beta+2+\nu(2\beta+1)}.$$

Demgemäss nimmt die Gleichung (7) die Gestalt an

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right)\left(\frac{a'+bj}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\beta+\beta_2+1} j^{\alpha'+\beta+2+\nu(2\beta+1)}. \quad (9)$$

Wir haben jetzt noch das Zeichen $\left(\frac{a'+bj}{a+bj}\right)$ zu ermitteln. Aus der Congruenz

$$bj \equiv -a \pmod{a+bj}$$

folgt

$$\left(\frac{a'+bj}{a+bj}\right) = \left(\frac{-a'}{a+bj}\right) = \left(\frac{-6\alpha'-5}{a+bj}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{6}(\alpha'+1)}\left(\frac{a+bj}{6\alpha'+5}\right) =$$

$$= (-1)^{\frac{p-1}{6}(\alpha'+1)} j^{\frac{\alpha'^2-1}{6}}$$

und, da

$$\frac{p-1}{6} \equiv 1 \pmod 2 \text{ und } \frac{\alpha'^2-1}{6} \equiv 4(\alpha'+1) \pmod 6$$

ist,

$$\left(\frac{a'+bj}{a+bj}\right) = j^{\alpha'+1}.$$

Setzen wir diesen Werth in die Gleichung (9) ein, so erhalten wir

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\beta+\beta_2+1} j^{\beta+1+\nu(2\beta+1)}. \quad (10)$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Grössen ν und β_2 wieder entfernen.

Ist $\nu = 1$, so ist

$$b = 6\beta+3 = 3(6\beta_2+\varepsilon), \text{ also } \beta \equiv \beta_2 \pmod 2$$

und daher

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\beta+1} j^2. \tag{11}$$

Für den Fall, dass $\nu > 1$ ist, besteht wieder die Congruenz (6), aus welcher man

$$\beta+1+\nu(2\beta+1) \equiv (3\beta_2+3\nu+1)(1+2\nu)+\nu+1 \equiv$$
$$\equiv 3\beta_2+2 \pmod 6$$

erhält. Es ergibt sich daher aus der Gleichung (10) auch für diesen Fall wieder die Gleichung (11).

Wir haben also für das chrakteristische Zeichen der Zahl 2 bezüglich der Zahlen $a+bj$ des dritten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten wieder zwei Gleichungen (5) und (11) erhalten. Die erstere gilt für den Fall, dass α gerade, und die letztere für den Fall, dass α ungerade ist. Setzen wir nun allgemein

$$a = 12\alpha'+6\rho'+4 \text{ und } b = 6\beta+3,$$

so dass im ersten Falle $\rho' = 0$ und im zweiten Falle $\rho' = 1$ ist so ersetzt die Gleichung

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\rho'\beta+1} j^2 \tag{XII}$$

die Gleichungen (5) und (11) vollkommen. Denn diese Gleichung geht für $\rho' = 0$ in die Gleichung (5) und für $\rho' = 1$ in die Gleichung (11) über.

12. Ist $a+bj$ eine Zahl des zweiten Haupttypus mit zu einander theilerfremden Coordinaten, so können wir

$$a = 12\alpha'+6\rho'+1 \text{ und } b = 12\beta'+3\sigma'+3$$

setzen, wobei ρ' und σ' unabhängig von einander nur die Werthe 0 oder 1 haben, und es ist

$$a-bj^2 = a+b-bj = 12(\alpha'+\beta')+6(\rho'+\sigma')+$$
$$+4-(12\beta'+3\sigma'+3)j$$

eine Zahl des dritten Haupttypus mit ebenfalls zu einander theilerfremden Coordinaten. Setzen wir daher

$$a+b=a_1,\ -b=b_1,\ a_1=12\alpha_1'+6\rho_1'+4 \text{ und } b_1=6\beta_1+3,$$

wobei ρ_1' wieder nur den Werth 0 oder den Werth 1 haben soll, so ist nach Gleichung (XII)

$$\left(\frac{2}{a-bj^2}\right)=(-1)^{\alpha_1'+\rho_1'\beta_1+1}j^2.$$

Nun ist

$$\beta_1\equiv\sigma'+1 \pmod 2,\ \alpha_1'=\alpha'+\beta'+\rho'\sigma' \text{ und } \rho_1'\equiv\rho'+\sigma' \pmod 2,$$

folglich

$$\left(\frac{2}{a-bj^2}\right)=(-1)^{\alpha'+\beta'+\rho'+1}j^2,$$

und da zufolge der Gleichung (IV)

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right)\left(\frac{2}{a-bj^2}\right)=1$$

ist, so erhalten wir für das Zeichen $\left(\frac{2}{a+bj}\right)$ die Gleichung

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right)=(-1)^{\alpha'+\beta'+\rho'}j. \qquad \text{(XIII)}$$

13. Wir wollen nun auch für das charakteristische Zeichen der Zahl 2 bezüglich einer primären regulären zweigliedrigen Zahl $a+bj$, deren Coordinaten zu einander theilerfremd sind, eine allgemeine, für alle drei Haupttypen der primären regulären Zahlen geltende Gleichung ableiten, wie wir dies bezüglich des Zeichens $\left(\frac{1+j}{a+bj}\right)$ gethan haben. Setzen wir allgemein

$$a=12\alpha'+6\rho'+3\rho+1 \text{ und } b=12\beta'+6\sigma'+3\sigma$$

in der Weise, dass für die Zahlen des ersten Haupttypus $\rho=\sigma=0$, für jene des zweiten Haupttypus $\rho=0$ und $\sigma=1$, für jene des dritten Haupttypus $\rho=\sigma=1$ ist und ausserdem ρ' und σ' unabhängig von einander entweder den Werth 1 oder den Werth 0 haben, so ist stets

$$\alpha\equiv\rho' \pmod 2 \text{ und } \beta\equiv\sigma' \pmod 2,$$

wenn α und β dieselbe Bedeutung wie in den vorausgehenden Nummern haben. Daher können wir für die Gleichung (XI) auch schreiben

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\rho'\sigma'+\beta'+\sigma'} \qquad (\text{XI}\,a)$$

und für die Gleichung (XII)

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha'+\rho'\sigma'+1} j^{\rho}. \qquad (\text{XII}\,a)$$

Die drei Gleichungen (XIII), (XI a) und (XII a) können wir nun durch eine einzige Gleichung ersetzen, und zwar durch die Gleichung

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\alpha\alpha'+(\rho+1)\beta'+(\sigma+1)\sigma'+(\rho+\sigma)\rho'\sigma'+(1+\rho+\sigma)\rho'\sigma'+\rho j^{\rho+\sigma}}. \qquad (\text{XIV})$$

Man gelangt zu dieser Gleichung, indem man die Formeln (XIII), (XI a) und (XII a) unter einander und mit den entsprechenden Werthen von ρ und σ vergleicht. Die Gleichung (XIV) ist richtig, weil sie für $\rho = \sigma = 0$ in die Gleichung (XI a), für $\rho = 0$ und $\sigma = 1$ in die Gleichung (XIII) und endlich für $\rho = \sigma = 1$ in die Gleichung (XII a) übergeht. Sie gilt auch für den Fall, dass $a+bj$ eine reelle primäre reguläre Zahl vorstellt, weil die Gleichungen (XI) und (XI a) auch für diesen Fall richtig sind. Wir können auch noch zeigen, dass die Gleichung (XIV) für alle primären regulären Zahlen $a+bj$ bestehen bleibt.

14. Bei den bisherigen Betrachtungen über das Zeichen $\left(\frac{2}{a+bj}\right)$ haben wir noch den Fall ausgeschlossen, wo $a+bj$ eine zweigliedrige primäre reguläre Zahl vorstellt, deren Coordinaten nicht zu einander theilerfremd sind. Es sei nun $a+bj$ eine solche Zahl und P der grösste gemeinschaftliche Theiler von a und b; dann können wir

$$a+bj = P(a_1+b_1 j)$$

setzen, wobei a_1 und b_1 zwei reelle ganze und zu einander theilerfremde Zahlen bedeuten. Gleichzeitig mit $a+bj$ können wir stets

auch P und a_1+b_1j als primär annehmen, so dass P, a_1 und b_1 sich auf die Formen

$$P=12n+6\nu+1,\quad a_1=12\alpha_1'+6\rho_1'+3\rho_1+1 \text{ und}$$
$$b_1=12\beta_1'+6\sigma_1'+3\sigma_1$$

bringen lassen, worin n, α_1' und β_1' beliebige reelle ganze Zahlen bedeuten, während die Grössen ν, ρ_1', ρ_1, σ_1' und σ_1 nur die Werthe 0 und 1 annehmen und nicht gleichzeitig $\rho_1=1$ und $\sigma_1=0$ ist. Unter diesen Voraussetzungen ist zufolge der Gleichungen (II) und (XIV)

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right)=(-1)^{\varkappa_1}j^{\lambda_1}, \tag{1}$$

wobei

$$\varkappa_1=\sigma_1\alpha_1'+(\rho_1+1)\beta_1'+(\sigma_1+1)\sigma_1'+(\rho_1+\sigma_1)\rho_1'+$$
$$+(1+\rho_1+\sigma_1)\rho_1'\sigma_1'+\rho_1 \text{ und } \lambda_1=\rho_1+\sigma_1$$

gesetzt ist. Ferner ist

$$a=a_1P \text{ und } b=b_1P,$$

also

$$a=(12n+6\nu+1)(12\alpha_1'+6\rho_1'+3\rho_1+1)$$
$$\equiv 12(\alpha_1'+\nu\rho_1'+n\rho_1+\nu\rho_1+n)+6(\rho_1'+\nu\rho_1+\nu)+3\rho_1+1 \text{ (mod. 24)}$$

und

$$b=(12n+6\nu+1)(12\beta_1'+6\sigma_1'+3\sigma_1)$$
$$\equiv 12(\beta_1'+\nu\sigma_1'+n\sigma_1+\nu\sigma_1)+6(\sigma_1'+\nu\sigma_1)+3\sigma_1 \quad \text{(mod. 24)}.$$

Die Coordinaten von $a+bj$ haben die Gestalt

$$a=12\alpha'+6\rho'+3\rho+1 \text{ und } b=12\beta'+6\sigma'+3\sigma,$$

wo α', β', ρ', σ', ρ und σ dieselbe Bedeutung wie die entsprechenden Grössen α_1', β_1', ρ_1', σ_1', ρ_1 und σ_1 haben, und es ist zufolge der obigen Congruenzen

$$\rho=\rho_1 \text{ und } \sigma=\sigma_1; \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha'\equiv\alpha_1'+\nu\rho_1+n+\nu\rho_1\rho_1' \text{ (mod. 2)};\\
&\beta'\equiv\beta_1'+\nu\sigma_1'+n\sigma_1+\nu\sigma_1+\nu\sigma_1\sigma_1' \text{ (mod. 2)};\\
&\rho'\equiv\rho_1'+\nu\rho_1+\nu \text{ (mod. 2) und } \sigma'\equiv\sigma_1'+\nu\sigma_1 \text{ (mod. 2).}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Setzen wir ferner

$$\varkappa = \sigma\alpha' + (\rho+1)\beta' + (\sigma+1)\sigma' + (\rho+\sigma)\rho' + (1+\rho+\sigma)\rho'\sigma' + \rho$$
$$\text{und } \lambda = \rho+\sigma,$$

so ist gemäss der Gleichungen (2)

$$\lambda = \rho_1 + \sigma_1 = \lambda_1 \tag{4}$$

und aus den Congruenzen (3) findet man, wenn man beachtet, dass die Grössen ρ_1', ρ_1, σ_1' und σ_1 stets nur den Werth 0 oder den Werth 1 haben und ausserdem immer

$$\rho_1\sigma_1 = \rho_1$$

ist, für $\varkappa$ die Congruenz

$$\varkappa \equiv \varkappa_1 \pmod 2. \tag{5}$$

Die Relationen (4) und (5) sagen uns nun, dass neben der Gleichung (1) auch die Gleichung

$$\left(\frac{2}{a+bj}\right) = (-1)^{\varkappa} j^{\lambda}$$

besteht, und das ist die Gleichung (XIV). Die Gleichung (XIV) gilt also für jede primäre reguläre Zahl $a+bj$.

III. Der cubische Charakter der Zahlen $1+j$ und 2.

15. Die aus den dritten Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen fallen mit den aus den sechsten Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen zusammen, weil unter den sechsten Einheitswurzeln ausser den dritten Einheitswurzeln nur noch die Negativen von den letzteren vorkommen. Daher treten in der Theorie der cubischen Reste die nämlichen Zahlen auf, wie in der Theorie der sechsten Potenzreste, und man kann leicht aus dem bicubischen Charakter einer Zahl in Bezug auf irgend einen Modul den cubischen Charakter dieser Zahl in Bezug auf denselben Modul ableiten.

Ist $m = a+bj$ eine reguläre Primzahl, p deren Norm und n eine beliebige, zu m theilerfremde Zahl unseres Systems, so ist nach der Definition des Zeichens $\left(\frac{n}{m}\right)$ stets

$$n^{\frac{p-1}{6}} \equiv \left(\frac{n}{m}\right) \pmod{m},$$

und daraus folgt

$$n^{\frac{p-1}{3}} \equiv \left(\frac{n}{m}\right)^2 \pmod{m}.$$

Drücken wir durch das Zeichen

$$\left[\frac{n}{m}\right]$$

den cubischen Charakter der Zahl n bezüglich der Primzahl m aus, so ist demnach

$$\left[\frac{n}{m}\right] = \left(\frac{n}{m}\right)^2.$$

Diese Gleichung bleibt, wie man leicht erkennt, auch dann noch bestehen, wenn m eine zusammengesetzte reguläre Zahl vorstellt und das Zeichen $\left[\frac{n}{m}\right]$ für zusammengesetzte Zahlen m in derselben Weise verallgemeinert wird, wie wir das Zeichen $\left(\frac{n}{m}\right)$ für zusammengesetzte Zahlen m definirt haben.

Zufolge der Gleichungen (1) und (IX) ist nun für jede primäre reguläre Zahl $a+bj$

$$\left[\frac{1+j}{a+bj}\right] = (-1)^{\rho} j^{2\alpha+\rho}, \tag{2}$$

wobei α und ρ dieselbe Bedeutung wie in der Gleichung (IX) haben. In dieser Gleichung (2) ist die Bezeichnungsweise noch etwas verschieden von jener, welche man in der Theorie der cubischen Reste gewöhnlich anwendet, indem wir hier als Grundeinheit eine primitive sechste Einheitswurzel anstatt einer primitiven dritten Einheitswurzel genommen haben. Es ist jedoch leicht, das Gefundene auf die gewöhnliche Form zu bringen.

Bedeutet I die primitive dritte Einheitswurzel

$$\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},$$

so ist

$$I = j^2,$$

und jede Zahl in der Theorie der cubischen Reste hat dann die Gestalt $a+bI$. Drückt man I durch j aus, so hat man

$$a+bI = a+bj^2 = a-b+bj = a'+b'j.$$

Ist $a+bI$ eine primäre reguläre Zahl und setzen wir in der üblichen Weise

$$a = 6\alpha+3\rho+1 \text{ und } b = 6\beta+3\sigma,$$

so ist

$$a' = 6(\alpha-\beta)+3(\rho-\sigma)+1 \text{ und } b' = 6\beta+3\sigma,$$

also zufolge (2)

$$\left[\frac{1+j}{a+bI}\right] = (-1)^{\rho-\sigma} j^{2(\alpha-\beta)+\rho-\sigma}. \tag{3}$$

Da

$$j = -I^2$$

ist, so ergibt sich aus (3)

$$\left[\frac{1-I^2}{a+bI}\right] = I^{\alpha-\beta+2(\rho-\sigma)}. \tag{4}$$

Aus dieser Gleichung findet man leicht den Werth des Zeichens $\left[\frac{1-I}{a+bI}\right]$. Bezeichnen wir die Norm von $a+bI$ mit p, so ist

$$p = a^2+b^2-ab$$

und daraus folgt

$$\frac{p-1}{3} \equiv 0 \pmod 2 \text{ und } \frac{p-1}{3} \equiv \alpha+2\rho-2\beta-\sigma \pmod 3.$$

Weil ferner

$$1-I = -(1-I^2)I$$

ist, so hat man nach (4)

$$\left[\frac{1-I}{a+bI}\right] = I^{2\alpha+\rho} \tag{5}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\left[\frac{1-I}{a+bI}\right] = I^{\frac{a-1}{3}}. \tag{6}$$

Für das Zeichen $\left[\frac{3}{a+bI}\right]$ erhält man aus (4) und (5) den Werth

$$\left[\frac{3}{a+bI}\right] = \left[\frac{1-I}{a+bI}\right]\left[\frac{1-I^2}{a+bI}\right] = I^{2\beta+\sigma},$$

also

$$\left[\frac{3}{a+bI}\right] = I^{\frac{b}{3}}. \tag{7}$$

Die zwei Gleichungen (6) und (7) stellen die Ergänzungssätze zum cubischen Reciprocitätsgesetze dar.

16. Für das Zeichen $\left[\frac{2}{a+bj}\right]$ liefert uns die Gleichung (XIV) den Werth

$$\left[\frac{2}{a+bj}\right] = j^{2(\rho+\sigma)} \tag{1}$$

wo ρ und σ dieselbe Bedeutung wie in der Gleichung (XIV) haben. In dieser Gleichung könnte man auf ähnliche Weise wie in der vorhergehenden Nummer j durch I ersetzen. Wir wollen jedoch dieses nicht ausführen, weil das Zeichen $\left[\frac{2}{a+bI}\right]$, worin $a+bI$ wieder eine primäre reguläre (nicht durch 2 oder durch durch $1-I$ theilbare) Zahl vorstellt, leicht mit Hilfe des cubischen Reciprocitätsgesetzes ermittelt werden kann, sondern wir wollen die Gleichung (1) dazu benützen, um die cubische Reciprocität zwischen der Zahl 2 und einer primären regulären Zahl $a+bI$ nachzuweisen. In der Theorie der cubischen Reste nimmt nämlich die Zahl 2 keine Ausnahmsstellung wie in der Theorie der sechsten Potenzreste ein, sondern man kann hier ebenso gut von dem cubischen Charakter einer Zahl in Bezug auf den Modul 2 als in Bezug auf irgend einen anderen Modul sprechen, weil die um 1 verminderte Norm von 2, das ist die Zahl 3, durch 3 theilbar ist und für jede ungerade Zahl $a+bI$ die Congruenz

$$(a+bI)^3 \equiv 1 \pmod{2}$$

besteht.

Ist $a+bj$ eine primäre reguläre Zahl, so dass wir in der üblichen Weise

$$a = 6\alpha+3\rho+1 \text{ und } b = 6\beta+3\sigma$$

setzen können, so ist für $\rho = \sigma = 0$

$$a+bj \equiv 1 \pmod 2,$$

für $\rho = 0$ und $\sigma = 1$

$$a+bj \equiv 1+j \equiv j-1 = j^2 \pmod 2$$

und für $\rho = \sigma = 1$

$$a+bj \equiv j \equiv -j = j^4 \pmod 2.$$

Es ist demnach stets

$$a+bj \equiv j^{2(\rho+\sigma)} \pmod 2,$$

oder, anders ausgedrückt,

$$\left[\frac{a+bj}{2}\right] = j^{2(\rho+\sigma)} \pmod 2. \qquad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) ersehen wir, dass

$$\left[\frac{2}{a+bj}\right] = \left[\frac{a+bj}{2}\right],$$

also auch

$$\left[\frac{2}{a+bI}\right] = \left[\frac{a+bI}{2}\right]$$

ist, wenn $a+bI$ ebenfalls eine primäre reguläre Zahl bedeutet.

Untersuchungen über den täglichen und jährlichen Gang der Windgeschwindigkeit zu Triest

von

Eduard Mazelle.

In den Sitzungsberichten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien hatte ich im Märzhefte 1891 die tägliche Periode der Häufigkeit und Stärke des Windes zu Triest, für die acht äquidistanten Richtungen, besprochen, in der hier vorliegenden Arbeit bringe ich weitere Resultate, welche ich aus den stündlichen Anemometeraufzeichnungen des k. k. astronomisch-meteorologischen Observatoriums in Triest berechnen konnte.

Diese Arbeit behandelt zuerst den täglichen und jährlichen Gang der Windgeschwindigkeit im Allgemeinen, sodann die tägliche Periode der Windgeschwindigkeit an Tagen mit stürmischer Bora. Im ersten Theile wird noch eine Untersuchung über den Einfluss der Bewölkung auf die tägliche Variation der Windstärke angestellt, im zweiten der tägliche Gang stürmischer Bora bei hohem und bei niederem Barometerstande berechnet.

Zur Bestimmung des täglichen Ganges der Windgeschwindigkeit konnte ich die Aufzeichnungen von neun Beobachtungsjahren verwenden, und zwar vom 1. Juli 1882 bis 30. Juni 1891. Die stündlichen Mittelwerthe, an welchen die genauen Correctionen für die unperiodischen Änderungen bereits angebracht sind, erscheinen für die einzelnen Monate in Tabelle I zusammengestellt. Das Maximum der Windgeschwindigkeit fällt zur Mittagszeit. Alle Monate, mit Ausnahme der Frühlingsmonate April, Mai und der Herbstmonate September, October zeigen ein zweites Nachtmaximum in der Zeit zwischen 9^h Abends bis 1^h

Früh. Dasselbe ist in den Wintermonaten deutlich ausgeprägt, sehr schwach hingegen im Sommer. Im Jänner ist das Nachtmaximum sogar grösser als das Mittagsmaximum. Die mittlere stündliche Geschwindigkeit erreicht ihr Monatsmaximum im Jänner mit 19·8 *km*, ihr Minimum im Juni mit 9·4. Das Jahresmittel der Windgeschwindigkeit beträgt für Triest 13·94 *km* pro Stunde oder 3·87 *m* pro Secunde. Die tägliche periodische Schwankung erscheint am stärksten ausgeprägt bei kleiner Geschwindigkeit. Als Mass der täglichen Periode bringe ich in Tabelle I sowohl den Quotient der Extreme, als auch die Amplitude. Beide zeigen ein Maximum im Mai, ein Minimum im December. — In Tabelle II habe ich den täglichen Gang für die vier Jahreszeiten und für das Jahresmittel zusammengestellt. Das Maximum fällt im Jahresmittel auf die Zeit von 12^h bis 1^h Nachmittags, das Minimum zwischen 9^h und 10^h Abends. Im Winter ist ein früheres Eintreffen des Mittagsmaximums zu bemerken, das secundäre Nachtmaximum fällt auf 9^h Abends. Die Amplitude ist im Sommer mehr als dreimal so gross als im Winter.

Für die zwei extremen Jahreszeiten und für das Jahresmittel habe ich die tägliche Periode mit Hilfe der Bessel'schen Function genauer darzustellen getrachtet. Die berechneten Gleichungen sind folgende:

$$\begin{aligned}
\text{Winter}\ldots\ldots y = 19{\cdot}05 &+ \overline{9{\cdot}66091}\ \sin(256^\circ\ 22' + x.15^\circ) + \\
&+ \overline{9{\cdot}54722}\ \sin(161^\circ\ 49' + x.30^\circ) + \\
&+ \overline{8{\cdot}88562}\ \sin(237^\circ\ 45' + x.45^\circ) \\
\text{Sommer}\ldots y = 10{\cdot}19 &+ \overline{0{\cdot}37796}\ \sin(282^\circ\ 14' + x.15^\circ) + \\
&+ \overline{9{\cdot}85657}\ \sin\ (80^\circ\ 38' + x.30^\circ) + \\
&+ \overline{9{\cdot}40033}\ \sin(108^\circ\ 48' + x.45^\circ) \\
\text{Jahr}\ldots\ldots\ldots y = 13{\cdot}94 &+ \overline{0{\cdot}16536}\ \sin(283^\circ\ 31' + x.15^\circ) + \\
&+ \overline{9{\cdot}67002}\ \sin(103^\circ\ 59' + x.30^\circ) + \\
&+ \overline{8{\cdot}43885}\ \sin(169^\circ\ 31' + x.45^\circ).
\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen bedeuten die überstrichenen Zahlen Logarithmen. $x = 0$ ist für die Stunde von Mitternacht bis 1^h a. zu setzen.

Die daraus bestimmten Werthe habe ich in Tabelle III zusammengestellt. Der erste Differentialquotient obiger Gleichungen gibt mir für die Wendestunden folgende Eintrittszeiten:

	Maximum	Minimum	Maximum	Minimum
Winter	$11^h 56^m$ a.	$5^h 43^m$ p.	$9^h 29^m$ p.	$3^h 27^m$ a.
Sommer	0 58 p.	9 20 p.	1 51 a.	3 28 a.
Jahr	0 17 p.	9 46 p.		

Die tägliche Gangcurve steigt im Jahresmittel gleich nach 7^h Morgens über den Mittelwerth, um nach 5^h Nachmittags unter denselben zu sinken. Sie bleibt daher nur 10 Stunden ober der Mittellinie. Dasselbe zeigt sich für den Sommer, nur dass hier das Maximum etwas später eintritt und die Curve etwas vor 6^h unter den Mittelwerth sinkt. Im Winter steigt die Curve erst vor 8^h Morgens über den mittleren Werth, erreicht das Maximum vor Mittag, sinkt gleich nach 4^h Nachmittag unter dem Tagesmittel, um von $7^h 30^m$ p. bis $11^h 30^m$ Nachts wieder oberhalb desselben sich zu befinden. — Das Nachtmaximum, welches im Winter sehr deutlich ersichtlich ist, erscheint im Sommer kaum bemerkbar, im Jahresmittel nimmt die tägliche Gangcurve von 11^h Nachts bis 4^h Morgens einen fast horizontalen Verlauf.

Zur Bestimmung der täglichen Schwankung erhalte ich folgende Werthe:

	Winter	Sommer	Jahr
Quotient der Extreme	1·08	1·65	1·24
Amplitude	1·40	5·10	3·03
Mittlere Ordinate der täglichen Gangcurve	0·34	1·61	0·98
Quotient der mittleren Ordinate und des Tagesmittels	0·018	0·158	0·070

Am grössten ist die tägliche Schwankung im Sommer, wobei die Windgeschwindigkeit den kleinsten Werth besitzt. Zu bemerken wäre noch, dass die Ordinate des Hauptmaximums in der Sommer- und auch in der Jahrescurve grösser ist als die Ordinate des Hauptminimums. Die grösste positive Ordinate der Jahrescurve ist 1·89, die grösste negative 1·14.

Ich will hier die Resultate einer Untersuchung mittheilen, welche den Einfluss der Bewölkung auf den täglichen Gang der Windgeschwindigkeit in Triest darlegen. Die

Tabelle I.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit in Kilometern pro Stunde.

Abgeleitet aus neun Beobachtungsjahren (Juli 1882 bis Juni 1891).

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
Mitternacht—1ʰ a.	19·8	18·6	14·4*	9·6	8·5	7·4*	8·7	9·5*	11·6	14·7	14·5	17·4
1—2	19·4	18·2	14·5	10·1	8·7	7·7	8·3	10·0	11·7	14·9	14·6	17·8
2—3	18·8	18·4	14·5	10·4	8·5	8·1	8·3*	10·4	12·1	14·6	14·4	17·9
3—4	18·1*	18·0	14·7	10·5	8·7	8·1	8·4	10·5	12·0	14·8	14·1*	18·9
4—5	18·5	17·9*	15·0	10·4	8·8	8·1	8·4	10·8	12·0	14·9	14·4	18·8
5—6	18·8	18·0	15·5	11·1	9·2	8·2	8·5	11·2	12·3	14·7	14·4	19·0
6—7	19·3	18·7	16·1	12·0	10·2	9·4	8·8	11·7	12·7	14·8	15·0	19·6
7—8	18·7	18·2	15·5	12·7	10·6	10·1	9·9	12·4	13·0	15·3	14·8	19·6
8—9	19·0	18·9	16·5	13·5	11·8	10·9	10·8	13·2	13·3	14·9	14·9	**19·9**
9—10	20·2	19·5	16·8	13·8	12·6	11·6	11·7	**14·0**	14·0	15·7	15·0	19·2
10—11	19·8	**20·6**	**17·4**	14·1	12·9	11·9	12·5	13·5	14·3	17·0	15·1	19·1
11—Mittag	20·2	20·0	17·3	14·1	13·3	12·3	12·6	13·4	14·1	17·2	**15·7**	18·6

Mittag—1ʰ p.	**20·5**	19·9	17·0	**14·3**	**18·9**	**12·5**	**18·8**	13·4	**14·6**	**17·8**	15·4	18·4
1—2	19·9	20·2	16·2	14·0	13·2	11·8	12·9	13·6	14·4	16·4	14·8	18·4
2—3	20·1	20·0	15·8	13·3	12·9	11·5	12·8	13·1	13·7	15·9	14·9	18·1
3—4	19·9	19·7	15·5	12·4	12·4	11·1	12·2	12·4	12·8	15·2	14·9	17·9
4—5	19·8*	19·1	14·5	11·5	10·9	10·5	11·2	11·6	12·3	14·6	14·8*	17·7
5—6	20·2	18·7*	13·9*	10·4	9·7	9·3	9·6	10·6	11·6	14·7	14·9	17·5
6—7	20·7	19·3	14·3	10·3	8·5	8·5	8·3	9·8	11·3	14·6	14·8	17·7
7—8	20·5	19·3	14·2	10·0	7·9	7·4	7·9	8·9*	11·1	14·4*	14·8	17·4*
8—9	20·2	**19·6**	**15·0**	9·6	8·0	7·1	7·3*	9·1	11·1*	14·4	**15·2**	17·8
9—10	20·5	19·2	14·4	9·4	7·6*	7·1*	7·7	9·3	11·1	14·8	14·3	**18·0**
10—11	20·7	19·0	14·6	9·4	7·7	7·5	8·3	**9·7**	11·4	14·8	14·3	17·7
11—Mitternacht	**20·8**	18·5	14·6	9·2*	7·9	**7·9**	8·4	9·6	11·8	14·9	14·4	17·4*
Mittel	19·8	19·1	15·3	11·5	10·2	9·4	9·9	11·3	12·5	15·2	14·8	18·3
Quotient	1·15	1·15	1·25	1·55	1·83	1·76	1·82	1·57	1·31	1·20	1·12	1·15
Amplitude	2·7	2·7	3·5	5·1	6·3	5·4	6·0	5·1	3·5	2·9	1·6	2·5

Tabelle II.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit in Kilometern pro Stunde.

Juli 1882 bis Juni 1891.

	Winter	Frühling	Sommer	Herbst	Jahr
Mitternacht—1h a.	18·6	10·8	8·5	13·6	12·90
1—2	18·5	11·1	8·7	13·7	12·98
2—3	18·4	11·1	8·9	13·7	13·03
3—4	18·3*	11·3	9·0	13·6	13·06
4—5	18·4	11·4	9·1	13·8	13·15
5—6	18·6	11·9	9·3	13·8	13·40
6—7	19·2	12·8	9·9	14·1	14·00
7—8	18·8	12·9	10·8	14·4	14·21
8—9	19·3	13·9	11·6	14·4	14·79
9—10	19·6	14·4	12·4	14·9	15·34
10—11	**19·9**	14·8	12·6	15·5	15·69
11—Mittag	19·6	14·9	12·8	15·6	15·72
Mittag—1h p.	19·6	**15·1**	**13·1**	**15·8**	**15·89**
1—2	19·5	14·5	12·8	15·2	15·48
2—3	19·4	14·0	12·5	14·8	15·16
3—4	19·1	13·4	11·9	14·3	14·69
4—5	18·9	12·3	11·1	13·9	14·03
5—6	18·8*	11·3	9·9	13·7	13·43
6—7	19·2	11·0	8·8	13·6	13·16
7—8	19·0	10·7	8·1	13·4	12·81
8—9	**19·2**	10·9	7·9*	13·6	12·87
9—10	19·2	10·4*	8·0	13·4*	12·78*
10—11	19·1	10·6	8·5	13·5	12·92
11—Mitternacht	18·9	10·5	8·6	13·7	12 95
Mittel	19·1	12·3	10·2	14·2	13·94
Quotient	1·09	1·45	1·66	1·19	1·24
Amplitude	1·6	4·7	5·2	2·4	3·1

Tabelle III.

Berechneter täglicher Gang der Windgeschwindigkeit in den extremen Jahreszeiten und im Jahresmittel.

Kilometer pro Stunde.

	Winter	Sommer	Jahr	Winter	Sommer	Jahr
Mitternacht—1ʰ a.	18·65	8·80	12·98	—0·40	—1·39	—0·96
1—2	18·45	**8·85**	12·98	—0·60	**—1·34**	—0·96
2—3	18·33*	8·80	12·98	—0·72*	—1·39	—0·96
3—4	18·34	8·79*	13·04	—0·71	—1·40*	—0·90
4—5	18·45	8·97	13·19	—0·60	—1·22	—0·75
5—6	18·64	9·41	13·47	—0·41	—0·78	—0·47
6—7	18·87	10·07	13·85	—0·18	—0·12	—0·09
7—8	19·12	10·84	14·33	0·07	0·65	0·39
8—9	19·35	11·58	14·82	0·30	1·39	0·88
9—10	19·55	12·19	15·26	0·50	2·00	1·34
10—11	19·69	12·64	15·64	0·64	2·45	1·70
11—Mittag	**19·78**	12·91	**15·88**	**0·68**	2·72	**1·89**
Mittag—1ʰ p.	19·67	**12·99**	15·81	0·62	**2·80**	1·87
1—2	19·51	12·87	15·58	0·46	2·68	1·64
2—3	19·30	12·49	15·16	0·25	2·30	1·22
3—4	19·09	11·83	14·61	0·04	1·64	0·67
4—5	18·96	10·90	14·04	—0·09	0·71	0·10
5—6	18·93*	9·86	13·51	—0·12*	—0·33	—0·43
6—7	19·01	8·89	13·12	—0·04	—1·30	—0·82
7—8	19·13	8·20	12·88	0·08	—1·99	—1·06
8—9	**19·22**	7·89*	12·80*	**0·17**	—2·30*	—1·14*
9—10	**19·22**	7·95	12·82	**0·17**	—2·24	—1·12
10—11	19·10	8·25	12·89	0·05	—1·94	—1·05
11—Mitternacht	18·89	8·59	12·95	—0·16	—1·60	—0·99
Mittel..... ...	19·05	10·19	13·94	0·34	1·61	0·98

einzelnen Tage der Sommermonate Juni, Juli und August der fünf Jahre 1886—1890 wurden zuerst nach dem Tagesmittel der Bewölkung geordnet. Die tägliche Periode ist in Tabelle IV ersichtlich gemacht. Dieselbe zeigt, dass das Maximum der Windgeschwindigkeit bei bewölktem Himmel früher eintritt als bei klarem. Bei der Bewölkung 9 und 10 findet das Maximum gleich nach 12^h Mittags statt, an klaren Tagen, bei der Bewölkung 0, 1 und 2 hingegen erst etwas vor 2^h Nachmittags.

An heiteren Sommertagen lässt sich auch kein secundäres Maximum und Minimum constatiren. Bei unbewölktem Himmel bleibt die Gangcurve 11 Stunden ober dem Tagesmittel, sie beginnt vor 7^h Früh sich über den Mittelwerth zu erheben, um vor 6^h Nachmittag unter denselben zu fallen. An bewölkten Tagen bleibt die Curve nur 10 Stunden oberhalb, beiläufig von 8^h Früh bis 6^h Nachmittag.

Um den Zusammenhang der Bewölkung mit der Windgeschwindigkeit, mit der täglichen Schwankung derselben und mit der Temperatur zu bestimmen, habe ich folgende Werthe berechnet:

		Windgeschwindigkeit			Temperatur
Bewölkung	Tagesmittel	Quotient	Amplitude	$\frac{\text{Amplitude}}{\text{Mittel}}$	Tagesmittel
0—2	6·76	2·76	6·30	0·93	24·69
3—4	8·16	2·27	6·11	0·75	23·82
5—6	10·77	1·68	5·71	0·53	23·08
7—8	10·91	1·59	5·23	0·48	22·09
9—10	13·88	1·72	7·42	0·54	20·89

Es ergibt sich daraus, dass mit zunehmender Bewölkung die Grösse der täglichen Variation der Windgeschwindigkeit abnimmt, ebenso auch das Mittel der Temperatur kleiner wird, das Tagesmittel der Windgeschwindigkeit hingegen zunimmt. Die tägliche Variation habe ich sowohl durch den Quotienten der Extreme, als auch durch den Quotienten der Amplitude und der mittleren Windstärke dargestellt. Die tägliche Amplitude (Differenz der Extreme) nimmt für die ersten vier Gruppen regelmässig ab, beim Bewölkungsmaximum springt sie plötzlich auf den grössten Werth.

In Bezug auf die Tabelle IV wäre noch anzuführen, dass an Tagen mit der Bewölkung 7—10 eine regelmässige Zunahme

Tabelle IV.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit bei verschiedenen Bewölkungsgraden.

Mittel aus den Sommermonaten der fünf Jahre 1886—1890. Kilometer pro Stunde.

	Bewölkungsgrad des Himmels				
	0—2	3—4	5—6	7—8	9—10
	171 Tage	78 Tage	83 Tage	74 Tage	54 Tage
Mitternacht—1h a.	4·9	7·5	9·5	8·9*	10·5
1—2	5·0	6·7*	10·1	9·4	10·3*
2—3	5·5	7·2	8·8	9·2	12·2
3—4	6·0	7·2	8·4*	8·8*	12·5
4—5	6 0	7·7	8·8	9·0	12·1
5—6	6·6	8·0	8·6	9·5	12·5
6—7	6·8	7·7	10·1	9·7	13·8
7—8	7·4	8·2	10·4	10·9	13·6
8—9	8·8	9·6	12·0	12·2	15·2
9—10	9·6	10·5	12·7	13·0	16·9
10—11	9·3	10·5	13·9	13·0	17·2
11—Mittag	9·5	10·2	14·0	12·8	17·7
Mittag—1h p.	9·9	10·6	14·1	14·0	17·6
1—2	9·9	10·9	13·6	14·0	16·8
2—3	9·8	10·8	13·2	13·7	16·0
3—4	8·8	10·2	12·3	13·1	14·7
4—5	7·9	9·0	12·0	11·8	14·5
5—6	6·4	7·3	11·0	10·7	13·9
6—7	4·7	6·2	10·0	9 9	15·1
7—8	3·8	6·0	9·1	9·9	11·5*
8—9	3·6*	4·8*	9·1	9·7	12·4
9—10	3·7	5·9	8·6*	9·3	12·7
10—11	4·1	6·2	9·6	9·5	12·0
11—Mitternacht	4·4	6·9	9·0	9·4	11 4
Mittel	6·8	8·2	10·8	10·9	13·6
Quotient.....	2·76	2·27	1·68	1·59	1·72

der Windgeschwindigkeit vom Morgen zum Abend stattfindet, bei klarem Himmel hingegen eine Abnahme. Dies war namentlich bei den directen Mittelwerthen, bevor die unperiodische Änderung corrigirt wurde, besonders ersichtlich.

Zum Schlusse erwähne ich noch, dass nur an heiteren Tagen die tägliche Amplitude der Windgeschwindigkeit in Triest grösser ist als die mittlere Geschwindigkeit des Windes während der Nachtstunden. Die Amplitude ist bei der Bewölkung 0—2 um 1·50mal grösser als die mittlere nächtliche Geschwindigkeit.

Zur Darstellung des jährlichen Ganges und der Veränderlichkeit der Monatsmittel habe ich Tabelle V zusammengestellt. Die Mittelwerthe ergeben ein Maximum im Jänner, ein Minimum im Juni. October und November zeigen secundäre Extreme. Die berechnete Gleichung für die jährliche Periode lautet:

$$\begin{aligned} y = 13\cdot94 &+ \overline{0\cdot67852}\ \sin\,(101^\circ\ 50' + x.30^\circ) + \\ &+ \overline{0\cdot09005}\ \sin\ \ (49^\circ\ 23' + x.60^\circ) + \\ &+ \overline{9\cdot77597}\ \sin\ \ (43^\circ\ 39' + x.90^\circ) + \\ &+ \overline{9\cdot17783}\ \sin\,(100^\circ\ 43' + x.120^\circ). \end{aligned}$$

Die überstrichenen Zahlen sind Logarithmen; $x = 0$ entspricht dem 15. Jänner, $x = 11$ dem 15. December. Der daraus bestimmte Gang findet sich in obgenannter Tabelle V. Die secundäre Schwankung verschwindet, es bleibt das Maximum im Jänner, das Minimum im Juni, und zwar fällt das Maximum auf den 22·23 Jänner, das Minimum auf den 11·34 Juni. Das Maximum beträgt 20·10, das Minimum 9·56 *km*, die relative Jahresschwankung (Quotient) 2·10. Diese berechneten Mittelwerthe habe ich in Meter pro Secunde umgewandelt, siehe Tabelle V.

In derselben Tabelle bringe ich noch die mittlere und absolute Veränderlichkeit der Monats- und Jahresmittel der Windstärke. Das Maximum der mittleren Anomalie fällt auf den Jänner, das Minimum auf den Juli. Für die einzelnen Jahreszeiten resultirt dieselbe:

Winter	Frühling	Sommer	Herbst
6·5	2·9	1·5	2·8

Die mittlere Anomalie des Winters ist demnach mehr als viermal grösser als die des Sommers.

Tabelle V.

Jährlicher Gang der Windgeschwindigkeit.

Kilometer pro Stunde.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December	Jahr
1882	—	—	—	—	—	—	11·1	12·0	12·3	15·5	11·7	10·7	12·80
1883	27·5	14·6	**22·7**	**15·4**	10·1	11·1	10·1	**18·2**	15·5	**20·8**	14·9	21·3	**16·85**
1884	10·8	11·7*	15·2	8·0	**17·9**	9·7	10·6	12·1	**12·7**	15·7	19·0	14·5	13·16
1885	**32·8**	14·0	21·9	14·5	8·3	**11·9**	9·5	12 8	10·9	12·0	**24·7**	17·2	15·88
1886	15·7	28·1	15·7	9·5	9·6	8·2	9·1	10·7	10·0*	11·8	9·6	12·7	12·56
1887	21·5	22·0	11·7	12·3	8·4	10·5	9·0	9·9	11·6	18·0	9·0*	18·0	13·49
1888	13·7	15·0	10·4	8·8	**12·3**	7·9*	9·2	9·0	**15·6**	17·2	16·8	7·7*	11·97*
1889	**27·9**	13·8	18·0	7·8*	8·8	8·5	8·2*	8·9	12·9	8·2*	11·4	26·5	13·41
1890	6·4*	**31·9**	13·3	13·5	8·4	8·9	**11·9**	8·4*	11·0	17·8	15·9	**36·2**	15·30
1891	21·5	20·6	8·9*	13·6	7·6*	8·1	(11·1)	(9·3)	(13·8)	(14·5)	(15·3)	(11·3)	(12·97)
Mittel	**19·8**	19·1	15·3	11·5	10·2	9·4*	9·9	11·3	12·5	**15·2**	14·8*	18·3	13·94
Berechneter Gang	**6·16**	5·05	1·25	—2·19	—4·03	—1·38*	—4·00	—2·92	—0·90	0·63	1·51	3·82	3·07
Berechnetes Mittel, Meter pro Secunde.	**5·58**	5·27	4·22	3·26	2·75	2·65*	2·76	3·06	3·62	4·05	4·29	4·93	3·87
Mittlere Anomalie	**7·2**	5·8	**3·8**	2·6	2·2	1·2	1·0*	2·2	1·5	3·0	3·9	6·5	1·38
Absolute Anomalie	26·4	20·2	13·8	7·6	10·3	4·0	3·7*	9·8	5·6	12·6	15·7	**28·5**	4·88

Das Jahresmittel bei 1882 ist aus den sechs ersten Monaten des Jahres 1891 und aus den sechs letzten des Jahres 1882 gebildet. Die eingeklammerten Zahlen sind nach Vollendung der Arbeit eingetragen worden, daher in den Resultaten nicht berücksichtigt.

Die absolute Veränderlichkeit der Monatsmittel ist für diese neunjährige Periode am grössten im December mit 28·5, am kleinsten im Juli mit 3·7; im erstgenannten Monate fast achtmal so gross als im Sommermonate Juli. Das kleinste verzeichnete Monatsmittel war im Jänner 1890 mit 6·4 *km* pro Stunde oder 1·78 *m* pro Secunde, das grösste, fast sechsmal grösser, im December 1890 mit 36·2 *km* oder 10·05 *m* pro Secunde.

Um den Einfluss der stürmischen Bora auf den allgemeinen täglichen Gang der Windgeschwindigkeit bestimmen zu können, habe ich die Tage zusammengestellt, an welchen, durch alle 24 Stunden des Tages, die Windrichtung NE und E anhielt und mindestens die Geschwindigkeit von 50 *km* pro Stunde erreichte. Die Resultate finden sich in den Tabellen VI, VII und theilweise VIII. Aus den acht Beobachtungsjahren 1883—1890 konnte ich 310 solcher Tage verwenden. Die grösste Anzahl stürmischer Bora-Tage fällt auf den Jänner, im Mittel 7 Tage pro Jahr, die folgenden Monate zeigen eine regelmässige Abnahme, um die geringste Häufigkeit in den Sommermonaten Juni und Juli zu erreichen, im Mittel bloss einen Tag pro Jahr. Vom Juli an ist wieder eine continuirliche Zunahme bis zum Jänner zu bemerken. Vergleichen wir diese Tabellen mit den Tabellen I und II, so ersehen wir sofort ein früheres Eintreffen des Hauptmaximums an stürmischen Bora-Tagen. Im Winter fällt das Maximum eine Stunde, im Frühling und Sommer zwei Stunden, im Herbst und im Jahresmittel drei Stunden vor der Eintrittszeit des Maximums im allgemeinen täglichen Gang. Auch lässt sich ein früheres Erheben der täglichen Gangcurve über dem Tagesmittel constatiren und ebenso ein längeres Verweilen derselben über dem Mittelwerth. Im Winter beträgt die Tagesperiode 15 Stunden. Das Hauptminimum findet um Mitternacht statt.

Was die einzelnen Monate anbelangt, so wäre hervorzuheben, dass im Jänner ein Maximum auf die Zeit von 6 bis 7^h Abends fällt, das vormittägige Maximum ist kleiner. In den darauffolgenden Monaten trifft das Maximum immer früher ein, im Februar um 2^h p., März und April schon Vormittags, im Mai bereits um 7^h in der Früh. In den Sommermonaten Vormittags zwischen 10 und 12^h, in den Herbstmonaten zwischen 7 und 8^h

Früh. Die Gangcurven der einzelnen Monate beginnen im Allgemeinen, wie bereits oben erwähnt, in den ersten Morgenstunden sich über den Mittelwerth zu erheben, um in den ersten Nachmittagsstunden unter denselben zu fallen. Eine entschiedene Ausnahme bildet der Jänner. Hier bleibt die Curve gerade Vormittags unter der Mittellinie, mit der einzigen Ausnahme in der Stunde von 9—10^h, erhebt sich erst um 1^h Nachmittags über den Mittelwerth, um nach Mitternacht unter denselben zu sinken. Secundäre Schwankungen zeigen sich namentlich in den Wintermonaten, sind aber auch im Sommer und Herbst bemerkbar, das Maximum fällt im Mittel zwischen 6 und 7^h Abends.

In dieser Zusammenstellung, wo nur das Maximum im Laufe des Tages mindestens 50 *km* pro Stunde erreichen musste kommen natürlich auch Tage vor, an welchen das Mittel der Windgeschwindigkeit eine ziemlich geringe Kilometeranzahl aufweist. Das kleinste vorkommende Tagesmittel betrug in dieser Reihe 20 *km* pro Stunde. Ich will daher noch eine weitere Trennung vornehmen, um zu sehen, wie sich die tägliche Schwankung auch an den stärksten Bora-Tagen verhält, und zwar will ich nur die Tage berücksichtigen, an welchen das Tagesmittel der Windgeschwindigkeit mindestens 50 *km* erreichte. Für die acht Beobachtungsjahre 1883—1890 fand ich 127 solcher Tage, und zwar 117 im Winterhalbjahre (October, November, December, Jänner, Februar und März) und 10 für das Sommerhalbjahr (April bis inclusive September). Im Jänner kamen 32 solcher Sturmtage vor, im Mittel 4 Tage pro Jahr, im Monat Juli hingegen keiner, im Juni und August nur je 1 Tag. Die zwei letzten Spalten der Tabelle VII und die vierte Spalte der Tabelle VIII veranschaulichen den täglichen Gang. Derselbe zeigt den gleichen Verlauf wie der letztbesprochene. Das Hauptmaximum im Jahresmittel findet um 10^h Vormittags statt, das Hauptminimum um 1^h Früh. Die secundären Extreme fallen auf den Nachmittag, das Maximum auf 7^h, das Minimum auf 5^h. Zu bemerken wäre das, um 2 Stunden, frühere Eintreten des Hauptmaximums im Sommer, im Vergleiche zum Winter. Das Nebenmaximum verspätet sich.

Als Mass der Schwankung habe ich am Fusse der Tabellen VI und VII die Quotienten der Extreme mitgetheilt. Es zeigt

Tabelle VI.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit bei stürmischer Bora.

Abgeleitet aus acht Beobachtungsjahren 1883—1890. Kilometer pro Stunde.

	Jänner	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	December
Tage...	56	46	37	17	9	8	8	11	17	25	27	49
Mitternacht—1ʰ a.	52·0	44·0	46·6	33·5	41·0	26·1*	26·4	28·5	37·2	45·7*	45·4	48·6
1—2	51·1	43·6	48·2	33·1	42·2	31·1	25·8	33·9	38·7	46·5	43·9	51·0
2—3	50·9	44·6	49·4	36·9	45·8	36·2	27·9	38·2	40·4	46·7	46·3	51·1
3—4	49·7	46·7	48·6	38·7	50·1	34·8	29·1	40·0	39·9	46·6	45·8	53·9
4—5	48·9	45·8	48·7	38·8	49·4	30·3	35·9	42·1	40·2	49·0	47·0	54·6
5—6	49·8	47·3	50·5	41·3	53·6	32·4	40·2	39·9	42·9	50·2	48·3	55·4
6—7	51·1	48·1	52·5	47·9	**56·4**	35·3	41·9	42·5	43·2	50·9	**52·1**	57·2
7—8	48·6*	48·1	50·8	51·8	54·7	35·0	41·2	43·2	**44·2**	**53·9**	51·3	56·7
8—9	50·6	47·5	53·5	**53·5**	50·0	38·0	43·3	43·5	42·6	49·7	51·0	**53·2**
9—10	**53·6**	48·1	53·4	53·4	50·0	37·0	42·3	**44·7**	43·8	53·7	51·9	56·1
10—11	50·9*	48·1	**55·1**	51·0	55·9	36·9	**47·1**	43·6	42·9	53·1	50·9	55·8

11—Mittag	51·9	49·1	51·8	47·7	56·2	39·2	46·3	42·4	41·5	50·6	49·8	53·5
Mittag—1h p.	52·5	49·3	50·3	48·8	53·8	39·7	45·5	41·0	39·1	49·3	50·3	52·4
1—2	52·0	50·0	47·6	42·4	50·2	38·5	44·7	42·5	38·8	48·2	49·7*	49·5
2—3	52·6	49·9	46·7	43·3	44·9	34·0*	40·6	41·2	37·8	47·9	51·4	49·0*
3—4	53·0	49·7	45·1	40·9	44·9	37·4	36·0	39·3	37·3	48·6	53·5	49·1
4—5	52·2	48·1	45·0	37·7	42·7	36·0	33·3	37·6	37·0	46·8*	50·0	50·9
5—6	54·4	46·9*	44·2*	37·4	41·0	37·4	33·6	40·0	36·2*	48·8	49·3	50·3
6—7	55·8	49·6	45·6	38·9	35·2	37·9	36·0	38·1	37·5	47·1	48·7	49·3
7—8	55·2	47·8	44·9	38·8	35·0*	35·0	34·1	35·5	39·0	48·0	46·4	48·3
8—9	53·9	47·3	47·9	35·4	36·3	35·1	32·1	35·0	37·2	48·4	44·9	48·4
9—10	53·0	46·6	45·4	34·4	39·0	32·8	29·0	33·7	37·7	49·8	41·5	48·3
10—11	53·6	44·6	46·4	34·1	40·9	33·5	28·4	31·6	36·4	47·8	40·4*	48·2
11—Mitternacht	53·1	43·2*	46·4	31·4*	39·1	31·3	25·1*	25·1*	36·1*	46·2	43·1	47·5*
Mittel	52·1	47·3	48·5	41·1	46·2	35·0	36·1	38·5	39·5	48·9	48·0	51·8
Quotient	1·15	1·16	1·25	1·70	1·61	1·52	1·88	1·78	1·23	1·18	1·32	1·23

Tabelle VII.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit bei stürmischer Bora.

Acht Beobachtungsjahre 1883—1890. Kilometer pro Stunde.

	Maximum der Windgeschwindigkeit ≧ 50 *km*				Tagesmittel der Windgeschwindigkeit ≧ 50 *km*	
	Winter 151 Tage	Frühling 63	Sommer 27	Herbst 69	Winterhalbjahr 117	Sommerhalbjahr 10
Mitternacht—1ʰ a.	48·5	42·3	27·1	43·5	57·5*	42·1*
1—2	48·8	43·3	30·7	43·6	58·7	45·1
2—3	49·0	45·5	34·6	45·0	59·0	53·8
3—4	50·2	46·2	35·3	44·7	59·0	58·0
4—5	49·8	46·1	36·7	46·1	59·2	59·2
5—6	50·9	48·4	37·7	47·7	61·4	57·5
6—7	52·2	51·8	40·2	49·5	63·2	63·4
7—8	51·1	51·6	40·2	**50·5**	62·0	**65·6**
8—9	52·1	53·0	41·8	48·4	63·2	62·7
9—10	**52·8**	52·9	41·7	**50·5**	**65·1**	60·7
10—11	51·6	**54·1**	**42·7**	49·7	64·1	62·4
11—Mittag	51·6	51·3	42·6	48·0	63·5	61·1
Mittag—1ʰ p.	51·5	49·1	42·0	47·2	63·5	61·0
1—2	50·6	46·6	42·0	46·5*	61·9	60·3
2—3	50·6*	45·5	38·9	46·8	62·1	57·5
3—4	50·7	44·0	37·7	**47·8**	62·3	55·7
4—5	50·6	42·7	35·9*	45·7	60·9*	52·6
5—6	50·8	41·8	37·8	45·9	61·3	48·6
6—7	**51·8**	42·3	**37·4**	45·4	**62·8**	43·0*
7—8	50·7	41·8	34·9	45·2	61·1	44·2
8—9	50·1	42·9	34·2	44·3	61·0	**44·0**
9—10	49·5	41·5	32·0	43·6	58·7	48·9
10—11	49·1	42·3	31·2	42·1*	59·1	**50·5**
11—Mitternacht	48·3*	41·3*	26·9*	42·5	58·4	44·9
Mittel.....	50·5	46·2	36·7	46·3	61·2	54·3
Quotient	1·09	1·31	1·59	1·20	1·13	1·56

Tabelle VIII.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit bei stürmischer Bora.

Kilometer pro Stunde.

	Maximum der Windgeschwindigkeit ≧ 50 *km*			Mittel der Windgeschwindigkeit ≧ 50 *km*		
	Jahr 310 Tage	Berechneter Gang		Jahr 127 Tage	Berechneter Gang	
Mitternacht—1ʰ a.	44·3	44·31	—3·18	56·3*	57·09*	—3·55
1—2	44·9	44·88	—2·61	57·6	57·36	—3·28
2—3	46·2	45·74	—1·75	58·6	58·00	—2·64
3—4	46·8	46·72	—0·77	58·9	58·92	—1·72
4—5	47·1	47·74	0·25	59·2	59·98	—0·66
5—6	48·5	48·72	1·23	61·1	61·08	0·44
6—7	50·5	49·62	2·13	63·2	62·10	1·46
7—8	50·1	50·39	2·90	62·2	62·99	2·35
8—9	50·6	50·91	3·42	63·2	63·65	3·01
9—10	**51·8**	**51·07**	3·58	**64·8**	**64·00**	3·36
10—11	50·9	50·79	3·30	63·9	63·99	3·35
11—Mittag	49·9	50·10	2·61	63·3	63·62	2·98
Mittag—1ʰ p.	49·2	49·19	1·70	63·3	62·99	2·35
1—2	48·1	48·26	0·77	61·8	62·26	1·62
2—3	47·7	47·54	0·05	61·7	61·60	0·96
3—4	47·6	47·16	—0·33	61·8	61·12	0·48
4—5	46·6*	47·02	—0·47	60·3*	60·82	0·18
5—6	46·7	47·00	—0·49	60·3	60·62	—0·02
6—7	**47·2**	46·81	—0·65	**60·8**	60·38	—0·26
7—8	46·3	46·43	—1·06	59·8	59·95	—0·69
8—9	45·9	45·77	—1·72	59·6	59·31	—1·33
9—10	45·0	45·01	—2·48	57·9	58·52	—2·12
10—11	44·6	44·41	—3·08	58·4	57·77	—2·87
11—Mitternacht	43·7*	44·14*	—3·35	57·3	57·24	—3·40
Mittel.....	47·49	47·49	1·83	60·64	60·64	1·88
Quotient.....	1·17	1·16	0·039	1·15	1·12	0·031

sich auch hier, in den einzelnen Monaten, die Zunahme der täglichen Variation mit der Abnahme der Windgeschwindigkeit. Den kleinsten Quotienten zeigt der Jänner mit 1·15, den grössten der Juli mit 1·88. Dasselbe Gesetz ergibt sich für die Jahreszeiten.

Die beiden Jahresergebnisse will ich noch durch Bessel's periodische Function darstellen. Die berechneten Gleichungen lauten:

Für den ersten Fall:

$$\text{Maxim.} \gtrless 50\,km,\ y = 47\cdot49 + \overline{0\cdot46327}\sin(305°34' + x.15°) + \overline{9\cdot96653}\sin(233°29' + x.30°) + \overline{9\cdot48515}\sin(345°36' + x.45°)$$

Für den zweiten Fall:

$$\text{Mittel} \gtrless 50\,km,\ y = 60\cdot64 + \overline{0\cdot47830}\sin(289°41' + x.15°) + \overline{9\cdot93700}\sin(223°50' + x.30°) + \overline{9\cdot29018}\sin(321°40' + x.45°)$$

Die Sinusfactoren sind durch ihre Logarithmen dargestellt, $x = 0$ ist für 1^h a. zu setzen.

Der daraus abgeleitete Gang findet sich in vier Spalten der Tabelle VIII. Die, durch Differentiation obiger Gleichungen, bestimmten Eintrittszeiten der Wendestunden sind:

	Maximum der Windgeschwindigkeit $\gtrless 50\,km$	Mittel der Windgeschwindigkeit $\gtrless 50\,km$
Maximum	$9^h 52^m$ a.	$10^h 28^m$ a.
Minimum	0 7 a.	0 52 a.

Vergleichen wir diese Resultate mit den Wendestunden, auf S. 1365, für den allgemeinen täglichen Gang, so ersehen wir, dass bei stürmischer Bora das Maximum um $2^h 25^m$, respective $1^h 49^m$ früher eintritt, das Minimum sich hingegen um $2^h 21^m$ und $3^h 6^m$ verspätet. Dieses frühere Eintreffen der grössten Windstärke bei stürmischer Bora erklärt mir auch, warum das Maximum im allgemeinen täglichen Gange für Triest vor 1^h Nachmittag fällt,

während für andere Orte Hofrath Hann[1] als mittlere Eintrittszeit für das Hauptmaximum $2^h\ 30^m$ p. gefunden hat.

Als Mass der täglichen periodischen Schwankung habe ich den Quotient der Extreme und den Quotient aus der Amplitude und dem Tagesmittel berechnet.

	Allgemein	Maximum der Windgeschwindigkeit $\leqq 50\ km$	Mittel der Windgeschwindigkeit $\leqq 50\ km$
Windgeschwindigkeit ...	13·94	47·49	60·64
Amplitude	3·03	6·93	6·91
Quotient	1·24	1·16	1·12
$\frac{\Delta\nu}{\nu}$	0·217	0·146	0·114

Es ergibt sich auch hier mit der Zunahme der Windgeschwindigkeit eine Abnahme in der Intensität der täglichen periodischen Variation.

Die vorletzte horizontale Reihe der Tabelle VI veranschaulicht den jährlichen Gang der Windgeschwindigkeit bei stürmischer Bora. Derselbe ist dem jährlichen Gange der allgemeinen mittleren Windgeschwindigkeit ähnlich, nur ist die Jahresschwankung bei stürmischer Bora kleiner als im allgemeinen jährlichen Gange. Das Maximum der Geschwindigkeit fällt auf den Jänner mit 52·1, das Minimum auf den Juli mit 35·0 *km* pro Stunde. Im allgemeinen Mittel beträgt die Jahresamplitude 10·5, der Quotient der Jahresextreme 2·10, bei stürmischer Bora hingegen die Jahresamplitude 17·1, der Quotient aber nur 1·49.

Um eine eventuelle Verschiedenheit im täglichen Gange der stürmischen Bora bei hohem und bei niederem Luftdruck bestimmen zu können, habe ich für die einzelnen Monate je zwei Gruppen gebildet. Die erste Gruppe enthält die stürmischen Bora-Tage mit einem mittleren Barometerstande von mindestens 5 *mm* über dem normalen Monatsmittel, die zweite enthält die Tage mit mindestens 5 *mm* unter dem entsprechenden Normalwerthe. In der Jahressumme ergeben sich für die erste Gruppe (Tagesmittel des Luftdruckes $\leqq$ Normale

[1] Diese Sitzungsberichte, Jänner 1879: Die tägliche Periode der Geschwindigkeit und Richtung des Windes. LXXIX. Band, II. Abth.

Monatsmittel $+5\ mm$) 52 Tage, für die zweite (Tagesmittel des Luftdruckes $\gtrless$ Normale Monatsmittel $-5\ mm$) 61 Tage. Tabelle IX bringt den täglichen Gang zur Anschauung. Aus dieser Gangtabelle wäre hervorzuheben, dass bei niederem Luftdruck, sowohl im Winter, als auch im Sommer, das Maximum der Windgeschwindigkeit später eintritt als bei hohem Luftdruck. Im Jahresmittel fällt bei hohem Barometerstand das Maximum der Windstärke etwas vor 10^h Vormittags, bei tiefem Barometerstand hingegen nach 11^h Vormittags.

Ferners ergibt sich für stürmische Bora bei niederem Barometerstand eine grössere tägliche Variation der Windgeschwindigkeit als bei hohem Luftdruck, und zwar wächst sowohl die Amplitude, als auch der Quotient der Extreme und der Quotient aus der Amplitude und dem mittleren Werthe der Windgeschwindigkeit.

	Luftdruckmaximum				Luftdruckminimum			
	Tagesmittel der Windgeschw.	Amplitude	Quotient	$\frac{\Delta v}{v}$	Tagesmittel der Windgeschw.	Amplitude	Quotient	$\frac{\Delta v}{v}$
Winterhalbjahr	50·9	6·0	1·12	0·118	48·8	10·2	1·24	0·209
Sommerhalbjahr	36·1	18·8	1·68	0·521	47·2	27·7	1·86	0·587
Jahr	48·9	6·7	1·15	0·137	48·6	12·0	1·29	0·247

Die tägliche periodische Schwankung der Windstärke ist in beiden Jahreshälften bei niederem Luftdruck grösser. Die Windgeschwindigkeit ist im Winter bei hohem Luftdruck grösser, im Sommer hingegen bei tiefem. Im Jahresdurchschnitt resultirt dieselbe Windstärke für beide Luftdruckextreme, die tägliche Variation der Windstärke ist aber bei tiefem Barometerstande grösser als bei hohem.

Ich füge hier noch einige meteorologische Daten für die in Betracht gezogenen Bora-Tage an, wobei ich bemerken will, dass in beiden Luftdruckgruppen die eigentlichen Wintermonate mit demselben Gewicht eingehen. Die Anzahl der verwendeten Bora-Tage im December, Jänner und Februar kommen in der ersten Gruppe mit 54%, in der zweiten mit 56% zur Geltung.

Tabelle IX.

Täglicher Gang der Windgeschwindigkeit bei stürmischer Bora und bei hohem und niederem Luftdruck.

Acht Beobachtungsjahre 1883—1890. Kilometer pro Stunde.

	Luftdruckmaximum			Luftdruckminimum		
	Winterhalbjahr 45 Tage	Sommerhalbjahr 7	Jahr 52	Winterhalbjahr 54	Sommerhalbjahr 7	Jahr 61
Mitternacht—1ʰ a.	49·7	36·1	47·9	42·8*	34·1	41·8*
1—2	51·0	37·6	49·2	44·9	32·3*	43·5
2—3	51·0	35·0	48·9	46·7	38·1	45·7
3—4	50·5	36·4	48·6	48·2	46·1	47·9
4—5	50·6	35·4	48·6	49·8	47·3	49·5
5—6	52·4	37·0	50·3	49·4	53·3	49·8
6—7	53·7	40·6	52·0	50·6	56·4	51·2
7—8	50·7	44·6	49·8	49·6	56·1	50·4
8—9	52·7	**46·4**	51·9	50·9	53·1	51·2
9—10	**54·2**	43·1	**52·7**	52·0	55·6	52·4
10—11	52·9	40·1	51·2	**53·0**	59·7	**53·8**
11—Mittag	50·7	38·6	49·0	52·9	**60·0**	53·7
Mittag—1ʰ a.	52·0	35·7	49·8	51·4	59·4	52·3
1—2	51·0	35·6	48·9	48·7*	55·6	49·5
2—3	49·8	35·6	48·9	49·7	54·7	50·3
3—4	49·1	36·0	47·4	**50·3**	52·6	50·5
4—5	48·6*	34·6	46·7	49·7	49·0	49·6
5—6	49·1	32·9	46·9	49·2	44·3	48·6
6—7	51·5	32·3	48·9	48·7	37·4	47·4
7—8	51·2	32·0	48·6	48·3	37·7	47·1
8—9	**51·8**	28·1	48·6	48·3	35·9	46·8
9—10	49·6	27·6*	46·6	46·7	36·6	45·5
10—11	48·2*	32·3	46·0*	46·3	39·9	45·5
11—Mitternacht	48·6	33·7	46·6	44·3	37·3	43·5
Mittel.....	50·9	36·1	48·9	48·8	47·2	48·6
Quotient	1·12	1·68	1·15	1·24	1·86	1·29

Tabelle X.

Maxima der Windgeschwindigkeit.

Kilometer pro Stunde.

	Winter												Frühling											
	December				Jänner				Februar				März				April				Mai			
	Tag	Stunde	Kilometer	Richtung	Tag	Stunde	Kilometer	Richtung	Tag	Stunde	Kilometer	Richtung	Tag	Stunde	Kilometer	Richtung	Tag	Stunde	Kilometer	Richtung	Tag	Stunde	Kilometer	Richtung
1882	1	9 a.	79	NE	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	NE	—	—	—	—
1883	31	9 a.	96	NE	19	12 a.	106	NE	17	2 a.	86	NE	4	11 a.	**112**	NE	10	10 a.	81	NE	5	1 p.	88	NE
1884	22	8 a.	74	NE	8	7 p.	87	E	18	4 a.	77	NE	22	8 a.	73	NE	8	3 p.	58	NE	22	7 p.	76	NE
1885	10	9 a.	92	NE	18	7 a.	100	NE	8	3 p.	71	NE	11	1 a.	87	NE	4	10 a.	**84**	NE	12	11 a.	67	E
1886	31	4 p.	60	NE	10	8 p.	98	NE	9	10 a.	81	NE	9	9 a.	75	NE	12	10 p.	54	NE	2	5 a.	69	NE
1887	30	12 a.	98	NE	11	4 a.	86	NE	10	1 a.	**98**	E	13	9 p.	74	NE	17	12 a.	75	NE	14	4 a.	47	E
1888	1	7 p.	52	SW	16	1 a.	74	NE	28	11 p.	78	NE	12	3 p.	65	NE	7	3 p.	48	NE	23	6 a.	82	NE
1889	28	1 a.	85	NE	3	5 a.	**107**	NE	13	3 a.	89	NE	16	7 p.	82	NE	17	5 a.	78	NE	20	6 a.	46	NE
1890	28	6 p.	**107**	NE	31	1 a.	83	NE	28	4 p.	78	NE	1	10 p.	87	NE	22	1 a	67	NE	22	10 a.	45	NE
1891	21	7 a.	(78)	NE	19	4 a.	94	NE	15	1 p.	69	NE	24	1 p.	50	NE	10	6 p.	71	NE	18	3 a.	44	NE
Mittel	82·6				92·8				80·8				78·3				68·4				62·7			

	Sommer												Herbst											
	Juni				Juli				August				September				October				November			
1882	—	—	—	—	27	1 a.	72	NE	30	6 p.	56	NE	17	2 p.	45	NE	4	3 p.	70	NE	27	12 p.	58	NE
1883	29	9 a.	52	E	16	4 p.	59	NE	18	6 p.	**75**	NE	7	6 a.	**72**	NE	30	8 p.	85	NE	14	2 p.	77	NE
1884	29	3 a.	75	NE	20	1 p.	**73**	NE	27	5 p.	70	E	11	2 p.	62	NE	5	4 p.	91	NE	23	4 p.	**110**	NE
1885	12	11 a.	**77**	E	22	11 a.	60	NE	14	7 a.	63	NE	1	8 a.	67	NE	2	12 a.	80	E	6	4 p.	93	NE
1886	20	7 a.	49	NE	11	6 a.	56	E	5	7 p.	63	NE	16	12 p.	68	NE	28	11 p.	62	NE	25	1 a.	72	NE
1887	29	7 p.	63	NE	7	1 a.	56	NE	3	9 p.	50	NE	27	5 p.	62	NE	26	12 p.	98	NE	20	4 p.	82	NE
1888	15	3 p.	46	NE	13	5 a.	44	E	6	2 p.	52	NE	19	8 a.	62	NE	18	1 a.	82	NE	10	8 p.	106	NE
1889	5	12 p.	45	NE	18	8 p.	54	NE	15	7 p.	47	NE	16	1 a.	67	NE	27	12 a.	49	NE	20	10 p.	58	NE
1890	1	12 a.	53	NE	13	7 p.	53	E	30	9 a.	50	SW	16	11 a.	54	NE	28	9 p.	80	NE	13	1 a.	94	NE
1891	16	9 p.	45	NE	10	9 a.	(54)	NE	20	12 a.	(43)	NE	24	4 a.	(70)	NE	29	7 a.	(110)	NE	2	9 a.	(106)	NE
Mittel	56·1				58·6				58·6				62·1				77·4				83·3			

Die Angaben für die zweite Hälfte des Jahres 1891 wurden nach Vollendung der Arbeit eingetragen.

	Luftdruckmittel	Temperatur Grade Celsius				Bewölkung				Regen pro Tag	Wahrscheinlichkeit für	
	mm	7ʰ a.	2ʰ p.	9ʰ p.	Mittel	7ʰ a.	2ʰ p.	9ʰ p.	Mittel	*mm*	Regen	Schnee
Luftdruckmaximum												
Winterhalbjahr	768·44	3·1	5·1	3·0	3·7	3·4	3·0	2·0	2·8	0·1	0·04	0·07
Sommerhalbjahr	65·07	14·0	17·9	14·8	15·6	2·6	3·4	2·3	2·8	0·2	0·14	0·00
Luftdruckminimum												
Winterhalbjahr	51·96	2·6	3·6	2·5	3·0	8·7	8·3	7·6	8·2	2·2	0·37	0·53
Sommerhalbjahr	49·54	12·2	13·3	10·9	12·2	8·1	9·3	9·6	9·0	5·6	0·57	0·14

In beiden Jahreshälften ergibt sich für stürmische Bora bei niederem Luftdruck eine geringere Temperatur und natürlich eine grössere Bewölkung, stärkere Regenmenge und grössere Wahrscheinlichkeit für einen Niederschlag als bei hohem Barometerstand.

Bei niederem Luftdruck und stürmischer Bora ist also die tägliche periodische Variation der Windstärke grösser als beim Luftdruckmaximum, trotzdem die Temperatur kleiner und die Bewölkung grösser ist.

In Tabelle X habe ich die **Maxima der stündlichen Windgeschwindigkeiten** der neun Beobachtungsjahre Juli 1882 bis Juni 1891 zusammengestellt. Diese grössten Windgeschwindigkeiten kommen grösstentheils der Richtung NE zu, und zwar mit 88%, auf E entfallen 10% und auf SW 2%.

Die, in diesem Zeitraume, beobachtete grösste Windstärke war in der Richtung NE mit 112 *km* pro Stunde oder 31·1 *m* pro Secunde zu verzeichnen, und zwar am 4. März 1883 um 11ʰ Vormittags. Das Mittel der Jahresmaxima beträgt 103·6 *km* pro Stunde oder 28·8 *m* pro Secunde.

Die Monatsmittel der grössten Windgeschwindigkeiten ergeben einen ähnlichen jährlichen Gang, wie die allgemeine mittlere Windgeschwindigkeit und wie die stürmische Bora. Vergleiche die Mittelwerthe dieser Tabelle X mit Tabelle V und VI. Das Maximum fällt auf den Jänner, das Minimum auf den Juni.

Über die conforme Abbildung einer Halbebene auf ein unendlich benachbartes Kreisbogenpolygon

von

Georg Pick in Prag.

Die Beziehungen zwischen der Gestalt eines Kreisbogenpolygons und den Constanten der Differentialgleichung dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung, welche die Abbildung desselben auf eine Halbebene vermitteln, sind bisher noch unbekannt. Man weiss zwar, in welcher Weise die Winkel eines n-Ecks in die Differentialgleichung eintreten; dagegen ist nichts darüber festgestellt, wie die $2(n-3)$ übrigen (Kreisverwandtschaften gegenüber invarianten) Bestimmungsstücke von den in gleicher Zahl verfügbaren reellen Constanten der Differentialgleichung abhängen. Die Ermittelung dieser Abhängigkeit dürfte mit nicht unerheblichen Schwierigkeiten verknüpft sein, und es scheint mir desshalb gerechtfertigt, wenn ich im Folgenden eine Untersuchung, welche sich aber auf solche Polygone beschränkt, die der Halbebene unendlich benachbart sind, mittheile, da die Resultate derselben eine bemerkenswerthe Form besitzen, von welcher aus wohl ein Weg zu allgemeinen Gesetzen sich wird finden lassen.

Da es sich zunächst nicht um möglichste Vollständigkeit, sondern um die Darlegung der Methode handelt, so bespreche ich mit grösserer Ausführlichkeit nur den Fall, dass die Begrenzungsbögen des Polygons einen gemeinsamen Orthogonalkreis besitzen, indem ich allgemeinere Untersuchungen und Erweiterungen der behandelten Problems künftigen Publicationen vorbehalte.

1.

Die Differentialgleichung dritter Ordnung, welche die Abbildung der positiven Halbebene auf ein Kreisbogen-n-Eck der ξ-Ebene vermittelt, hat bekanntlich die Gestalt

$$[\xi]_x = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{(x-a_k)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{s_k}{x-a_k}, \qquad 1)$$

in welcher $[\xi]_x$ die Schwarz'sche Differentialinvariante bedeutet, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ jene Punkte der Axe der reellen x sind, welche den Ecken des Polygons entsprechen, und $r_1, r_2, \ldots r_n$ in bekannter Weise von den Winkeln $\lambda_1\pi, \lambda_2\pi, \ldots \lambda_n\pi$ des Polygons abhängen:

$$r_k = \frac{1-\lambda_k^2}{2}.$$

Nimmt man nun an, dass das fragliche Polygon ein der x-Halbebene unendlich benachbartes Gebiet darstellt, dass also ξ selbst von x unendlich wenig verschieden ist, so vereinfacht sich die Differentialgleichung bedeutend. Denn die linke Seite derselben ist ein Differentialausdruck, welcher dadurch charakterisirt ist, dritter Ordnung zu sein und zu verschwinden, sobald ξ eine lineare gebrochene Function von x ist. Ist nun ξ von x unendlich wenig verschieden und linear von x abhängig, so kann man bekanntlich

$$\xi = x + \varepsilon(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$$

setzen, wo ε einen unendlich kleinen Parameter bedeutet. Bei solchen infinitesimalen linearen Substitutionen ist also einfach

$$\frac{d^3\xi}{dx^3} = 0,$$

oder wenn wir $\frac{\xi - x}{\varepsilon} = \eta$ setzen,

$$\frac{d^3\eta}{dx^3} = 0.$$

Man darf also erwarten, dass sich die Differentialgleichung in die einfachere Form

$$\eta''' = R(x)$$

wird setzen lassen. In der That ergibt sich auch durch directe Rechnung für

$$\xi = x + \varepsilon\eta$$

unter Voraussetzung eines unendlich kleinen ε

$$[\xi]_x = \varepsilon . \eta''',$$

wenn von höheren ε-Potenzen abgesehen wird. Hieraus ist zugleich klar, dass in diesem Falle die r_k und s_k unendlich klein von der Ordnung von ε werden. Wir setzen

$$r_k = \varepsilon\rho_k, \qquad s_k = \varepsilon\sigma_k$$

und erhalten demnach

$$\eta''' = \sum_{k=1}^{n} \frac{\rho_k}{(x-a_k)^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{x-a_k}. \qquad 2)$$

Diese Differentialgleichung ist direct integrabel und gibt

$$\begin{aligned} \eta = {} & \alpha + \beta x + \gamma x^2 \qquad 3) \\ & - \Sigma\, \rho_k\, (x-a_k)\, \lg\, (x-a_k) \\ & - \Sigma\, \frac{\sigma_k}{2}\, (x-a_k)^2 \lg\, (x-a_k), \end{aligned}$$

worin α, β, γ die Integrationsconstanten sind.

2.

Wir denken uns die Variable ξ in derselben Ebene gedeutet wie x. Die Grösse $\varepsilon\eta$ gibt dann die unendlich kleine Verschiebung, welche der Punkt x vermöge der Abbildung erleidet. Wir betrachten jetzt insbesondere die Punkte der reellen Axe und denken uns die ihnen zugehörigen Verschiebungen in reellen und imaginären Theil zerlegt:

$$\varepsilon\eta = u + iv.$$

Der Punkt x der reellen Axe geht also über in den Punkt mit den Coordinaten $x+u, v$.

Irgend eine der Strecken zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten a_k geht in einen Kreisbogen über, der von dieser

Strecke unendlich wenig verschieden ist, also einem Kreise angehört von der Gleichungsform:

$$y = \lambda + \mu x + \nu(x^2 + y^2),$$

wo λ, μ, ν unendlich klein sind. Diese Gleichung muss befriedigt sein, wenn für x $x+u$ und für y v eingesetzt wird. Dies gibt, da μ und ν unendlich klein sind,

$$v = \lambda + \mu x + \nu x^2,$$

so dass sich die drei den Kreis bestimmenden Coëfficienten λ, μ, ν unmittelbar aus dem Ausdruck entnehmen lassen, welcher v in Function von x darstellt.

Um diese Darstellung zu erhalten, setzen wir, was offenbar erlaubt ist, ε als reell voraus. Wir setzen ferner die drei Integrationsconstanten α, β, γ gleich Null, da eine beliebige lineare Substitution (hier natürlich eine infinitesimale) von ξ noch freisteht. Endlich denken wir die Logarithmen so normirt, dass sie für reelle positive Werthe ihrer Argumente reell sind. Unter dieser Voraussetzung ist v für alle x, welche grösser als a_n sind, gleich Null. Beachtet man nun die Werthänderung, welche $\log(x-a_k)$ erleidet, wenn x von reellen Werthen, die grösser als a_k sind, zu solchen kleiner als a_k durch die positive Halbebene übergeht, so ergibt sich, dass der Werth von v für die Strecke $\overline{a_k a_{k+1}}$ durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$\frac{v}{\varepsilon\pi} = -\sum_{h=k+1}^{n} \left\{\varrho_h(x-a_h) + \frac{\sigma_h}{2}(x-a_h)^2\right\}. \qquad 4)$$

Nach dem früher Gesagten sind hieraus die Bestimmungsstücke des Kreises, welchem der dem Stücke $\overline{a_k a_{k+1}}$ entsprechende Bogen angehört, leicht zu entnehmen.

Da die Strecken $\overline{-\infty a_1}$ und $\overline{a_n x}$ auf einen und denselben Kreis transformirt werden sollen, so muss

$$\sum_{h=1}^{n} \left\{\varrho_h(x-a_h) + \frac{\sigma_n}{2}(x-a_h)^2\right\} = 0 \qquad 5)$$

sein. Es ist von vornherein klar, dass diese Bedingung damit übereinstimmen muss, dass die rechte Seite der Differential-

gleichung 1), beziehungsweise 2) für $x = \infty$ in der vierten Ordnung verschwindet, was ja bekanntlich erfüllt sein muss, wenn $x = \infty$ kein singulärer Punkt sein soll. Man überzeugt sich von dieser Übereinstimmung auch leicht durch directe Rechnung.

3.

Es soll jetzt untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Begrenzungsbögen des Polygons einen gemeinsamen Orthogonalkreis besitzen. Ein solcher müsste, da einer der Kreise nach der getroffenen Wahl der Integrationsconstanten mit der reellen Axe zusammenfällt, seinen Mittelpunkt jedenfalls auf der reellen Axe haben. Ist nun

$$y = \lambda + \mu x + \nu (x^2 + y^2)$$

wie oben die Gleichung eines der Begrenzungsbögen und

$$P(x^2 + y^2) + Qx + R = 0$$

die Gleichung des Orthogonalkreises, so hat man

$$2P\lambda - Q\mu + 2R\nu = 0,$$

oder, was dasselbe ist, es verschwinden sämmtliche Determinanten der Matrix von n Colonnen und 3 Zeilen, welche aus den Coëfficienten λ, μ, ν in den Gleichungen der Begrenzungskreise gebildet ist. Statt dieser Matrix kann man mit Rücksicht auf die durch 4) gegebene Zusammensetzung jener Coëfficienten auch die folgende setzen:

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\sigma_k}{2} \\ -\sigma_k a_k + \varrho_k \\ \frac{\sigma_k}{2} a_k^2 - \varrho_k a_k \end{vmatrix}_{(k = 1, 2, \ldots n)} \qquad 6)$$

Ausserdem muss die Bedingung 5) erfüllt sein, welche aussagt, dass die Summe der Glieder jeder Zeile von M verschwindet

Um die Matrix M passend umzugestalten, bezeichnen wir mit x, y, z drei willkürliche Grössen und multipliciren M mit der neuen Matrix

$$N = \left| \frac{1}{x-a_k} \; \frac{1}{y-a_k} \; \frac{1}{z-a_k} \right|_{(k=1,2,\ldots n)}$$

Die resultirende dreireihige Determinante lässt sich sehr einfach schreiben, wenn man folgende Bezeichnungen einführt:

$$\sum \frac{\rho_k}{x-a_k} = p(x), \qquad \sum \frac{\sigma_k}{x-a_k} = q(x).$$

Man erhält

$$MN = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}q(x) & , \, , \, . \\ p(x) - xq(x) & , \, , \, . \\ -xp(x) + \frac{1}{2}x^2 q(x) + \frac{1}{2}\Sigma\rho_k & , \, , \, . \end{vmatrix} \qquad 7)$$

in welcher Determinante die zweite und dritte Colonne aus der ersten durch Ersetzung von x durch y und z hervorgeht. Bedingung 5) des vorigen Paragraphen ist bei der Umformung zu berücksichtigen.

Wegen der Willkürlichkeit von x, y, z ersetzt die eine Gleichung

$$MN = 0$$

alle aufgestellten Bedingungen. Aber offenbar ist das Verschwinden der Determinante 7) gleichbedeutend mit der Existenz dreier von x, y, z unabhängiger Grössen A, B, C, welche die Gleichung

$$A\left(\frac{1}{2}\Sigma\rho_k - xp(x) + \frac{1}{2}x^2 q(x)\right) + B(p(x) - xq(x)) - \frac{1}{2}Cq(x) = 0$$

für jedes x befriedigen. Bezeichnen wir die ganze Function zweiten Grades

$$\frac{A}{2}x^2 - Bx - \frac{1}{2}C$$

mit $\psi(x)$, so ist somit

$$\frac{1}{2}\Sigma\rho_k.\psi''(x)-p(x)\psi'(x)+q(x)\psi(x)=0.$$

Die Bedingung für die Existenz eines Orthogonalkreises ist also die, dass die Differentialgleichung

$$\psi''-\frac{2p(x)}{\Sigma\rho_k}\cdot\psi'+\frac{2q(x)}{\Sigma\rho_k}\cdot\psi=0 \qquad 8)$$

ein ganzes rationales Integral zweiten Grades besitzt.

4.

Man kann dem im vorigen Paragraphen entwickelten Resultate eine noch zweckmässigere Gestalt ertheilen, wenn man sich einer invariantentheoretischen Schreibweise[1] der Differentialgleichungen, die hier in Betracht kommen, bedient.

Zunächst kann man an Stelle der Differentialgleichung 1), beziehungsweise 2) die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\varphi''+\varepsilon p(x).\varphi'-\frac{\varepsilon}{2}q(x).\varphi=0$$

einführen, deren Coëfficienten so bestimmt sind, dass der Quotient zweier Particularintegrale der Gleichung 1) genügt. In dieser Gleichung ist es zweckmässig, dem Integral φ einen bestimmten Grad zuzuschreiben, und zwar den Grad

$$g=1-\frac{\varepsilon}{2}\Sigma\rho_k.$$

Führt man nun an Stelle von φ', φ'' entsprechend diesem Grade die Grössen φ_1, φ_2 durch die Gleichungen

$$\varphi'=g\varphi_1=(1-\frac{\varepsilon}{2}\Sigma\rho_k)\varphi_1$$

$$\varphi''=g(g-1)\varphi_2=-\frac{\varepsilon}{2}\Sigma\rho_k.\varphi_2$$

[1] Vergl. F. Klein, Göttinger Nachrichten, 1890, März, oder Math. Ann., XXXVIII, S. 144, sowie meine Note, Math. Ann., XXXVIII, S. 139; letztere bietet die für die Entwickelungen des Textes erforderlichen Schreibweisen und Gradbestimmungen.

ein, so ergibt sich

$$\varphi_2 - 2\frac{p(x)}{\Sigma\rho_k}\cdot\varphi_1 + \frac{q(x)}{\Sigma\rho_k}\cdot\varphi = 0. \qquad 9)$$

Ändert man anderseits in der Gleichung 7) des vorigen Paragraphen die Schreibweise in analoger Weise mit Rücksicht auf den Grad 2 der Function ψ, wobei also zu setzen ist

$$\psi' = 2\psi_1$$
$$\psi'' = 2\psi_2,$$

so erhält man

$$\psi_2 - 2\frac{p(x)}{\Sigma\rho_k}\cdot\psi_1 + \frac{q(x)}{\Sigma\rho_k}\cdot\psi = 0, \qquad 10)$$

also bis auf die Bezeichnung der unbekannten Function Gleichung 9). Demnach kann das Resultat des vorigen Paragraphen so ausgesprochen werden:

Gehört zu der Gleichung

$$\varphi_2 - 2\frac{p}{\Sigma\rho_k}\cdot\varphi_1 + \frac{q}{\Sigma\rho_k}\cdot\varphi = 0$$

unter Voraussetzung eines von der Einheit unendlich wenig verschiedenen Grades von φ eine Abbildung mit Orthogonalkreis, so hat dieselbe Gleichung unter Voraussetzung des Grades 2 von φ ein ganzes rationales Integral; und umgekehrt hat letzterer Umstand den ersteren im Gefolge.

Hiebei ist, wie hier ausdrücklich erwähnt werden mag, stillschweigend vorausgesetzt, dass die Werthe der a_k, ρ_k und σ_k reell sind.

Man kann die Grössen a_k und ρ_k, also überhaupt $p(x)$ als gegeben ansehen und fragen, für welche Gestalt von g der behandelte Fall eintritt. Zu diesem Zweck empfiehlt es sich q in zwei Theile zu zerlegen, einen bekannten q_0 und einen unbekannten von der Form

$$-\frac{\Omega(x)}{\Pi(x-a_k)},$$

wo $\Omega(x)$ ein Polynom $(n-4)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet.[1] Die Gleichung verwandelt sich dann in

$$\varphi_2 - 2\frac{p}{\Sigma\rho_k}\varphi_1 + \frac{q_0}{\Sigma\rho_k}\varphi = \frac{\Omega}{\Pi(x-a_k)}\cdot\varphi,$$

und es handelt sich um die Ermittelung derjenigen (reellen) Polynome $\omega(x)$, für welche diese Gleichung eine ganze rationale Auflösung zweiten Grades zulässt. Besonders einfach gestaltet sich das Kriterium für den Fall, dass alle Polygonwinkel, also alle ρ_i untereinander gleich sind. Setzt man in diesem Falle

$$A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) = f(x),$$

wo A eine beliebige Constante bedeutet, so kann man die Differentialgleichung einfach so schreiben:

$$(f, \varphi)_2 = \omega.\varphi,^2$$

und man erkennt, dass die algebraische Aufgabe, auf welche unser Problem führt, in naher Verwandtschaft mit Untersuchungen von Herrn Hilbert[3] steht; für $n=4$ herrscht sogar völlige Übereinstimmung.

---

[1] Vergl. meine oben citirte Note.

[2] Vergl. meine o. a. Note am Schluss.

[3] Math. Ann., Bd. 28, S. 381 ff.

/32

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. BAND. I. und II. HEFT.

Jahrgang 1891. — Jänner und Februar.

(Mit 3 Tafeln und 8 Textfiguren.)

RECEIVED
JUL 6 1892

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

WIEN, 1891.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 1. und 2. Heftes 1891 des C. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

I. Sitzung vom 8. Jänner 1891: Übersicht 3

II. Sitzung vom 15. Jänner 1891: Übersicht 4

III. Sitzung vom 22. Jänner 1891: Übersicht 5

Kohn G., Über einige projective Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 6

König R., Bestimmung der Bahn des Kometen 1857 III. [Preis: 45 kr. = 90 Pfg.] 21

Mahler E., Die Berechnung der Jahrpunkte (Thekuphenrechnung) im Kalender der Juden. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] . . . 71

IV. Sitzung vom 5. Februar 1891: Übersicht 99

Obermayer A., v., Zur Erklärung einer mit der fortführenden Entladung der Elektricität verbundenen Anziehungserscheinung. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 100

V. Sitzung vom 19. Februar 1891: Übersicht 107

Klemenčič I., Über die Reflexion von Strahlen elektrischer Kraft an Schwefel und Metallplatten. (Mit 3 Textfiguren.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 109

Obermayer A., v., Untersuchungen über die Entladung der Elektricität aus Spitzen, in verschiedenen Gasen, bei verschiedenen Drucken. (Mit 2 Tafeln und 5 Textfiguren.) [Preis: 60 kr. = 1 RMk. 20 Pfg.] 127

Waelsch E., Zur Infinitesimalgeometrie der Strahlencongruenzen und Flächen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 60 kr. = 1 RMk. 20 Pfg.] 158

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 20 kr. = 4 RMk. 40 Pf.

2 147.1
132

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. BAND. III. HEFT.

Jahrgang 1891. — März.

(Mit 4 Textfiguren.)

RECEIVED
JUL 6 1892

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

WIEN, 1891.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 3. Heftes 1891 des C. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

VI. Sitzung vom 5. März 1891: Übersicht 223

Gegenbauer L., Zur Theorie der hypergeometrischen Reihe. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 225

Jäger G., Über die Abhängigkeit der Capillaritätsconstanten von der Temperatur und deren Bedeutung für die Theorie der Flüssigkeiten. (Mit 1 Textfigur.) Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 245

Mazelle E., Der tägliche Gang der Häufigkeit und Stärke der einzelnen Windrichtungen zu Triest. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 271

VII. Sitzung vom 12. März 1891: Übersicht 305

Oppenheim S., Bestimmung der Bahn des Planeten (290) Bruna. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg] 306

Waelsch E., Zur Construction der Polargruppen. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 315

Puluj J., Bestimmung des Coefficienten der Selbstinduction mit Hilfe des Elektrodynamometers und eines Inductors. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 327

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 05 kr. = 2 RMk. 10 Pf.

3

132

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. BAND. IV. HEFT.

Jahrgang 1891. — April.

(Mit 2 Tafeln und 2 Textfiguren.)

RECEIVED

JUL 6 1892

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

WIEN, 1891.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 4. Heftes 1891 des C. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

VIII. Sitzung vom 9. April 1891: Übersicht 349

Pfaundler L., Über eine verbesserte Methode, Wärmecapacitäten mittelst des elektrischen Stromes zu bestimmen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 352

Hann J., Studien über die Luftdruck- und Temperaturverhältnisse auf dem Sonnblickgipfel, nebst Bemerkungen über deren Bedeutung für die Theorie der Cyclonen und Anticyclonen. [Preis: 70 kr. = 1 RMk. 40 Pfg.] 367

Obermayer A., v., Über das Zerstäuben von Eisendraht durch den elektrischen Entladungsschlag. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 453

IX. Sitzung vom 16. April 1891: Übersicht 455

Weyr E., Über Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlechte Eins. (II. Mittheilung.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 457

X. Sitzung vom 23. April 1891: Übersicht 467

Adler G., Über den magnetischen Arbeitswerth von Substanzen veränderlicher Magnetisirungszahl, insbesondere von Eisen. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] . . . 469

Jäger G., Das Gesetz der Oberflächenspannung von Lösungen. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 493

Bidschof F., Bestimmung der Bahn des Kometen 1890 II. (Preis: 15 kr. = 30 Pfg.) 515

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 70 kr. = 3 RMk. 40 Pf.

4 199.1

132

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. BAND. V. HEFT.

Jahrgang 1891. — Mai.

(Mit 4 Tafeln und 5 Textfiguren.)

RECEIVED

JUL 6 1892

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

WIEN, 1891.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 5. Heftes 1891 des C. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

XI. Sitzung vom 8. Mai 1891: Übersicht 535

Löschardt F., Die neuesten Hypothesen über die Rotation des Planeten Venus. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 537

Pick G., Über das System der covarianten Strahlencomplexe zweier Flächen zweiter Ordnung. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 561

Waelsch E., Über eine geometrische Darstellung in der Theorie der binären Formen. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 574

XII. Sitzung vom 14. Mai 1891: Übersicht 586

Weyr E., Über Involutionen höheren Grades auf nichtrationalen Trägern. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 589

Exner F., Elektrochemische Untersuchungen. (I. Mittheilung.) (Mit 5 Textfiguren.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 607

Gegenbauer L., Zur Theorie der Näherungsbrüche. [Preis: 75 kr. = 1 RMk. 50 Pfg.] 635

Kerner v. Marilaun F., Die Änderung der Bodentemperatur mit der Exposition. (Mit 2 Tafeln.) [Preis: 70 kr. = 1 RMk. 40 Pfg.] 704

Lampa A., Über die Absorption des Lichtes in trüben Medien. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 730

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 60 kr. = 5 RMk. 20 Pf.

5 199.1
132.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. BAND. VI. und VII. HEFT.

Jahrgang 1891. — Juni und Juli.

(Mit 4 Textfiguren.)

RECEIVED
JUL 6 1891

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

WIEN, 1891.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 6. und 7. Heftes 1891 des C. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

XIII. Sitzung vom 4. Juni 1891: Übersicht 743

Gegenbauer L., Über die Ringfunctionen. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 745

Puluj J., Über die Wirkungen gleichgerichteter sinusartiger elektromotorischer Kräfte in einem Leiter mit Selbstinduction. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 767

XIV. Sitzung vom 11. Juni 1891: Übersicht 781

XV. Sitzung vom 18. Juni 1891: Übersicht 783

Markovits St., Experimente über die Reibung zwischen Öl und Luft. (Mit 1 Textfigur.) [Preis: 15 kr. = 30 Pf.] 785

XVI. Sitzung vom 2. Juli 1891: Übersicht 799

XVII. Sitzung vom 9. Juli 1891: Übersicht 801

Waelsch E., Über Formen fünfter Ordnung auf der cubischen Raumcurve. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 803

Vries, Jan de, Über räumliche Configurationen, welche sich aus den regelmässigen Polyedern herleiten lassen. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 822

Puschl C., Über das Verhalten gesättigter Dämpfe. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 843

Gegenbauer L., Note über das Legendre-Jacobi'sche Symbol. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 855

Kohn G., Zur Theorie der associirten Formen. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 865

XVIII. Sitzung vom 16. Juli 1891: Übersicht 894

Adler G., Über eine Bestimmungsmethode der Magnetisirungszahl fester Körper mittelst der Waage. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 897

Haitinger L., Über die Emissionsspectra Neodym- und Praseodymoxydes und über neodymhaltende Leuchtsteine.) (Mit 1 Textfigur.) (Vorläufige Mittheilung.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 914

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 60 kr. = 3 RMk. 20 Pf.

APR 10 1893

SITZUNGSBERICHTE

132

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. BAND. VIII. HEFT.

Jahrgang 1891. — October.

(Mit 1 Kartenskizze und 3 Textfiguren.)

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

WIEN, 1891.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 8. Heftes 1891 des C. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

XIX. Sitzung vom 8. October 1891: Übersicht 923

Luksch J., Veröffentlichungen der Commission für Erforschung des östlichen Mittelmeeres. (Vorläufiger Bericht über Lothungen und physikalische Beobachtungen im Sommer 1891.) (Mit 1 Kartenskizze.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] . . 927

XX. Sitzung vom 15. October 1891: Übersicht 936

Bidschof F., Bestimmung der Bahn des Planeten (279) Thule. [Preis: 50 = 1 RMk.] 937

XXI. Sitzung vom 22. October 1891: Übersicht 992

Puschl C., Über die inneren Kräfte von Flüssigkeiten und Gasen. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 994

Kohn G., Über die Resultate einer Covariante und einer Grundform. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 1013

Gegenbauer L., Über arithmetische Progressionen, in denen Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind. [Preis: 50 kr. = 1 RMk.] 1018

— Arithmetische Relationen. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] . . 1054

— Über den quadratischen Restcharakter. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 1072

Ruth J., Über einen neuen Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der klinogonalen Axonometrie. (Mit 3 Textfiguren 1088

Gmeiner J. A., Eine neue Darstellung des biquadratischen Charakters 1093

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 55 kr. = 3 RMk. 10 Pf.

APR 10 1893

SITZUNGSBERICHTE

132

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

C. BAND. IX. und X. HEFT.

Jahrgang 1891. — November und December.

(Mit 2 Tafeln und 7 Textfiguren.)

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

WIEN, 1891.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 9. und 10. Heftes November und December 1891 des C. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

XXII. Sitzung vom 5. November 1891: Übersicht 1103

Pitsch H., Über Achromasie. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 1105

Jäger G., Über die Verdampfungswärme. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 1122

Weiss E., Über die Berechnung einer Kometenbahn mit Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung. [Preis 35 kr. = 70 Pfg.] 1132

XXIII. Sitzung vom 12. November 1891: Übersicht 1151

XXIV. Sitzung vom 19. November 1891: Übersicht 1152

Liznar J., Eine Methode zur graphischen Darstellung der Richtungsänderungen der erdmagnetischen Kraft. (Mit 2 Tafeln und 1 Textfigur.) [Preis: 50 kr. = 1 RMk.] . . 1153

Stolz O., Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen. (Nachtrag.) [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] . . 1167

Jäger G., Zur Theorie der Dissociation der Gase. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 1182

XXV. Sitzung vom 3. December 1891: Übersicht 1193

Tumlirz O., Über die Unterkühlung von Flüssigkeiten. (Mit 2 Textfiguren.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 1197

Jäger G., Eine neue Methode, die Grösse der Molekeln zu finden. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 1233

Jaumann G., Notiz über eine Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit. (Mit 4 Textfiguren.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 1239

XXVI. Sitzung vom 10. December 1891: Übersicht 1244

XXVII. Sitzung vom 17. December 1891: Übersicht 1245

Hann J., Einige Resultate stündlicher meteorologischer Beobachtungen auf dem Gipfel des Fuji in Japan. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 1246

Seite

Holetschek J., Über den Kometen des Jahres 1689. [Preis: 50 kr. = 1 RMk.] 1266

Liznar J., Eine neue magnetische Aufnahme Österreichs. (III. Vorläufiger Bericht.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] . . 1320

Gmeiner J. A., Die Ergänzungssätze zum bicubischen Reciprocitätsgesetze. [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 1330

Mazelle E., Untersuchungen über den täglichen und jährlichen Gang der Windgeschwindigkeit zu Triest. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 1363

Pick G., Über die conforme Abbildung einer Halbebene auf ein unendlich benachbartes Kreispolygon. [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 1387

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 90 kr. = 5 RMk. 80 Pfg.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden vier gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

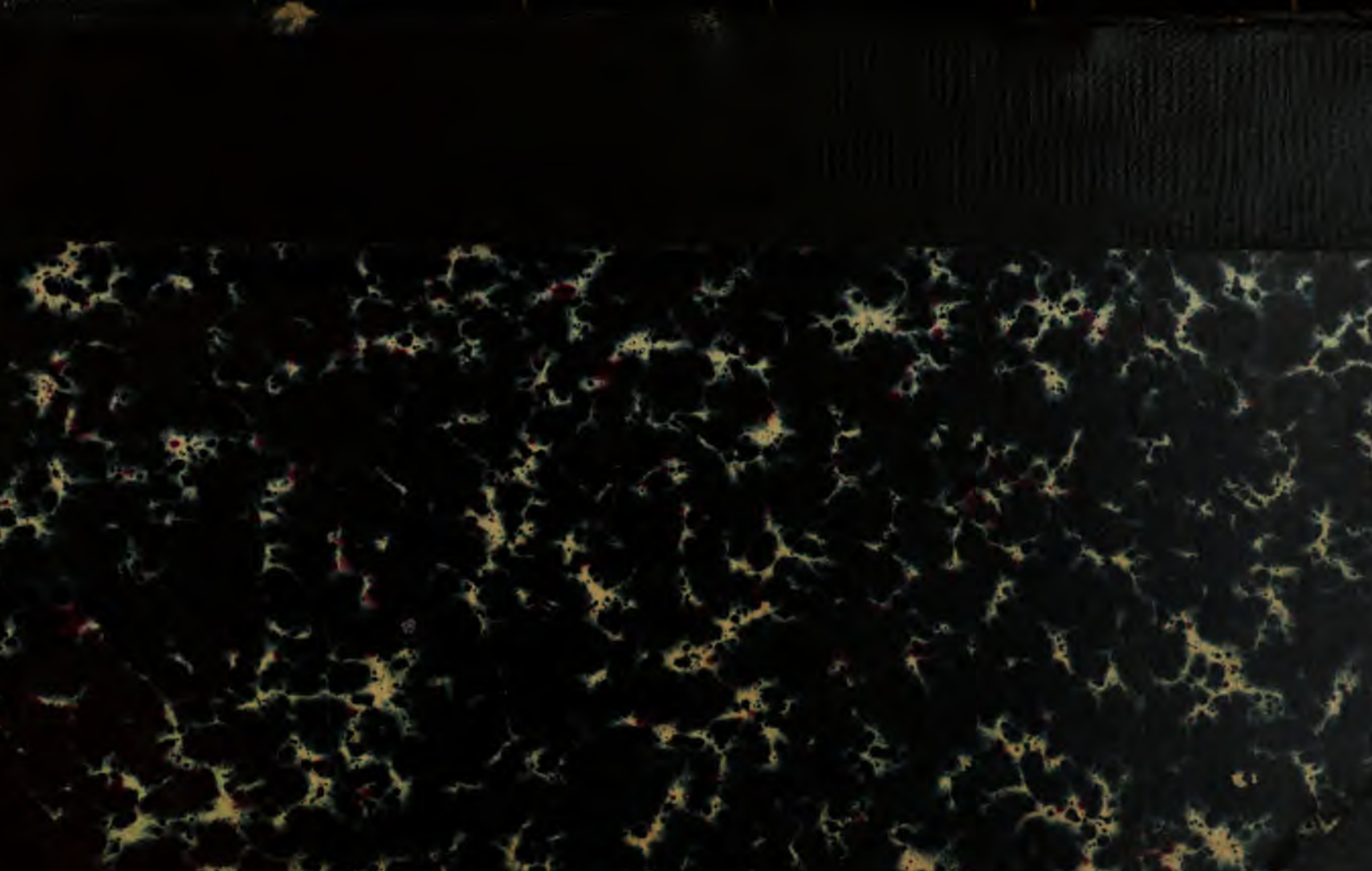
Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, I., Tuchlauben 10) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.

3 2044 093 294 833